

Concepciones sobre el proceso de estimación de medidas de futuros docentes de matemáticas

Trabajo de Grado Presentado Para Obtener El Título De
Licenciado en Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Diego Alejandro Jiménez Forero & Darly Maritza Melo Pineda
Noviembre 2015

Concepciones sobre el proceso de estimación de medidas de futuros docentes de matemáticas

El trabajo de grado está asociado a la línea Conceptos y Procesos de la Geometría Escolar que desarrolla el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría.

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Autores:

Diego Alejandro Jiménez Forero
C.C.: 1014250150 Cód.: 2011140030

Darly Maritza Melo Pineda
C.C.: 1019108391 Cód.: 2011140080

Asesora:

Leonor Camargo Uribe

Noviembre 2015

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Concepción sobre el proceso de estimación de medidas de futuros docentes de matemáticas.
Autor(es)	Jiménez Forero, Diego Alejandro; Melo Pineda, Darly Maritza
Director	Camargo Uribe, Leonor
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 104p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ESTIMACIÓN DE MEDIDA, CONCEPCIÓN, ENSEÑANZA DE LA ESTIMACIÓN, MEDICIÓN, APROXIMACIÓN.

2. Descripción
Trabajo de grado que se propone realizar un estudio sobre las concepciones de estimación de medida de futuros maestros de matemáticas de Colombia, dada la importancia de la enseñanza y aprendizaje de este proceso en las distintas ramas disciplinares de las matemáticas, que se enseñan en la escuela. Además, reflexionar sobre la necesidad de fundamentar tal concepción en estudios que han realizado distintos autores a lo largo de los años, dejando de lado, la concepción espontánea que tengan los futuros maestros sobre este proceso, la cual influye en su enseñanza.

3. Fuentes
Albarracín, L., Gorgorió, N., y Pizarro, N. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), <i>Memorias del XVIII Simposio Español de Investigación en Educación Matemática</i> . (pp. 523-532). Simposio llevado a cabo en Universidad de Salamanca, España.
Castillo, J., Castro, E., Molina, M., y Segovia, I. (2011). <i>Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie</i> . En Lupiañez, Jose Luis; Cañadas, María C.; Molina, Marta; Palarea, Mercedes; Maz, Alexander (Eds.), <i>Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011</i> (pp. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
Costa, B., y Porta, A. (1996). <i>La estimación, una forma importante de pensar en</i>

matemática. Viedma: Consejo provincial de educación.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.

National Council for Teachers of Mathematics. (2008). *Reference Point Strategy*. Estados Unidos: NCTM.

4. Contenidos

Este documento consta de cinco capítulos, precedidos por los objetivos del trabajo. En el primer capítulo se presenta una revisión documental sobre la estimación de medida, en distintos repositorios de documentos en investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el segundo capítulo se describe un proceso de construcción de una definición de estimación de medida, a través de las definiciones encontradas en la revisión documental del primer capítulo. En el tercer capítulo se encuentra un comentario crítico sobre el uso de las palabras estimación y estimación de medida, que tienen los documentos que rigen la educación colombiana. En el cuarto capítulo se describe el estudio empírico llevado a cabo, mostrando la metodología del estudio realizado y los resultados obtenidos. Por último, el quinto capítulo muestra las conclusiones generadas del estudio empírico, en función de los hallazgos y reflexiones realizadas, en los tres primeros capítulos.

5. Metodología

En primer lugar, se elaboró un estudio de algunos documentos existentes en la investigación acerca de la estimación o estimación de medidas, para tener una fundamentación de lo que se considera este proceso en el campo de la Educación Matemática. Seguido, se construyó una definición de estimación de medida a partir de las definiciones encontradas de los documentos y de clasificarlas de acuerdo a las características generales que cada definición develaba. Se prosiguió haciendo un comentario crítico a los documentos curriculares nacionales, en relación con el uso de la palabra estimación, para mostrar las coherencias e incoherencias que tienen estos textos al considerar la estimación como parte esencial de la enseñanza de las matemáticas. Luego, del curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría del semestre 2015-2, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se escogieron 26 maestros en formación, de los cuales 22 participaron en el estudio empírico, para determinar cuál era su concepción de estimación de medidas. Esto a través de la implementación de un cuestionario de 8 puntos, como herramienta diseñada para la recolección de datos. Se hizo un proceso analítico, para el estudio de las respuestas obtenidas en la aplicación del cuestionario.

6. Conclusiones

Del estudio empírico llevado a cabo, se concluye que la concepción de estimación de medida de los maestros en formación de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, es pobre en sentido y significado. Se afirma esto por las pocas características de la estimación que develan en sus definiciones, en sus juicios y en las actividades de estimación de medida que proponen.

La gran mayoría asimila el término con un proceso matemático, pero se confunde con el proceso de aproximar o medir. Se proponen las siguientes sugerencias para que los futuros docentes de matemáticas amplíen su concepción de estimación de medida:

1. Que el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, conceda espacios en los que los estudiantes puedan conocer las investigaciones acerca de la estimación de medida y profundicen en los rasgos característicos de esta.
2. Que los maestros en formación tengan conocimientos de las distintas definiciones de estimación y estimación de medida, desarrollen un proceso para analizar y categorizar estas definiciones, y puedan construir o adoptar una definición de estimación de medida.
3. Que las orientaciones curriculares sean revisadas en función del uso de la palabra estimación, puesto que resaltan la importancia de este proceso en la Educación Matemática, pero no hay claridad de qué definiciones se consideran para la enseñanza de la estimación, ni qué tareas son pertinentes para su aprendizaje.

Elaborado por:	Jiménez Forero, Diego Alejandro; Melo Pineda, Darly Maritza
Revisado por:	Camargo Uribe, Leonor

Fecha de elaboración del Resumen:	05	11	2015
--	----	----	------

CONTENIDO

Introducción	1
Objetivos	4
Objetivo General.....	4
Objetivos específicos	4
1. Uso de las expresiones “estimación” y “estimación de medida” en literatura de Educación Matemática	5
1.1. Introducción	5
1.2. Fuentes consultadas	5
1.3. Documentos revisados	6
1.4. Procedimiento de revisión de la bibliografía	9
1.5. Hallazgos de la revisión bibliográfica	9
1.5.1. Definiciones de estimación	9
1.5.2. Tipologías de estimación.....	11
1.5.3. Ejemplos de actividades de estimación.....	12
1.5.4. Aspectos didácticos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estimación.....	15
1.5.5. Técnicas o estrategias de estimación.....	22
1.6. Síntesis de la revisión de la literatura	26
2. Análisis de las definiciones de estimación de medida y construcción de una definición propia	27
2.1. Comparación de las definiciones de estimación	27
2.2. Resultados de la comparación.....	29
2.3. Argumentación para llegar a una definición de estimación de medidas a partir de la comparación.....	32
3. Comentario crítico al uso de las expresiones “estimación” y “estimación de medida” en los documentos curriculares nacionales	34
3.1 Análisis de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) en relación al uso del concepto de estimación.....	34
3.2 Análisis crítico del uso de la palabra estimación en lineamientos curriculares de matemáticas (1998).....	39
3.3. Síntesis de la revisión realizada a estándares y lineamientos	43
4. Estudio empírico de concepción de estimación de medida de docentes de matemáticas en formación	45
4.1. Objetivo del estudio	45

4.2. Metodología	45
4.2.1. Tipo de estudio	46
4.2.2. Participantes en el estudio	46
4.2.3. Diseño del cuestionario	46
4.2.4. Cuestionario	48
4.2.5. Aplicación del Cuestionario	51
4.2.6. Descripción del proceso analítico	51
4.3. Resultados del análisis	54
4.3.1. Bloque 1: Puntos 1 y 2	54
4.3.2. Bloque 2: Puntos 3, 4, 6 y 7	57
4.3.3. Bloque 3: Punto 5	72
4.3.4. Bloque 4: Punto 8	73
4.3.5. Síntesis de la concepción de estimación de medida	74
5. Conclusiones.....	77
5.1. Conclusiones del estudio empírico	77
5.2. Vías para la ampliación de la concepción de estimación de medidas	78
5.2.1. Estudio del campo de investigación sobre estimación de medida	78
5.2.2. Construcción de una definición informada de estimación de medida.....	78
5.2.3. Orientaciones curriculares para la escuela	79
Bibliografía.....	80
Anexos.....	82

Lista de tablas

Tabla 1.1. Revisión bibliográfica.	6
Tabla 1.2. Documentos encontrados.	7
Tabla 1.3. Definiciones de estimación.	10
Tabla 2.1. Listado de definiciones de estimación.....	27
Tabla 2.2. Caracterización de las definiciones de estimación.	29
Tabla 4.1. Puntos del Bloque 1.....	48
Tabla 4.2. Puntos del Bloque 2.....	48
Tabla 4.3. Puntos del Bloque 3.....	50
Tabla 4.4. Puntos del Bloque 4.....	50
Tabla 4.5. Herramienta analítica Bloque 1.....	52
Tabla 4.6. Herramienta analítica del Bloque 2 Ítem (ii).....	53
Tabla 4.7. Análisis Bloque 1.	54
Tabla 4.8. Análisis del Ítem (ii) en el tercer y cuarto punto.	59
Tabla 4.9. Análisis del ítem (ii) en el sexto y séptimo punto.	64
Tabla 4.10. Análisis del ítem (iii) y (iv) en el tercer y cuarto punto.	68
Tabla 4.11. Análisis del ítem (iii) y (iv) en el sexto y séptimo punto.	70

Lista de figuras

Figura 1.1. Cantidad de documentos clasificados.	26
Figura 2.1. Característica (i): Tipo de estimación.	30
Figura 2.2. Característica (ii): Acción mental.	30
Figura 2.3. Característica (iii): Tipo de resultados.	31
Figura 2.4. Característica (iv): Uso de instrumentos.	31
Figura 4.1. Diagrama de árbol de la sección 4.3.2.1.	75
Figura 4.2. Diagrama de árbol de la sección 4.3.2.2.	76

Introducción

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006), se proclama que:

“La estimación y la aproximación son dos procesos presentes en los diferentes pensamientos. Ellas son elementos fundamentales en la construcción de los conceptos, procesos y procedimientos relativos a cada pensamiento, principalmente al numérico, al métrico y al aleatorio; llaman la atención sobre el carácter inexacto e incompleto de muchos de los resultados de las matemáticas y de otras ciencias, y ayudan a organizar formas de pensamiento flexibles asociadas a contextos particulares”. (p. 70).

Se señala que el proceso de estimación genera un vínculo entre el pensamiento espacial y el pensamiento métrico, ya que algunas propiedades de los objetos geométricos están dadas a partir de sus medidas y las relaciones entre ellas. Se menciona que “el trabajo [de estimación] con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro”. (p. 62)

Los Lineamientos Curriculares propuestos por el MEN (1998) también hacen declaraciones sobre la estimación:

“La estimación es una actividad matemática muy poderosa para usar tanto en la resolución de problemas como en la comprobación de lo razonable de los resultados. Incluye tomar decisiones sobre si la respuesta del cálculo es razonable o no, si un número dado es mayor o menor que la respuesta exacta, si la respuesta es mayor o menor que un número dado como referencia y si una estimación está en el correcto orden de magnitud.”(p.35).

Se argumenta que la estimación está vinculada al pensamiento numérico y al pensamiento métrico. Además, se establece que la estimación se ejerce con mayor sentido cuando se aborda en problemas vinculados al proceso de modelación, es decir, cuando se le presenta a

un estudiante una situación cotidiana y él tiene que dar un resultado a partir de sus procesos mentales, sin el uso de calculadoras.

Los planteamientos anteriormente mencionados nos llevan a considerar pertinente e interesante la realización de un trabajo de grado acerca de la estimación de medidas. Nos enfocamos en este asunto por ser de interés para el grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría.

En el presente documento presentamos un estudio de indagación de la concepción de la estimación de medida como proceso matemático, que tienen los maestros en formación de matemáticas de la Licenciatura de Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

En el capítulo uno, hacemos un rastreo bibliográfico, mostrando así la revisión de la literatura en Educación Matemática acerca del tema, los hallazgos encontrados en estos textos y que consideramos pertinentes en el proceso de indagación.

En la literatura de investigación encontramos definiciones de “estimación” y “estimación de medida”, las cuales fueron sometidas a un proceso analítico. Por lo cual, en el capítulo dos se presenta este proceso y la construcción de una nueva definición, a partir de los resultados obtenidos del análisis de las definiciones.

En el capítulo tres, también se encuentran las menciones que hacen los documentos curriculares nacionales, sobre la estimación y la estimación de medida, develando definiciones, propuestas de enseñanza y argumentos sobre la importancia de la enseñanza y aprendizaje de la estimación de medida. También, este trabajo muestra qué consideraciones hacemos sobre estas menciones, sabiendo que la educación colombiana está regida por estos documentos.

Además, en el capítulo cuatro está plasmada la descripción del estudio empírico sobre la concepción de la estimación de medida de los futuros docentes de matemáticas. Mostramos el objeto de estudio, la metodología seguida, el proceso para recolectar datos de la

población en relación con el estudio, los procesos analíticos que llevamos a cabo para el estudio y los resultados del análisis de los datos.

Finalizamos este documento presentando las conclusiones y discusiones generadas del estudio de indagación, resaltando la importancia de que un docente de matemáticas tenga una concepción fundamentada de la estimación de medidas.

Objetivos

Objetivo General

Realizar un acercamiento a la concepción de estimación de medida como proceso matemático, que tienen los docentes de matemáticas en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, a partir del significado que le dan al término y de los criterios con los que juzgan posibles tareas de estimación o el tipo de tareas de estimación que proponen.

Objetivos específicos

- Realizar un rastreo de documentos de investigación en Educación Matemática y documentos curriculares nacionales e internacionales, haciendo énfasis en los documentos colombianos, para que nos brinden información sobre qué se entiende por una estimación de medida y qué importancia le dan en la escuela.
- Crear o adoptar una definición de estimación de medida, desde el análisis de las definiciones encontradas en la literatura en Educación Matemática.
- Analizar las interpretaciones de la estimación y estimación de medida que se dan en los documentos curriculares nacionales, a partir del uso de las palabras “estimación” y “estimación de medida” encontrado en los estos textos.
- Establecer una comparación de los significados de estimación de medida, extraídos de diferentes fuentes bibliográficas, para establecer distintas categorías sobre la concepción de estimación de medida con la cual contrastar las respuestas de docentes en formación a la pregunta sobre ¿Qué entienden por estimación de medida?

1. Uso de las expresiones “estimación” y “estimación de medida” en literatura de Educación Matemática

1.1. Introducción

Para comenzar con el trabajo de indagación sobre las concepciones de estimación que tienen los docentes de matemáticas en formación, es necesario tener una fundamentación sobre lo que se considera estimación y estimación de medida en el campo de la Educación Matemática. Dicha fundamentación involucra saber qué definiciones de estimación se proponen, cuáles son los distintos tipos de estimación que se sugieren, cuál es la utilidad que se le reconoce a la estimación en diferentes áreas de las matemáticas o en otras áreas de las ciencias y cuál es la relevancia que se le otorga a la estimación de medida en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La literatura a nivel internacional, en Educación Matemática, proporciona gran cantidad de información sobre la estimación. Este capítulo, contiene una descripción de la revisión documental realizada al respecto y una explicación sobre cómo se organizó esta información para fundamentar el estudio sobre las concepciones de estimación de medida que tienen maestros en formación y para adoptar la definición a utilizar en el trabajo de grado.

Inicialmente se presenta el listado de fuentes consultadas, seguido de otro listado que contiene los documentos encontrados en dichas fuentes con su respectiva tipología, año, autor y título. Luego, se presenta una descripción de los principales hallazgos encontrados en los documentos consultados.

1.2. Fuentes consultadas

Se realizó una revisión bibliográfica en los sitios digitales que se reportan en la Tabla 1.1., filtrando la información mediante las palabras claves: “estimación”, “estimación de

medida” y “estimar”. Se acotó la búsqueda de fuentes entre los años 2005 y 2015. Aunque tenemos conocimiento de la existencia de más sitios, donde hay literatura sobre la Educación Matemática, revisamos aquellos que son de acceso libre.

Tabla 1.1. Revisión bibliográfica.

Tipo de documento	Entidad bibliográfica
Repositorios académicos digitales	- Google Académico. - Repositorio Funes.
Artículos en revistas	- Revista SUMA. - Revista Números.
Documentos curriculares nacionales en versión digital	- Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. - Lineamientos Curriculares de Matemáticas.
Documentos curriculares internacionales en versión digitales	- Estándares curriculares del NCTM - Orientaciones curriculares sobre el tratamiento de la estimación en Rio Negro, (Argentina)
Memorias de eventos académicos	- International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).

1.3. Documentos revisados

En las fuentes consultadas que se presentan en la tabla 1.1 encontramos la documentación referida a “estimación”, “estimación de medida” y “estimar” que se encuentra en la tabla 1.2. Aunque el periodo a consultar era 2005 – 2015, encontramos otros documentos de diferentes años, que están referenciados en el documento D1. La búsqueda de documentos se dirigió, entre la parafernalia de documentos disponibles, a aquellos en los que se incluyeran ideas sobre la estimación o la estimación de medida. Se enumeraron los documentos para facilitar la referencia de ellos más adelante; para ello, adoptamos la convención usada en la tabla para indicar cada documento con “Dx” refiriéndonos al documento número x.

Tabla 1.2. Documentos encontrados.

Texto No.	Documento	Autores	Año	Título
D1	Memorias del XVIII <i>Simposio Español de Investigación en Educación Matemática</i> .	Pizarro N., Gorgorió N. y Albarracín L.	2014	Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria
D2	Artículo de la <i>Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa</i> .	Albarracín L. y Gorgorió N.	2013	Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto
D3	Artículo Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática.	Castillo J., Segovia I., Castro E. y Molina M.	2011	Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: Longitud y superficie
D4	Capítulo V del libro <i>Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria</i> .	Rico, L., Castro E., Castro E., Coriat M. y Segovia I.	1997	Investigación, Diseño y Desarrollo Curricular.
D5	Artículo de la <i>Revista Suma</i> .	Feito M. y Martínez, J.	2011	Medidas de altura: trigonometría con cuerda, metro y móvil
D6	Artículo de la <i>Revista Números</i> .	Núñez J.	2005	Sobre la estimación en la enseñanza de las matemáticas y la cubicación de maderas como situación didáctica
D7	Documento curricular en educación de Río Negro, Argentina	Porta, A. y Costa B.	1996	La estimación, una forma importante de pensar en matemática
D8	Documento de investigación de la <i>British Society for Research into Learning Mathematics</i>	Pike, C. y Forrester, M.	1996	The role of number sense in children's estimating ability
D9	Documento de investigación de la <i>National Council for Teachers of Mathematics</i>	NCTM	2008	Reference Point Strategy
D10	Artículo de la <i>Journal for Research in Mathematics Education</i>	Pike, C. y Forrester, M.	1998	Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation analytic Approach
D11	Documento Curricular Nacional de Colombia	MEN	2006	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

D12	Capítulo IX <i>La investigación en estimación en cálculo del libro Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico.</i>	Segovia I., y Castro C.	2007	El concepto de estimación y definiciones conceptuales afine
D13	Memorias del VII <i>Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática</i>	Callís J., y Fiol M.	2003	Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal
D14	Documento Curricular nacional de Colombia	MEN	1998	Lineamientos Curriculares de Matemáticas
D15	Memorias de la XXXII Conferencia del <i>International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)</i>	Cortina J. y Zuñiga C.	2008	Ratio-like comparisons as an alternative to equal-partitioning in supporting initial learning of fractions.
D16	Memorias de la XXX Conferencia del <i>International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)</i>	Markovits Z., Rosenfeld S. y Eylon B.	2006	Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers.
D17	Memorias de la XXXIII Conferencia del <i>International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)</i>	Papadopoulos I. y Dagdilelis V.	2009	Estimating areas and verifying calculations in the traditional and computational environment
D18	Memorias de la XXXVII Conferencia del <i>International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)</i>	Williamson J.	2013	Young children's cognitive representations of number and their number line estimations.
D19	Memorias de la XXIX Conferencia del <i>International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)</i>	Volkova, T.	2005	Characterizing middle school students' thinking in estimation
D20	Memorias de la XXXVI Conferencia del <i>International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)</i>	Gorgorió N. y Albarracín L.	2012	On strategies for solving inconceivable magnitude estimation problems.

En esta revisión documental pudimos esclarecer que sí hay trabajos investigativos y curriculares referentes a la estimación, incluso en los documentos curriculares que rigen la educación en Colombia. Además evidenciamos que algunos autores, como Segovia, Pike y Forrester, llevan más de dos décadas realizando investigaciones sobre la estimación, por lo

que se puede inferir que este tema ha trascendido a través de los años y ha llamado la atención de investigadores recientes como Luis Albarracín y Núria Gorgorió.

Una característica reconocible de los títulos de los documentos en función a la búsqueda en los sitios, es que algunos de ellos no son explícitos en indicar que el concepto de estimación esté tratado, o sea central en las ideas que se desarrollan. Por ejemplo, aunque en los documentos D5 y D8 el título no sugiere que tenga que ver con estimación, la búsqueda a partir de palabras claves nos sirvió para identificarlos.

1.4. Procedimiento de revisión de la bibliografía

Una lectura cuidadosa de cada uno de los documentos nos permitió identificar en ellos información del mismo tipo. En discusiones del equipo de trabajo (Jiménez D., Melo D. y Camargo L.), decidimos organizar la información en los siguientes aspectos:

1. Las definiciones de estimación que se proponen.
2. Los tipos de estimación que se sugieren.
3. Ejemplos de actividades de estimación.
4. Aspectos didácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de la estimación.
5. Estrategias de estimación.

Esta información se presenta en la sección 1.5. Cabe aclarar, que varios documentos proporcionan más de un aporte en los cinco componentes.

1.5. Hallazgos de la revisión bibliográfica

1.5.1. Definiciones de estimación

En este aspecto se contemplan las definiciones de estimación, estimación de cálculos y estimación de medida, encontradas en los documentos. Presentamos las definiciones en la Tabla 1.3. En ella se incluye en qué documento fue encontrada, cuál es la definición sugerida y quién es el autor de la definición.

Tabla 1.3. Definiciones de estimación.

Documentos		Definiciones	Autores
1	D1	Un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos.	Pizarro N., Gorgorió N. y Albarracín L.
2	D1	Juicio para corroborar si el cálculo de una operación o medición es razonable o para valorar una variedad de medidas, en situaciones en que sea difícil o incómodo medir.	Pizarro N., Gorgorió N. y Albarracín L.
3	D1	Habilidad para hacer una conjetura en cuanto al valor de la distancia, el costo, el tamaño, etc. o cálculo aritmético.	Pizarro N., Gorgorió N. y Albarracín L.
4	D1 D2 D3 D7 D12	Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite.	<ul style="list-style-type: none"> • Pizarro N., Gorgorió N. y Albarracín L. • Castillo J., Segovia I., Castro E. y Molina M. • Porta A. y Costa B.
5	D1	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y la unidad correspondiente a una magnitud discreta o continua, por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar	Pizarro N., Gorgorió N. y Albarracín L.
6	D4	Una competencia matemática donde existen procesos de conteo, trabajar con números aproximados, cálculos mentales y composición y descomposición de cantidades.	Rico L., Castro E., Castro E., Coriat, M. y Segovia, I.
7	D5	La estimación es el cálculo de una magnitud a partir de datos que no son exactos.	Feito, M., Martínez, J.
8	D8	Habilidad cognitiva influenciada en gran parte por el sentido numérico que tenga el individuo y que también es adecuada dentro de la actividad social enmarcada en el salón de clases.	Pike, C. y Forrester, M.
9	D10	Proceso cognitivo que involucra la descomposición y composición de un objeto matemático o físico, en conjunto con la formación y comparación del dominio específico de las representaciones mentales como punto de referencia.	Pike, C. y Forrester, M.
10	D14	Actividad matemática muy poderosa para usar tanto en la resolución de problemas como en la comprobación de lo razonable de los resultados. Incluye tomar decisiones sobre si la respuesta del cálculo es razonable o no, si un número dado es mayor o menor que la respuesta exacta, si la respuesta es mayor o menor que un número dado como referencia y si una estimación está en el correcto orden de magnitud.	MEN
11	D14	Una adivinanza educada visualmente, que generalmente se hace en el contexto del número de objetos de una colección, del resultado de un cálculo numérico o de la medida de un objeto	MEN
12	D14	Proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Es un proceso mental, aunque frecuentemente	MEN

Como se puede ver, encontramos 12 definiciones; cabe resaltar que en más de un texto trabajaban con definiciones ya propuestas. Se destacan autores como, Lluís Albarracín, Pike, C. y Forrester, M por su trabajo consecutivo acerca de la estimación.

