UNA PROPUESTA PARA POSIBILITAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA

MARTHA HELENA ORJUELA GÓMEZ
LEIDI CRISTINA GIL FUENTES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2011

UNA PROPUESTA PARA POSIBILITAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA

MARTHA HELENA ORJUELA GÓMEZ
LEIDI CRISTINA GIL FUENTES

Tesis de grado presentada como
requisito parcial para optar por el título
de Especialista en Educación matemática

Asesor:
RODOLFO VERGEL CAUSADO
Magíster en docencia de las matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2011

RESUMEN ANALÍTICO

TIPO DE DOCUMENTO **:** Tesis de grado

ACCESO AL DOCUMENTO **:** Universidad Pedagógica Nacional

TÍTULO DEL DOCUMENTO : Una propuesta para posibilitar la comprensión del concepto de la derivada

AUTORES **:** ORJUELA GÓMEZ, Martha Helena
GIL FUENTES, Leidi Cristina

PUBLICACIÓN **:** Bogotá, D.C., 2011, 73 páginas

UNIDAD PATROCINANTE **:** Universidad Pedagógica Nacional

PALABRAS CLAVES **:** Derivada, recta tangente, razón de cambio, representación

DESCRIPCIÓN:

El propósito fundamental de este documento es diseñar actividades en las que se relacione la representación analítica y la representación gráfica de la derivada con el fin de mejorar la comprensión por parte de los estudiantes de este concepto. Para diseñar estas actividades se tuvieron en cuenta principalmente referentes teóricos relacionados con los estándares curriculares planteados por el M.E.N, la representación y el uso de tecnologías computacionales; además presentamos un referente histórico.

La propuesta además del diseño de las actividades incluye un análisis prospectivo que hace referencia principalmente a una evaluación del trabajo realizado en el que incluimos también a manera de hipótesis algunas dificultades que suponemos pueden tener los

estudiantes al enfrentarse a estas actividades; las cuales están sustentadas en referentes teóricos que documentan estos estudios.

FUENTES:

Para la primera parte de este documento, en la cual presentamos un breve resumen sobre los referentes teóricos relacionados con los estándares curriculares, la representación y el uso de tecnologías computacionales, consultamos autores como Duval (1999), Gamboa (2007), Ministerio de Educación Nacional (2003;2004); Suárez (s.f) y Vasco (2000); para el capítulo de la historia tuvimos en cuenta autores como Collete (2007); Dolores (1996); Fernández (2000); Pérez (s.f); Ramírez (2009) y Solache & Díaz (1999). Finalmente para el análisis de las actividades consultamos autores como Dolores (1996); Duval (1999); Sordo (2005) y Ministerio de Educación Nacional (2004) algunos de los cuales ya se nombraron cuando hicimos mención a los autores consultados para los referentes teóricos.

CONTENIDOS:

Este documento consta de cuatro capítulos. En el primero presentamos los referentes teóricos que lo fundamentan como son los estándares y lineamientos curriculares planteados por el M.E.N, también exponemos lo que entendemos a lo largo del documento por comprensión y representación y concluimos este capítulo con un aparte relacionado con los entornos de geometría dinámica como un instrumento de mediación; en el segundo capítulo presentamos un breve referente histórico el cual nos proporcionó información para diseñar las actividades planteadas en el documento; en el capítulo tres tenemos la metodología dividida en dos secciones en la primera se encuentran las tres actividades planteadas y en la segunda un análisis de las mismas que hace referencia a la fundamentación de las mismas y a la explicitación de los objetivos de cada una de ellas; en el cuarto capítulo planteamos un análisis prospectivo que hace referencia principalmente a una evaluación del trabajo realizado y en el que incluimos también algunas dificultades que suponemos pueden tener los estudiantes al enfrentarse a estas actividades; y finalmente presentamos unas conclusiones en las que resumimos el modo como dimos respuesta a los objetivos planteados.

METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este documento nos basamos en los compontes del análisis de contenido, en donde primero realizamos consultas en diferentes fuentes; a partir de éstas realizamos inicialmente un marco teórico referente a los estándares curriculares, la comprensión, la representación y los entornos de geometría dinámica. Seguidamente hicimos una consulta sobre el desarrollo histórico de la derivada; a partir de estas consultas hicimos una selección de la información la cual se presenta en el documento, luego diseñamos las actividades partiendo del marco teórico y del desarrollo histórico del concepto de la derivada; por último realizamos un análisis de cada una de las actividades planteadas y del proceso que llevamos a cabo para consolidar este documento.

CONCLUSIONES:

- La información recopilada sobre el desarrollo histórico del concepto de la Derivada y la presentada en el marco teórico nos permitió diseñar las actividades presentes en este documento, en las cuales se relacionan la representación gráfica y analítica de la derivada; además se plantea la necesidad de hacer conversiones entre estas ya se le pide a los estudiantes que tracen las gráficas de las funciones razones de cambio y que además empiecen a detectar relaciones entre la función derivada y la función teniendo en cuenta las gráficas y tablas de cada una de estas.

- El uso de software de geometría dinámica fue de gran importancia para mostrar la representación gráfica de la derivada, en la primera actividad se modelo la construcción de la recta tangente a una curva a partir de la aproximación de las rectas secantes a un punto específico y en la segunda se desarrolló un Applet en donde se mostró el método de Descartes, para la construcción de la recta tangente a la parábola.

- El análisis prospectivo presentado dio un mayor fundamento a cada una de las actividades planteadas ya que estas no fueron aplicadas sino se quedaron en el diseño; este análisis tiene en cuenta la descripción de las dificultades que se obtuvieron al momento de diseñar cada una de las actividades y algunas de las dificultades y ventajas que posiblemente podrían tener los estudiantes a la hora de realizar las actividades.

FECHA ELABORACIÓN DEL RESUMEN **08 de octubre del 2011**

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Actualmente hemos visto que las investigaciones didácticas, han sido promovidas por las persistentes dificultades que los estudiantes tienen al comprender algunos conceptos del cálculo, en especial el concepto de la derivada. Estas dificultades están asociadas al proceso de la enseñanza escolar, por ejemplo, cuando se explica el concepto de la Derivada en bachillerato, la mayoría de ejercicios y problemas típicos que encuentra un alumno en el curso se basan en el conocimiento de una técnica, un algoritmo o un procedimiento que al ser aplicado conduce a la respuesta deseada pero no a la comprensión del concepto, como lo expresa Artigue citado por Vrancken, Engler, Müller (2007)

> … si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos involucrados y un desarrollo adecuado de métodos de pensamiento que son el centro de este campo de la matemática (p. 36).

Un problema importante ligado a la anterior situación es que el conocimiento generalmente se trata fuera de contextos apropiados, no se enseña el significado de la noción de la derivada, a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente, esto genera que no haya relación entre sus interpretaciones, que no se muestre la importancia que tiene para simular problemas de la vida cotidiana, y por tanto conlleva a que los estudiantes no adquieran la comprensión del concepto de derivada.

Por tal motivo en este trabajo exponemos actividades diseñadas con el fin de posibilitar la comprensión de los estudiantes de la noción de la derivada partiendo de la idea de la necesidad de operar con múltiples representaciones haciendo uso de entornos de geometría dinámica como mediador instrumental, ya que como afirma Duval (1999) citado por Nolasco (2001)

> “El eje central de la adquisición de un concepto matemático radica en la actividad que se pueda realizar en las diferentes representaciones, esto implica actividad en un registro, “tratamiento” y posterior coordinación entre los diferentes registros y “conversión” encaminada a construir la estructura cognitiva, hasta lograr reconocer al objeto matemático; en este caso la derivada; en sus diferentes representaciones” (p. 8).