De las definiciones mencionadas anteriormente, se resaltan características fundamentales, las cuales se analizan en detalle en el capítulo 2. Dichas características son:

- El tipo de estimación al que se alude.
- A qué clase de acción mental hace referencia: si hace referencia a un proceso, una habilidad o un juicio de valor.
- Al tipo de resultado esperado (valor, valor aproximado, rango de valores, etc.)
- A la inclusión o no, de indicaciones sobre el uso de herramientas de medida y de qué tipo.

1.5.2. Tipologías de estimación

En este aspecto se contemplan las clasificaciones que presentan los distintos autores sobre tipos de estimación.

Texto D2:

Se consideran tres tipos de estimación:

- La numerosidad.
- La estimación computacional.
- La estimación de medidas.

Texto D8:

- Estimación de cálculos.
- Estimación de medidas.

Texto D12:

Dos tipos de estimación:

- a. Estimación en cálculo; referido a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados.
- b. Estimación en medida; referido a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida.

A partir de la literatura consultada, observamos que hay mayor énfasis en la estimación numérica, siendo muy pocos los textos que aluden explícitamente a la estimación de medida.

1.5.3. Ejemplos de actividades de estimación

En este aspecto se contemplan los ejemplos de actividades de estimación de medida, encontrados en algunos documentos.

Texto D2:

En D2, las actividades de estimación se centran en presuponer un valor relacionado con situaciones cotidianas de una persona. Los enunciados que se proponen son como los siguientes:

“Decimos que realizamos una estimación cuando pretendemos responder a preguntas como:

- ¿Cuánto tiempo tardaré en llegar a la parada del bus?
- ¿Cuántos botes de pintura de 5 kg necesito para pintar el comedor entero?
- ¿Cuántas cucharadas soperas de aceite son las necesarias para cubrir los 30 gramos que pone en la receta?

Los teléfonos móviles sirven para una barbaridad de cosas (ver fotos o vídeos, escuchar música, jugar...) pero la gente todavía los utiliza para comunicarse, chatear, llamar y enviar mensajes. Nosotros no pensamos mucho en ello, pero es necesaria una gran red de telecomunicaciones para permitir estos servicios. En esta

situación, una buena pregunta es: ¿Cuántos mensajes SMS enviamos en un día entre todos los catalanes?”

Texto D3:

En D3, las actividades de estimación que se proponen implican que la persona proponga un valor aproximado de una cantidad. Algunos ejemplos de enunciados son:

- Estimación de cantidades de longitud:
 1. ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?
 2. ¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo?
 3. ¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor?

- Estimación de cantidades de superficie:
 1. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
 2. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?
 3. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?

Texto D5:

En D5, los autores proponen una actividad que consiste en estimar la altura de un edificio con cuatro herramientas:

- Una cuerda que mida aproximadamente 1 metro.
- Un metro de cinta metálica de 5 o 8 metros.
- Un goniómetro.
- Un celular con cámara.

Explican que mediante aproximaciones, mediciones directas y la modelación de situaciones donde se usen proporciones y conceptos de trigonometría, se puede estimar la altura del edificio.

Texto D6:

El documento expone una situación de comercio de maderas que se puede presentar a los estudiantes. Como el cobro por tronco tajo se basa en su volumen que está determinado por la superficie de su base y su altura, es necesario estimar la superficie del tajo, ya que un árbol no tiene un tronco cilíndrico perfecto. Aunque se puede modelar la superficie con una circunferencia, siempre quedarán grumos de superficie que serán significativos en el volumen del tronco.

Texto D15:

En D15, para trabajar con fracciones, los autores proponen un ejercicio de estimación. En este, se da la condición de que una caja de leche puede llenar 3 vasos de plástico, 5 de vidrio y 10 de papel; luego se da la instrucción de estimar el nivel de la leche en la caja luego de llenar distintos vasos.

Texto D16:

En D16, un estudio sobre la cognición visual, lleva a los autores a trabajar la estimación como un proceso visual. Sugieren la siguiente actividad: Mostrar 3 figuras compuestas por puntos (una espiral, un cuadrado y otra con puntos aleatorios) por un corto lapso de tiempo y preguntar cuántos puntos hay en cada figura.

Texto D18:

En D18, los autores proponen como ejercicios de estimación:

- Estimar la cantidad de dulces en un recipiente transparente, sin la necesidad de sacarlos y contarlos.
- Dado un número, posicionarlo en una recta numérica que tiene una escala de medida dada. En este problema no se muestra la unidad de medida, con el fin de que exista un trabajo de estimación, más no de medición o graficación de puntos.

- De manera recíproca que el anterior problema, se da un punto en la recta y un punto cercano a éste con un número como coordenada. La instrucción consiste en asignar un número a dicho punto.

Texto D20:

En D20, los autores admiten el concepto de magnitud inconcebible, que es una magnitud que no se puede estimar perceptivamente o que su valor es difícil de interpretar. Para ello formulan distintos problemas y situaciones de estimación de magnitudes inconcebibles:

- La cantidad de escombros, producidos por la nivelación de la tierra en el sitio de construcción de un edificio.
- El número de carros que pasan por un lugar determinado en una autopista, en un día.
- El número de árboles en un bosque.
- ¿Cuántos boletos podríamos vender en un (entradas limitadas) concierto en el patio del colegio escuela?
- ¿Cuántas personas hay en una manifestación?
- ¿Cuántos mensajes SMS envían los catalanes uno al otro en un día?
- ¿Cuántas gotas de agua se necesitan para llenar una cubeta?
- ¿Cuántos vasos de agua se necesitan para llenar una piscina?
- ¿Cuántas monedas de un euro caben en una caja fuerte con un volumen de un metro cúbico?

1.5.4. Aspectos didácticos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estimación

En este aspecto se contemplan argumentos encontrados en los documentos sobre la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de la estimación de cálculos y de medidas; su relevancia para el desarrollo de habilidades cognitivas; el aprendizaje de otros conceptos y procesos matemáticos; su importancia para el tratamiento en escuelas filosóficas como la fenomenología; el trabajo que tiene en otras áreas de la ciencia; sus implicaciones de acuerdo a la edad de la persona; las diferencias con otros procesos con el cual se confunde;

los componentes del proceso de estimar; estadios de desarrollo de la estimación; su incidencia en los procesos educativos nacionales y las posibles dificultades de los estudiantes cuando trabajan problemas de estimación.

Texto D1:

Los autores contestan la pregunta ¿Por qué es necesario que se desarrolle la estimación en la escuela? Exponen que, según Inskip, Cockcroft, Hogan y Brezinski (citados por Albarracín, Gorgorió y Pizarro. 2014), la estimación desarrolla habilidades perceptivas, ayuda a que los estudiantes reconozcan las unidades de medida y facilita la comprensión de cuáles son las herramientas necesarias para las mediciones. Según Callís y Fiol (citados por Albarracín, Gorgorió y Pizarro. 2014), la estimación aporta a la intuición métrica como estadio del máximo nivel de evolución y dominio matemático. Además, Boulton-Lewis, Wils, & Mutch, (citados por Albarracín, Gorgorió y Pizarro. 2014) argumentan que al trabajar la estimación en los primeros años de la escuela, también se desarrolla componentes de enumeración, cantidad y pensamiento tridimensional.

Texto D2:

En este texto se hace referencia a las dificultades que se pueden presentar a los estudiantes a la hora de estimar. Entre las causas de tales dificultades se señalan la falta de trabajo directo en el aula sobre los procesos de estimación y de modelación que se deberían introducir al tratar problemas de estimación.

Texto D6:

Este documento señala la relevancia de la estimación en la enseñanza de las matemáticas, puesto que incide en la fenomenología de los sistemas numéricos, medida de magnitudes, probabilidad y geometría. Esto debido a que en el terreno de lo cotidiano, son múltiples las situaciones que obligan a las personas a recurrir a las estimaciones.

Texto D7:

Los autores presentan cuatro razones para incorporar la estimación en la enseñanza de las matemáticas:

1. Evitar que los estudiantes usen indiscriminadamente sus conocimientos parciales en cualquier tipo de situación, dejando que ellos identifiquen la potencialidad y flexibilidad del proceso de estimar, en diversas situaciones que acepten vías de actuación diferentes.
2. La enseñanza de las matemáticas en la escuela debe incorporar la noción de que las ciencias contemporáneas, si bien buscan conjeturas correctas y usar un lenguaje preciso, una posibilidad de llegar a dichos fines es a través de estimaciones, aproximaciones y resultados probables.
3. El estudiante, al asimilar la estimación como proceso mental de alto nivel, desarrolla su razonamiento; es decir, se convierte en un ser crítico decidiendo, ante una problemática, si la estimación es buena o no.
4. La estimación tiene validez interdisciplinaria, no solo por su aplicabilidad en distintos fenómenos de la realidad, sino porque su estructura lógica es base de otras estrategias generales en otras áreas curriculares.

Texto D8:

Los autores relacionan la estimación como parte del sentido numérico. Particularmente, la edad de una persona influye en su sentido numérico. Para el desarrollo de este, se definen tres comprensiones:

1. Cálculo mental.
2. Entendimiento de la magnitud de un número relativo.
3. Entendimiento de las relaciones de los números.

La segunda y la tercera están involucradas fuertemente con la habilidad de estimar medidas. Puesto que el tratamiento de las tres varía de acuerdo a la edad de la persona, deben existir otros factores que intervengan potentemente en la estimación de medidas.

Texto D10:

Los autores declaran que la estimación precede a la medición, por lo cual estimar no es lo mismo que medir. A pesar de que son dos procesos diferentes, guardan una relación secuencial, es decir, la estimación es algo hipotético con imprecisiones e inexactitudes y la medición hace referencia a lo actual y real, con precisiones y exactitudes.

Texto D11:

Este documento curricular nacional describe cinco procesos de la actividad matemática, y solo el proceso de modelación hace referencia a la estimación. El Ministerio de Educación Nacional (2006) establece que un buen modelo mental le permitirá al estudiante estimar una solución aproximada o reconocer si una solución es plausible y significativa.

Además, el MEN proclama el desarrollo de cinco pensamientos matemáticos en la educación colombiana. Establece cómo se desarrollan estos pensamientos, bajo qué procesos y qué conceptos matemáticos; entre ellos, hacen mención de la estimación los siguientes pensamientos.

- **El pensamiento numérico y los sistemas numéricos:** Este pensamiento se desarrolla, en parte, con procesos curriculares y la organización de actividades que se centran en la comprensión del uso de la estimación entre otros conceptos y procedimientos.
- **El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas:** Este pensamiento se desarrolla en el estudiante con el fin de que él tenga una comprensión general sobre las magnitudes y las cantidades; además de usar la medición y el uso flexible de las medidas en diferentes contextos. Por lo tanto, el MEN (2006) dice que la estimación de las medidas de las magnitudes, promueve dicha finalidad. También, el MEN (2006) concibe la estimación como un puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y la vida cotidiana, en situaciones en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta. Por último, expone la importancia de integrar la estimación con otros procesos matemáticos como el truncamiento y el

redondeo numérico, el tratamiento del error, la valoración de cifras significativas y el uso de técnicas de encuadramiento.

- **El pensamiento aleatorio y sistemas de datos:** La comprensión de lo que es el azar en eventos probabilísticos inicia cuando la persona, de manera intuitiva, trata de estimar las posibilidades de que ocurra un evento en situaciones donde el azar es dominante.
- **El Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos:** El MEN (2006) establece que el desarrollo de este pensamiento, debe atender el estudio de las actividades matemáticas vinculadas a los procesos infinitos. Señala que es oportuno incorporar en grados tempranos a los estudiantes, técnicas y métodos de estimación y aproximación, con el fin de articular la habilidad de buscar soluciones no exactas, de intervalos de valores aceptables, de problemas de estimación y de posibles valores de medidas de longitudes, áreas y volúmenes. Con estos argumentos, el MEN (2006) considera a la estimación como núcleo conceptual importante del pensamiento numérico.

Texto D12:

Los autores de este documento conciben que el concepto general de la estimación reside en:

1. Valorar una cantidad o el resultado de una operación aritmética.
2. El sujeto que hace la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.
3. La valoración que se realiza por lo general es de forma mental.
4. Hacerlo con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles.
5. El valor asignado no es exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones.
6. El valor asignado admite distintas aproximaciones, dependiendo de quién realice la valoración.

Además, los autores declaran que la estimación se relaciona fuertemente con el cálculo mental, los números sencillos o redondos, la aproximación y tiene un gran vínculo con el desarrollo del currículo de matemáticas.

Texto D13:

La investigación permitió evidenciar que al trabajar con la estimación métrica, se resaltan las siguientes características:

- “La capacidad de estimación métrica viene determinada por la vivencia efectuada y la necesidad vital que se deriva de ello y no pertenecer a un grupo social determinado.
- La estimación métrica curvilínea sigue un proceso de adquisición diferenciado del rectilíneo, de manera que se necesitan procedimientos, recursos y estrategias diferentes a la rectilínea.
- La necesidad de la visualización y la manipulación o transformación de imágenes mentales, como base del poder estimativo que capacita la adquisición de procedimientos de transformación geométrica.
- La precisión estimativa es independiente de la tipología de unidades utilizadas.
- El dominio y precisión en la estimación de los atributos de las circunferencias capacita para las estimaciones de otras formas curvas.
- Dominar procedimientos, recursos y estrategias diversas de medición, ayuda a la capacidad de estimar una medida.
- La verticalidad y la concentración reducen la percepción de las medidas.
- La estimación por defecto mejora la aproximación en las rectilíneas y la efectuada por exceso en las formas curvas.” (Fiol y Franco, 2003, p.166-167)

Texto D14:

Este documento curricular del Ministerio de Educación Nacional menciona que, parte del desarrollo del pensamiento métrico está involucrado con la medida, cuyos énfasis están en comprender las magnitudes medibles (tales como longitud, área, capacidad peso, etc.) y el carácter de invariancia de una medida. Además señala que, desarrollar el sentido de la medida, que involucra la estimación, influye significativamente en aspectos geométricos como la semejanza de mediciones directas.

El MEN (1998) caracteriza los siguientes pensamientos matemáticos haciendo referencia a la estimación:

- **El pensamiento numérico:** Este pensamiento puede ser visto como un concepto más general que el sentido numérico, el cual incluye procesos como la estimación. Además se considera que aspectos de la estimación, como la descomposición y recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas, están ligados al pensamiento numérico, en la reflexión de los resultados obtenidos. La tecnología ha influenciado los métodos actuales que utilizan las personas para realizar cálculos, por lo que se hace importante que los niños desde temprana edad desarrollen la estimación como un proceso para elaborar algoritmos y estrategias para cálculos de números grandes.
- **El pensamiento métrico:** La estimación de magnitudes está íntimamente relacionada con los conceptos de medida y conteo. Para evolucionar en los procesos de medición, es importante desarrollar la estimación aproximada de las longitudes o distancias, volúmenes o capacidades. La estimación de medidas ayuda a los niños no sólo a reforzar la comprensión de los atributos y el proceso de medición, sino a que adquieran conciencia del tamaño de las unidades.

Se puede evidenciar que la información otorgada por los documentos de la tabla 1.2. sobre aspectos didácticos acerca de la enseñanza y aprendizaje de la estimación, es mayor en comparación a los otros tres anteriores tipos de hallazgos, por lo que se infiere la relevancia dada a la estimación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya sea para promover el sentido numérico de una persona, desarrollar tipos de pensamiento bajo procesos mentales y relacionar la estimación con otros procesos propios de la matemática como la medición y el cálculo.

Muchas de las ideas incluidas en este aspecto, son producto de varios trabajos referentes a la estimación. La vinculación de la estimación y medida con la resolución de problemas, hace que la estimación sea un factor importante para estudiar la fenomenología de los

objetos matemáticos, por su utilidad como proceso mental o las dificultades que pueden presentar los estudiantes al trabajar la estimación en la escuela.

1.5.5. Técnicas o estrategias de estimación

En este apartado, se depositan las estrategias para estimar un número o una medida que develaron algunos autores.

Texto D3:

Castillo (citado en Castillo, Castro, Molina y Segovia, 2011) distingue las siguientes estrategias de estimación:

- Iterar un referente presente o ausente en el proceso.
- Comparar la magnitud a estimar con otra magnitud referente presente o ausente en el proceso.
- Descomponen y recomponen la magnitud en partes iguales, con su complemento o en partes diferentes.
- Emplear fórmulas anexas de acuerdo a la estimación que se desea hacer.
- Reajustar la magnitud.

Texto D7:

Los autores hacen mención a tres estrategias de estimación de cálculos de manera global:

1. **Reformulación:** La persona que realiza la estimación se centra mentalmente en los datos numéricos para hacerlos más manejables. Para esta estrategia se encuentran varios tipos de reformulación:
 - El redondeo.
 - El truncamiento.
 - La sustitución.
2. **Traslación:** Esta estrategia se vincula a los procesos mentales en los que las relaciones u operaciones entre los números están impuestas en un orden de acuerdo al problema que exige una estimación. Consiste en hacer un cambio (correcto

matemáticamente) de orden de las operaciones a realizar; dicho cambio, en combinación con la estrategia de reformulación, permite efectuar la operación de una manera más fácil.

3. **Compensación:** Al utilizar la reformulación o traslación, la persona es consciente de que existe un error entre la estimación dada y el cálculo real de la operación. Entonces, para disminuir este error, la persona compensa por exceso o defecto los datos numéricos manejados para intentar equilibrar la estimación con el cálculo.

Por otro lado, los autores mencionan una estrategia específica para la estimación de medidas:

1. **Comparación:** Esta estrategia consiste en asociar directamente la cantidad a estimar, con alguna unidad o referente que esté presente o no. Puesto que algunos problemas de estimación de medida requieren descomponer y componer mentalmente el objeto a medir, al realizar la comparación con la unidad referente pueden surgir situaciones donde la estimación se reduzca a hacer un cálculo, y es aquí donde se pueden retomar las estrategias de estimación de cálculos mencionadas anteriormente. Por ejemplo: para estimar el área superficial de una pared pintada en franjas, se puede estimar el área de una franja y dicho resultado se multiplica por la cantidad de franjas que hay en la pared.

Texto D9:

Se hace mención a la estrategia de estimación *punto de referencia*, en la que se trata de usar un objeto, al cual se le conoce alguna medida (longitud, área, peso, etc.), para poder estimar la misma propiedad en otro objeto. El objeto a usar se le considera como un nuevo “instrumento” de medida. Las estimaciones provenientes de esta estrategia, suelen ser más precisas que las estimaciones donde no se utilizan estrategias.

Texto D16:

Los autores relatan, que cuando se estima una cantidad mediante procesos visuales, existen cuatro tipos de estrategias:

- **Conteo:** Se estima haciendo un conteo de los elementos que se perciben de manera sensorial, y se añaden o restan cantidades con el fin de compensar el error entre lo estimado y el valor real.
- **Agrupación:** Se divide mentalmente el conjunto de objetos en pequeños grupos de igual cantidad, luego se efectúa una multiplicación y por último se aumenta o se disminuye la cantidad estimada, si hay presente un grupo de menos objetos.
- **Comparación:** Se crea una imagen mental de una situación similar donde se pueda calcular la cantidad de objetos y se hace una comparación con la situación real de acuerdo a los cambios que tenga.
- **Territorial:** Se encierran los objetos que se desean estimar mediante un espacio mental, a partir de este, se calcula cuantos ítems puede haber en dicho espacio y se hace una reducción, de acuerdo al espacio real de los objetos.

Texto D17:

Tras una investigación acerca del cálculo de áreas irregulares (áreas bajo curvas), los autores de este texto identificaron seis estrategias para estimar este tipo de áreas:

1. **Visual:** Esta estrategia es básica, en el sentido que las personas no desarrollan otros procesos mentales para disminuir el error de la estimación, sino que ven la superficie y crean conjeturas a partir de ella.
2. **Reacción basada:** Esta estrategia consiste en hacer comparaciones de las estimaciones que emite la persona con las condiciones de la superficie; es decir, la persona tiene una reacción acerca del posible error de su estimación y reformula su conjetura.
3. **Incorporación de formas en un marco reconocible gracias a la intervención personal:** Una superficie irregular se puede modelar con figuras que sean más accesibles a la hora de estimar su área. Las curvas se pueden modelar con segmentos y crear así polígonos que sean fáciles de reconocer.
4. **Crear cuadrícula:** Consiste en fragmentar el área en varias figuras iguales con formas conocidas, como cuadrados pequeños; después, hallar el área de una sola

figura y luego generar la multiplicidad. Es posible que haya partes donde no exista la cuadrícula completa; allí es donde se estima el sobrante de superficie.

5. **Cortar y Pegar:** Similar a la tercera y cuarta estrategia, esta consiste en fragmentar la superficie a estimar y reorganizarla de tal manera que se transforme en una figura que sea más sencilla para estimar su área.
6. **Descomposición de unidades básicas:** Parecida a la cuarta estrategia. Consiste en extraer mentalmente una figura que se identifique repetida en la superficie y utilizarla como referencia para hallar el área total.

Texto D20:

Luego de una investigación con problemas de estimación de magnitudes inconcebibles, los autores identificaron tres estrategias para este tipo de problemas:

1. **Proporción reducida:** Se intenta reducir las dimensiones del problema para utilizar una proporción adecuada. Así, la magnitud a estimar es concebible por la persona y solo faltaría generar las multiplicidades de la dicha medida para solucionar el problema.
2. **Ruptura:** Consiste en abordar el problema como una descomposición de varias magnitudes, las cuales se estiman con estrategias de densidad de población en el caso de que se estime una cantidad o punto de referencia para una medida.
3. **Situación real y proporción:** Esta estrategia implica tener un conocimiento sobre situaciones reales que se acerquen al problema y comparar las magnitudes entre la realidad de la situación y lo abstracto del problema.

De esta sección, cabe destacar la estrategia “reformulación” mencionada en el texto D7, puesto que realmente lo que se hace en esta estrategia, es aproximar números con un cálculo numérico. Así pues, inferimos una idea fundamental para este trabajo de indagación y es que *aproximar no es lo mismo que estimar*, aproximar es una estrategia para estimar un cálculo o una medida.

1.6. Síntesis de la revisión de la literatura

En la figura 1.1. se ilustra la cantidad de documentos clasificados en cada categoría según la información que otorgaban,

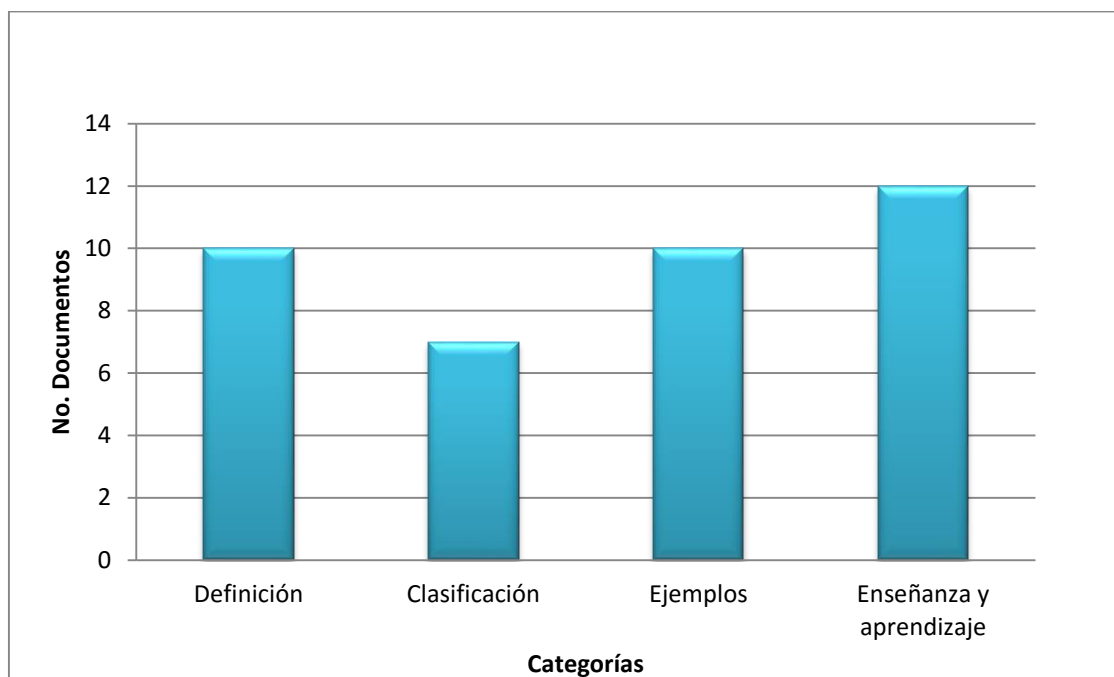


Figura 1.1. Cantidad de documentos clasificados.

Luego de la revisión de los documentos presentados en la tabla 1.2., se puede decir que la estimación de medidas es un concepto bastante amplio y que requiere de trabajo y estudio, dados los hallazgos y deducciones que han construido varios autores a través de los años.

Aunque este rastreo documental es relativamente corto en comparación con todos los documentos que se pueden encontrar en lugares o entidades de acceso libre o pago, la información encontrada en estos textos es de vital importancia en el trabajo de indagación desarrollado.

2. Análisis de las definiciones de estimación de medida y construcción de una definición propia

Luego del rastreo bibliográfico tratado en el anterior apartado, en el capítulo dos se realiza un análisis de las definiciones encontradas de estimación, con el fin de establecer la definición de estimación de medida que se adopta en el presente trabajo de grado. Como se señaló en la sección 1.5.1 del Capítulo 1, se encontraron 12 definiciones.

Este capítulo se divide en tres secciones. En la primera, explicamos el procedimiento seguido para comparar las definiciones. En la segunda, se presentan los resultados del ejercicio comparativo incluyendo una clasificación de las definiciones estudiadas. Y en la tercera se argumenta a favor de los atributos que debe tener la definición de estimación de medida y se propone una definición propia.

2.1. Comparación de las definiciones de estimación

A continuación, en la tabla 2.1. se presenta un listado con las definiciones de estimación de medida encontradas en la documentación mencionada en el capítulo 1.

Tabla 2.1. Listado de definiciones de estimación.

No.	Definiciones	Documento
1	Un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos.	D1
2	Juicio para corroborar si el cálculo de una operación o medición es razonable o para valorar una variedad de medidas, en situaciones en que sea difícil o incómodo medir.	D1
3	Habilidad para hacer una conjetura en cuanto al valor de la distancia, el costo, el tamaño, etc. o cálculo aritmético.	D1
4	Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite.	D1 D2 D3 D7 D12
5	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y la unidad correspondiente a una magnitud discreta o continua, por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar	D1
6	Una competencia matemática donde existen procesos de conteo, trabajar con números aproximados, cálculos mentales y composición y descomposición de	D4

	cantidades.	
7	La estimación es el cálculo de una magnitud a partir de datos que no son exactos.	D5
8	Habilidad cognitiva influenciada en gran parte por el sentido numérico que tenga el individuo y que también es adecuada dentro de la actividad social enmarcada en el salón de clases.	D8
9	Proceso cognitivo que involucra la descomposición y composición de un objeto matemático o físico, en conjunto con la formación y comparación del dominio específico de las representaciones mentales como punto de referencia.	D10
10	Actividad matemática muy poderosa para usar tanto en la resolución de problemas como en la comprobación de lo razonable de los resultados. Incluye tomar decisiones sobre si la respuesta del cálculo es razonable o no, si un número dado es mayor o menor que la respuesta exacta, si la respuesta es mayor o menor que un número dado como referencia y si una estimación está en el correcto orden de magnitud.	D14
11	Una adivinanza educada visualmente, que generalmente se hace en el contexto del número de objetos de una colección, del resultado de un cálculo numérico o de la medida de un objeto	D14
12	Proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Es un proceso mental, aunque frecuentemente hay aspectos visuales y manipulativos en él	D14

Cada una de estas definiciones (ver columna dos de la Tabla 2.1.), se revisó para extraer las siguientes características:

- (i) A qué tipo de estimación alude: de cálculo o medida
- (ii) A qué clase de acción mental hace referencia: un proceso matemático, una habilidad cognitiva o un juicio de valor.
- (iii) A qué tipo de resultados hace referencia: un valor, un rango de valores.
- (iv) Qué indicaciones se hacen sobre el uso de alguna herramienta y de qué tipo: sin herramientas, con herramientas no estandarizadas, con herramientas estandarizadas.
- (v) Qué circunstancias o condiciones ameritan hacer una estimación.

A partir de la revisión, se construyó una tabla con la información de cada definición y posteriormente se analizaron los pros y contras de las diferentes características, para adoptar o construir una definición de estimación de medida.

2.2. Resultados de la comparación

En la Tabla 2.2. se ilustra el ejercicio comparativo realizado. Adoptamos una nueva nomenclatura refiriéndonos a la definición número x de la tabla 2.2 con la definición número x de la tabla 2.1.

Tabla 2.2. Caracterización de las definiciones de estimación.

No.	Tipo de estimación	A qué hace referencia	Tipo de resultados	Uso de instrumentos	Condiciones
1	De medida	Proceso	Valor	Sin herramientas	Basadas en la percepción desde lo visual.
2	De medida De cálculo	Juicio de valor	Valor	Sin herramientas	En las que son de difícil acceso para medir
3	De medida De cálculo	Habilidad	Valor	Sin herramientas	No lo explicita
4	De medida De cálculo	Juicio de valor	Valor	Sin herramientas	En las que se evidencia un grado de subjetividad en la medición
5	De medida	Proceso	Rango de valores	Herramientas no estandarizadas	En las que se necesiten realizar procesos de comparación
6	De cálculo	Proceso	Rango de valores	Herramientas no estandarizadas	Donde sea necesario un conteo
7	De cálculo	Proceso	Valor	Sin herramientas	No lo explicita
8	De cálculo	Habilidad	Valor	Sin herramientas	No lo explicita
9	De medida De cálculo	Proceso	Rango de valores	Herramientas no estandarizadas	En las que se hace uso de un punto de referencia en función de la composición o descomposición de cierto objeto
10	De medida De cálculo	Proceso	Rango de valores	Sin herramientas	En fenómenos cotidianos que involucren la comparación de magnitudes
11	De medida De cálculo	Habilidad	Valor	Sin herramientas	No lo explicita
12	De medida De cálculo	Proceso	Valor	Sin herramientas	Basadas en la percepción desde lo visual.

Además de la caracterización de las definiciones de estimación expuesta en la Tabla 2.2., elaboramos unas gráficas con el fin de ilustrar algunas clasificaciones, a partir de comparaciones cuantitativas y cualitativas.

En la Figura 2.1. se presenta un conteo de definiciones que hacen alusión al tipo de estimación, estimación de medidas, estimación de cálculo, o ambas.

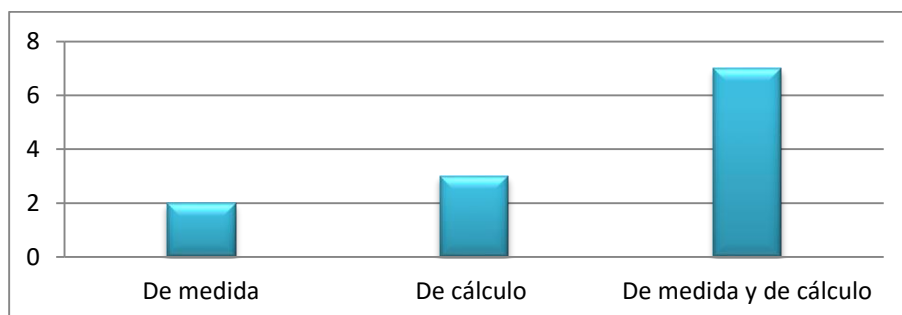


Figura 2.1. Característica (i): Tipo de estimación.

De la gráfica podemos inferir que más de la mitad de las definiciones, encontradas en el rastreo bibliográfico, se inclinan a proponer definiciones o caracterizaciones de estimación en general, tomado así un sentido de medida y de cálculo. Solo 2 definiciones de las 12 son explícitas respecto a la estimación de medida y 3 respecto a la estimación de cálculo. Para este trabajo se descartan las definiciones de estimación de cálculo.

La Figura 2.2. muestra el conteo relacionado con la acción mental a la que hace referencia, definiciones que tratan a la estimación como un proceso matemático, las que la consideran un juicio de valor o las que se refieren a una habilidad cognitiva.

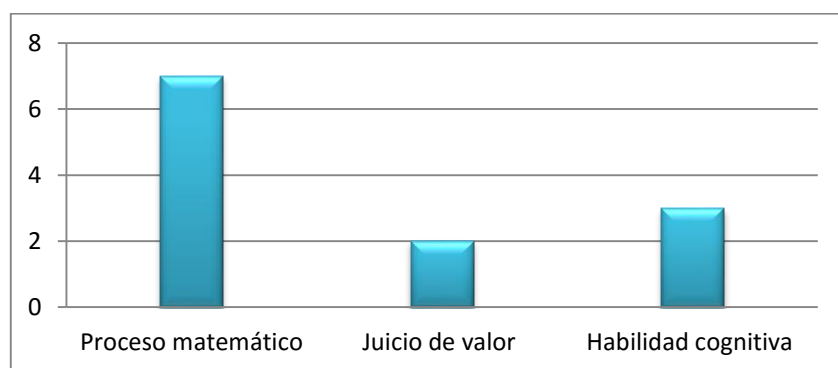


Figura 2.2. Característica (ii): Acción mental.

De esta gráfica podemos observar que la estimación se entiende más como un proceso matemático que como un juicio de valor o habilidad cognitiva, como evidencia tenemos 7

de las 12 definiciones de estimación, que hacen uso del término proceso o actividad matemática.

En la Figura 2.3. se presenta el conteo de definiciones que hacen alusión a qué tipo de resultados hace referencia (un valor, un rango de valores).

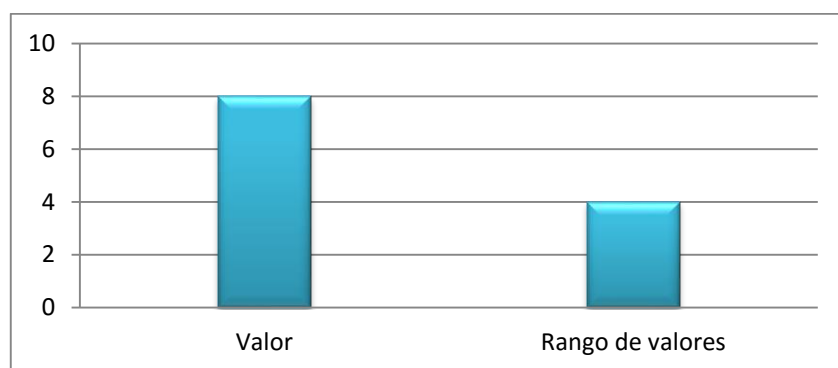


Figura 2.3. Característica (iii): Tipo de resultados.

De la gráfica anterior, se puede inferir que la mayoría de las definiciones se inclinan a que la estimación implica dar un rango de valores, por lo que se puede pensar, que sin importar el proceso que haga la persona al estimar, emitir un rango de valores mejora la precisión de la estimación, puesto que acota la medida real de la magnitud y proporciona más casos de comparación entre el valor estimado y la medición absoluta.

En la Figura 2.4. está el conteo de cuántas definiciones vinculan la estimación como una acción donde se usan herramientas no estandarizadas de medida y cuántas no relacionan el uso de herramientas con dicha acción.

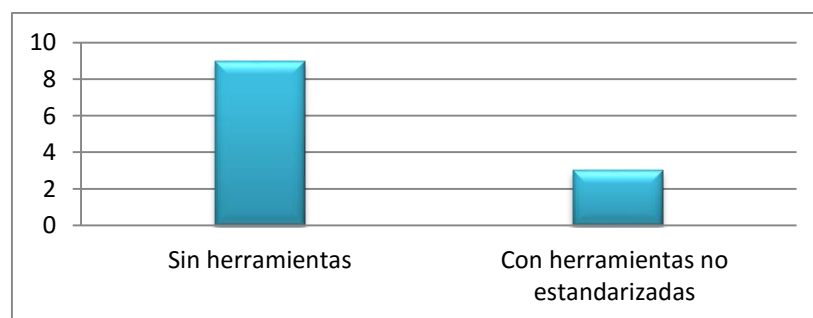


Figura 2.4. Característica (iv): Uso de instrumentos.

De la gráfica podemos inferir, respecto al uso de instrumentos en la estimación, que más de la mitad de las definiciones hace referencia a la estimación sin herramientas, dejando solo evidencia de 3 de las 12 definiciones que hacen referencia al uso de herramientas no estandarizadas.

2.3. Argumentación para llegar a una definición de estimación de medidas a partir de la comparación

Con el ánimo de adoptar o construir una definición de estimación de medida, usamos la comparación para tomar las siguientes decisiones:

- Con respecto al tipo de acción mental, se descartó la opción de hacer referencia a una habilidad (como se menciona en las definiciones 3, 8 y 11) , puesto que, desde el punto de vista de los autores del presente trabajo, una habilidad alude a una condición innata, no aprendida, de poder hacer algo correctamente. No creímos pertinente enfocar el trabajo en considerar que tan hábil o no es una persona cuando realiza una estimación, sino en ver la estimación como un objeto de enseñanza de las matemáticas. También descartamos la opción de hacer referencia a un juicio de valor (como en las definiciones 2 y 4), ya que en este caso solamente se trataría de emitir una sentencia cualitativa y se dejaría de lado la actividad matemática propia de la estimación. Por lo dicho anteriormente, optamos por definir la estimación como un proceso matemático.
- A continuación, se identificaron las definiciones que hacían referencia a la estimación como un proceso y se revisó a qué tipo de proceso se aludía. Las definiciones en las que se hace referencia en el proceso “asignar un valor” (como la definición 5) fueron objetadas por el uso de la palabra “asignar”, ya que esta hace referencia a emitir una medida o cálculo exacto, mientras que la estimación implica un rango de error.
- Después identificamos las definiciones que hacían referencia a la estimación como un proceso para emitir un valor o un intervalo de valores cercanos a una medida (como las definiciones 1 y 5). Esta manera de definir estimación la consideramos

apropiada para nuestro trabajo, puesto que se habla de la estimación como un proceso matemático que no se vincula a una actividad que busca arrojar valores exactos. En ese aspecto, están de acuerdo Pizarro, Gorgorió y Albarracín (2014).

- Por último, se analizó la definición 11 en la cual se menciona que la estimación es un proceso azaroso, es decir, una actividad que involucra adivinar. Esta se descarta porque deja ajena la actividad matemática y la posibilidad de aprender a estimar.

Por lo expuesto anteriormente, construimos y asumimos la siguiente definición de estimación de medida:

Definición de estimación de medida: Es un proceso matemático para proponer un valor o un rango de valores cercano a la medida de la magnitud de un objeto, sin el apoyo de herramientas estandarizadas.

No cabe duda de que la definición de estimación de medida es uno de los componentes más fundamentales de este trabajo, así que lograr construir este producto de manera autónoma, luego del proceso de comparación de definiciones, nos permite develar cuáles serían los componentes de la estimación de medida más relevantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Además de generar un aporte a la construcción de definiciones de estimación que se encuentran en la literatura, también encontramos las variantes que tiene el concepto de estimación dentro de las concepciones de varios autores, y que guían el análisis posterior sobre las concepciones de los maestros de matemáticas en formación.

3. Comentario crítico al uso de las expresiones “estimación” y “estimación de medida” en los documentos curriculares nacionales.

El trabajo realizado en los dos capítulos anteriores se hizo desde una perspectiva internacional revisando distintos autores. Sin embargo, consideramos dos documentos curriculares nacionales como los más importantes de la educación colombiana: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En éste capítulo, hacemos un análisis descriptivo y crítico de los usos de la palabra “estimar”, “estimación” y “estimación de medida” en tales documentos, con el fin de interpretar qué se sugiere para la enseñanza y para el aprendizaje de la estimación de medidas en la educación colombiana, en contraste con lo que exponen los autores considerados en la revisión previa.

3.1 Análisis de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) en relación al uso del concepto de estimación

Al revisar los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), encontramos 19 veces mencionadas las palabras “estimar” o “estimación”. Descartamos en la presente revisión tres de estas menciones, porque están contenidas en el marco conceptual del pensamiento aleatorio, con un acercamiento diferente a la estimación de medida, el cual es construir un procedimiento para asignar una estimación numérica a la predicción de un evento aleatorio o azaroso; y por lo tanto, este acercamiento es ajeno a nuestro objetivo de trabajo. Por otro lado, una mención a la estimación está presentada exactamente igual en dos estándares, pero en diferentes partes, por lo que sólo tomamos una de ellas. Por lo anterior, consideramos 15 menciones de estos términos para el ejercicio de conceptualización que desarrollamos.

La mención a “estimar” o “estimación”, en las 15 ocasiones analizadas se incluye en una amplia gama de ideas que están vinculadas a ambos términos. Además, aclaramos que en esta revisión, distinguimos los términos “estimación de medidas”, “estimación de cálculos”, “estimación numérica” y “estimación de cantidades”; para evitar confusiones aclaramos este vocabulario:

- **Estimación de medidas:** Dada la definición construida en el capítulo 2, consideramos estimación de medida aquella que hace referencia a las magnitudes que son propiedades o atributos medibles de un objeto.
- **Estimación de cálculos:** Se considera cuando el resultado de la estimación se refiere al posible resultado de un cálculo numérico.
- **Estimación numérica:** Más amplia que las dos anteriores, se considera estimación numérica a la estimación que es netamente cuantitativa, sin importar sobre qué procede dicho valor estimado, una medida o una cantidad discreta.
- **Estimación de cantidades:** Como una cantidad es una propiedad que puede medirse o enumerarse, esta estimación hace referencia a la estimación de medidas o a la estimación de cálculos; esto dependerá del contexto en que se encuentre la referencia a la estimación.

A continuación presentamos nuestra interpretación de los fragmentos en los que se menciona cada palabra y concluimos con un comentario crítico (el subrayado de las palabras es nuestro). Los agrupamos según un acercamiento similar.

“Un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido.” (p.53).

En este fragmento, se usa la palabra “estimar” para referirse a la acción de emitir un juicio de valor que expresa si la solución aproximada de un cálculo en una operación es factible, sin efectuarla. Este juicio de valor corresponde a una "estimación de cálculo". Además, en el fragmento se resalta la importancia de la estimación en la actividad de modelación.

“Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.” (p. 58).

“Es necesario señalar que el desarrollo de este pensamiento debe también atender al estudio de las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos, pues son éstos los que caracterizan el campo conceptual del análisis matemático, en el cual se sitúa el cálculo diferencial e integral que se suele introducir en el grado 11. Por tal razón es necesario incorporar tempranamente a los estudiantes en el estudio de los conceptos fundamentales de ese campo y de las técnicas y métodos de estimación y de aproximación, lo cual se logra articulando la búsqueda de soluciones no exactas, de intervalos de valores aceptables, de problemas de estimación de posibles valores en el contexto de medidas de longitudes, áreas y volúmenes y de modelos matemáticos de procesos biológicos, químicos y físicos que utilicen expresiones algebraicas. Se refuerza así a la estimación como núcleo conceptual importante en el desarrollo del pensamiento numérico. [...]” (p.68 - 69).

Del tercer ciclo (6° - 7°), en el pensamiento métrico está el siguiente estándar:

“Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación. [...]”
(p.85).

En estos fragmentos, se usa la palabra estimación para referirse a un proceso que implica o determina una técnica, con la cual se logra o bien la estimación de un cálculo, o hacer un juicio de valor sobre una magnitud, si hay un proceso infinito asociado, que se relaciona con una cantidad. En este sentido, se está haciendo referencia a “estimación de cantidad”. Pero no es posible saber si se está aludiendo a la estimación de medidas o de cálculo, porque solo la palabra “estimación” no permite aclarar si es referente a la magnitud de un atributo de un objeto o la relación con un cálculo numérico procedente de un proceso matemático.

“Otros aspectos importantes en este pensamiento son la integración de la estimación con los procedimientos numéricos de truncamiento y redondeo, el tratamiento del error, la valoración de las cifras significativas y el uso de

técnicas de encuadramiento, así como la expresión de medidas grandes y pequeñas por medio de la notación científica.” (p.63).

Encontramos en este fragmento la relación que establecen los autores de los Estándares entre la estimación y algunos procedimientos numéricos, aunque no se aclara el papel que juega la estimación en tales procedimientos. Esta idea es diferente a la de algunos autores (Porta y Costa, 1996) para quienes el truncamiento, el redondeo y la aproximación son técnicas de estimación.

En la sección correspondiente al establecimiento de relaciones entre los pensamientos, en los Estándares se establece:

“La estimación y la aproximación son dos procesos presentes en los diferentes pensamientos. Ellas son elementos fundamentales en la construcción de los conceptos, procesos y procedimientos relativos a cada pensamiento, principalmente al numérico, al métrico y al aleatorio; llaman la atención sobre el carácter inexacto e incompleto de muchos de los resultados de las matemáticas y de otras ciencias, y ayudan a organizar formas de pensamiento flexibles asociadas a contextos particulares. De otra parte, muestran que en la mayoría de las situaciones cotidianas lo que se necesita es tener una buena estimación del rango de magnitud de un resultado y no tanto un resultado exacto.” (p.70).

Para el pensamiento métrico, está el indicador:

“Realizo estimaciones de medidas requeridas en la resolución de problemas relativos particularmente a la vida social, económica y de las ciencias. [...]” (p.81).

En estos fragmentos inferimos que se está hablando de la estimación como proceso, en el que no se alude a una técnica establecida y que conduce a un resultado inexacto o incompleto. Cabe destacar que se enfatiza en el uso de la estimación en contextos propios de las matemáticas, como en el desarrollo de otros objetos matemáticos y la resolución de problemas; como también en su relación con otras áreas científicas.

Cabe destacar que al referirse a situaciones de las matemáticas y de las ciencias, el primer párrafo podría estar haciendo alusión a estimación de cálculo y de medidas. En el segundo

párrafo hay una mención explícita al tipo de estimación, “de medidas”, el cual se usa como herramienta para la resolución de problemas.

“La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto. [...]”

“En relación con los anteriores conceptos y procedimientos, es importante destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta [...]”

“Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación. [...]” (p.83).

Los párrafos anteriores hacen alusión a la estimación de medida, pero no es explícito a qué se refieren con ello. Por la explicación que acompaña el uso de la palabra, nosotros inferimos que es la apreciación de los rangos entre los cuales pueden ubicarse ciertas medidas.

En los indicadores de los estándares básicos del primer ciclo (1° - 3°) en el pensamiento numérico se tiene que:

“Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. [...]” (p.80).

En este caso, utilizan la estimación como referente de un proceso para resolver problemas que únicamente involucran cálculos numéricos, por lo cual podemos inferir que se hace referencia a la “estimación de cálculos”.

A partir de lo analizado anteriormente, concluimos que:

Los términos “estimar” o “estimación” están presentes en los estándares de una manera muy vaga, no es claro a qué se refieren exactamente estas palabras, no dan idea de qué definición se establece o se utiliza, no es claro si es un concepto o un proceso; aunque se puede inferir en ciertos fragmentos que se utiliza como una estrategia o un proceso.