Las actividades que presentamos están conformadas por problemas o situaciones que orientan la relación entre la representación visual (pendiente de la recta tangente) y la representación analítica (razón de cambio) de la derivada, ya que como afirma Font, citado por Matamoros, García & Llinares (2006) “*la enseñanza apoyada en las traslaciones entre distintos modos de representación parece que puede ayudar a la superación de las dificultades de la comprensión del concepto de la derivada” (p. 86).*

El trabajo está dividido de la siguiente manera, en el primer capítulo presentamos los referentes teóricos que fundamentan el documento; en primera instancia presentamos los estándares y lineamientos curriculares planteados por el M.E.N los cuales orientan las actividades que diseñamos; puesto que entre otras cosas tenemos en cuenta los cinco procesos generales de la actividad matemática: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos; obviamente nos centramos en unos más que en otros; en esta sección hacemos referencia principalmente al pensamiento variacional, en segundo lugar exponemos lo que entenderemos a lo largo del documento por comprensión y representación ampliando considerablemente lo relacionado con la teoría de Duval sobre las representaciones mentales y semióticas y concluimos este capítulo con un aparte relacionado con los entornos de geometría dinámica como un instrumento de mediación puesto que en algunas de las actividades planteadas es necesario utilizar dichos entornos y además parafraseando a Suárez (s.f), al ser un instrumento mediador promueve en el sujeto una modificación interna de sus estrategias de pensamiento y aprendizaje lo que conlleva a que logre realizar las conversiones entre las representaciones del concepto de la derivada y se acerque a la comprensión de dicho concepto; en este trabajo utilizamos específicamente el software de Geogebra; a partir de este capítulo realizamos en el cuarto capítulo una fundamentación de las dificultades que suponemos pueden tener los estudiantes al enfrentarse a cada una de las actividades.

En el segundo capítulo presentamos un breve referente histórico el cual empieza con los cuatro problemas que plantearon los griegos en relación con la derivada y la integral hasta llegar a Cauchy a quien se debe la formalización del cálculo; con base en este capítulo y en el anterior es que diseñamos y fundamentamos las actividades que se encuentran en el documento.

En el tercer capítulo, planteamos la metodología del trabajo que consiste en una revisión documental con estrategia de análisis de contenido; en esta incluimos las actividades diseñadas con su debida fundamentación en el marco teórico planteado en el primer capítulo.

En el cuarto capítulo planteamos un análisis prospectivo que hace referencia principalmente a una evaluación del trabajo realizado y en el que incluimos también algunas dificultades que suponemos pueden tener los estudiantes al enfrentarse a estas actividades; por supuesto estas dificultades también están fundamentadas en los referentes didácticos e históricos que se encuentran en el documento.

Finalmente exponemos unas conclusiones en las que resumimos el modo como dimos respuesta a los objetivos planteados y además sugerimos algunos aportes de la realización de este trabajo a nuestra formación profesional.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Diseñar actividades que relacionen la representación visual (pendiente de la recta tangente) y la representación analítica (razón de cambio) de la derivada, con miras a posibilitar en los estudiantes la comprensión de dicho objeto matemático.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar y profundizar en el concepto de la derivada y, a partir de éste, aportar al desarrollo de las actividades.
- Realizar un estudio histórico sobre las diferentes representaciones de la derivada de tal manera que se pueda extraer información que sirva para el diseño de las actividades.
- Utilizar software de matemática para mostrar la interpretación visual de la derivada.

1. MARCO TEÓRICO

El objetivo principal de este trabajo es diseñar actividades que relacionen la representación visual (pendiente de la recta tangente) y la representación analítica (razón de cambio) de la derivada, con miras a posibilitar en los estudiantes la comprensión de dicho objeto matemático. Pretendemos que, un estudio histórico de la evolución de la derivada nos proporcione ideas sobre situaciones que podamos tener en cuenta para plantear las actividades en las que podamos cumplir con nuestro objetivo, es decir, posibilitar en los estudiantes la comprensión de la noción de derivada.

En ese sentido, y teniendo en cuenta que nuestras actividades se encaminaran a establecer una relación entre la representación visual y analítica de la derivada y que además pretendemos que con dichas actividades los estudiantes adquieran una comprensión de dicho objeto hemos tomado como referentes teóricos en los cuales se fundamentan este trabajo; primero lo referente a los estándares, seguido de lo relacionado con la comprensión y la representación y concluyendo con el uso de las tecnologías computacionales que nos permitirán relacionar la representación visual con la analítica.

1.1 LOS ESTÁNDARES BÁSICOS

Anteriormente en los currículos no se daba mucha importancia a lo relacionado con la variación y el cambio, sin embargo desde el año 1996 se empezó a reconocer la importancia de dicho tema, es por esto que en los lineamientos curriculares que se publicaron en 1998 para el área de Matemáticas los cuales se organizaron por pensamientos: pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, se evidencia la importancia que se le dio a la variación. En este apartado sólo nos referiremos a lo relacionado con el pensamiento variacional puesto que es en este pensamiento en el que está enmarcado nuestro trabajo.

Inicialmente mencionamos lo que según Vasco (2000) no es pensamiento variacional aunque él no desconoce que esto puede ayudar a desarrollarlo. Así el pensamiento variacional no consiste en saberse una definición de función puesto que estas son estáticas, tampoco es aprenderse formulas; este pensamiento tiene que ver según el M.E.N (2004) con la percepción, la identificación, el reconocimiento y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. El pensamiento variacional también tiene que ver con "*la capacidad que se tiene para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas"* (Ministerio de Educación Nacional, 2004, p. 17).

Por otro lado se debe tener claro que "*Este término, se introdujo con la intención de profundizar un poco más en lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio" (Ministerio de Educación Nacional,2004, p. 17),* es por esto que es necesario que el estudiante adquiera una adecuada comprensión sobre variables y diferencie entre variable dependiente e independiente, además a partir del manejo de variable el estudiante puede acercarse al concepto de variación utilizando tablas puesto que allí se puede evidenciar que los valores que tomen las variables pueden variar. Un ejemplo que podemos observar en relación con estas variables es el relacionado con la idea de cambio de una variable dependiente con respecto al cambio de la variable independiente que en la mayoría de las situaciones es el tiempo. "*El movimiento es uno de los ejemplos más representativos y contundentes de variación, siendo este el cambio de posición con respecto al transcurso del tiempo" (Ministerio de Educación Nacional, 2004, p.23).*

Existen diversas situaciones que se pueden utilizar para trabajar o reforzar el pensamiento variacional y para darles una solución efectiva es necesario utilizar diferentes representaciones. El Ministerio de Educación Nacional. (2004) distingue dos tipos de representaciones: la primera tiene que ver con las representaciones de tipo cualitativo en las cuales se tiene en cuenta la escrita, que tiene que ver con la capacidad de poder comunicar las observaciones que se hacen de las situaciones de variación al igual que las conclusiones, la pictórica que corresponde a los gráficos o dibujos que ayudaran a darle sentido a las gráficas cartesianas de las funciones que describen situaciones de cambio y por último los modelos físicos. El segundo tipo de representaciones son de carácter cuantitativo entre las cuales se consideran las representaciones geométricas, tabulares con la cual se pueden encontrar patrones de regularidad con el fin de encontrar expresiones algebraicas, también se encuentran las representaciones algebraicas y por último las representaciones gráficas las cuales se pueden obtener luego de utilizar una representación tabular.

> Los análisis y descripciones que pueda hacer un estudiante de las diferentes representaciones serán de vital importancia en el entendimiento del fenómeno de variación. La calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las diferentes representaciones. (MEN, 2004, p.21)

A continuación hacemos un breve recorrido por los estándares básicos planteados en Ministerio de Educación Nacional (2003) en relación con el pensamiento variacional; en los grados primero a tercero se empieza a trabajar en algunas competencias para desarrollar dicho pensamiento:

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Estos estándares están relacionados con la idea de encontrar patrones, la cual es la base de la variación; sin embargo no la utilizaremos en nuestras actividades pero que vale tener en cuenta que han sido enseñados y trabajados.

De cuarto a quinto se tiene:

- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.

- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

En estos estándares se continúa con la idea de encontrar patrones, sin embargo ya se empieza a trabajar con las representaciones gráficas y tabulares las cuales utilizaremos y esperamos que aparezcan cuando los estudiantes resuelvan las actividades.

En secundaria para los grados sexto y séptimo tenemos:

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

En estos grados aparecen estándares importantes para nuestro trabajo como es el de relacionar las representaciones ya que como mencionamos anteriormente partimos del supuesto de que el poder manejar las diversas representaciones y hacer traducciones entre ellas ayudaran a que los estudiantes adquieran una mayor comprensión del objeto tratado para este caso el de la derivada.

Concluimos con algunos de los estándares planteados para los grados décimo y once:

- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

En estos estándares ya se mencionan los métodos para hallar las derivadas de algunas funciones sin embargo vale recordar que nuestro trabajo no se centra en ello, en estos ya se trabaja con la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva interpretaciones de la derivada que trabajaremos.

1.2 COMPRENSIÓN Y REPRESENTACIÓN

Uno de los grandes objetivos que ha tenido la Educación Matemática, es lograr que los estudiantes comprendan un concepto matemático, según Hiebert y Carpenter citado por Gairín (2001)

> Las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes (p. 145)

Duval (1999) menciona que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación y que toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión. Es por ello que damos gran importancia a las representaciones en este trabajo, reconociendo que estas exigen el profundo conocimiento de características sintácticas y semánticas, y este aspecto es esencial en la comunicación de las ideas matemáticas, y por ende en la comprensión de los conceptos matemáticos.

El término de representación es complejo y encierra múltiples significados ya que puede ser aplicado en gran cantidad de ámbitos, por esta razón, para este trabajo utilizaremos la siguiente definición citada por Espinosa (s.f) "*entenderemos por representación el conjunto de* *herramientas (acciones, signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático*)(p. 9)" por lo tanto las representaciones se convierten en una gran herramienta para facilitar la comprensión de un concepto.

Por otro lado existen dos tipos de representaciones, propuestas por Goldin y Kaput citado por Espinosa (s.f), la representación interna y externa, entendidas como:

Representación interna: son las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir.

Representaciones externas: son las representaciones que comunicamos fácilmente a otras personas. Estas se hacen escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones. Por otro lado como afirma Duval (1999) "*la producción de una representación externa solo puede efectuarse a través de la aplicación de un sistema semiótico (p. 33)*".

Las primeras se refieren a representaciones como contenido mental, al que se le asigna un sentido subjetivo y personal, no son directamente observables, pero se pueden inferir a través de lo que hacen y dicen los estudiantes, en cambio las representaciones externas tienen como objetivo representar externamente una cierta realidad matemática, en esta se consideran las configuraciones observables tales como palabras, gráficos, dibujos, ecuaciones, etc. Estas representaciones externas son, por naturaleza, ***representaciones semióticas***[1], específicamente consisten en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. Duval citado por Romero y Rico (1999), propone tres razones para explicar porque es tan interesante para el pensamiento humano las representaciones semióticas. Las razones son:

[1] Son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (Duval, 1999)

Economía de tratamiento

Hay facetas y acciones de un concepto que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otros. Así, la existencia de varios sistemas de representación permite cambiar de registro y, de este modo, trabajar de la manera más económica y potente en cada caso.

Complementariedad de los sistemas.

Una vez elegido un sistema de representación para un contenido, se impone una selección de algunos elementos significativos o de información del contenido que se representa; esta selección se hace en función de las posibilidades y limitaciones del sistema elegido. Esto quiere decir que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y, que de un sistema a otro no son los mismos aspectos de un contenido los que se representan.

Necesidad de coordinación de registros de representación para la conceptualización.

Como continuación de la idea anterior, si cada sistema de representación ofrece una consideración parcial para un concepto, el cruce de representaciones relativas a ese concepto mejora la información sobre el mismo; pero esto plantea mayores dificultades para el sujeto que está aprendiendo tales conceptos. La comprensión reposa sobre la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación; esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la naturalidad de la actividad cognitiva de traducción.

Para este trabajo nos interesan las representaciones externas ya que estas son esenciales para la función de transformación, esto quiere decir que son esenciales para que los estudiantes logren realizar la conversión de un registro semiótico a otro, en este caso que logren la conversión entre la representación grafica y analítica del concepto de la derivada y por ende como afirma Duval (1999) citado por Nolasco (2001)

> El eje central de la adquisición de un concepto matemático radica en la actividad que se pueda realizar en las diferentes representaciones, esto implica actividad en un registro, "tratamiento" y posterior coordinación

> entre los diferentes registros y "conversión" encaminada a construir la estructura cognitiva, hasta lograr reconocer al objeto matemático; en este caso la derivada; en sus diferentes representaciones (p. 8).

Pero, esto no quiere decir que se vaya a dejar totalmente de lado la representación interna, ya que como afirma Duval citado por Espinosa (s.f) "*las representaciones externas son un medio para exteriorizar las representaciones mentales internas*" (p. 4).

Centrándonos en las representaciones externas, nace la necesidad de emplear diferentes representaciones, ya que es esencial para lograr dominar y comprender un concepto, movilizar varios sistemas de simbolización en el curso de una misma acción, o bien elegir un sistema en vez de otro. Para Castro y Castro citado por Blázquez y Ortega (2001)

> Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir las representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades (p. 2).

Continuando con la teoría de Duval en relación con las representaciones vale la pena hacer referencia a dos conceptos importantes de esta teoría: la noesis y la semiosis; aunque hay una diferenciación entre estos dos conceptos Duval (1999) afirma que no hay noesis sin semiosis; veamos rápidamente en qué consiste cada uno de estos; la semiosis es una actividad ligada a la aprehensión o producción de representaciones semióticas, y la noesis está relacionada con la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos representados.

Según Duval (1999), los sistemas semióticos deben cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación:

1. La identificación de la presencia de una representación; ello implica una selección de rasgos en el contenido a representar.

2. El tratamiento de una representación, es decir, la transformación de la representación de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones iniciales. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

3. La conversión de una representación es la transformación de la representación en una representación de otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Para este trabajo nos centraremos en la conversión de la representación obviamente sin excluir totalmente las otras dos actividades cognitivas (estas pueden darse aunque no nos centremos en promoverlas); puesto que nuestras actividades están enfocadas en que los estudiantes relacionen la representación gráfica de la derivada con la representación analítica y para ello es necesario realizar una conversión, es decir, es necesario que el estudiante pase de un registro a otro; sin embargo vale mencionar que según Duval (1999)

> la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. No solo el cambio de registros ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también, con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales (p. 46).

1.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

La definición que adoptamos para este trabajo sobre sistemas de representación, es propuesta por Castro Castro citada por Espinosa (s.f), el cual señala que:

> Los sistemas de representación son un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permite expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por si solo un concepto (p. 5).

Dado que ningún sistema agota por sí solo un concepto, en la propuesta de actividades se hace necesario visibilizar las características o aspectos de la derivada en cada uno de los dos sistemas de representación que abordamos. Se hace evidente, entonces, como el sistema de representación pre configura el objeto matemático, es decir, le da forma. En consecuencia, propiedades del objeto que pueden ser explícitas en una representación pueden no serlo en otra, es decir, el contenido de cada representación cambia en tanto cambie el sistema en el que se produce.

Por otro lado, como nuestro interés es diseñar actividades que relacionen las representaciones de la derivada con miras a posibilitar la comprensión de los estudiantes de la noción de dicho objeto matemático, se hace necesario citar los diferentes sistemas de representación que subyacen a dicho objeto. Zandieh citado por Matamoros, García & Llinares (2008), estudió el proceso de construcción de significados de la idea de derivada, donde consideró, diversas representaciones del concepto de la derivada las cuales retomamos para este trabajo pero con algunas modificaciones, las representaciones son:

1.3.1 Representación gráfica

Esta representación, se relaciona con el significado geométrico de la derivada, esto quiere decir, con la construcción de la pendiente de la recta tangente a la curva por un punto dado, esta representación fue fundamental en la construcción del concepto de la derivada como se evidencia en el marco histórico de este trabajo, por otro lado, para poder identificar la pendiente de la recta tangente a una curva, es necesario que los estudiantes tengan la idea local de pendiente en un punto, a partir de la cual se pasara al cálculo de la pendiente de una recta, al cálculo de la pendiente entre dos puntos de una curva y finalmente a la pendiente de un punto como la pendiente de una recta tangente (Azcárate, Casadevall, Casellas & Bosch(s.f)).

1.3.2 Representación física

Esta representación, se relaciona con la velocidad media (el cociente que hay entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido), esto quiere decir, el punto de vista cinemática de la derivada, en esta representación la idea es que el estudiante logre comprender y analizar graficas espacio-tiempo y realizar todo un estudio de la velocidad a partir de tablas con algunos valores.