Cuando los términos “estimar” o “estimación” están presentes en los pensamientos diferentes al métrico, parecen hacer alusión a la estimación de cálculo. Pero dicha alusión no es clara en el sentido en que si la estimación es un proceso que implica una estrategia de cálculo o un proceso que implica o determina una aproximación. Esto último también se contrasta con ideas de algunos autores (Porta y Costa, 1996) que argumentan que la aproximación hace parte del proceso de estimar mientras que este documento curricular nacional los categoriza como dos procesos o conceptos totalmente diferentes.

3.2 Análisis crítico del uso de la palabra estimación en Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998)

En la revisión de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se realizó un análisis crítico, análogo al realizado con los Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas (2006). Encontramos los siguientes fragmentos en donde se hace mención de las palabras “estimar”, “estimaciones” o “estimación”.

En la sección correspondiente a los referentes curriculares se encuentran dos fragmentos:

“Respecto al desarrollo de pensamiento numérico y ampliando algunos énfasis propuestos en la Resolución 2343, diríamos que algunos aspectos fundamentales estarían constituidos por el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. [...]” (P. 17).

En este párrafo, se puede observar que se realiza una diferenciación entre aproximación y estimación, tratándolas como conceptos matemáticos diferentes, sin explicitar alguna relación.

“En cuanto a la medida se refiere, los énfasis están en comprender los atributos medibles (longitud, área, capacidad, peso, etc.) y su carácter de invarianza, dar significado al patrón y a la unidad de medida, y a los procesos mismos de medición; desarrollar el sentido de la medida (que involucra la estimación) y las destrezas para medir, involucrar

significativamente aspectos geométricos como la semejanza en mediciones indirectas” (p. 17).

En este fragmento se considera la estimación como un proceso matemático asociado a la estimación de medida, y se menciona su importancia para el desarrollo del sentido de la medida. Dicha importancia también se relaciona con aspectos geométricos, cosa que en los estándares no se hace, puesto que en su descripción del pensamiento espacial y sistemas geométricos, no existe alguna alusión a la palabra “estimación”, dando a pensar que la estimación no es relevante para el desarrollo de dicho pensamiento, en función de un concepto propio de la geometría.

En la sección correspondiente al pensamiento numérico se señala que:

“En esta propuesta vamos a hablar del pensamiento numérico como un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etcétera.”(p. 26).

Al parecer la estimación se presenta como un concepto del pensamiento numérico. Pero, también podría inferirse que al estar mencionado junto con habilidades y destrezas numéricas, la estimación hace referencia a un proceso. Además, parece que también se hace una diferenciación entre comparar y estimar, como si fueran dos procesos o conceptos diferentes.

“En muchas situaciones de la vida diaria, las respuestas se calculan mentalmente o basta con una estimación, y los algoritmos con lápiz y papel son útiles cuando el cálculo es razonablemente simple (NCTM, 1989; citado en MEN, 1998)” (p. 34).

“Los hallazgos que actualmente nos arrojan muchas investigaciones sobre los métodos informales que utilizan los niños y los adultos para hacer sus cálculos y el uso cada vez más amplio de las calculadoras de bolsillo, nos han permitido reflexionar sobre la importancia de que los niños desarrollen otras destrezas de cálculo, además de los algoritmos escritos formales, como son el cálculo mental, la aproximación, y la estimación y utilización de las calculadoras en la resolución de problemas que impliquen números muy grandes y cálculos complejos. De esta manera cada alumno podrá elaborar sus propios algoritmos o métodos informales y estrategias, y utilizarlos de acuerdo con las características de cada situación. [...]

El cálculo mental y la estimación dan una gran oportunidad a los alumnos para hacer más dinámicas las operaciones y para desarrollar ideas sobre relaciones numéricas. Conciérneme estimularlos para que exploren e inventen estrategias alternativas para el cálculo mental.” (p. 35).

En estos fragmentos, el primero de los cuales está tomado de los estándares de la NCTM y es citado en los Lineamientos, se hace referencia a la estimación como un proceso de cálculo en situaciones de la vida diaria. Decimos que se trata como “estimación de cálculo”. En el segundo fragmento hay un énfasis en la estimación como un proceso que implica varias destrezas del cálculo, ligadas a una estrategia. Además, parece que también se diferencia lo que es aproximación y estimación como en los estándares y se resalta la relevancia de la estimación para la comprensión de las relaciones numéricas.

En esta sección se define la estimación de la siguiente manera:

“La estimación es una actividad matemática muy poderosa para usar tanto en la resolución de problemas como en la comprobación de lo razonable de los resultados. Incluye tomar decisiones sobre si la respuesta del cálculo es razonable o no, si un número dado es mayor o menor que la respuesta exacta, si la respuesta es mayor o menor que un número dado como referencia y si una estimación está en el correcto orden de magnitud. [...]” (p. 35).

En esta definición se entiende la estimación como un proceso que conduce a emitir un juicio de valor sobre si la respuesta de un cálculo es factible, si un valor es cercano a un cálculo exacto o está en el correcto orden de magnitud. De esa definición se desprende que la estimación no es igual a la aproximación, como se aclara en el siguiente párrafo; pero la diferenciación se basa en el uso de herramientas y no en lo que se pretende, es decir emitir un juicio de valor.

“Algunos autores no distinguen entre estimación y aproximación; otros afirman que mientras la estimación es un ejercicio mental, la aproximación usualmente requiere de alguna herramienta.” (p. 35).

También se incluye la definición dada por Thompson (citado en MEN, 1998):

“llama a la estimación ‘una adivinanza educada visualmente, que generalmente se hace en el contexto del número de objetos de una

colección, del resultado de un cálculo numérico o de la medida de un objeto'. [...]" (p. 35).

“El uso frecuente de calculadoras, de cálculo mental y de estimaciones ayuda a que el niño desarrolle un punto de vista más realista sobre las operaciones y sea más flexible en la selección de métodos de cálculo.” (p. 35).

Por último en el pensamiento numérico, se resaltan la relevancia de la estimación, entendida como proceso en el contexto de cálculos, junto con el cálculo mental y el uso de las calculadoras en el ámbito en que un niño puede conceptualizar mejor las operaciones y además, tener una gama amplia de métodos de cálculo. Es decir, que en el pensamiento numérico se ve la estimación como un proceso que implica estrategias o métodos para hacer cálculos. Cabe resaltar que en este fragmento se diferencia entre cálculo mental y estimación aunque anteriormente se había mencionado que la estimación era un proceso mental. Suponemos que una diferencia está en el uso o no de un algoritmo.

En la sección correspondiente al pensamiento métrico, los lineamientos establecen que:

“Para avanzar en los procesos de medición es importante desarrollar la estimación aproximada de las longitudes/distancias, áreas, volúmenes/capacidades, duraciones, pesos/masas, amplitudes angulares, temperaturas, etc. [...]" (p.44).

En este fragmento, se hace referencia a la estimación de magnitudes como un proceso. Particularmente para nuestro trabajo, es importante destacar que se hace explícita la vinculación de la estimación y la medición de áreas y volúmenes. Cabe resaltar, que aparece una nueva expresión, usada solo en este fragmento, “estimación aproximada” la cual da a entender que habría estimaciones aproximadas y otras no.

“Bright (1976; citado en MEN, 1998) define la estimación de magnitudes como “el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Es un proceso mental, aunque frecuentemente hay aspectos visuales y manipulativos en él.” (p.44).

Con esta definición citada en los lineamientos, y en coherencia con lo mencionado en el pensamiento numérico para la estimación de cálculo, podemos vislumbrar que este

documento curricular nacional trata a la estimación como un proceso mental el cual no usa algún instrumento de medición.

“Antes de seleccionar una unidad o un patrón de medida es necesario hacer una estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta, por ejemplo, la altura de una puerta, la longitud de un camino, el peso de un objeto, la duración de un evento, etc.” (p.44).

En este fragmento se considera la estimación como parte de una estrategia de medición, que consiste en considerar un rango de magnitudes para una medida dada de una propiedad u objeto. Este acercamiento no es coherente con la propuesta de Bright (1976; citado en MEN, 1998).

3.3. Síntesis de la revisión realizada a estándares y lineamientos

Como conclusión, establecemos varias afirmaciones sobre lo que consideran o plantean los estándares y los lineamientos acerca de la estimación:

- Para el pensamiento numérico y variacional, la estimación y la aproximación se consideran procesos o habilidades diferentes, pero relacionados. En el pensamiento métrico (e implícitamente el pensamiento geométrico) la aproximación es parte de la estimación, como si fuera un tipo de estrategia de estimación.
- No existe un criterio unificado para determinar en qué consiste la estimación. Se ve como un proceso netamente mental y también como un juicio de valor.
- La estimación involucra estrategias y métodos de cálculos y medidas, sin hacer uso de un instrumento de medición. No se menciona el uso de instrumentos no estandarizados.
- En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se habla de varias clases de estimación, como la de cálculo y la de medidas, pero nunca son claros en qué significa cada una o qué concepción de estas se está presentando a los docentes y los estudiantes.
- La forma en que se involucra la estimación en la presentación conceptual de los pensamientos de la matemática no es precisa; algunas veces se refieren a la estimación como proceso, como habilidad, como juicio o como un concepto propio

de un pensamiento. Esto genera una confusión sobre la concepción de la estimación como actividad mental, que presentan los documentos curriculares.

- En la sección del pensamiento numérico en los lineamientos, se habla de la aproximación y la comparación en relación con la estimación, pero no se relacionan la aproximación ni la comparación, además no existe una definición de éstas en el documento; por lo que no se entiende si estas serían una clasificación de la estimación o procesos ajenos a ella.
- Por último, en los dos documentos se trata a la estimación como un proceso mental, habilidad o juicio de valor el cual, dentro del proceso de medir, no involucra el uso de instrumentos estandarizados de medidas. Para ser precisos, Bright (citado por el MEN, 1998) es el que otorga dicha concepción y los lineamientos la utilizan dentro del pensamiento métrico.

Con estas ideas, podemos decir que la educación nacional tiene en cuenta la estimación dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de los documentos curriculares que la rigen. Además de resaltar la relevancia de la estimación en el pensamiento numérico, también develan su importancia en el pensamiento métrico, por lo que este proceso no es ajeno al desarrollo de procesos y conceptos matemáticos abordados en clase.

Por otro lado, la información proporcionada de estos documentos sobre cómo se usa la estimación es muy difusa, en el sentido que no hay diferenciación y categorización entre la estimación de medidas y cálculos. Esto puede generar confusiones al momento de conceptualizar el proceso de estimación con los estudiantes, sabiendo que Porta y Costa (1996), exponen que la estimación de medidas también puede contener procesos de la estimación de cálculos, dependiendo del problema a solucionar mediante este proceso.

4. Estudio empírico de concepción de estimación de medida de docentes de matemáticas en formación

Luego de realizar un rastreo bibliográfico sobre la estimación, presentado en el capítulo 1, y de construir una definición de estimación de medida, mencionada en el capítulo 2, en este capítulo, nos centramos en un estudio empírico de la concepción de estimación de medida de futuros docentes de matemáticas. Para reportar el ejercicio analítico, en este capítulo presentamos los siguientes aspectos: el objetivo del estudio; la metodología que se siguió para llevar a cabo la indagación, en la que incluimos una descripción del tipo de estudio, el diseño del instrumento con el cual se recogieron los datos a analizar, y la descripción del proceso analítico asumido; y los resultados obtenidos del análisis de las respuestas emanadas por los futuros docentes en matemáticas en la aplicación del cuestionario.

4.1. Objetivo del estudio

Identificar la concepción de estimación de medida, que exhiben los docentes de matemáticas en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Como fundamento para la identificación de la concepción usamos los aspectos considerados por los autores que revisamos, la definición de estimación construida por nosotros, los criterios con los que los docentes en formación juzgan tareas como de estimación y solucionan posibles tareas de estimación.

4.2. Metodología

En esta sección presentamos los aspectos contemplados para el desarrollo del estudio empírico:

4.2.1. Tipo de estudio

El estudio elaborado está basado en la implementación de un cuestionario, con el cual se pretendió recoger información sobre qué piensan los maestros de matemáticas en formación, sobre lo que es la estimación de medida, cómo definen la estimación de medida, qué procedimientos siguen al realizar tareas de estimación y qué problemas proponen de estimación de medida. Las respuestas al cuestionario fueron sometidas a un proceso de análisis cuantitativo y cualitativo que permite develar la concepción de estimación de medida, de futuros maestros de matemáticas.

4.2.2. Participantes en el estudio

La indagación fue ejecutada a partir de las respuestas a un cuestionario, elaboradas por veintidós estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, inscritos en el curso “Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría”. Sus edades oscilan entre los 18 y 22 años.

El desarrollo profesional de los estudiantes participantes incluye cuatro cursos previos de la línea de la geometría, que son: Elementos de Geometría, Geometría Plana, Geometría del Espacio y Geometría Analítica. Además, cuatro cursos de la línea del álgebra y cuatro cursos de la línea del cálculo, esto en la formación disciplinar. Por otro lado, estos maestros en formación han cursado tres asignaturas de la línea de pedagogía y didáctica, en donde llevaron a cabo tres prácticas iniciales.

4.2.3. Diseño del cuestionario

El instrumento de recolección de datos utilizado en el estudio, es un cuestionario que consta de ocho puntos, los cuales están agrupados en cuatro bloques:

El primer bloque, en el que ubicamos el primer y segundo punto, pretende identificar la idea espontánea que los docentes en formación tienen de lo que es una actividad de estimación de medidas, a partir de las características que le adjudican y la definición que consideran más adecuada.

En el segundo bloque, agrupamos el tercer, cuarto, sexto y séptimo puntos, que corresponden a actividades de estimación de medida, según nuestra definición. Cada punto está dividido en cuatro incisos a los que les asignamos dos finalidades; la primera, busca comparar las acciones que realizan los maestros en formación para solucionar la actividad que se les plantea, con los planteamientos mencionados en el primer bloque. La segunda, pretende ver cómo juzgan las actividades planteadas que nosotros consideramos de estimación de medida.

La selección de las actividades incluidas en los cuatro puntos del bloque dos y también en el quinto punto (bloque tres), se hizo a partir de las siguientes acciones (i) la búsqueda de tareas que están reseñadas en la literatura como tareas de estimación de medida; (ii) el análisis de las mismas para ver si las consideramos como de estimación de medida, de acuerdo a nuestra definición; (iii) la clasificación de las actividades de acuerdo a especificidades tales como las herramientas que se otorgan para realizar la estimación, si se incluye una unidad de medida, la instrucción explícita que se pide y los atributos a estimar; (iv) la elaboración de adaptaciones a las actividades a nuestro contexto modificando principalmente el idioma y las unidades de medida.

El tercer bloque solamente contiene el quinto punto. La actividad propuesta no es considerada por nosotros como de estimación de medida, puesto que los procesos que se desarrollan en la solución de esta tarea, están ligados al proceso de medir una magnitud, más no de estimarla. La finalidad de este punto es identificar si los futuros docentes de matemáticas reconocen el enunciado como una tarea de medición en vez de una de estimación y, en caso de que la consideren de estimación de medida, podamos percibir qué cualidades están interpretando como estimación.

El cuarto bloque hace referencia al octavo punto, el cual según la literatura encontrada (Albarracín, Gorgorió y Pizarro, 2014), es una actividad propuesta específicamente para docentes de matemáticas. Busca develar las condiciones y características que un maestro tiene en cuenta para proponer una actividad de estimación de medida, este nos ayuda a

identificar la concepción que tiene el futuro maestro sobre la estimación de medidas a través de su propuesta de enseñanza.

4.2.4. Cuestionario

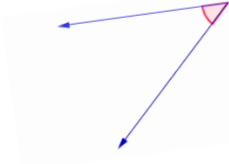


A continuación en la tabla 4.1 se presenta, por cada bloque, los puntos del cuestionario aplicado y sus respectivos propósitos.

Tabla 4.1. Puntos del Bloque 1.

No.	Pregunta	Propósitos específicos
1	Desde su punto de vista ¿En qué consiste la actividad de estimar una medida?	Identificar las características que se reconocen como propias de una actividad de estimación. Así se tiene un primer acercamiento a la concepción que tiene la persona.
2	Proponga una definición de estimación de medida	Disponer de una primera idea espontánea acerca de lo que la persona considera que es la definición de estimación de medida, para contrastarla con la manera como resuelven las siguientes preguntas.

Tabla 4.2. Puntos del Bloque 2.

No.	Pregunta	Propósitos específicos
3	<p>(i) Realice la siguiente actividad</p> <p>¿Cuál es el área del rectángulo?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">1</div> <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-left: 20px;">?</div> </div> <p>(ii) Describa el proceso que usted seguiría para solucionar la pregunta.</p> <p>(iii) ¿Cree que el proceso que realizó para resolver la pregunta es de estimación de medida? Si <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> ¿Por qué?</p>	<p>Contrastar las respuestas dadas a las preguntas anteriores con el proceso que ejecuten, y la manera como usen la información sobre la unidad de medida de referencia, la cual no está en una posición que incite a la comparación directa por conteo. Usamos medida de área y no de longitud, para disminuir la posibilidad de que se haga un conteo por superposición con un patrón de medida alternativo.</p>

	(iv) Si no considera que la actividad es de estimación de medidas ¿Qué ajustes le haría para que lo fuera?	
4	<p>(i) Realice la siguiente actividad</p> <p>¿Cuál es la medida del ángulo?</p>  <p>(ii) Describa el proceso que usted seguiría para solucionar la pregunta.</p> <p>(iii) ¿Cree que el proceso que realizó para resolver la pregunta es de estimación de medida? Si <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> ¿Por qué?</p> <p>(iv) Si no considera que la actividad es de estimación de medidas ¿Qué ajustes le haría para que lo fuera?</p>	<p>Contrastar las respuestas dadas a las preguntas anteriores con la estrategia que ponen en juego, que probablemente implica explicitar una medida de referencia que se conoce.</p>
6	<p>(i) Realice la siguiente actividad</p> <p>Determine la medida del cucharón en cm si el clip mide 2 cm</p>  <p>(ii) Describa el proceso que usted seguiría para solucionar la pregunta.</p> <p>(iii) ¿Cree que el proceso que realizó para resolver la pregunta es de estimación de medida? Si <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> ¿Por qué?</p> <p>(iv) Si no considera que la actividad es de estimación de medidas ¿Qué ajustes le haría para que lo fuera?</p>	<p>Identificar si la persona reconoce este ejercicio como una actividad de estimación de medida, y aunque la unidad de referencia se vincule con una medida exacta dentro del sistema internacional de medidas.</p>
7	<p>(i) Realice la siguiente actividad</p> <p>Determine cuál es la mejor medida para la altura de la bicicleta</p>  <p>a. 2,74 m</p>	<p>Puesto que el objeto cuya medida a estimar no es accesible, se espera que la persona considere que esta es una actividad de estimación y no proceda hacer una medición directa.</p>

	<p>b. 25,4 cm</p> <p>c. 7,6 cm</p> <p>d. 0,91 m</p> <p>(ii) Describa el proceso que usted seguiría para solucionar la pregunta.</p> <p>(iii) ¿Cree que el proceso que realizó para resolver la pregunta es de estimación de medida? Si <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> ¿Por qué?</p> <p>(iv) Si no considera que la actividad es de estimación de medidas ¿Qué ajustes le haría para que lo fuera?</p>	
--	---	--

Tabla 4.3. Puntos del Bloque 3.

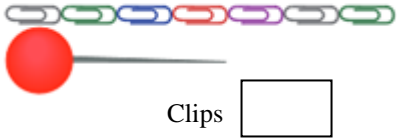
No.	Pregunta	Propósitos específicos
5	<p>(i) Realice la siguiente actividad</p> <p>¿Cuál es la medida del objeto en unidades de clips?</p>  <p>(ii) Describa el proceso que usted seguiría para solucionar la pregunta.</p> <p>(iii) ¿Cree que el proceso que realizó para resolver la pregunta es de estimación de medida? Si <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> ¿Por qué?</p> <p>(iv) Si no considera que la actividad es de estimación de medidas ¿Qué ajustes le haría para que lo fuera?</p>	<p>Analizar si la persona asocia la tarea con el uso del clip, el cual no es una unidad de medida usual; y si confunde estimación de medida con el proceso de medir.</p>

Tabla 4.4. Puntos del Bloque 4.

No.	Pregunta	Propósitos específicos
8	<p>¿Qué actividad de estimación inventaría con esta imagen?</p> 	<p>Queremos que la persona deleve sus ideales para exponer el concepto de la estimación de medida ante un grupo de estudiantes.</p>

4.2.5. Aplicación del Cuestionario

La aplicación del instrumento de recolección de datos se realizó en dos sesiones de clase, por dos razones. La primera, dado que una de nuestras intenciones era diferenciar entre lo que los maestros en formación dicen sobre qué es una estimación de medidas y las acciones que realizan para juzgar una posible actividad de estimación de medida, si implementábamos el cuestionario en una sesión, las respuestas a los puntos de los bloques dos y tres, podrían verse influidas por lo que contestaran en los puntos del primer bloque.

La segunda, para garantizar una buena disposición por parte de la población escogida, pensamos que a los futuros maestros de matemáticas, les resultaría una labor tediosa resolver ocho puntos en una misma sesión.

El cuestionario fue aplicado los días 21 y 26 de agosto, del 2015 a las 9 a.m. De los veintiséis participantes, solo veintidós contestaron el cuestionario en las dos sesiones. La indicación que se les dio a los participantes era que contestaran las preguntas con base en sus conocimientos matemáticos y didácticos, adquiridos hasta el momento.

Durante la aplicación de este instrumento, observamos que la actitud de los maestros en formación fue pertinente y adecuada, en el sentido que develaban seriedad y concentración en la escritura de sus respuestas. Esto contrasta un poco con los resultados obtenidos, que se presentarán más adelante, puesto que algunos dejaron de contestar algunos incisos de las preguntas del bloque 2 y 4 y otros otorgaron respuestas que no permitían categorizar con facilidad la información que nos dieron. Tanto en la primera como en la segunda sesión, los futuros docentes tardaron aproximadamente 30 minutos en dar solución al cuestionario.

4.2.6. Descripción del proceso analítico

El proceso de análisis seguido para determinar la concepción de estimación de medida de los 22 futuros docentes de matemáticas, fue el siguiente:

1. Transcribimos todas las respuestas otorgadas por los maestros en formación.
2. Construimos una herramienta analítica para cada uno de los bloques de preguntas.
3. Clasificamos las respuestas según la herramienta analítica.

4. Hicimos un conteo de las respuestas de acuerdo a la clasificación.
5. Sacamos inferencias y presentamos ejemplos ilustrativos.

Es pertinente aclarar que en la transcripción de las respuestas del cuestionario, adoptamos una nomenclatura para hacer referencia a cada respuesta en su clasificación y análisis. Decidimos nombrar como “Ex”, a cada respuesta del maestro en formación número x. Por lo tanto, en los análisis hay un rango de referencias de estas respuestas desde E1 hasta E22. A continuación se presenta las herramientas analíticas utilizadas de acuerdo a cada bloque.

4.2.6.1. Herramienta analítica del Bloque 1: Puntos 1 y 2

De acuerdo con los propósitos establecidos para los puntos 1 y 2 del cuestionario, mostrados en la tabla 4.1, y a nuestra definición de estimación de medida (cuyo proceso constructivo se describió en el capítulo 2), categorizamos las respuestas de los estudiantes a estos, y las analizamos de acuerdo a dicha clasificación.

A continuación retomamos la definición de estimación de medida elaborada anteriormente:

Definición de estimación de medida: Es un proceso matemático para proponer un valor o un rango de valores cercano a la medida de la magnitud de un objeto, sin el apoyo de herramientas estandarizadas.