1.3.3 Representación analítica

Esta representación tiene que ver con la función pendiente o función derivada según un incremento h, que se obtiene cuando el incremento tiende a cero, mejor dicho el significado de la derivada como límite del cociente incremental, o sea tenemos que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow f'(x) \;\; cuando \; h \rightarrow o$$

Con este paso al límite, se consigue un soporte visual y por otra parte se puede provocar la necesidad de una precisión que de otro modo puede parecer como algo sin sentido (Azcárate, Casadevall, Casellas & Bosch (s.f)).

Aunque citemos la representación Física, nuestro trabajo se centrará solo en la representación gráfica y analítica de la derivada, ya que nuestro objetivo es realizar actividades en donde los estudiantes relacionen la representación gráfica (pendiente de la recta tangente) y la representación analítica (razón de cambio) de la derivada, con miras a que los estudiantes comprendan la noción de dicho objeto matemático.

Por otro lado algunas de las actividades propuestas en este trabajo, que están orientadas a que los estudiantes logren relacionar las representaciones de la derivada con el fin de que comprendan este objeto matemático, se realizarán con ayuda de las tecnologías computacionales, ya que como se afirma en el M.E.N (2004), "*con la aparición de las tecnologías computacionales, se ampliaron las posibilidades de representación de los fenómenos de variación y de poder pasar de manera versátil de un sistema de representación a otro (p. 27)*". Por tal motivo a continuación se mostrara un capítulo relacionado con la importancia de las ayudas computacionales para que los estudiantes logren pasar de un sistema de representación a otro.

1.4 ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA COMO INSTRUMENTO DE MEDIACIÓN

Decidimos implementar entornos de geometría dinámica en la elaboración de las actividades que tiene como objetivo que los estudiantes logren la adquisición del objeto matemático de la derivada a través de la conversión de su representación analítica y gráfica, ya que consideramos que estos entornos más que artefactos tecnológicos

> Son instrumentos mediadores que regulan y transforman tecnológicamente la relación educativa de un modo definido otorgando a los sujetos formas de actuación externa para el aprendizaje, pero a su vez, a partir de esa misma estructura y atributos tecnológicos, promueve en el sujeto una modificación interna de sus estrategias de pensamiento y aprendizaje". (Suarez, s.f)

Esta doble orientación, externa e interna, atribuible a los instrumentos de mediación, logra la integración de diferentes representaciones que permite al entorno de geometría dinámica como un instrumento mediador del conocimiento, presentar de manera simultánea diferentes registros de representación, con lo que el objeto de aprendizaje queda ligado, para el aprendiz a una variedad de clases de representaciones por lo tanto se estaría adquiriendo el concepto de la derivada, ya que como afirma Duval (1999) citado por Nolasco (2001) el eje central de la adquisición de un concepto matemático radica en la actividad que se pueda realizar en las diferentes representaciones, esto implica actividad en un registro, "tratamiento" y posterior coordinación entre los diferentes registros y "conversión" encaminada a construir la estructura cognitiva, hasta lograr reconocer al objeto matemático; en este caso la derivada; en sus diferentes representaciones.

Además de presentar de manera simultánea diferentes sistemas de representación, el entorno de geometría dinámica como instrumento mediador, también tiene las siguientes características:

- Dinamicidad que facilita la interacción del alumno con un objeto de aprendizaje más cercano a una clase que a un objeto en particular. Por ejemplo, en la pantalla se representan las rectas secantes que a través del arrastre de un punto cualquiera de la recta secante, se modifica ante los ojos del aprendiz, las propiedades observadas por el estudiante en este caso no lo serán entonces no de un objeto en singular sino de una clase en particular.

- Interrelación de los conocimientos conceptual y procedimental relativos a los objetos tratados tradicionalmente presentados disjuntos. Cuando se exploran diferentes cálculos procedimentales el estudiante puede manipular diversas expresiones simbólicas y las interacciones, entre ellas y con las demás clases de representaciones (gráficas y numéricas), con lo que posibilita un horizonte de elaboración conceptual involucrados en la situación estudiada más integrado e interrelacional.

Por otro lado estos instrumentos de mediación han sido implementados por el M.E.N en el currículo, ya que con estas ayudas, se tiene acceso no sólo a un gran número de representaciones numéricas y gráficas, sino que además se facilita el traslado de unas a otras y por ende llegar a comprender un concepto. Por ejemplo cuando un estudiante introduce una representación analítica de un objeto matemático en algún software de geometría dinámica, este le devuelve una representación visual del objeto, que es ejecutable, por lo que esta respuesta puede verse como el objeto matemático en sí. Por lo tanto las ayudas tecnológicas permiten ver los objetos matemáticos como manipulables, permite actuar sobre ellos, dejan de ser abstractos para convertirse en reales.

> El uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, lo que constituye un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas. (Barrera & Santos citado por Gamboa (2007), p.9).

Gamboa (2007) afirma que investigar y documentar el proceso de interacción del estudiante con las herramientas tecnológicas cuando resuelve problemas, observando aspectos relacionados con su uso, las representaciones que emplea, el tipo de conjeturas y conclusiones que obtiene, proporciona argumentos para identificar qué tipo de actividades son las que se tienen que plantear para alcanzar una mayor comprensión de los conceptos matemáticos. Por ese motivo es que decidimos realizar algunas actividades utilizando ayudas computacionales.

1.5 LA HISTORIA COMO RECURSO PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

Por otro lado a parte de la importancia que tiene la teoría de las representaciones de Duval en la adquisición de un concepto, decidimos elaborar las actividades haciendo uso de la evolución histórica del concepto de la derivada ya que como afirma Bell (1985) citado por González (2004, p.17) "*Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.*", en este sentido no podemos desligar el concepto de la derivada de su historia ya que perderíamos información sobre la evolución de las diferentes representaciones que se le han dado a la derivada, algunos problemas que conllevaron a la evolución del concepto y no tendríamos herramientas suficientes que nos proporcionen ideas para la elaboración de las actividades, según Guzmán (1992) citado por González (2004, p.18)

> La historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado, etc.

A continuación presentamos un capítulo sobre el desarrollo histórico de la derivada a partir del cual como se mencionó anteriormente se fundamentan las actividades planteadas en este trabajo.

2. DESARROLLO HISTÓRICO DE LA DERIVADA

Los conceptos en matemática normalmente se presentan al estudiante de una forma acabada y cerrada, esto debido a que en algunos casos es mucho más fácil dar una fórmula o un algoritmo que mostrar los procesos que se llevaron a cabo hasta obtener dicha fórmula o algoritmo; de esta manera terminamos obviando todo el desarrollo histórico que subyace a la evolución de dicho concepto, logrando que no se mejore la transmisión del conocimiento matemático. Si se omite el desarrollo histórico de un concepto, en este caso el de la derivada, no se tendrían los fundamentos para la comprensión de ideas, y conceptos que de ellos han resultado, no se tendría conocimiento sobre el origen de los términos, lenguajes y las notaciones que se han empleado, se estarían excluyendo todos los conflictos, problemas, las frustraciones, y el largo y arduo camino que los matemáticos han tenido que recorrer para poder crear una sólida estructura de un concepto matemático.

Por tal motivo al realizar un desarrollo histórico del concepto de la derivada pretendemos extraer ideas que nos permitan plantear actividades grupales e individuales con software o sin el que ayuden a mejorar la comprensión de la noción de la derivada a través de su representación analítica y gráfica. Para comenzar con el recorrido histórico de la derivada, partiremos desde los griegos centrándonos en los métodos utilizados por Apolonio para construir las tangentes a una cónica, continuamos con Oresme quien incentivo el uso de representaciones graficas utilizando la idea de plano cartesiano que utilizamos actualmente, seguidamente nos centramos en los métodos dados en los siglos XV al XVII para la construcción de tangentes por Descartes, Fermat, Galileo, Roberval, Barrow, Newton y Leibniz; estos métodos fueron de tipo geométrico, analítico, aritmético y cinemático y concluimos con Cauchy quien definió la derivada como el límite de un cociente de incrementos, definición que utilizamos actualmente.

El concepto de derivada surgió a partir de las soluciones que se dieron a cuatro problemas que se plantearon en la antigüedad los cuales se mencionaran más adelante; dichos problemas son cruciales para la ciencia del siglo XVII puesto que sirvieron para el desarrollo y posterior formalización del cálculo diferencial; estos problemas estaban relacionados con el estudio del movimiento y con la determinación de tangentes a una curva dada; todos se abordaron desde los griegos, y en este sentido se dieron grandes avances hasta que Newton y Leibniz lograron relacionar estos dos tipos de problemas y consiguieron mostrar que en esencia eran un mismo problema; por lo tanto proporcionaron un método general para resolverlos (llamado diferenciación); vale resaltar que llegaron a estos resultados de una manera independiente.

A continuación mostramos los avances que se dieron en torno al desarrollo del concepto de la derivada en diferentes épocas mostrando los aportes más importantes de algunos personajes que estudiaron problemas relacionados con el movimiento y las tangentes a las curvas en un punto dado.

2.1 DESDE LA MATEMÁTICA GRIEGA…

Anteriormente mencionamos que el concepto de derivada surgió a partir de cuatro problemas planteados desde los griegos; estos son según Ramírez (2009); la determinación de la velocidad de los cuerpos en movimiento, el de la recta tangente, el del área bajo la curva y el del cálculo de máximos y mínimos

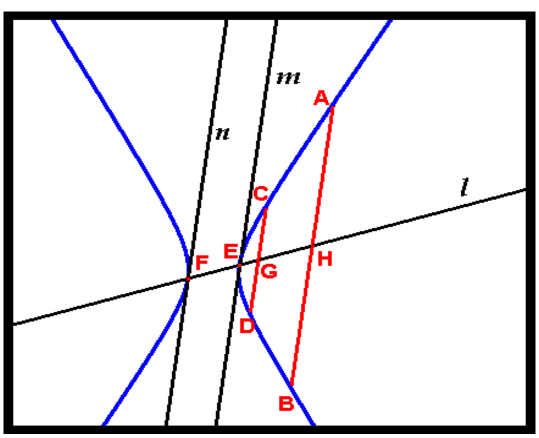
En la antigüedad el primer problema que se empezó a tratar fue el de las tangentes; la primera definición establecida, fue gracias a las observaciones realizadas sobre el círculo, las cuales consideraban la tangente como una recta que toca a la curva sin cortarla.

> Los matemáticos griegos no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente de una curva C en un punto P, considerándola como una recta L que tiene el único punto P común con la curva, y tal que no pueda trazarse ninguna otra recta pasando por P e incluida entre la recta L y la curva C. (Boyer, 1986, P. 203)

De aquí surgen los trabajos realizados por Euclides (365-265 A. N. E.), Apolonio de Pergamo (287-212 A.C), Arquímedes de Siracusa (siglo III) el precursor de los métodos infinitesimales, los cuales mostraban los resultados obtenidos sobre tangentes a una curva, Euclides en el libro III de los Elementos "*define la tangente al círculo como la recta que* *lo toca y al prolongarla no lo corta y a partir de esta definición se deduce un procedimiento geométrico para su trazo (p. 20)".* (Dolores, 1996). Esta forma Euclidiana de hallar la tangente a una curva no funcionaba para todas las curvas, como se puede observar en la espiral de Arquímedes[2], por esta razón Arquímedes se dedica a buscar la manera como encontrar la tangente a una curva "*siguiendo posiblemente consideraciones de tipo cinemático, que le permitieron determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva*" *(Alarcón, et al, 2005, p.102);* según Boyer (1986) al parecer Arquímedes halló la dirección instantánea del movimiento, y por lo tanto la dirección de la tangente de la curva, observando el movimiento resultante de los componentes por medio del paralelogramo de las velocidades; esta parece ser la primera vez que se determinó la tangente a una curva que no fuera una circunferencia.

En el siglo III a.C.; Apolonio decide extender a las cónicas la concepción de tangente que Euclides había establecido para el círculo. Este trabajo lo podemos observar en su obra titulada *Las cónicas*, *"Con el descubrimiento de las cónicas, los geómetras griegos en especial Apolonio idearon métodos particulares para el trazo de sus tangentes basándose solamente en las propiedades geométricas de estas curvas (p. 20)"* (Dolores, 1996), los resultados más relevantes para este estudio fueron:

- Construcción de la tangente a una elipse o hipérbola utilizando los diámetros conjugados. Dado un diámetro de una elipse o una hipérbola, los puntos medios del conjunto de las cuerdas paralelas a dicho diámetro están situados sobre un segundo diámetro, estos diámetros se denominan diámetros conjugados.

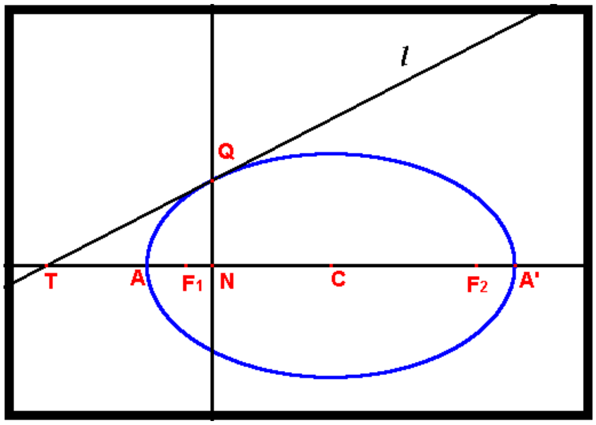


Veamos el caso para una hipérbola. Sea $\overline{AB}$ un diámetro de la hipérbola y $\overline{AB}//\overline{CD}$. H y G son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. $\overleftrightarrow{l}$ Contiene los puntos H y G. F y E son los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{l}$ con la hipérbola. Sea $\overleftrightarrow{m}//\overline{AB}$ por E y $\overleftrightarrow{n}//\overline{AB}$ por F entonces $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son las rectas tangentes a la hipérbola por E y

[2] La espiral de Arquímedes se utilizó para resolver uno de los problemas de tipo geométrico planteados en la antigüedad y es el de la trisección de un ángulo.

F respectivamente.

- Construcción de la tangente haciendo uso de las propiedades de la división armónica de un segmento



Apolonio construye la tangente a una elipse de la siguiente manera. Sea Q un punto que pertenece a la elipse y $\overline{AA'}$ el eje mayor de la elipse. $\overline{QN} \perp \overline{AA'}$ con $N \in \overline{AA'}$. T es el conjugado armónico de N con respecto a A y A', es decir, T es el punto de la $\overleftrightarrow{AA'}$ tal que $\frac{AT}{A'T} = \frac{AN}{NA'}$. Entonces la recta $\overleftrightarrow{TQ}$ es la tangente a la elipse por Q.

Como vemos en esta época también se avanzo en otro de los problemas como lo es el del movimiento, varios filósofos intentaron explicar la existencia o no del movimiento; todos estos trabajos están relacionados con procesos de cambio entre ellos se encuentran los estudios de Zenón de Elea 450 a, entre otros. Para Zenón "*el movimiento era imposible y consideraba que el espacio y el tiempo eran infinitamente divisibles (p. 160)*" (Ramírez, 2009); de él son famosas sus paradojas: La del movimiento, la de Aquiles, la de la flecha[3] y la del tiempo.

2.2 LA EDAD MEDIA

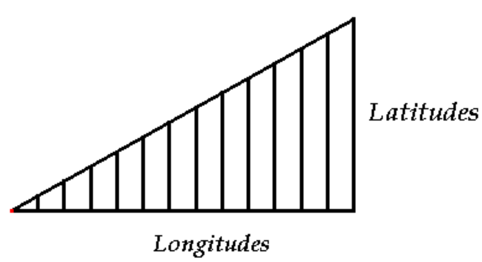
Este periodo histórico abarca más de un milenio entre el siglo V y el siglo XV. Es poco lo que encontramos en la bibliografía consultada relacionado con los avances que se dieran sobre el concepto de la derivada en este periodo puesto que en este poco se

[3] Esta paradoja se encuentra explicada en Fernández (2000)

avanzó en las ciencias, debido principalmente a que en esta época se centro el interés en cuestiones religiosas, sin embargo en Fernández (2000) encontramos que el obispo Nicolás Oresme (1323-1382) hizo los primeros intentos por cuantificar la variación y contribuyó a la investigación sobre cómo representar simbólicamente y geométricamente a la variación; no obstante los estudios de Oresme estuvieron mayormente relacionados con el concepto de función, con el nacimiento de la geometría analítica y con el área bajo la curva.