A partir de la definición construimos un conjunto de tres categorías extraídas de los atributos mencionados en ella. Cada categoría se dividió en subcategorías, que se etiquetaron como se muestra a continuación, en la tabla 4.5., de acuerdo a la tipificación encontrada en el capítulo 2. Cabe resaltar que en algunas respuestas podemos encontrar a lo más tres categorías.

Tabla 4.5. Herramienta analítica Bloque 1.

Categoría	Subcategoría	Etiqueta
Acción mental	Un proceso matemático	P
	Una habilidad cognitiva	H
	Un juicio de valor	J
Tipo de resultado	Un valor	V
	Un rango de valores	R
Uso de herramientas	Sin herramientas	S

	Con herramientas no estandarizadas	E
Otros		O

4.2.6.2. Herramienta analítica Bloque 2: Puntos 3, 4, 6 y 7

Con base en los propósitos establecidos para los puntos 3, 4, 6 y 7 del cuestionario, mostrados en la tabla 4.2., y las estrategias de estimación de cálculos y medidas mencionados en la sección 1.5.5., categorizamos las respuestas de los estudiantes del ítem (ii) de los puntos del bloque 2, y se analizaron de acuerdo a dicha clasificación.

Establecimos categorías que se dividen en subcategorías, etiquetándolas de forma análoga a lo realizado para las respuestas del Bloque uno. Dichas categorías se muestran a continuación en la tabla 4.6.

Tabla 4.6. Herramienta analítica del Bloque 2 Ítem (ii).

Categoría	Subcategoría	Etiqueta
Comparación	Punto de referencia	ER
Reestructuración	Magnitud accesible	EA
	Cuadrícula	EC
	Descomposición y composición del objeto	ED
Otros		O

Para categorizar las respuestas de los estudiantes, del ítem (iii) y (iv) de los puntos del bloque 2, separamos las respuestas de los participantes que sí creyeron hacer una estimación, de los que juzgaron que no era una actividad de estimación de medida. Además, para los que sí creyeron que era una tarea de estimación de medida, clasificamos sus argumentos sobre por qué si lo era, de acuerdo a las subcategorías mencionadas en la tabla 4.5. Para los que no, expondremos los argumentos generales que los maestros en formación otorgaron para objetar sobre la actividad y decir que no era una actividad de estimación de medida.

4.2.6.3. Herramienta analítica Bloque 3: Punto 5

Puesto que la actividad de este punto no es considerada como una tarea de estimación de medida, sino de medición, nos enfocamos en analizar las respuestas de los 22 participantes de los ítems (iii) y (iv) de este punto.

Categorizamos las respuestas de ellos entre los que sí creyeron que la actividad era de estimación y de los que no, identificando qué características resaltaban para juzgar dicha tarea. Destacando así, de los que sí lo creen, qué elementos de la actividad de medir confunden con estimación de medida.

4.2.6.4. Herramienta analítica Bloque 4: Punto 8

En el análisis de este ítem se identificaron de forma general, los procesos que los maestros en formación desean utilizar en las actividades que ellos proponen como tareas de estimación de medida. Resaltamos algunas estrategias mencionadas en la tabla 4.6 y otros procesos que se confundan con estimación de medida tales como los cálculos y las mediciones.

4.3. Resultados del análisis

4.3.1. Bloque 1: Puntos 1 y 2

En la tabla 4.7., se enseñan las respuestas con las correspondencias entre éstas y las categorías mencionadas en la tabla 4.5., además, se especifican las frecuencias correspondientes a las respuestas dadas por los alumnos y un ejemplo de las mismas.¹

Tabla 4.7. Análisis Bloque 1.

Categorías	Sub categorías	Frecuencia	Ejemplo
Acción Mental	Un proceso matemático	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E9, E10, E11, E12, E13, E15, E19, E21, E22	Estimar una medida consiste en, a partir de observaciones y comparaciones entre un objeto X con una posible unidad de medida, dar posibles medidas del objeto X, que se acerquen a la medida real de este objeto. Las posibles medidas de un objeto X, que se acerquen a la medida real de este objeto, obtenidas a partir

¹ En el Anexo 1 presentamos las transcripciones de todas las respuestas con su correspondiente codificación, usando las etiquetas.

			de observaciones y comparaciones entre un objeto X con un posible 'patrón' de medida. (P, R)
	Una habilidad cognitiva	E14, E16, E18	Suponer la medida de una figura u objeto, por medio de la visualización sin usar reglas, ni metros ni ningún elemento de medición. Dar una medida aproximada de un objeto sin necesidad de usar elementos de medición. (H,V,S)
	Un juicio de valor	E7, E8	Previamente se tiene que tener claro cuál será el atributo medible de cierto objeto y luego establecer una unidad de medida, con esto se procede a caracterizar el objeto con una cantidad medible. Establecer la cantidad de unidades que hay en un objeto medible, a partir de una unidad dada y un atributo a medir. (J,R)
Resultado	Un valor	E2, E3, E4, E5, E6, E9, E10, E11, E12, E14, E15, E16, E17, E18, E20, E21	Considero que es dar un valor aproximado de acuerdo a lo que creemos que mide algo. La estimación de medida es el dar un valor que se considere acertado para cierto objeto. (V)
	Un rango de valores	E1, E7, E8, E19, E22	Consiste en aproximar o dar valores cercanos sin el uso de algún instrumento de medición. Aproximar o dar valores al objeto tratado.(P,R,S)
Herramientas	Sin herramientas	E1, E2, E3, E16, E18	Suponer la medida de una figura u objeto, por medio de la visualización sin usar reglas, ni metros ni ningún elemento de medición. Dar una medida aproximada de un objeto sin necesidad de usar elementos de medición. (H,V,S)
	Con herramientas no estandarizadas	E5,E17	Es dar una aproximación de la medida de alguna cosa usando los recursos que tengamos que no necesariamente son metros o reglas, podemos estimar usando cualquier otro patrón. Estimar una medida es dar una aproximación a la medida exacta de algo, por medio de un patrón de medida que nosotros elegimos(P,V,E)
Otros		E13	Acción de calcular y contar algo según un patrón o unidad establecido. (O)

En la tabla 4.7., se puede ver que 15 de los maestros en formación, conciben la estimación de medida como un proceso o actividad matemática. De estos, sólo una persona relaciona la

estimación con otras acciones como visualizar y comparar, sin vincularla con la aproximación, mientras que los demás sí hicieron esta vinculación. Dada la idea final de la sección 1.5.5., podemos decir que 14 personas de los que contestaron el cuestionario, confunden la estimación con una estrategia de la misma.

Las tres personas que consideraron la estimación como una habilidad, la relacionan con la predicción, suposición y especulación. Decimos que estos enfoques son habilidades, porque estarían enmarcados en la pregunta “¿qué tan hábil es una persona para predecir, especular o hacer una suposición?”.

Por otro lado, las dos personas que respondieron que la estimación es un juicio de valor, hicieron referencia a que, dado un atributo medible de un objeto, la estimación debe determinar la medida lo más cercano posible a la medida real. Categorizamos este enfoque como un juicio de valor, puesto que fueron explícitos en el bajo error que debe haber entre la estimación y la medida real de un objeto.

Respecto al tipo de resultados, donde se pretendía evidenciar si los estudiantes veían la necesidad de ser explícitos con respecto a establecer específicamente un valor o un rango de valores, se observa que 16 estudiantes se inclina por proponer un solo valor al hacer la estimación mientras que solo cinco optan por referirse a abarcar un rango de valores.

Este resultado puede ser debido a la posible confusión entre estimación y aproximación; es decir, al hablar de estimación como una posible aproximación se hace necesario establecer un único valor dejando a un lado posibles intervalos de medidas como es el caso. Cabe aclarar que un maestro en formación (E13) no hizo referencia al tipo de resultado.

Entre las respuestas encontramos 15 estudiantes que no mencionaron el uso o no de herramientas o el uso de herramientas no estandarizadas; dichas respuestas no se tomaron en cuenta al analizar la categoría “herramientas”. Entre las personas que sí hicieron referencia a esta categoría, encontramos tres posiciones distintas sobre lo que los docentes en formación consideran como usar o no usar herramientas:

1. Que la estimación se debe hacer sin el uso de algún instrumento de medición; esta posición corresponde a las personas que fueron explícitas al decir que al estimar se realizan procesos que no involucran el uso de herramientas; además, no señalan un método diferente para estimar sin herramientas.
2. Que la estimación se puede realizar mediante la visualización. Esta posición corresponde a las personas que claramente dijeron que no es necesario el uso de herramientas, pues solo es necesario observar el objeto a estimar y dar un valor.
3. Qué la estimación se puede realizar con cualquier tipo de herramienta. Estas personas fueron explícitas en señalar que la unidad de medida de la estimación, puede ser o no estándar.

De las respuestas otorgadas por los futuros docentes de matemáticas, solo una (E13) se aleja totalmente de las categorías de análisis, puesto que vincula la estimación con la acción de calcular y contar, dada una unidad de medida. Por lo tanto, nosotros inferimos que esta percepción se acerca más al proceso de medición y no tiene alguna relación con el proceso de estimación considerado para este trabajo.

4.3.2. Bloque 2: Puntos 3, 4, 6 y 7

Realizamos el análisis de las respuestas correspondientes a los puntos del segundo bloque, en dos partes. La primera, fue un análisis de los puntos 3 y 4, que se dividió en dos secciones: una para incluir en la concepción de estimación de medida de los futuros docentes, las estrategias que llevan a cabo para resolver tareas de estimación; esta sección contempla el ítem (ii) del cuestionario. La segunda sección, para identificar qué propiedades de la estimación de medida destacan los participantes en las actividades que desarrollaron; esto se evidencia en los ítems (iii) y (iv) del instrumento de recolección de datos.

4.3.2.1. Ítem (ii) de los puntos 3 y 4

De igual manera que en el análisis presentado en la sección 4.3.1., en la tabla 4.8. se enseñan las respuestas del ítem (ii), de los puntos 3 y 4, clasificadas según las categorías

mencionadas en la tabla 4.6.; además, se presentan las frecuencias correspondientes a las respuestas dadas por los estudiantes y un ejemplo de las mismas.

Tabla 4.8. Análisis del Ítem (ii) en el tercer y cuarto punto.

Categorías	Sub categorías	Punto 3		Punto 4	
		Frecuencia	Ejemplo	Frecuencia	Ejemplo
Comparación	Punto de referencia	E4, E9, E11, E12, E13, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21	Tomé la unidad de la izquierda y estimé el largo de sus lados, luego estimé más o menos el mismo largo sobre el rectángulo en uno de sus lados y en la base y luego tomé $b \times h = \text{Área}$ (ER)	E4, E7, E9, E14, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22	Como conozco la inclinación de los ángulos más frecuentes (30°,45°,60°,90°) pueda hacer una comparación y decir aproximadamente cual podría ser su medida (ER)
Reestructuración	Magnitud Accesible	E5, E8, E10	Tomé la medida del cuadrado inicial y superpuse esa medida en el rectángulo, lo cual me dio 3,5 aproximadamente de largo y un poco más de 2 de ancho y luego multiplicamos dichas cantidades (EA)	E1, E2, E3, E6, E10, E11, E15	Primero trazaría el rayo opuesto a alguno de los rayos del ángulo para tener una referencia, luego trazaría una perpendicular a esa recta por el punto de origen para así ir aproximando la medida del ángulo. (EA)
	Cuadrícula	E1, E2, E3, E7, E9, E10, E14, E16.	Sobreponer los cuadrados de área 1 sobre el rectángulo y luego sumar las áreas de todos los cuadrados. (EC)	0	
	Descomposición y composición del objeto	E6	Identificar la medida de las caras del rectángulo, luego utilizar las fórmulas para... (ED)	E3, E6	Trazaría una semirrecta con un origen común en el vértice del ángulo perpendicular a uno de los lados. Luego hallaría la bisectriz de dicho ángulo recto para saber si el ángulo dado es mayor, igual o menor a 45°. De ser mayor o menor, seguiría tratando las bisectrices para ir acotando el valor del ángulo dado(ED)
Otros		E22	Con una hoja de papel medí primero el área de la unidad y según esta medida de la unidad medí el área del rectángulo, viendo cuantas veces cabía el área de la unidad en la del rectángulo. (O)	E5, E8, E12, E13	Tomaría un transportador y pondría el cero sobre uno de los rayos del ángulo (el rayo superior) y luego marcaría cuánto marca el rayo inferior, este número marcado determinara la medida del ángulo. (O)

Respecto de la categoría “Comparación” en el tercer punto, 12 estudiantes resolvieron esta actividad como era de esperarse, ayudándose de un referente como unidad de medida, (ver el ejemplo en la tabla 4.8.). Aunque la misma actividad presentaba una unidad de referencia, que es el cuadrado de área 1, no se impusieron restricciones sobre cuál podría ser el referente para solucionar la tarea de estimación de medidas.

Encontramos dos formas en las que los 12 futuros docentes usaron la unidad de referencia. Una, fue comparar la superficie de tamaño 1 del referente con el rectángulo al cual se pedía estimar el área. Otra, como se ilustra en el ejemplo de la tabla 4.8., fue usar las dimensiones del cuadrado de superficie 1 y sobreponer la medida estimada del largo del cuadrado, en el largo del rectángulo; análogamente con el ancho de los cuadriláteros. Por último, al estimar las dimensiones del rectángulo, procedieron a realizar una operación para determinar su área.

En el cuarto punto, 11 personas resolvieron la tarea de estimar la medida del ángulo, usando la estrategia de unidad de referencia. Se puede observar que una persona no utiliza esta estrategia en comparación con el tercer punto, quizás debido a que en el enunciado de la pregunta no se da un referente del cual guiarse; por lo tanto, las 11 personas generan su propio punto de referencia. Todos los participantes que usan esta estrategia, utilizan como unidad de referencia el hecho de que dos rectas perpendiculares, generan cuatro ángulos rectos; en otras palabras, los maestros en formación construyen un ángulo recto. La única diferencia entre las respuestas, fue el modo que se usa, es decir, algunos comparan la medida del ángulo recto que construyeron directamente sobre el ángulo que se le solicita estimar la medida, pero otros, deciden construir la bisectriz del ángulo recto y comparar la medida del ángulo generado es decir, 45° , con la medida del ángulo a estimar.

Al comparar las respuestas del primer y segundo punto, con las del tercer y cuarto punto, de las 15 personas que resolvieron las actividades del tercer y cuarto punto mediante una unidad de medida de referencia, 9 consideran la estimación de medida como un proceso matemático, y 3 como una habilidad cognitiva. Se puede inferir que, en el tercer y cuarto punto, la mayoría de futuros docentes de matemáticas, no asocian la estrategia de punto de referencia con un juicio de valor. Cabe aclarar que los 3 restantes, no hicieron referencia al tipo de acción mental que es una estimación de medida.

Además, de los participantes que toman un referente para el punto 3 y 4, 10 consideran que la estrategia de unidad de referencia puede arrojar un único valor, mientras que solo 2 piensan que dicha técnica de estimación de medidas puede determinar un rango de valores.

Por otro lado, de los estudiantes que usan el referente como punto de comparación, solo dos vinculan esta estrategia con la estimación sin el uso de herramientas, y uno con el uso de herramientas no estandarizadas; es decir, que estas personas consideran el referente como herramienta no estandarizada de medición.

En el tercer punto, solo tres personas desarrollaron la estrategia de magnitud accesible, en la cual reestructuraron el rectángulo con otro objeto, al cual es más fácil estimarle la superficie. Como se evidencia en el ejemplo de la tabla 4.8., las tres personas comparan el rectángulo con un cuadrado al cual le estimaron el área. Y para decidir cuál es la medida del área del cuadrado, usan la estrategia de unidad de referencia.

En el cuarto punto, cuatro estudiantes más que en el punto 3, utilizaron la técnica de magnitud accesible para estimar la medida del ángulo. Como se ilustra en el ejemplo de la tabla 4.8., los 8 estudiantes construyeron un ángulo complementario y adyacente al ángulo al cual se estaba estimando la medida. A partir de esta construcción, estiman la medida interpretando los dos ángulos como par lineal.

En contraste con la clasificación de las respuestas del primer y segundo punto, de los 9 maestros en formación, que solucionan la tarea del tercer y cuarto punto por la estrategia de magnitud accesible, ocho determinan que estimar una medida, mediante la reestructuración de lo que se quiere estimar, hacia una magnitud más fácil de estimar, es un proceso matemático. Podemos afirmar que ningún docente en formación, considera, que la estimación mediante reestructuraciones es una habilidad cognitiva o un juicio de valor.

Mientras tanto, 7 estudiantes que desarrollan el tercer y cuarto punto, bajo una estrategia de magnitud accesible, consideran que esta técnica arroja un único valor. Sólo un maestro en formación, piensa que esta estrategia propicia un rango de valores. Puesto que la magnitud que consideran accesible es un cuadrado que superponen visualmente, tres de los que usaron dicha magnitud asequible, consideran que estimar mediante esta estrategia implica

no usar herramientas; sólo un futuro docente considera que la magnitud accesible es una herramienta no estandarizada y se puede estimar haciendo uso de dicha herramienta.

Con respecto a la subcategoría de cuadrícula encontramos 8 personas que trabajan con dicha estrategia. El proceso que siguen es sobreponer los cuadrados que corresponden a la unidad de referencia y luego suman la cantidad de cuadrados superpuestos. Como se mencionó, lo que hacen es fragmentar el área en varias partes iguales, y luego hallan el área de la figura generando la multiplicidad. Como no existía la cuadrícula en el papel del cuestionario, es allí donde se realiza la estimación, con las partes sobrantes del rectángulo. En el punto 4 no se encuentra evidencia de que algún maestro en formación utilice esta estrategia.

Con respecto a la definición que proponen las 8 personas que desarrollan la estrategia de cuadrícula, resaltamos que estas consideran la estimación como una aproximación de un valor de longitud, área o volumen, lo que estaría acorde con su respuesta en este ítem.

En la subcategoría de descomposición y composición del objeto, en el ítem tres solo se encuentra una respuesta. En esta se manifiesta que la persona estima las medidas de las caras de los rectángulos, para luego hacer uso de fórmulas ya conocidas y encontrar el área. De forma similar que la técnica de cuadrícula, lo que realiza es la extracción mental de la figura descomponiendo sus lados para hacer la respectiva comparación con la unidad de medida y estimar el área total a partir de cálculos. En cambio en el ítem cuatro, se encuentran cuatro respuestas que manifiestan un proceso de composición y descomposición de la figura para identificar ángulos conocidos, como lo son los ángulos de 90° y de 45° a partir de rectas perpendiculares y bisectrices.

Con respecto a la definición que plantearon las personas E3 y E6, y su proceso de desarrollo, se puede resaltar que consideran que la estimación consiste en aproximar el valor de una medida a través de un método empírico de comparación con una medida conocida. Dícese del proceso en el que se busca aproximar el valor de una medida desconocida a partir de una conocida, lo que es coherente con el proceso que llevaron a cabo.

En el tercer punto, solo una persona (E22) contestó de manera tal que no se puede clasificar su respuesta en la categoría de comparación ni de reestructuración, debido a que se hace referencia a la acción de medir utilizando una hoja de papel. Esta persona considera que la estimación consiste en dar posibles medidas a un objeto a partir de comparaciones y observaciones, lo que contradice con su proceso a seguir para la solución de este ítem. Respecto a la confrontación del proceso realizado con nuestra definición, podemos resaltar que no se estaría haciendo una estimación debido a que establece el valor de la medida haciendo uso de una herramienta estandarizada.

En el cuarto punto, cuatro personas (E5, E8, E12, E13) contestaron de manera tal que no se pueden clasificar sus respuestas en la categoría de comparación ni de estructuración, debido a que hacen uso de otras estrategias no contempladas en nuestras categorías, como son la acción de medir con instrumentos adecuados para el trabajo con ángulos. Estas personas no hacen una estimación y establecen unidades de referencia diferentes, como lo son el trabajo con rectas que permiten el acceso a identificar cuadrantes de medida, entre otros.

4.3.2.2. Ítem (ii) de los puntos 6 y 7

Continuando con el análisis de las respuestas del segundo bloque, en la tabla 4.9., presentamos de manera análoga a la tabla 4.8., las respuestas de los puntos 6 y 7 de los 22 futuros maestros de matemáticas.

Tabla 4.9. Análisis del ítem (ii) en el sexto y séptimo punto.

Categorías	Sub categorías	Punto 6		Punto 7	
		Frecuencia	Ejemplo	Frecuencia	Ejemplo
Comparación	Punto de referencia	E4, E5, E9, E10, E12, E13, E17, E18, E19, E20, E21	Poner el clip sobre el cucharon y contar cuantas veces toca repetir el proceso para poder abarcar toda la medida del cucharon (ER)	E1, E4, E6, E15, E16, E19, E20	Escoger la medida a partir de que la persona que la use sea un joven en promedio de altura de 1.50 cm (ER)
Reestructuración	Magnitud Accesible	0		E3, E7, E17	Tracé dos rectas “paralelas” una por la parte superior y otra por la parte inferior, después una “perpendicular” a una de ellas y con una estimación a ojo de lo que un cm, le dé un valor aproximado (EA)
	Cuadrícula	E6	Tratar de estimar la medida del largo del cucharon con el clip dado en el cuadro, hice una copia del largo en un papel del clip “aproximado” y realice la medida del largo del cucharon (EC)	0	
	Descomposición y composición del objeto	E16	Intenté dividir la cuchara en tantas veces cupiera el clip luego multipliqué la cantidad de veces estimada por 2 para obtener la medida en centímetros (ED)	E18	Miro las medidas que me dan, al ser una bicicleta no puede medir 2m porque nadie es lo suficientemente alto para poder montarla, tampoco mide 25 cm o menos porque es muy pequeña y normalmente las ciclas para niños no tienen suspensión y el manubrio mas bajo que el sillín, por ende la medida sería casi 1 m
Otros		E1, E2, E3, E7, E8, E11, E15, E22	Con una hoja de papel hice como una clase de regla donde la unidad de medida no era el usual centímetro sino el clip. Después de hacer la regla medí la cuchara tratando de medirla teniendo en cuenta donde estaba el diámetro de la parte circular de la izquierda. Comparé y llegué a la conclusión que deben ser como 7 clips, o sea, más o menos 14 cm. (O)	E2, E5, E8, E12, E13, E21, E22	Calculé cuánto era más o menos la medida que daban todas las opciones, y tres de los cuatro son muy pequeñas y asumiendo que la bicicleta es de verdad, di la opción más grande. (O)

La mitad de los participantes desarrollaron el sexto punto mediante la estrategia de punto de referencia. Se puede decir que fue casi la misma cantidad de maestros en formación (8) que resolvieron la tarea con otros procesos o estrategias diferentes a los señalados en la tabla 4.6. La forma en que usaron el referente, los 11 participantes que desarrollaron la técnica punto de referencia, fue la misma; es decir, todos ellos utilizaron el clip dado en la actividad y que se había indicado que medía 2 centímetros, y lo iteraron mentalmente a lo largo del cucharón.

Sobre las respuestas de los futuros docentes de matemáticas al séptimo punto, 7 realizaron esta actividad mediante una unidad de referencia. Las formas en que tomaron tal unidad fueron distintas; algunos interpretaron la instrucción como la estimación de la altura de la bicicleta que estaba en la imagen del cuestionario, mientras que otros asumieron que tocaba estimar la altura de una bicicleta real. Los que pensaron que era la bicicleta de la imagen, utilizaron como referente las cuatro respuestas, en el sentido de que recrearon un objeto que tuvieran de longitud cada una de las opciones presentadas; luego compararon dicho objeto con la imagen y dedujeron sus estimaciones. Por otro lado, los futuros docentes que interpretaron la instrucción como la estimación de una bicicleta real, compararon la altura de una bicicleta para gente mayor y también bicicletas para niños, con las alturas de una persona promedio colombiana, o con su misma altura, tal y como se evidencia en el ejemplo de la tabla 4.9.

En comparación de las respuestas del sexto y séptimo punto con las del primer y segundo punto, 12 maestros en formación consideraron que el uso de un punto de referencia explícito o mental, en una estimación, implica que estimar es un proceso matemático, mientras que 2 de los participantes, consideran que la estimación de medida es una habilidad cognitiva. Por lo que deducimos que para ningún futuro docente de matemáticas, estimar mediante un punto de referencia, sea un juicio de valor.