Oresme fue el primero en representar gráficamente cantidades variables utilizando para ello una idea primitiva del plano cartesiano, lo que Oresme empezó por representar fue el valor medio de una forma uniformemente diforme, es decir, una forma con velocidad de cambio constante. Para realizar dichas representaciones Oresme utiliza latitudes y longitudes que son equivalentes a las ordenadas y abscisas respectivamente

> Para el caso de un cuerpo moviéndose con un movimiento uniformemente acelerado, Oresme dibuja una grafica velocidad- tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. (Boyer, 1986, p. 288-290)



Los extremos superiores de todos estos segmentos (Latitudes) están en una recta, y si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, entonces la totalidad de los segmentos velocidades cubren el área de un triángulo rectángulo.

2.3 LA MATEMÁTICA EN LOS SIGLOS XV A XVII

Después de la tercera década del siglo XVII Descartes y Fermat, independiente uno de otro, crean la geometría Analítica.

> Con el desarrollo de la geometría analítica se clarificó la relación entre las curvas y las ecuaciones, y el hecho de que toda ecuación en dos variables determinara una curva en el plano produjo una verdadera explosión de nuevas curvas, con algunas de las cuales resultaba inadecuado el concepto griego de tangente (Alarcón, et al, p. 102).

Esto conllevo a que algunos de los matemáticos como Galileo, Roberval, Fermat, Barrow, Newton y Leibniz, se dieran a la tarea de desarrollar métodos para la obtención de la recta tangente a cualquier curva, a estos últimos se debe el concepto de derivada, los aportes más importantes de cada uno de estos se mencionan brevemente a continuación. Para presentar dichos aportes tomamos como referencia a Fernández. J. (2000), Solache. J. & Díaz. R. (1999) y Pérez (s.f).

2.3.1 Galileo Galilei (1564-1642)

Los estudios realizados por Galileo están relacionados con el movimiento de los cuerpos, considerando al reposo, como un estado especial de movimiento. Según Fernández (2000) Galileo determina la variación como la cuantificación de los cambios, estos cambios los abstrae del movimiento que va presentando un cuerpo en su caída teniendo como referencia el punto de partida y calculando las distancias que el cuerpo va recorriendo en los diferentes tiempos consecutivos; cómo podemos observar está variación es de tipo numérica.

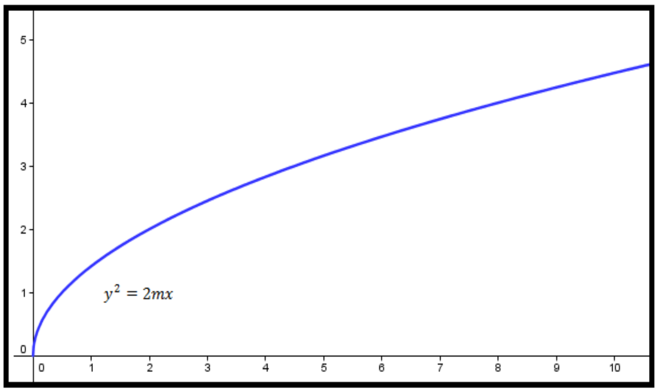
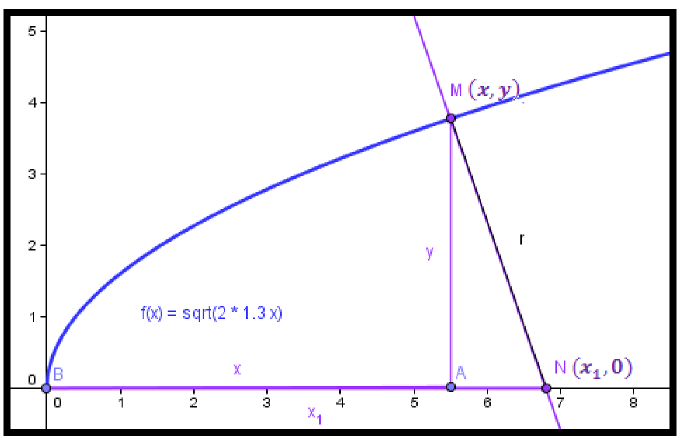
2.3.2 René descartes (1596-1650)

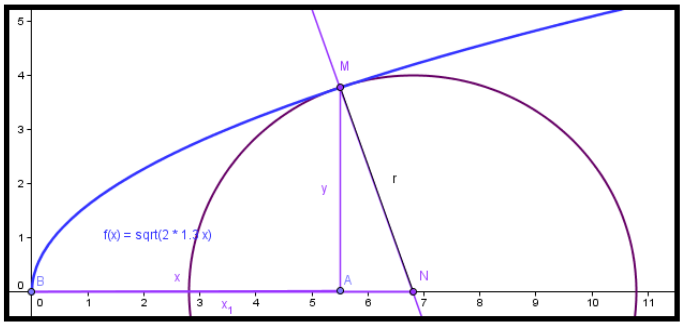
Descartes abordo el problema de las tangentes en 1637 intentando determinar la "normal" a la curva de un punto dado. Textualmente Boyer citado por Cortes y Calvo (2004), explica de la siguiente manera el método:

> Descartes sugería que para hallar la normal a una curva algebraica en un punto de dicha curva, se debería tomar un segundo punto variable Q sobre la curva, y hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas

(puesto que utilizaba un único eje, el de abscisas) y que pase por los puntos P y Q. Igualando entonces a cero el discriminante de la ecuación que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, puede hallarse el centro de la circunferencia tal que Q coincide con P y, conocido el centro, pueden determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva en el punto P (p. 42).

Para poder entender mejor el método citaremos un ejemplo expuesto por Collete (2007). La idea es calcular la normal a la parábola $y^2 = 2mx$

	$y^2 = 2mx$
	Descartes supone que $\overline{NM}$ es la normal a la curva $y^2 = 2mx$ $BA = x$, $MA = y$ $MN = r$ $BN = x_1$
	Descartes halla la ecuación de la circunferencia que va a tener como centro a N y radio MN, la ecuación es la siguiente: $(x - x_1)^2 + y^2 = r^2$(1)



También la ecuación de la curva con la circunferencia.

$(x - x_1)^2 + 2mx = r^2$(2)

Y desarrollando

$x^2 - 2(x - x_1) - r^2 = 0$(3
)

Tiene dos raíces distintas, para que estas coincidan, el discriminante de (3) se debe eliminar, de donde la raíz doble será:

$x = x_1 - m$

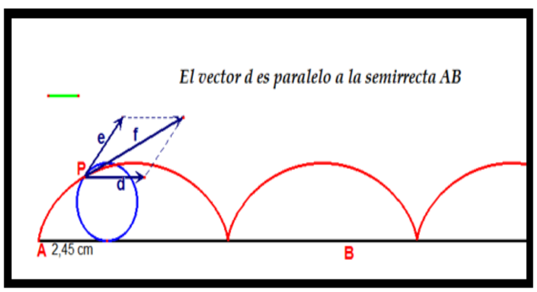
Conociendo la abscisa *x* del punto de tangencia y el valor de *m* de la parábola dada, se encuentra x_1, y conociendo el centro de la circunferencia se conocerá la normal y la tangente. Como vemos este método tiene una representación algebraica, la idea es encontrar la ecuación de la circunferencia que interseca a la curva dada, para poder hallar las coordenadas del punto por donde va a pasar la recta normal a la curva.

El método de Descartes tiene unas limitaciones, que resume López (s. f) en las siguientes ideas:

- Hay que conocer previamente la concavidad o convexidad de la función y averiguar si el centro del círculo va a estar en el eje X o en el eje Y.
- Para las funciones en las que el centro del círculo auxiliar no pueda estar en ninguno de los ejes de coordenadas, el problema tiene una dificultad añadida, pues habría que determinar las dos coordenadas del centro.

2.3.3 Gilles Roberval (1602-1675)

Continuando con el problema de las rectas tangentes seguimos con Roberval quién en 1630 junto con Torricelli descubrieron un método para calcular tangentes el cuál es conocido como método cinemático, y "*rompe con la concepción estática, que sobre tangentes se tenía desde la época de los griegos (p, 29)*" (Fernández, 2000). Roberval considera una curva como la trayectoria de un punto en movimiento y la tangente como la recta de movimiento instantáneo que contiene al punto en movimiento; su método permite encontrar el vector de la velocidad instantánea de un punto determinado, a partir del vector resultante de la suma de dos vectores de igual módulo utilizando la ley del paralelogramo; la dirección del vector resultante coincide con la tangente y determina la pendiente de la tangente a la curva en el punto en cuestión. En este documento mostramos la explicación de este método encontrando la tangente a una cicloide[4] por un punto *P*, el cual pertenece a la circunferencia generatriz.



Construimos el vector e tangente a la circunferencia generadora por *P*, luego el $\hat{d}//\overrightarrow{AB}$ por *P*; estos vectores tienen el mismo modulo. La dirección del vector resultante de la suma de estos dos vectores utilizando la ley del paralelogramo corresponde a la tangente de la cicloide, es decir, el vector *f*. *f* es la tangente a la cicloide por *P*.

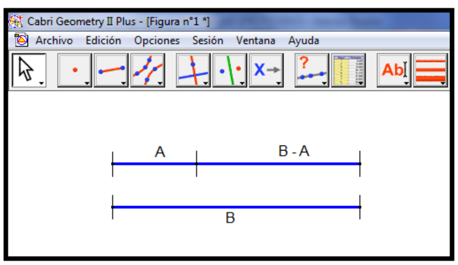
2.3.4 Pierre Fermat (1601-1665): El método de máximos y mínimos

El método se encuentra en su obra titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* ("*Método para investigar máximos y mínimos*") el cual escribió en 1629 y dio a conocer hasta 1637. El método es en esencia, el que actualmente se emplea para determinar tangentes en los puntos máximos y mínimos de las funciones, este método es puramente algebraico, y sirvió de inspiración para que los matemáticos Newton y Leibniz generaran la definición actual de derivada. A continuación se mostrara la manera como Alarcón, et al, (2005), transcriben parte del método expuesto por Fermat para calcular los máximos y mínimos, el problema que Fermat escogió para ilustrar su método y el análisis de que

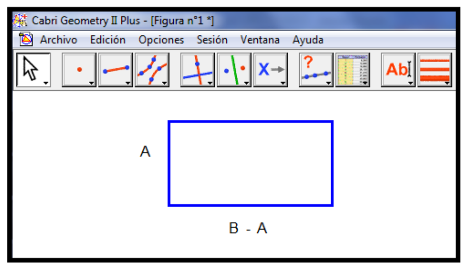
[4] La cicloide es según Fernández (2000) la curva que describe un punto que pertenece a un círculo, cuando este gira sobre una recta.

tan cerca estuvo Fermat de llegar a la definición de Derivada. Haremos de manera análoga estas tres presentaciones en una tabla.

Antes de presentar la tabla, es necesario partir del problema que propuso Fermat para ilustrar su método, el problema consistió en dividir un segmento dado en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de éstas sea un máximo. Escrito de forma simbólica, sea B la longitud del segmento dado y A, la de la primera parte, (ver figura 4). Es necesario hacer máxima el área del rectángulo de la figura, es decir, la cantidad $A(B-A)$.



División del segmento B



Rectángulo de área máxima

Figura 4

Método de máximos y mínimos	**Problema: Sea B, la longitud del segmento dado y A, la de la primera parte. Es necesario hacer máxima el área del rectángulo, es decir, la cantidad $\boldsymbol{A(B-A)}$.**	**Análisis de la semejanza con la definición de la derivada Actual.**
1. Sea a una incógnita cualquiera del problema.	**1.** Identificamos con A la incógnita del problema.	**1.** En esta etapa nada cambiaria.
2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.	**2.** La cantidad máxima es $A(B-A)$, la cual, desarrollada en potencias, nos da $AB-A^2$ (I).	**2.** Tanto en la etapa 2 y 3, vamos a suponer que se denota la cantidad máxima o mínima por $f(A)$ y $f(A+E)$

3. Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a + e$	**3.** Sustituimos A por $A+E$, en (I), con lo cual obtenemos $(A+E)[B-(A+E)]$, que , desarrollada en potencias de A y E, nos da $AB+BE-2AE-A^2-E^2$ (II)	**3.** cantidad máxima o mínima por $f(A)$ y $f(A+E)$
4. Se "adigualarán[5]", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.	**4.** Hacemos "adiguales" las dos expresiones de la cantidad máxima, dadas en (I) y (II), así: $AB+BE-2AE-A^2-E^2 \sim A-$ Donde el símbolo $\sim$ representa la adigualdad.	**4.** or lo tanto en esta etapa se tendría $f(A+E) \sim f(A)$
5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.	5.Eliminamos los términos comunes y obtenemos $BE-2AE-E^2 \sim 0$	**5.** n esta etapa se tiene que eliminar los términos comunes por lo tanto se podría poner $f(A+E)-f(A) \sim 0$
6. Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.	**6.** Dividimos todos los términos por E para obtener $B-2A-E \sim 0$	**6.** n esta etapa se tiene que dividir por E, y se tendría $\frac{f(A+E)-f(A)}{E} \sim 0$
7. Se suprimirán a	**7.** Ignoramos los términos que aún contengan E, lo que	**7.** e deben eliminar

[5] L a idea de "hacer adiguales" dos expresiones proviene de Diofanto, se establece para designar una aproximación a un número racional tan cerca a éste como sea posible.

continuación todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias y se igualará lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada se igualarán, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.	nos dará $B-2A\sim 0$ Las cantidades restantes se hacen iguales para llegar a la expresión $B-2A=0$	los términos que contengan E, ó bien haríamos $E=0$, y se obtendría. $\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0}\sim 0$
8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.	8. La resolución de esta última ecuación nos dará el valor $A=\frac{B}{2}$, que hace que la cantidad $A(B-A)$, sea un máximo.	**8.** l resolver, la ecuación $\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0}\sim 0$ Obtendríamos los valores de A que corresponden a máximos ó mínimos de $f(A)$

Como se puede observar la columna tres tiene cierto parecido a la notación de límite, si la dejamos en términos de la notación empleada por límite nos quedaría la etapa 7 expresada de la siguiente manera.

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0$$

Está expresión nos daría los valores de A para los cuales $f(A)$ es máxima o mínima.

Si se cambian las variables y ahora se pusieran de esta forma, $A=x$ y $E=\Delta x$, la ecuación quedaría como:

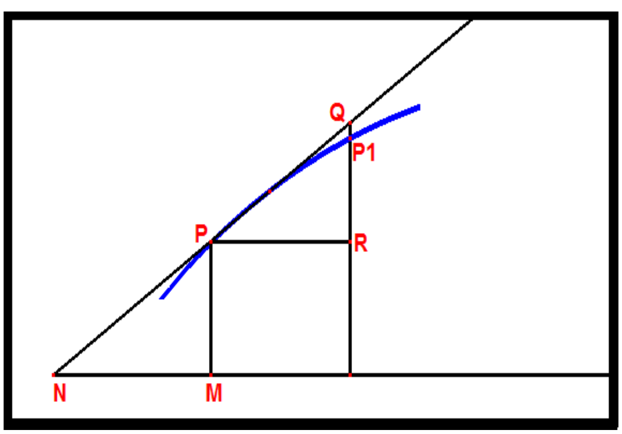
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(A+\Delta x)-f(A)}{\Delta x}=0$$

Se sabe que, si dicho límite existiera, sería igual a la derivada $f'(x)$ y se tendría la expresión $f'(x) = 0$. Actualmente se tendría que las soluciones de esta ecuación nos dan los valores para los cuales $f(x)$ es máximo o mínimo.

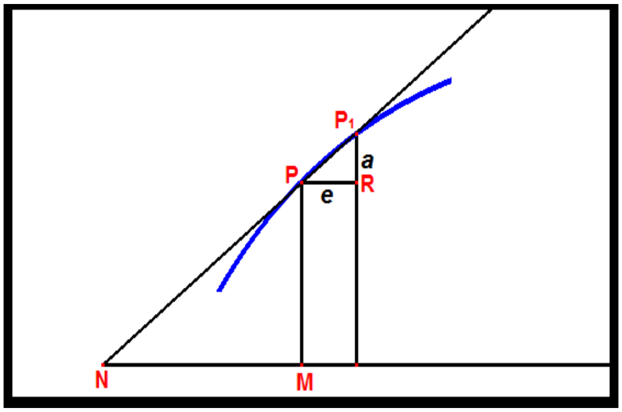
Pareciera que el método propuesto por Fermat hace mucho tiempo, es el mismo que utilizamos para calcular los puntos máximos o mínimos partiendo de la definición de derivada, pero no es así, Alarcón, et al, (2005) en su trabajo titulado, "*El método de las tangentes de Fermat*", muestran las razones por las cuales estos métodos no tienen el mismo significado.