También, trece de los quince maestros consideraron que la estimación de medida realizada mediante el uso de un referente en los dos puntos, arroja como resultado un único valor. En cambio, solo 2 participantes perciben que el resultado de la estimación mediante esta técnica, es un rango de valores.

Además, comparando las consideraciones que tienen los 22 maestros en formación sobre el uso de herramientas al momento de estimar una medida, en función de las respuestas que otorgaron ellos en el sexto y séptimo punto, podemos ver que de los 15 que solucionaron la actividad de estos puntos mediante un punto de referencia, 3 de ellos consideraron que usar un punto de referencia implica no usar herramientas de medición, pero solo un participante piensa que esta estrategia implica que estimar una medida se puede lograr mediante el uso de herramientas no estandarizadas.

Como se muestra en la tabla 4.9., no encontramos ningún estudiante que desarrollara la estrategia de magnitud accesible en la tarea del sexto punto, pero sí identificamos que 3 si la desarrollaron en el séptimo punto. De estas tres personas, una considera que estimar una medida mediante el uso de una magnitud accesible, es un proceso matemático; mientras que otra lo percibe como un juicio de valor. Por lo cual, observamos que ningún estudiante asoció la acción de estimar una medida, con una habilidad cognitiva. Además 2 de ellos, creen que estimar mediante una magnitud accesible arroja un único valor, pero solo uno considera que el resultado de estimar mediante esta técnica, es un rango de valores. Solo uno de estos tres maestros asimila que usar un objeto el cual se le pueda estimar una magnitud de forma más sencilla, implica no usar una herramienta de medida, por otro lado, una persona garantiza que usar dicho objeto, implica usar una herramienta de medición no estandarizada.

Con respecto a la subcategoría de cuadrícula, encontramos solo una persona que trabajó dicha estrategia. El proceso que llevó a cabo consiste en tratar de estimar la medida del largo del cucharón con el clip dado en el cuadro, hacer una copia del largo del clip en un papel y realizar la medida aproximada del largo del cucharón. Lo que realizó fue fragmentar el largo del cucharón en varias partes iguales con la forma ya conocida de la unidad, y luego halló la medida realizando la multiplicidad de la unidad; como no es una medida exacta, es allí donde se realiza la estimación. Con respecto a la definición que planteó aquella persona y su proceso de desarrollo, se puede resaltar que considera la estimación como una aproximación de un valor de longitud lo que estaría acorde con su procedimiento.

Con respecto a la subcategoría de descomposición y composición del objeto, en el ítem 6 solo encontramos una respuesta, el docente manifiesta un proceso de descomposición al intentar dividir la cuchara en tantas veces como cupiera el clip y luego realiza la debida multiplicación por la medida dada. Al igual que en el ítem seis, en el siete solo encontramos una respuesta. En esta se manifiesta una descomposición y composición de la medida de la bicicleta, utilizando como medida de referencia la altura promedio de una persona. Como ya se argumentó anteriormente, lo que realizan en los dos ítems es la extracción mental de la figura, descomponiendo sus lados para hacer la respectiva comparación con la unidad de medida y realizar la estimación solicitada.

Con respecto a la definición que plantearon las 2 personas y su proceso de desarrollo se puede resaltar que consideran que la estimación es dar una medida aproximada de un objeto sin necesidad de usar elementos de medición; señalan que solo observando el objeto que se va a medir, se puede especular cuánto puede llegar a ser el valor, según la unidad de medida que se esté usando, lo que estaría acorde con su proceso de solución.

En el sexto punto, ocho personas (E1, E2, E3, E7, E8, E11, E15, E22) contestaron de manera tal que no se pudo clasificar su respuesta en la categoría de comparación ni de reestructuración, debido a que lo que hicieron fue un proceso de medición, exponiendo que toman el largo del clip con algún tipo de herramienta y la superponen. Respecto a la confrontación de sus procesos realizados con nuestra definición, podemos resaltar que, al igual que en ítems anteriores, no se estaría haciendo una estimación debido a que establece el valor de la medida haciendo uso de alguna herramienta.

En el séptimo punto, siete personas (E2, E5, E8, E12, E13, E21, E22) contestaron de manera tal que no pudimos clasificar sus respuestas ni en la categoría de comparación ni de estructuración, debido a que manifestaban solo un proceso deductivo en cuanto a descartar las medidas dadas sin argumentar el porqué. Otro contestó argumentando procesos de conversiones de medidas lo que lo llevaba a una opción de respuesta. Estos procesos no nos dejan evidenciar alguna relación entre la concepción que tienen de estimación y su proceso a desarrollar.

4.3.2.3. Ítem (iii) y (iv) de los puntos 3 y 4

En la tabla 4.10., presentamos una categorización de las respuestas dadas a los puntos 3 y 4, de los 22 futuros docentes de matemáticas que contestaron el cuestionario, particularmente observaremos las respuestas correspondientes a los ítems (iii) y (iv) de estos puntos. En esta tabla se evidencia la frecuencia de las respuestas de los docentes que creyeron que sí era una tarea de estimación de medida, y los estudiantes que no consideraron que era actividad de estimación de medida. Además, haciendo énfasis en la herramienta analítica utilizada anteriormente, realizamos la clasificación de su argumento para evidenciar los atributos mencionados en la definición.

Tabla 4.10. Análisis del ítem (iii) y (iv) en el tercer y cuarto punto.

Categorías	Sub categorías	Punto 3		Punto 4	
		Sí	No	Sí	No
Acción Mental	Un proceso matemático	E1, E2, E3, E4, E5, E9, E10, E11, E15, E19, E21	E12, E18, E20	E1, E2, E3, E6, E9, E10, E15, E16, E20, E21	0
	Una habilidad cognitiva	E7, E16		E5, E14	
	Un juicio de valor	E22		0	
Resultado	Un valor	E1, E7, E21		E2, E16, E19, E20	
	Un rango de valores	0		E3, E4	
Herramientas	Sin herramientas	0		E1, E2, E4, E6, E7, E10, E12, E17, E18, E19, E21	
	Con herramientas no estandarizadas	E2, E3, E4, E5, E7, E10, E11, E16, E21		E,14, E16, E22	
Otros		E6, E8, E9, E13, E14, E17	E8, E11, E13		

Como se puede observar en la tabla 4.10., la mayoría de maestros en formación consideran que las tareas de los puntos tres y cuatro, son de estimación de medida porque tuvieron que realizar un proceso matemático. De esto podemos decir que la mayoría de los participantes tienen la misma concepción de estimación de medida como acción mental, que nuestra definición elaborada. Sin embargo, cabe resaltar que al igual que en las respuestas del primer y segundo punto, muchos argumentaron que estimar es aproximar una magnitud,

cosa que desde nuestro punto de vista es impreciso, porque como recalcamos desde el capítulo 1, el proceso de aproximar hace parte del proceso de estimar.

Por otro lado, 4 estudiantes dijeron que las tareas del tercer y cuarto punto eran de estimación de medida porque pusieron en práctica una habilidad cognitiva y usaron palabras como “predecir” y “adivinar” como acciones para estimar el área del rectángulo (punto 3), o la medida del ángulo (punto 4). Además, solo una persona describió que en el tercer punto realizó una estimación, porque llegó a una medida del área del rectángulo, que se acercó bastante a la medida real. Este tipo de argumento lo consideramos como un juicio de valor, cosa que difiere con nuestra definición de estimación de medida.

Como se puede ilustrar en la tabla 4.10., pocas personas resaltaron el tipo de resultado que los llevó el estimar. Pero estos 7 futuros docentes de matemáticas identificaron que la estimación arroja un único valor, mientras que solo dos, develaron en sus respuestas que sus estimaciones dieron como resultado, un rango de valores. No creemos que haya algún contraste con nuestra definición construida de estimación de medida, puesto que consideramos que una estimación puede entregar un único valor como también un rango de valores.

Por otro lado, 9 de los participantes expusieron en sus respuestas del tercer punto, que una estimación se puede dar mediante el uso de herramientas no estandarizadas, fueron explícitos en el uso de un punto de referencia como unidad de medida, más no en el uso de reglas o elementos cotidianos de medición. Además, en el cuarto punto la mitad de los maestros en formación, también consideraron que una estimación se puede realizar sin el uso de ninguna herramienta. Es decir, que la concepción de estimación de medida para ellos, no está limitada en el uso de herramientas no estandarizadas o no usar ninguna herramienta.

Mientras tanto, encontramos que una minoría de futuros docentes de matemáticas, interpretó sus estimaciones con propiedades del proceso de medición; es decir, argumentaron que las tareas realizadas en el punto 3 y 4, eran de estimación de medida, porque se utilizaba una unidad de medida y con ésta, medían las dimensiones del rectángulo (punto 3), para luego ejecutar una operación. Estas personas determinaron su

enfoque de la estimación de medida, en la necesidad de saber la medida de la magnitud de un objeto, bajo procesos de medición que les permitan llegar a la medida exacta del atributo a “estimar”.

Por último, solo 3 estudiantes encontraron que la actividad del punto 3, no era de estimación de medida. El argumento que expusieron en general, fue el uso del punto de referencia, que en este caso, era el cuadrilátero de superficie 1. No consideraron que la tarea fuera de estimación de medida porque la iteración del referente de manera mental, los llevó a pensar que estaban haciendo un proceso algorítmico de medición. Por lo cual sugirieron que se presentara una situación donde no fuera fácil la comparación de un punto de referencia con la magnitud a estimar, o que simplemente en la tarea, se eliminara el cuadrilátero de superficie 1. De esta situación, se puede inferir que estos 3 maestros en formación no conciben la estimación de medida como un proceso matemático, debido a la acción de iterar una unidad de referencia para estimar una medida.

4.3.2.4. Ítem (iii) y (iv) de los puntos 6 y 7

En la tabla 4.11., presentamos una categorización de las respuestas a los ítems (iii) y (iv) de los puntos 6 y 7, de los 22 futuros docentes de matemáticas que contestaron el cuestionario. En esta tabla se evidencia la frecuencia de las respuestas de los docentes que creyeron que sí era una tarea de estimación de medida, y los estudiantes que no consideraron que era actividad de estimación de medida. Además, haciendo énfasis en la herramienta analítica utilizada anteriormente, realizamos la clasificación de su argumento para evidenciar los atributos mencionados en la definición.

Tabla 4.11. Análisis del ítem (iii) y (iv) en el sexto y séptimo punto.

Categorías	Sub categorías	Punto 6		Punto 7	
		Si	No	Si	No
Acción Mental	Un proceso matemático	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E11, E15, E20, E21	0	E2, E3, E5, E8, E9, E10, E11, E17, E18, E19, E22	E1, E4, E7, E15, E16, E21
	Una habilidad cognitiva	0		0	
	Un juicio de valor	E9		0	
Resultado	Un valor	E2, E3, E4, E5, E15		0	

	Un rango de valores	0		E3	
Herramientas	Sin herramientas	0		E19	
	Con herramientas no estandarizadas	E2, E6, E11		0	
Otros		E18, E19, E22		E6, E12, E13, E20	

En el análisis de las respuestas del ítem (iii) y (iv) de los puntos seis y siete podemos observar que la mayoría de los participantes consideran que las tareas propuestas son de estimación de medida porque tuvieron que realizar un proceso matemático. Resaltamos que en sus respuestas se sigue evidenciando que consideran que estimar es aproximar una magnitud.

Solo un maestro en formación, en el punto seis, manifiesta que establece la estimación a partir de un juicio de valor que realiza con los datos establecidos. Del punto siete observamos que no se hace alusión a la acción mental de juicio de valor. En los dos puntos según las respuestas, no se maneja un tipo de habilidad cognitiva en el momento de dar solución a la tarea o en el argumento del ítem.

Respecto a la categoría de resultados, en el punto seis encontramos que cinco respuestas hacen alusión a establecer un único valor a partir del proceso matemático desarrollado, en cambio no se hace alguna mención de establecer un rango de valores. En el punto siete pasa lo contrario al punto seis, una respuesta hace alusión a establecer un rango de valores a partir del proceso de comparación que desarrolla para dar solución a la tarea y no se hace alguna mención directa de establecer un único valor como resultado de la estimación. Podemos inferir que los maestros no son consistentes en la apreciación que tienen al respecto.

Por otro lado, en la categoría de herramientas encontramos que en el punto seis solo se hace mención a la subcategoría de herramientas no estandarizadas, 3 estudiantes describen en su proceso de desarrollo el uso de la medida dada, a partir de objetos caseros que permitían el traslado de esta. En el punto siete solo se hace mención en las respuestas, a la subcategoría sin herramientas, donde un estudiante argumenta que a partir de su proceso matemático realiza la estimación porque no mide con ayuda de metros, reglas, etc.

Como se puede observar en la tabla, encontramos 7 respuestas que hacen parte de la categoría “otros”. En el punto seis la respuesta correspondiente a E22 y en el punto siete las respuestas correspondientes a E12 y E13 no argumentan su respuesta al ítem, de las respuestas E18 y E19 del punto seis y E6 y E20 del punto siete, no encontramos algún argumento que nos permitiera clasificarla en las anteriores categorías, esto debido a que no hacían referencia a la acción mental desarrollada, el tipo de resultado o la herramienta a utilizar en la solución de la tarea.

Por último, encontramos que en el punto seis todos los participantes consideran que la tarea presentada es una tarea de estimación. En el punto siete solo seis futuros docentes consideraron que no era una tarea de estimación, argumentando que solo era necesario realizar la escogencia de la respuesta, sin llevar a cabo alguna estimación.

4.3.3. Bloque 3: Punto 5

En el análisis de las respuestas del cuestionario, encontramos que 14 maestros en formación (E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E11, E15, E16, E17, E19, E22) determinaron que la tarea del quinto punto, era de estimación de medida, es decir, confundieron la actividad de medir con la de estimar una medida.

Entre estas 14 respuestas existieron dos tipos de argumentos del porqué sí consideraron que la actividad era de estimación:

- La primera, era porque estaban utilizando un elemento que no es usual para medir, en este caso, el clip.

“Si, porque se apoyó en un objeto casero o que tenía a la mano para aproximar la medida” (E2)

Como se puede evidenciar en esta respuesta otorgada por E2, se confunde medición y estimación de medida, solo por el hecho de usar una herramienta no estandarizada.

- La segunda, porque explicaron que en todo proceso de medición, siempre habrá una incertidumbre y jamás se tendrá la medida exacta de una magnitud. Por lo cual, al no ser exacta esta medida, ellos la consideraron como una estimación.

“Si, por que en realidad nos estamos basando en un dibujo que realmente no se sabe si mide exacto o no pero se puede aproximar” (E4)

Mientras tanto, 7 futuros docentes de matemáticas (E1, E10, E12, E14, E18, E20, E21) argumentaron que en el quinto punto no se estaba haciendo una actividad de estimación de medida. De manera general, sus respuestas se centraron en que la cadena de clips mostrada en la tarea, asumía un papel similar al de una regla, considerándolo así como una herramienta estandarizada de medición con una unidad de medida diferente, en la cual solo tocaba contar cuantos clips median la longitud del cucharón.

“No, porque tengo los clips casi superpuestos y haciendo la función de una regla entonces se cuál es la medida concretamente” (E1)

De este análisis, cabe aclarar que el estudiante E13, no dio respuesta a los ítems (iii) y (iv) del punto 5.

4.3.4. Bloque 4: Punto 8

De las actividades que propusieron los futuros docentes de matemáticas para la imagen implementada en el octavo punto, encontramos que 16 maestros en formación (E1, E2, E3, E4, E5, E8, E9, E11, E12, E13, E14, E17, E18, E19, E21, E22), proponen su actividad estimulando el uso un punto de referencia, como se puede evidenciar en esta respuesta:

“Teniendo en cuenta que la altura de la mujer es la altura promedio de las mujeres en Colombia, ¿Cuál cree que es aproximadamente la altura de la pared que está pintando? Justifique su respuesta.” (E22)

Por otro lado, 4 estudiantes (E6, E10, E16, E20) propusieron tareas que no hacen énfasis en algún tipo de estrategia de estimación, tampoco en qué tipo de resultados deben otorgarse, ni el tipo de herramientas que pueden utilizar, esto evidenciado en la siguiente respuesta:

“Asigne una medida que considere acertada para la altura de la puerta” (E20)

Analizando dos respuestas particulares (E7, E15) encontramos que estas no proponen una actividad de estimación de medida, sino actividades ligadas a otros procesos matemáticos como el cálculo numérico:

“Hallar la medida de la puerta si el cuadro del piso es un octavo de la ventana, la cual mide la mitad de lo que mide la puerta”

De este ejemplo, se puede identificar que la instrucción busca establecer un cálculo de la medida de la puerta, haciendo uso de la información dada.

4.3.5. Síntesis de la concepción de estimación de medida

Dada la información que presentamos en las secciones 4.3.2.1. y 4.3.2.2., la ilustramos en dos diagramas de árbol, respectivamente con el fin de mostrar la concepción de estimación de medida de los 22 futuros docentes de matemáticas de acuerdo a las estrategias señaladas en la tabla 4.6. y la tipificación encontrada en el capítulo dos y mostrada en la tabla 4.5. En cada aspecto contemplado en los diagramas de árbol, entre paréntesis se encuentran la cantidad de maestros de matemáticas en formación, que contemplaron dicho aspecto en su concepción de estimación de medida.

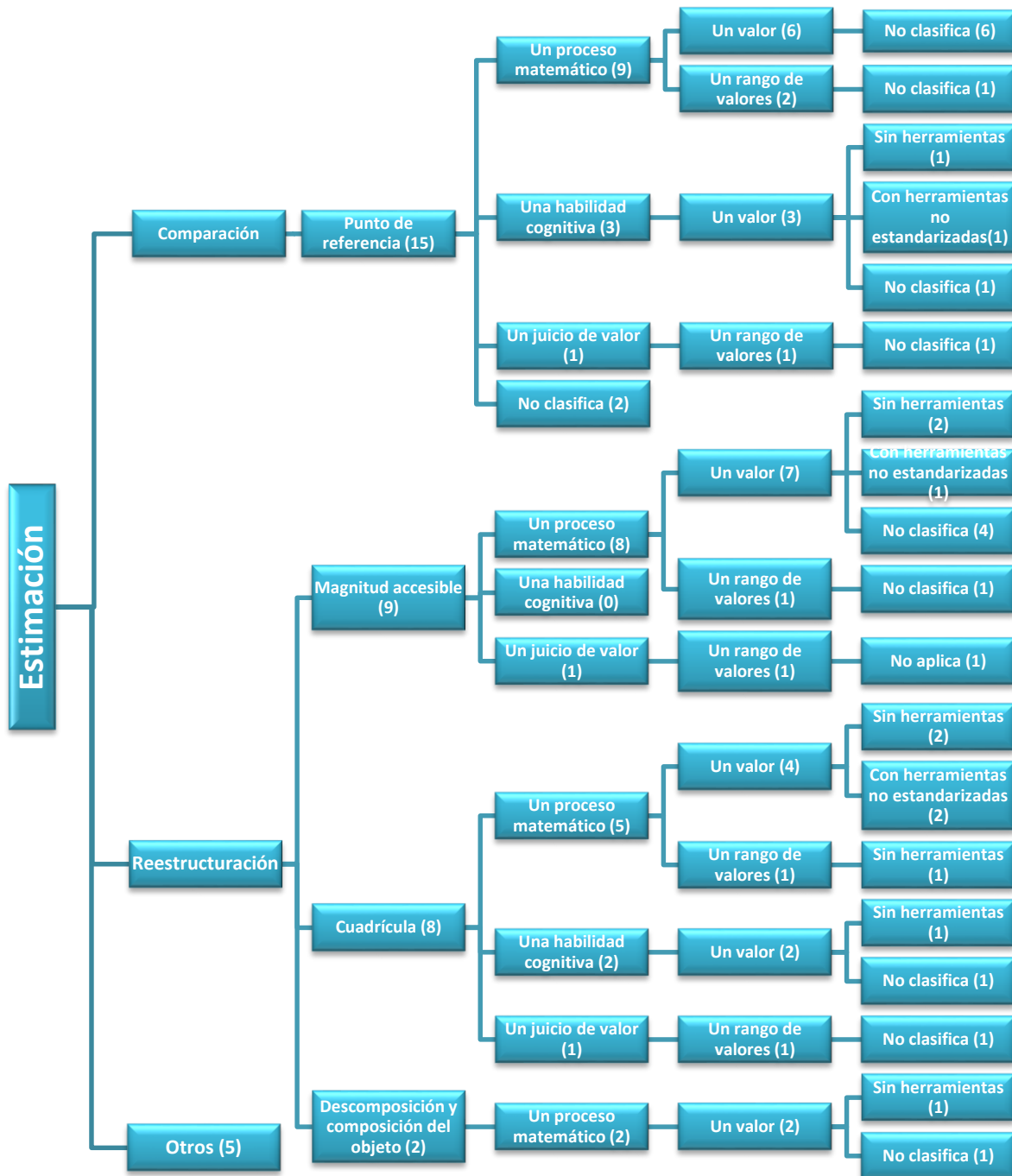


Figura 4.1. Diagrama de árbol de la sección 4.3.2.1.

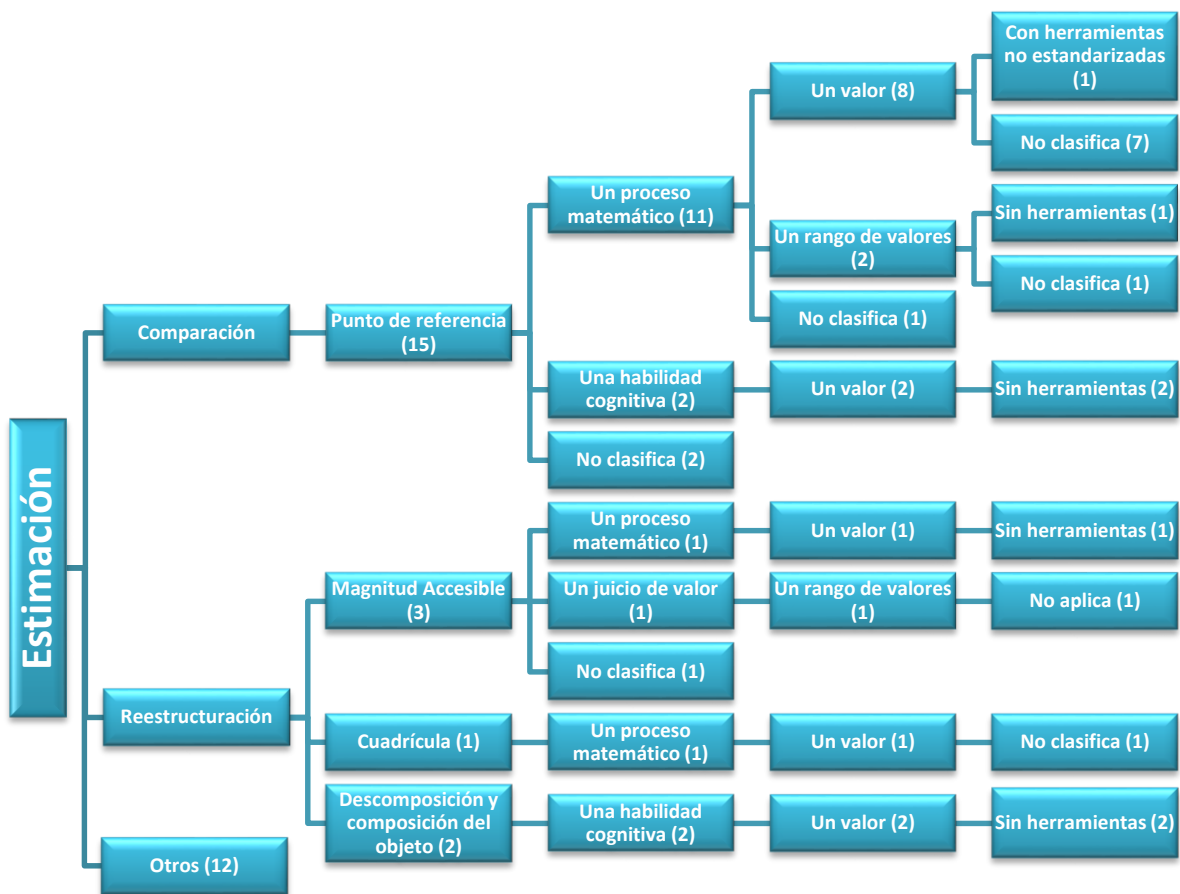


Figura 4.2. Diagrama de árbol de la sección 4.3.2.2.

5. Conclusiones

En este capítulo se reportan las principales conclusiones del estudio de indagación presentado en este documento, las cuales hemos organizado a partir de los resultados del estudio empírico que se encuentra en el capítulo 4. Debido a estos resultados, los otros tres capítulos de este trabajo de grado, son insumos para extraer conclusiones relacionadas con la pregunta ¿Cómo ampliar la concepción de estimación de medida que tienen los docentes en formación?

5.1. Conclusiones del estudio empírico

En general, los futuros docentes de matemáticas tienen una concepción de la estimación de medida pobre en sentido y significado, llegando a ser algo corta y hasta errada en comparación a lo que definimos como estimación de medida.

Con respecto al porqué consideramos que es errada, encontramos que, la mayoría de los maestros en formación confunden el proceso de estimar con otros procesos propios de las matemáticas, tales como medir una magnitud o aproximar un valor numérico. Se confunde con el proceso de medir cuando la herramienta que está en juego no es una herramienta estandarizada, en otras palabras, cuando se utiliza un objeto como patrón de medida diferente a una regla con un sistema de medición, los maestros en formación consideran que se realiza una estimación.

Por otro lado, se confunde con aproximar un valor numérico, porque no se tiene en cuenta de dónde proviene el valor que se desea aproximar; como se mencionó en el capítulo 1, aproximar puede hacer parte del proceso de estimar, pero no son lo mismo.

Consideramos que la concepción es corta, porque de manera general, los maestros en formación asimilan que la estimación de medida arroja un único valor como resultado, mas no conciben la idea de que este proceso puede generar un rango de valores, en el cual la medida real de la magnitud a estimar se encuentra en dicho rango. Se asume este proceso, con este tipo de resultado, con la idea de acotar una medida.

Además, calificamos como vaga la concepción que tienen los futuros maestros, ya que solo consideran en sus actividades el desarrollo de la estrategia de punto de referencia para estimar la medida de un objeto, dejando a un lado otro tipo de estrategias que pueden desarrollar habilidades motrices y visuales en sus futuros estudiantes.

5.2. Vías para la ampliación de la concepción de estimación de medidas

5.2.1. Estudio del campo de investigación sobre estimación de medida

El capítulo 1 nos permitió sacar las siguientes conclusiones:

Encontramos en la revisión documental gran variedad de investigaciones referentes a la estimación y estimación de medidas. Entre estas se pueden encontrar:

1. Las definiciones de estimación que se proponen.
2. Los tipos de estimación que se sugieren.
3. Ejemplos de actividades de estimación.
4. Aspectos didácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de la estimación.
5. Estrategias de estimación.

Entonces, proponemos que una manera de favorecer la concepción de estimación de medida de los futuros docentes de matemáticas de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional es acercarlos a este campo de investigación; es decir, que hayan espacios en el programa de la Licenciatura, para conocer estos estudios y poder entender de qué se trata este campo.

5.2.2. Construcción de una definición informada de estimación de medida

El capítulo 2 nos permitió observar que para tener una definición informada de estimación de medida, fue necesario revisar cada una de las definiciones e identificar a qué características principales hace referencia en relación con: una acción mental, el tipo de resultados y el uso de herramientas de medición no estandarizadas. Resaltamos la importancia de que los maestros en formación sigan un proceso de selección de estas características para la construcción de su propia definición de estimación de medida, para que su concepción sobre este proceso matemático no sea espontánea e informal.

5.2.3. Orientaciones curriculares para la escuela

De la revisión de los documentos curriculares nacionales, descrita en el capítulo 3, encontramos que la estimación es mencionada en los 5 pensamientos matemáticos que se desarrollan en la escuela, dándole relevancia a este proceso en el pensamiento numérico. Pero no hay claridad en qué definiciones de estimación se basan los documentos, por lo que existen contrastes en el uso de la estimación para cada pensamiento.

Es por esto que hacemos un llamado de atención al Ministerio de Educación Nacional como autores de los documentos curriculares, al cuidado y atención que le dan a las orientaciones que les otorgan a los maestros de matemáticas, en función a la estimación de medidas desde las referencias que hacen en los documentos.

Bibliografía

- Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013). On strategies for solving inconceivable magnitude estimation problems. En T. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 11-18). Conferencia llevada a cabo en la PME, Taipei.
- Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 16(3), 289-315.
- Albarracín, L., Gorgorió, N., y Pizarro, N. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Memorias del XVIII Simposio Español de Investigación en Educación Matemática*. (pp. 523-532). Simposio llevado a cabo en Universidad de Salamanca, España.
- Castillo, J., Castro, E., Molina, M., y Segovia, I. (2011). *Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie*. En J. Lupiáñez, M. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Rico, L., y Segovia, I. (1997). Investigación, Diseño y Desarrollo Curricular. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-276). Madrid: SINTESIS.
- Castro, C., y Segovia, I. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cazares Solórzano* (pp. 213-236). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Cortina, J., y Zuñiga, C. (2008). Ratio-like comparisons as an alternative to equal-partitioning in supporting initial learning of fractions. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. (pp. 385-392). Encuentro llevado a cabo en la Cinvestav-UMSNH, Mexico.
- Costa, B., y Porta, A. (1996). *La estimación, una forma importante de pensar en matemática*. Viedma: Consejo provincial de educación.
- Dagdilelis, V., y Papadopoulos, I. (2009). Estimating areas and verifying calculations in the traditional and computational environment. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 305-312). Conferencia llevada a cabo en la PME, Salónica.

- Eylon, B., Markovits, Z., y Rosenfeld S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 145-152). Conferencia llevada a cabo en la PME, Praga.
- Feito, M., y Martínez, J. (2011). Medidas de altura: trigonometría con cuerda, metro y móvil. *Suma*, 66, 35-40.
- Fiol, M., y Franco, J. (2003). *Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal*. En Castro, Encarnación (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. (pp. 161-170). Simposio llevado a cabo en la Universidad de Granada, Granada.
- Forrester, M., y Pike, C. (1996). The role of number sense in children's estimating ability. En British Society for Research into Learning Mathematics (Presidencia), *Proceedings of the Day Conference held at the Institute of Education*. (pp. 43-48). Conferencia llevada a cabo en la Institución de Educación, Londres.
- Forrester, M., y Pike, C. (1998). Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation analytic Approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 334-356.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: MEN
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- National Council for Teachers of Mathematics. (2008). *Reference Point Strategy*. Estados Unidos: NCTM.
- Núñez, J. (2005). Sobre la estimación en la enseñanza de las matemáticas y la cubicación de maderas como situación didáctica. *Números*, 62, 65-80.
- Volkova, T. (2013). Characterizing middle school students' thinking in estimation. En H. Chick y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 289-296). Conferencia llevada a cabo en la PME, Melbourne.
- Williamson, J. (2013). Young children's cognitive representations of number and their number line estimations. En A. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 401-408). Conferencia llevada a cabo en la PME, Kiel.

Anexos

Anexo 1: Respuestas del cuestionario transcritas de los 22 maestros en formación.

Primer y Segundo Punto.

E1: “Consiste en aproximar o dar valores cercanos sin el uso de algún instrumento de medición. Aproximar o dar valores al objeto tratado” (P-R-S)

E2: “Estimar es aproximar un valor de longitud, área o volumen a partir del conocimiento que se tenga, a ojo o por medios caseros. Es el proceso en el cual por medio de ayudas caseras se halla una cantidad representativa de algo” (P-V-S)

E3: “Consiste en aproximar el valor de una medida a través de un método empírico de comparación con una medida conocida. Dícese del proceso en el que se busca aproximar el valor de una medida desconocida a partir de una conocida” (P-V-S)

E4: “Es aproximar una medida con algo estándar (cm, m) en realidad no sabemos si mide lo que dice el metro o de pronto no alcanzamos a ver y su medida no es racional. Una estimación de medida es aproximar lo que más se puede una medida cualquiera”

E5: “Es dar una aproximación de la medida de alguna cosa usando los recursos que tengamos que no necesariamente son metros o reglas, podemos estimar usando cualquier otro patrón. Estimar una medida es dar una aproximación a la medida exacta de algo, por medio de un patrón de medida que nosotros elegimos” (P-V-E)

E6: “La acción de medir surge de la necesidad de saber la longitud, largo, ancho, etc. Definición de estimación de medida: Aproximación acerca de una medida sobre cualquier objeto” (P-V)

E7: Previamente se tiene que tener claro cuál será el atributo medible de cierto objeto y luego establecer una unidad de medida, con esto se procede a caracterizar el objeto con una cantidad medible. Establecer la cantidad de unidades que hay en un objeto medible, a partir de una unidad dada y un atributo a medir.” (J - R)

E8: Es establecer una cantidad o número lo más exacto posible a un objeto medible, tomando como referencia alguna unidad. Asignación numérica que se le da a un objeto con base en alguna unidad establecida previamente” (J - R)

E9: Consiste en hacer aproximaciones o manejar una unidad para la solución de la necesidad de comprar longitudes de objetos. Es la acción de dar una unidad de medida y en base a ella comparar longitudes.” (P-V)

E10: “La medida se estima para el cálculo de la longitud, para sacar una distancia entre objetos y se puede estimar para después calcularla. La estimación de medida es un posible cálculo que se toma de una longitud.” (P - V)

E11: “Entiendo por estimar una medida como darle una aproximación con un número a un objeto ya sea longitud, área, volumen, etc.”(P - V)

E12: “Estimar una medida es la aproximación infinitesimal al valor real o absoluto de una”

E13: “Acción de calcular y contar algo según un patrón o unidad establecido.” (P-O)

E14: “Es como predecir o suponer la medida que tiene un objeto.” (H - V)

E15: “Estimar una medida es aproximar una magnitud con una unidad de medida establecida.”(P - V)

E16: “Con tan solo observar el objeto que se va a medir especular cuanto puede llegar a ser el valor según la unidad de medida que se esté usando. Dada una unidad de medida y un objeto a medir, se define como estimación de medida al proceso de especular el valor en unidades que puede tener la cualidad que se va a medir del objeto” (H - V - S)

E17: “Dar un valor numérico a un tributo de lo que se quiere medir. Es dar un valor numérico a un tributo de un objeto, un tributo medible. (el valor aproximado puede ser medido con cualquier cosa, es decir, esa cosa es la unidad de medida de referencia)” (V - E)

E18: “Suponer la medida de una figura u objeto, por medio de la visualización sin usar reglas, ni metros ni ningún elemento de medición. Dar una medida aproximada de un objeto sin necesidad de usar elementos de medición.”(H - V - S)

E19: “Consiste en aproximar valores con respecto a la longitud de un objeto, siempre teniendo en cuenta el valor de unidad. Es el proceso a la actividad en la que se hace aproximaciones muy cercanas a la longitud de un objeto” (P - R)

E20: “Considero que es dar un valor aproximado de acuerdo a lo que creemos que mide algo. La estimación de medida es el dar un valor que se considere acertado para cierto objeto.” (V)

E21: “De seleccionar una unidad para establecer, longitudes, pesos, áreas, etc. Estimación de medida es la aproximación numérica de algún objeto o material que se representa dependiendo el material del que está hecho el objeto.” (P - V)

E22: “Estimar una medida consiste en, a partir de observaciones y comparaciones entre un objeto X con una posible unidad de medida, dar posibles medidas del objeto X, que se acerquen a la medida real de este objeto. Las posibles medidas de un objeto X, que se acerquen a la medida real de este objeto, obtenidas a partir de observaciones y comparaciones entre un objeto X con un posible ‘patrón’ de medida.” (P - R)

Tercer punto

E1: “Superponer el cuadrado que mide 1 para saber cuántas veces cabe aproximadamente. Como tiene un 1 supongo que vale 1cm y ya me quedaría un rectángulo de lado 4×3 ” (EC)

“Si, por que no tengo la seguridad de que el cuadrado pequeño ocupe todo el espacio o lo contrario, pero por lo que veo, approximo cuantos caben y doy un valor que puede que sea o este cercano” (P - V)

E2: “Ver cuántas veces llena el cuadrado en una columna y luego en una fila y multiplicar ambos números, tome el dedo meñique como referencia” (EC)

“Si, por que como dije antes, se trata de aproximar a partir de medios que tengamos a la mano y para desarrollar el anterior punto use un dedo” (P - E)

E3: “Con la ayuda de un compás buscaría encontrar la cantidad de cuadrados de área 1 que entrarían en los lados del rectángulo. En caso de ser necesario, dividiría al lado del cuadrado en busca de una mejor aproximación a la relación de este lado con los lados del rectángulo. Luego multiplicaría la cantidad de cuadrados que se entraron en uno y otro lado del rectángulo” (EC)

“Si, porque a partir de un objeto de área conocida, aproxime la cantidad que entraban (sin superposición) en el rectángulo de área desconocida” (P - E)

E4: “Conociendo el área del cuadrilátero pequeño trato de mirar cuantos cuadrillos caben en el rectángulo de la derecha” (ER)

“Si, por que trate de aproximar el área del rectángulo de la derecha en base con el cuadrado de la izquierda y no tuve que medirlos a ver si es verdad lo que dije” (P - E)

E5: “Tome la medida del cuadrado inicial y superpuse esa medida en el rectángulo, lo cual me dio 3,5 aproximadamente de largo y un poco más de 2 de ancho y luego multiplicamos dichas cantidades” (EA)

“Si, ya que para saber el área mire cuanto podía medir los lados de dicho rectángulo usando como referencia los lados de la figura de la que ya conocíamos el área” (P - E)

E6: “Identificar la medida de las caras del rectángulo, luego utilizar las fórmulas para...” (ED)

“Si, dada la acción de medir las caras y saber el resultado del área del rectángulo, se cumple con la necesidad de saber la medida” (O)

E7: “Aceptaría que ese primer cuadrado es una unidad cuadrada, luego sobrepondría la medida de un lado del cuadrado unidad sobre el rectángulo y contaría cuantas unidades hay en dos lados distintos del rectángulo. Con ellos podría estimar la medida de los lados del rectángulo y luego dar con la respuesta” (EC)

“Si, se contó la cantidad de veces que una unidad estaba en otro objeto, sin embargo lo que no se sabe es si el rectángulo tiene lados mesurables. Ese acto fue con aproximaciones y hasta suposiciones porque realmente con un dibujo no se puede mover, sobreponer objetos” (H - V - E)

E8: “Dada la unidad de medida y considerando que en el cuadrado de la izquierda el 1 representa su área, el proceso sería medir cuantas veces cabe el cuadrado de área 1 en el rectángulo dado” (EA)

“Si, por que se estableció una unidad previamente y luego se le asignó un numero al rectángulo de la derecha” (O)

E9: “Tome la unidad y la sobrepose sobre el objeto y descompose el objeto generando partes de la unidad y las sume” (EC-ER)

“Si, Por que atraes de un patrón o unidad de medida di solución a un problema de longitud y área” (O)

E10: “Mido el rectángulo 1 y después lo sobrepongo o sobrepongo esta medida en el rectángulo de la derecha. Considero que el rectángulo de la derecha mide aproximadamente 10 rectángulos de lado de la izquierda” (EC-EA)

“Si, porque estoy dando una aproximación pero no uso regla y podre fallar en el cálculo del área” (P - E)

E11: “Lo primero sería tener en cuenta la media que se le está dando al cuadrado de área 1 para tomarlo como base y con el medir el rectángulo” (ER)

“Si, pues sin usar regla para medir el objeto de área 1 y tomando como base las medidas de sus lados creo que si se puede aproximar a la medida y área esperada entonces ayudaría al proceso de estimación” (P - E)

E12: “Nombro los vértices de los cuadriláteros, luego trazo dos segmentos que conecten los vértices de cada cuadrilátero de tal manera que pueda trasladar la medida de un lado de la unidad con el fin de poder determinar el área de la incógnita de manera habitual.” (ER)

“No. En el proceso antes citado se hace uso de algoritmos establecidos para respuestas únicas.”

“No colocaría figuras planas en las cuales se presenta un método para obtener un resultado.”

E13: “Tome la unidad de la izquierda y estime el largo de sus lados, luego estime más o menos el mismo largo sobre el rectángulo en uno de sus lados y en la base y luego tome $b \times h = \text{Area}$ ” (ER)

“Sí. Porque a partir de una unidad de medida determinamos el largo y ancho del “rectángulo lo cual definí como la estimación de medida.” (O)

E14: “Sobreponer los cuadrados de área 1 sobre el rectángulo y luego sumar las áreas de todos los cuadrados.”(EC)

“Sí. Ya que por medio de un dato puedo lograr identificar una medida a suponer en este caso que es 12 el área del rectángulo.” (O)

E15: “De tener regla lo mediría pero si no solo trazaría marcas haciendo referencia a mi unidad de medida.”(ER)

“Sí. A simple vista llegue a la conclusión de que el área del rectángulo no sería exacta por lo que aproxime o supuse que las unidades de medida no lo serían.” (P)

E16: “Llenar la figura de la derecha con tantas veces como quepa la figura de la izquierda ya que la usaría como unidad de medida.”(ER)(EC)

“Sí. Porque a partir de la unidad dada y sin ningún objeto o herramienta de medición, se realiza un proceso de visualización y especulación de la medida.” (H - E)

E17: “Trasponer el cuadro pequeño, al cual le sabemos el área, en el cuadrilátero más grande.”(ER)

“Sí. Le di un valor numérico al atributo medible como el área a un rectángulo, con otro cuadrilátero más pequeño.” (O)

E18: “Trataría de, a simple vista, suponer el cuadrilátero sobre el rectángulo y contar cuantos cuadrados hay por cada lado.”(ER)

“No. Di una medida exacta si no supuse cuantos cuadrados habían en el rectángulo sin las medidas serían ciertas.”

E19: “Sobrepuse el cuadrado pequeño sobre el rectángulo y como es una unidad vi que cabían 6 de ellos.”(ER)

“Sí. Porque hice una aproximación de lo que podría llegar a medir el largo y ancho del rectángulo, basándome en la unidad dada.” (P)

E20: “Sabendo lo que una unidad representa tomaría el rectángulo de la izquierda y miraría cuantas veces cabe en el largo y el ancho del rectángulo de la derecha. Operaría los valores obtenidos.”(ER)

“No. Porque yo considero que la estimación de medida es asignar un valor a un objeto, pero sin usar ningún proceso para medir.”

“Cambiaría la pregunta por “¿Cuál es el área del rectángulo?” y no pondría el dibujo de la izquierda.”

E21: “Se toma como referencia la unidad (cuadrado de la izquierda) y se mide la longitud de los lados del rectángulo de la derecha, el lado más largo mide 3.5 unidades y el pequeño 2 unidades. $A = b \cdot h = 2 \cdot 3,5 = 7$ ” (ER)

“Sí. Porque se asume que la unidad es el cuadrado del lado derecho, se puede decir que se provee o se aproxima a la medida de los lados del rectángulo con dicha información.” (P - V - E)

E22: “Con una hoja de papel medí primero el área de la unidad y según esta medida de la unidad medí el área del rectángulo, viendo cuantas veces cabía el área de la unidad en la del rectángulo.”(O)

“Si, por que no me fue posible tener certeza de cuánto mide realmente el área de la unidad, y por ende, tampoco la del rectángulo. Solo pude llegar a estimaciones de esta medida, que se pueden acercar bastante a la medida real.” (J)

Cuarto punto

E1: “Trazo una recta perpendicular al rayo inicial del ángulo para tener una mejor vista del objeto y teniendo este en contra y que el rayo final está ubicado a casi la mitad decido que es un ángulo de 45° aproximadamente” (ER-EA)

“Si, por que hago una aproximación según el ángulo de 90° pero no tengo como saber si es exacto ese ángulo” (P - S)

E2: “Determine con el esfero un ángulo de 90° que es el más conocido y fácil de determinar y aproxime el valor, este caso parecía que era la mitad de la medida” (EA-ER)

“Si, por que según mi definición de estimación de medida se aproxima la cantidad a partir de conocimientos propios y ayudas a la mano como hice en el punto anterior” (P - V - S)

E3: “Trazaría una semirrecta con un origen común en el vértice del ángulo perpendicular a uno de los lados. Luego hallaría la bisectriz de dicho ángulo recto para saber si el ángulo dado es mayor, igual o menor a 45° . De ser mayor o menor, seguiría tratando las bisectrices para ir acotando el valor del ángulo dado” (EA-ER-ED)

“Si, ya que voy aproximando el valor del ángulo a partir de acotarla por ángulos de los cuales se su medida” (P - R - S)

E4: “Como conozco la inclinación de los ángulos más frecuentes ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) pueda hacer una comparación y decir aproximadamente cual podría ser su medida” (ER)

“Si, con base a unas medidas ya conocidas puedo determinar más o menos cuanto mide el ángulo” (R - S)

E5: “Trazar rectas para ubicarlo y mirar la región en donde se encuentra la semirrecta” (O)

“Si, ya que con algunos trucos doy una aproximación de la medida de ángulo” (H)

E6: “Trazar una recta perpendicular en la recta m por el punto A, diría que la medida es la mitad del ángulo” (ER-EA-ED)

“Si, estimando sin herramientas y utilizando propiedades de geometría se podría decir que se logra la estimación de medida” (P- S)

E7: “Primero se identifica el ángulo del que me están hablando y luego, como no tengo más información dada, recurrir a información conocida y deduzco que tiene que ser menor que 90° ” (ER)

“Si, por que no tengo ni una unidad ni un instrumento para estimar la medida” (S)

No. 8: “Entendiendo la medida del ángulo como el número que se le asigna a la rotación; el procedimiento usual sería con un instrumento para ejecutar la medición” (O)

“Si, se estableció una unidad, sin embargo considero la necesidad de tener el instrumento de medición que me ayude a establecer o a estimar su medida” (O)

E9: “A partir de una medida base que fue 90° tome o visualice la mitad de la medida y con esto logre dar una solución utilizando más conocimientos previos” (EA-ER)

“Si, por que se plantea un problema que da lugar a una aproximación o estimación de una medida de un objeto” (P)

E10: “Aproximadamente 45° . Comparo con un ángulo de 90° , creando este con el esfero o el dedo y hago una estimación” (EA-ER)

“Si, por que no use los elementos necesarios para saber la medida correcta del ángulo y aproxime a los ángulos ya conocidos” (P - S)

E11: “Pues creo que sin mucha información y sin transportador trazo una recta anclada al vértice del ángulo y visualmente se daría que hay una bisectriz entonces diría 45° ” (EA-ER)

“Sí, a pesar de que no se da mucha información para estimar la medida del ángulo si se tiene un poco de visualización geométrica se puede llegar a la medida” (O)

E12: “Aproximación del ángulo estipulado.”(O)

“Sí. Ya que para determinar la medida del ángulo se requieren herramientas que no están al alcance.” (S)

E13: “Tomaría un transportador y pondría el cero sobre uno de los rayos del ángulo (el rayo superior) y luego marcaría cuanto marca el rayo inferior, este número marcado determinara la medida del ángulo.” (O)

“Sí. Porque está tomando la medida des un rayo al otro con un patrón establecido que es el grado.” (O)

E14: “Trazar el ángulo recto que su medida es de 90 e intentar ver qué diferencia de distancias hay entre el dado y el que se forma a partir del segundo y tercer rayo.”(ER)

“Sí. Ya que tengo una referencia de medida en el caso como yo lo hice y teniendo en cuenta esa medida puedo llegar a suponer la que me están pidiendo.” (H - E)

No. 15: “Primero trazaría el rayo opuesto a alguno de los rayos del ángulo para tener una referencia, luego trazaría una perpendicular a esa recta por el punto de origen para asi ir aproximando la medida del ángulo.” (ER) (EA)

“Sí. Porque a través de procesos de aproximación se llega a una respuesta cercana pero no exacta de la medida del ángulo.” (P)

E16: “Teniendo en conozco la medida de un ángulo recto, trato de relacionarlo con el ángulo solicitado para así asignar una medida.”(ER)

“Sí. Pues tomo una referencia con la cual relaciono la unidad de la medida para posteriormente asignar un valor a la medida del ángulo.” (P - V - E)

E17: “Hallar una medida que se sabe como un ángulo de 90, con una recta perpendicular y hacer un estimado de más o menos cuanto es el valor de ese ángulo.”(ER)

“Sí. Porque le di un valor numérico a un tributo de ángulo que es su medida interna.” (V)

E18: “Trataría de dibujar un ángulo recto y mirar si mide la mitad o si es mayor o menor, dar un valor aproximado” (ER)

“Sí. Supongo la medida del ángulo sin saber si es cierta.” 17.3 2-1 (H)

E19: “Yo sé como se ve el ángulo de 90° por lo tanto lo dibujo sobre el mismo y me doy cuenta de que el ángulo del que me preguntan es la mitad de 90 por lo tanto ese ángulo mide 45° ” (ER)

“Sí. Porque no me da ningún valor pero con mis conocimientos approximo el valor sin usar ningún objeto de medición de ángulos. (Transportador).” (V - S)

E20: “Yo tengo una noción de cómo luce gráficamente un ángulo recto, entonces lo dibujaría y de acuerdo a mi perspectiva miraría si la medida que me piden es la mitad, o un cuarto... del ángulo recto.”(ER)

“Sí. Porque di un valor que yo considero se aproxima al grafico.” (P - V)

E21: Realicé una aproximación ya que no tenia transportador, complete un ángulo de 90° con la recta perpendicular a un rayo del ángulo y se puede ver visualmente que es la mitad.(ER)

“Sí. Porque approximo un valor conociendo otro, el de 90° ”. (P - S)

E22: “Haciendo dobleces en una hoja de papel construí un ángulo recto y tome su medida como referencia. Luego sobrepuse este papel con el ángulo dado y vi que la medida de este ángulo es como la mitad de la del ángulo recto, o sea que es como de 45° .”(ER)

“Si, por que utilice una herramienta de medida, que puede funcionar, pero que puede que de medidas muy exactas. Por tanto cualquier medida que “calcule” con esta herramienta será una estimación.” (E)

Quinto Punto

E1: “Como se ve claramente solo trazo dos líneas del extremo superior e inferior del objeto y cuento los 4 clips”

“No, porque tengo los clips casi superpuestos y haciendo la función de una regla entonces se cuál es la medida concretamente”

“Solo poner un clip para que las personas estimen cuales caben en el objeto”

E2: “Aproxime comparando las imágenes”

“Si, porque se apoyó en un objeto casero o que tenía a la mano para aproximar la medida”

E3: “Trace imaginariamente dos rectas perpendiculares al eje del objeto y trate de ver cuantos clips entran entre dichas rectas paralelas”

“Si, porque a partir de los clips, busque en ellos la medida del objeto a medir”

E4: “Gráficamente la distancia desde la cabeza del objeto a la punta se puede comparar que miden 4 clips”

“Si, por que en realidad nos estamos basando en un dibujo que realmente no se sabe si mide exacto o no pero se puede aproximar”

E5: “Usar la medida del clip como referencia y superponer sobre las otras figuras”

“Si, ya que aproximamos la medida de algunos objetos tomando como referencia algo particular, en este caso el clip”

E6: “Conteo, es decir utilizar las unidades de clips para saber la medida del objeto”

“Si, es una aproximación al saber la medida del objeto por medio de los clips, en este caso particular el objeto para medir fueron los clips”

E7: “Asumiría que el atributo de medición seria el largo dado que no se especifica. Luego simplemente cuento las unidades que se aproxima más al tamaño del alfiler”

“Si, se cuenta cuantas veces hay una unidad en otro objeto”

E8: “El objeto se estima ya que mide 4 unidades de clips (cabe recalcar que se estima porque con exactitud no es tan fácil)”

“Si, se estableció una unidad de medida y se estimó la medida del objeto con base en la unidad”

E9: “Tome de a tres en tres unidades de clips para mi unidad y los sume y después le agregue el... partiendo de la medida de la aguja”

“Si ya, se busca una unidad de medida y sobre esa se desarrolló la actividad de medir”

E10: “Si el objeto del cual me están preguntando es el alfiler cabezón serian 4 clips, los clips están ordenados y el alfiler cabezón esta debajo de ellos, por ello solo cuento y ya”

“No, porque se da una medida y se pone el artículo a medir debajo de este”

“Pondría solo un clip, o no colocaría el alfiler cabezón en esa posición”

E11: “Se toma como base la unidad de medida del clip y de alguna forma la imagen da a entender superponerlos para llegar a una posible medida”

“Si, puede generar una estimación de medida acertada pues se da la unidad de medida muy clara”

E12: “Proyección entre los clips y el objeto” (O)

“No. Porque se hace una comparación entre dos elementos.”

“Considera un objeto y proponer su longitud en cm.”

E13: “Trace un segmento que continuara la parte izquierda del objeto siendo como el diámetro de la esfera y desde el extremo opuesto al segmento inferior y desde ahí empecé a medir.” (O)

E14: “Contar los clips.” (O)

“No. Ya que simplemente estoy haciendo un ejercicio de conteo.”

E15: “Como ya tengo mi unidad de medida y está ubicada sobre el objeto se trazaron 2 rectas para verificar la medida.” (O)

“Si. Porque al trazar las rectas, se llega a una relación u aproximación referente a los clips y el objeto.”

E16: “Alinear el objeto con una cadena de clips, y luego observar hasta donde llega, para así determinar el valor.” (ER - O)

“Si. Por que así tenga la cadena de clips debo desde la observación y la unidad determinar el valor de la medida solicitada.”

E17: “Colocar los clips en fila para hallar longitud de cada figura.” (O)

“Si. Le di un valor numérico a un tributo de los figuras (longitud) con clips.”

E18: “Teniendo el objeto y los clips encima, cuento cuantos clips hay desde donde inicia el objeto hasta donde termina.”(O)

“No. En el dibujo me daban los clips entonces era solo contar la cantidad de clips.”

“Daría el dibujo de un solo clip y del objeto.”

E19: “Se pone el objeto al lado de los clips y se puede observar que 4 clips son la medida del objeto.”(O)

“Si, Porque la actividad no da ningún tipo de valor yo aproximo el tamaño del objeto, según la cantidad de clips que creo que son correctas.”

E20: “Al trazar esas líneas “verifique” que el objeto mide “exactamente” 4 clips.”(O)

“No. Por que use los clips como unidad de medida, no di un valor que yo considera adecuado.”

“En el dibujo no pondría los clips.”

E21: “Asumiendo que lo que se pide en la actividad es la longitud, lo único que se hace es contar los clips que abarcan lo largo de la figura.”(O)

“No. Por que la medida está dada, no se realiza aproximación ni nada, es una medida exacta.”

“No dejar el largo de la figura, que sea exacto en cantidad de clips.”

E22: “Al principio dije que 4 clips con una simple observación, pero después compare el objeto con lo clips utilizando un papel y creo que no son 4 clips exactos.” (ER)

“Sí, porque con la comparación que hice para llegar a la medida no pude concluir con certeza esta medida, además pues me estoy basando en la habilidad de mis ojos para ver bien, y creo que este hecho hace que mis medidas sean más bien estimaciones.”

Sexto punto

E1: “Mire el largo del clip he intente superponerlo manualmente para determinar cuántas veces cabe” (O)

“Si, porque a partir de una medida que nos dan, hacemos una aproximación pero no es 100% segura que sea la correcta”

E2: “Con un esfero medí el clip y ya macada la medida del clip en el esfero tome esa referencia y conté cuantas veces cabía en el cucharon” (O)

“Si, porque a partir de algo que tenía a la mano aproxime la medida del cucharon”

E3: “Tomaría la medida del clip con algún objeto o instrumento que me permita trasladar la medida y sobre una recta paralela al eje del cucharon aproximaría la cantidad de clips que cabe en el cucharon” (O)

“Si, porque a partir de una medida conocida, se aproxima el valor de otra medida desconocida”

E4: “Con base al clip mido cuantos clips caben y multiplico el resultado por 2 cm que es lo que mide cada uno” (ER)

“Si, porque en base a una medida estándar trato de hallar la medida de cucharon aproximadamente”

E5: “Sobreponer el clip en el cucharon y mirar cuantas veces lo puedo replicar” (ER)

“Si, porque usando un patrón establecido lograremos dar una aproximación a la medida que se nos pedía”

E6: “Tratar de estimar la medida del largo del cucharon con el clip dado en el cuadro, hice una copia del largo en un papel del clip “aproximado” y realice la medida del largo del cucharon” (EC)

“Si, dado que hice la copia del largo del clip en otro objeto se trata de hacer la estimación de medida del cucharon y como se dice que el largo del clip es de 2cm se calcula la medida en centímetros”

E7: “Conseguir a la mano un objeto con una dimensión de medida casi igual a la del clip y la sobrepuse en la cuchara tantas veces como pudiera” (O)

“Si, pese a que no nos dan una “unidad” como tal, nos dan información de dos unidades. Entonces básicamente si, se toma una unidad estándar o con información de la unidad y se estima la medida de la cuchara”

E8: “Evidentemente se establece una unidad de referencia que es el clip, con una hoja pequeña traspasare esa medida y luego estableceré cuánto mide el cucharon” (O)

“Si, gracias a la unidad de medida referencial, es posible estima cuanto mide el cucharon”

“Para que se estime una medida, esta debe ser establecida con la mayor exactitud posible. El ajuste quizá sería determinar varias unidades y observar cual se acopla más (o es más exacta)”

E9: “Tome la unidad del clip y la sobrepuse al cucharon y multiplique por 2” (ER)

“Si, por que se aproxima la medida a partir de los datos recibidos”

E10: “El cucharon mide 14cm aproximadamente, tome esa medida de referencia para el clip y tome una medida aproximada del cucharon” (EA)

“Si, ya que la medida del clip que tome fue con otro objeto que considere que se relacionaba”

E11: “Tome un objeto de igual medida al clip y lo moví hasta determinar la medida del cucharon” (O)

“Si, porque se está realizando un proceso para medirlo, pero no se sabe si es totalmente eficaz y es muy propenso a errores”

E12: “Sobreponer el clip en el cucharon y aproximar a la unidad más cercana” (ER)

“Si, ya que se hace una aproximación infinitesimal de la medida del cucharon”

E13: “Sobrepuse el clip en la cuchara tantas veces como fuera necesario, para que llegara de extremo a extremo” (ER)

“Si, porque tome una unidad base que fue el clip y con el medí la cuchara y luego cambie la unidad de medida tomando en cuenta que el clip mide 2 cm y luego estime la medida de la cuchara en cm.”

E15: “Mediría la longitud de la cuchara luego intentaría aproximar el valor a un numero par en centímetros para así poder a estimar la medida del cucharon” (O)

Sí, Porque se realiza un proceso en el cual lo que se pretende es fijar una unidad de medida; en este caso el clip y luego aproximar la medida del cucharon.

E16: “Intente dividir la cuchara en tantas veces cupiera el clip luego multiplique la cantidad de veces estimada por 2 para obtener la medida en centímetros”. (ED)

“Sí, Porque no es una medida exacta, tomo como referencia el clip y mediante intentos de aproximación, determino la posible medida”

E17: “Trasponer el clip cuantas veces sea necesario en orden” (ER)

“Si, un valor numérico que le di a la longitud del cucharon con un clip de 2 cm, está el valor numérico, el atributo medible (longitud) y la unidad de medida (clip de 2 cm)”

E18: “Trataría de poner clips hacia los lados, tratando de que los clips sean igual de largos al cucharon y luego multiplico la cantidad de clips por dos” (ER)

“Si, me dan un objeto para medirlo y otro objeto en el cual baso mi medida y tengo que suponer, a simple vista, cuantos clips necesito para medir el cucharon”

E19: “Sobrepuse el clip a lo largo del cucharon la cantidad de veces que fuera necesario para aproximar su medida” (ER)

“Si, Porque yo estoy dando una medida aproximada del cucharon y no la medida exacta”

E20: “Teniendo una idea de cuánto mide el clip, calcular cuantas veces “esta” el mismo en el cucharon” (EA)

“Si, porque estoy estimando cual es la medida que alcanzan 14 clips”

E21: “Poner el clip sobre el cucharon y contar cuantas veces toca repetir el proceso para poder abarcar toda la medida del cucharon” (ER)

“Si, Porque se aproxima a la medida del objeto con ayuda otro”

E22: “Con una hoja de papel hice como una clase de regla donde la unidad de medida no era el usual centímetro sino el clip. Después de hacer la regla medí la cuchara tratando de medirla teniendo en cuenta

donde estaba el diámetro de la parte circular de la izquierda. Compare y llegue a la conclusión que deben ser como 7 clips, o sea, más o menos 14 cm” (O)

“Si”

Séptimo Punto

E1: “Escoger la medida a partir de que la persona que la use sea un joven en promedio de altura de 1.50 cm” (ER)

“No, porque cada persona puede realizar una elección a partir diferentes criterios como la altura o la edad de la persona que la va a usar pero no tenemos una referencia que nos permita aproximar la respuesta indicada”

“Poner el sujeto, la altura de este para aproximar cuál de las opciones sería mejor”

E2: “Descarte los valores demasiado grandes ya que el objeto se ve muy pequeño para ser tan grande entonces busque el valor más pequeño y vi que se aproximaba” (O)

“Si, por que en mi mente aproxime la medida de acuerdo a la imagen y de cuerdo al conocimiento que tengo guiándome por lo que vi”

E3: “Si considero que las personas miden entre 1.50 y 1.90 metros aproximadamente la primera opción (2,74 metros) sería más alta que la persona por lo que peligrosa e manipulable. Las siguientes dos opciones serian demasiado pequeñas e imposibilitaría su utilización. La última opción (0,91 metros) estaría en un rango aceptable y sería una posible medida óptima” (EA)

“Si, ya que para establecer la mejor medida de la bicicleta realice una comparación con una medida conocida como es la altura de las personas a pesar de que ese dato se encontraba en un rango de valores”

E4: “Lo que hice fue mirar cada medida y escoger la que yo utilizaría según mi altura” (ER)

“No, la pregunta no se puede interpretar muy bien porque como yo la desarrolle no estoy estimando sino escogería cual sería mi mejor opción, no sabía si preguntaba el dibujo que tan grade es o cual es la mejor opción que hay”

“Pienso que debería tener un objeto de medición con el cual podamos comparar”

E5: “Tratar de hacer una conversión de unidades de medida y observar cual es la más pequeña aun sabiendo que la opción elegida es una aproximación mas no la medida esperada” (O)

“Si, ya que se nos pide hacer comparaciones y conversiones mediante la visualización, aunque no hubo un patrón de medida establecido se puede hacer una estimación”

E6: “Sabiedo que corresponde la medida de cm en particular no encontré la respuesta aproximada, diría que es de aproximadamente 2,5 cm teniendo esa noción de correspondencia de medida” (ER)

“Si, pues se trata de dar respuesta a la altura de la cicla, se trata de hacer o estimar la medida de acuerdo con lo anterior escrito”

E7: “Primero buscaría una medida definida y con información de la unidad y trataría de estima la respuesta pero como no hay, lo que me queda es pensar en la pregunta y/o acudir a lo cotidiano” (EA)

“No, porque solo fue cuestión de seleccionar una medida sin un proceso o una medida base”

“Le daría información extra como la altura de una rueda o algo con lo que pueda sobreponer en el dibujo de la bicicleta”

E8: “Como referencia se da la unidad de medida metros y centímetros (según medida universales $100\text{cm}=1\text{m}$) como se pregunta sobre la medida de la bicicleta, la medida más pequeña es 7.56 cm y es la que se acopla al tamaño de la bicicleta en el papel” (O)

“Si, estime la medida por intuición asumiendo que ea la medida más pequeña que se establecía”

“Sin embargo una vez más, la estimación de medida debe ser cada vez más exacta para ser realmente una estimación intuitivamente escogí 7.56 cm”

E9: “A partir de ejercicios anteriores tome la medida del clip y la multiplique por 2 y aproxime según los resultados dados” (ER)

“Si, porque se aproxima la medida a un patrón”

E10: “Primero medí las medidas proporcionadas, luego calcule con mi estatura cual sería la más adecuada para mí y dije que era la de 0.91m que es casi un metro... ” (ER)

“Si, ya que según mi estatura calcule su medida para la bicicleta: Si la bici fuera para mí pero si...”

E11: “Pues, como no se tiene ningún elemento para medir solo tome la medida que podía ser la más apropiada para el dibujo de la bicicleta” (O)

“Si, creo que si es un proceso de estimación de medida como es muy visual y dan las posibles respuestas, simplemente se escoge la que se cree más apropiada”

E12: “Teniendo en cuenta la longitud y la altura de la bicicleta, ninguno de los resultados se aproxima a un valor real de la medida de la bicicleta” (O)

“Si, Ninguno”

E13: “Calcule cuanto era más o menos la medida que daban todas las opciones, y tres de los cuatro son muy pequeñas y asumiendo que la bicicleta es de verdad, di la opción más grande” (O)

Sí, porque calcule la medida de la bicicleta según una estimación conociendo previamente a cuanto equivale 1 cm”

E15: “La verdad, ninguno es fácil llegar a que la altura de la bicicleta mide aproximadamente 2 cm, pero dado que no se encierra en las opciones, optaría por la a, porque es la que más se aproxima” (ER)

“No, El proceso no fue de estimación dado que se podían observar claramente las líneas de la hoja, siguiente por lo que fue fácil decir que eran 2 cm”

“En el caso de no haber tenido las líneas como referencia, también hubiese sido fácil por que algunos valores son muy grandes y otros muy pequeños”

E16: “teniendo en cuenta que ninguna de las medidas me parece que se ajustara a la imagen, elegí la más conveniente a una bicicleta en la vida real.” (ER)

“No, porque los datos no correspondían a la imagen, simplemente elegí la más parecida a lo que recuerdo de una bicicleta real”

“Que las medidas se relacionen con la imagen, y la pregunta se refiriera a la que aparece ahí”

E17: “trace dos rectas “paralelas” una por la parte superior y otra por la parte inferior, después una “perpendicular” a una de ellas y con una estimación a ojo de lo que un cm, le di un valor aproximado” (EA)

“Si, Le di un valor numérico aproximado a un atributo del objeto (la altura); unidad de medida estimación a ojo de lo que es un cm”

E18: “miro las medidas que me dan, al ser una bicicleta no puede medir 2m porque nadie es lo suficientemente alto para poder montarla, tampoco mide 25 cm o menos porque es muy pequeña y normalmente las ciclas para niños no tienen suspensión y el manubrio mas bajo que el sillín, por ende la medida sería casi 1 m” (ER)

“Si, puedo dar una medida, basada en las bicicletas que he visto y por medio de algunas, características, pueda llegar a suponer una altura apropiada”

E19: “Teniendo en cuenta las experiencias vividas con los ejercicios anteriores, sobrepuse le clip, sobre la bicicleta y medio la medida aproximada, cuando digo sobreponer, lo hago todo mentalmente” (ER)

“Si, Porque como en los ejercicios anteriores di una medida aproximada, una medida que yo considero que es correcta, pero puede que no lo sea, ya que no mido con algún metro, regla, etc.”

E20: “De acuerdo a mi estatura, “calcule” cuál era la medida que se me ajustaría mas”

“Si, porque no tengo ningún referente para saber cuánto puede medir” (ER)

E21: “buscar el punto más alto y más bajo de la bicicleta y tomar la medida con una regla” (O)

“No, porque la altura de la bicicleta se puede hallar exactamente utilizando regla”

“Poner un objeto tal como el punto 6 para hacer una estimación de medida”

E22: “Lo hice por descarte; las medidas de las tres primeras opciones son muy absurdas (incluso si lo que se quiere medir es el dibujo de la bicicleta) y la cuarta opción creo se acerca bastante a la medida estándar de la altura de una bicicleta usual.” (O)

“Si. El descartar medidas muy alejadas de la medida real de algo, o escoger la que más se acerque debe contar como una actividad de estimación.”

Octavo Punto

E1: “1 pasada de rodillo equivale a una pintada como se ve en el dibujo ¿Cuántas veces tendrá que pasar el rodillo para terminar de pintar toda la pared?”

E2: “Determinar el valor de la altura de la puerta sabiendo que la altura de la ventana es de 2 m”

E3: “A través de la medición de las paredes, ventana, puerta y artefactos, estimaría el área de las paredes a pintar para comprar la cantidad de pintura optime”

E4: “Dada la altura de la persona que está pintando diga que tan alta es la puerta, cuanto mide la ventana, que tan grande es el rodillo y cuanto mide desde el piso hasta el techo”

E5: “Sabiendo el alto y el ancho de la puerta dar una aproximación de la medida de una de las paredes”

E6: “Tratar de medir los objetos viables en la imagen, mirar las características de ellas, por ejemplo el de la puerta buscar la medida de los lados y posteriormente hallar su área, lo mismo con lo demás que se observa de la imagen, las paredes, el piso, la ventana, determinar la altura de la muchacha que pinta teniendo en cuenta la propiedad que se quiere estimar”

E7: “Hallar la medida de la puerta si el cuadro del piso es un octavo de la ventana, la cual mide la mitad de lo que mide la puerta”

E8: “Tomando como referencia el largo del zapato de la mujer (unidad de referencia) establezca cuanta estimación de medida le da a la puerta, ventana y mujer”

E9: “¿Cuál es la medida de la pared su la ventana mide 30 cm? ¿Determine la medida de la altura del rodillo tomando como referencia la persona y su altura?”

E10: “¿Cuánta pintura gastara la mujer en pintar toda la habitación? ¿Qué porción de la pieza le hace falta para terminar de pintar? ¿Qué relación de medida hay entre la puerta y la ventana?”

E11: “Sabiedo la medida del objeto con que se está pintando cuantas veces debe utilizarlo para llegar de la puerta a la ventana”

E12: “resaltaría en la imagen los cuadriláteros que representan las paredes y se cuestionaría el área pintada por la señora”

E13: “En esta imagen se puede apreciar un cuarto rectangular, conociendo esto, mida el largo y ancho de la pared con la caja de pintura del piso para determinar el área de la habitación”

E15: “Se podría Estimar cuanta pintura se necesitaría para pintar un cuarto y esto se podría realizar teniendo en cuenta cuanta cantidad se necesita para una pared, es una estimación porque no será exacta la cantidad de pintura sino una aproximación”

E16: “Si el rodillo mide 25 cm de largo, y cada vez que se pinta una franja desde el techo hasta el piso recorre 2.5 m, ¿cuantas vueltas da el rodillo hasta el piso?”

“Si la persona que está pintando mide 1.75 cm, ¿Cuánto tiene de alto la pared?”

E17: “Un lado de la pared mide 4 metros, ¿Qué longitud tiene la parte de la pared pintada?”

E18: “Juana quiere pintar las paredes de la sala, si la pared tiene 2m de alta y un galón de pintura rinde para $2m^2$ ¿Cuántos galones de pintura necesitara para pintar ambas paredes?”

E19: “¿Cual es la medida de la puerta si el calentador mide 90 cm?”

E20: “Asigne una medida que considere acertada para la altura de la puerta”

“De acuerdo a esto, estime una medida para la mujer que se encuentra allí”

E21: “Determinar la altura de la puerta si sabe que la ventana tiene ancho 50 cm”

E22: “Teniendo en cuenta que la altura de la mujer es la altura promedio de las mujeres en Colombia, ¿Cuál cree que es aproximadamente la altura de la pared que está pintando? Justifique su respuesta.”