2.3.5 Barrow (1630-1677) y su triángulo diferencial

Para continuar con el problema de las tangentes, queremos presentar la manera como Barrow lo resuelve utilizando el triángulo característico o diferencial, en el cual toma en cuenta un arco de la curva infinitamente pequeño, en este método la tangente está dada como el límite de las secantes; los puntos P y R se acercan al punto Q. A continuación explicamos cómo utiliza Barrow el triángulo diferencial para encontrar la tangente a una curva; para ello hacemos uso de construcciones y de la explicación dada por Pérez (s.f).



Partimos del triángulo PRQ, que resulta de un incremento PR, el cual es semejante al triángulo PNM, por tanto tenemos que $\frac{PM}{PN} = \frac{QR}{PR}$ que representa la pendiente de $\overleftrightarrow{NQ}$. Barrow afirma que cuando el arco PP_1 es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento PQ que es la tangente de la curva por P.



El triángulo PRP_1 de la figura de la derecha, en el cual PP_1 es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el triángulo característico o diferencial de Barrow. En esta figura e y a representan incrementos del punto P.

Lo que acabamos de mostrar es la manera geométrica de encontrar la tangente a una curva por un punto dado, Barrow también encontró dicha tangente de manera analítica la cual está dada por una ecuación polinómica $f(x,y) = 0$, en un punto de la misma $P = (x,y)$ de la forma siguiente. Barrow tomaba $P_1 = (x+e, y+a)$ un punto de la curva próximo a P y sustituía esas coordenadas en la ecuación $f(x,y) = 0$.

> Rechacemos todos los términos en los que no hay a o e (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva); rechacemos todos los términos en los que a o e están por encima de la primera potencia, o están multiplicados ambos (porque, siendo infinitamente pequeños, no tienen valor en comparación con el resto). (Barrow citado por Pérez, s.f)(p. 28)

Luego de realizar las sustituciones y operaciones pertinentes se puede calcular la pendiente de la curva en el punto P que corresponde al cociente a/e.

Otro de los avances de Barrow en relación con la derivada, es que casi logra la conexión entre tangentes y áreas, relación que es inversa y que constituye el teorema fundamental del cálculo, sin embargo dicho resultado se debe a Newton quien continúo trabajando en la misma dirección de Barrow.

2.3.6 Isaac Newton (1642-1727)

Newton realizó variados aportes en la construcción del cálculo sin embargo en este documento solo mencionaremos su trabajo conocido como el método de fluxiones.

En la presentación de sus ideas, Newton recurre a argumentos basados en el movimiento y la dinámica de los cuerpos; en este método se encuentran tres ideas principales que mencionamos a continuación y que se definirían para Newton según Fernández (2000) de la siguiente manera:

- **Fluente:** toda cantidad que se puede variar, variables que fluye con el tiempo que en la actualidad es lo que consideramos como función.
- **Fluxión:** la velocidad o rapidez con que varia la fluente y que en nuestro tiempo corresponde a la derivada o razón de cambio con respecto al tiempo.
- **Momento:** Corresponde a nuestra diferencial el cual representaba como vo, xo, zo, donde "o" es una cantidad infinitamente pequeña y que puede ser el tiempo.

En Pérez (s.f) se encuentra el cálculo de la fluxión de la ecuación $x^3 - ax^2 - y^3 = 0$, los pasos principales para este cálculo son primero sustituir x por $x + \dot{x}o$, y y por $y + \dot{y}o$, luego hace las operaciones, seguidamente divide por el incremento infinitamente pequeño "o", y por ultimo como se supone "o" infinitamente pequeño, los términos que son multiplicados por él, se desprecian. De esta manera se encuentra la relación que satisfacen las fluxiones, Pérez menciona que a partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva en cualquier punto (x, y) de la misma, que viene dada por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Con las fluxiones, Newton generaliza el método iniciado por Galileo y Roverbal, que sólo era aplicable a curvas con ciertas particularidades, en cambio el método de las fluxiones era aplicable a un universo más amplio y presentaba la gran ventaja de ser más algorítmico.

Para finalizar este recorrido histórico por la evolución del concepto por los avances en de la derivada durante los siglos XV al XVII falta mencionar a Leibniz quien obtuvo resultados similares a Newton aunque obtenidos de manera distinta.

2.3.7 Gottfried Leibniz (1646-1716)

Leibniz formalizó con su notación las propiedades y reglas fundamentales de los procesos de derivación e integración; su primera publicación se denomino "*Nuevo cálculo para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene frente a las cantidades fraccionarias e irracionales, y un peculiar tipo de cálculo para ellos*". En este artículo, Leibniz introduce los símbolos $dx,\ dy,\ ds$ para representar a pequeñas diferencias; pero sin dar explicación sobre su carácter infinitesimal, además introduce las reglas básicas del cálculo diferencial de productos y cocientes las cuales utilizamos en la actualidad

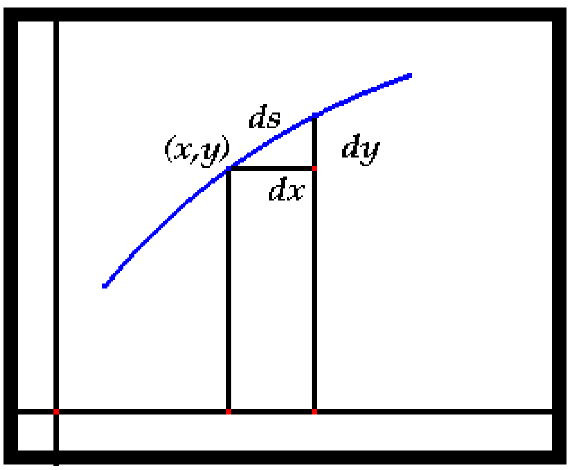
$$d(xy) = y\,dx + x\,dy \quad \text{y} \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

A continuación presentamos el trabajo realizado por Leibniz tal y como se encuentra en Pérez (s.f). Como primera medida vale mencionar que en los trabajos de Leibniz adquieren gran importancia las sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas.

> Dada una sucesión de números: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_{n-1}, a_{n1}, \dots$ Podemos formar la sucesión de sus difrencias primeras: $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1,\ b_3 = a_3 - a_2,\ b_4 = a_4 - a_3, \dots, b_n = a_n - a_{n-1,\dots}$
> Leibniz se habia dado cuenta de la relación: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n$ lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. (Pérez, s.f) (p. 40)

Cuando esta idea se lleva al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de diferencial.

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Con una tal curva se asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ donde los puntos (x_i, y_i) están todos ellos en la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la diferencial de x y se representa por dx, significado análogo tiene dy. El diferencial dx es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por ds. Resulta así el triángulo característico de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow.



El triángulo característico tiene lados infinitesimales dx, dy y ds. El lado ds se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). la pendiente de dicha tangente viene dada por $\frac{dy}{dx}$ que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó cociente diferencial.

Por otro lado Leibniz reconoció que los problemas de la tangente y la cuadratura son inversos. Este triángulo muestra que en el problema de la tangente intervienen las diferencias de las ordenadas como pudimos observar, mientras que en el problema de la cuadratura interviene la suma de las ordenadas, aspecto puramente formal de la cuestión que revela que ambos problemas son inversos.

2.3.8 Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy es el último de los personajes que mencionamos en este recorrido histórico y concluimos con este matemático, puesto que fue él quien después de un camino lleno de avances y retrocesos y prescindiendo tanto de la geometría como de los infinitésimos y de las velocidades de cambio define con precisión la derivada en 1823 en términos del límite.

> Cauchy formula la definición de límite y a partir de ella la de derivada junto con sus propiedades fundamentales. Para definir la derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x, le da a la variable x un incremento $\Delta x = i$ y forma el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+1)-f(x)}{i}$ y al límite cuando $i \to 0$ lo define como la derivada de y con respecto a x. (Ortega & Sierra, 1998)(p. 91)

Esta es la definición que utilizamos usualmente y que enunciamos según Apóstol (1998) de la siguiente manera: Una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto que contenga a x_0, es derivable en x_0 si el limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. El valor del límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0.

Por otro lado vale mencionar que aunque en este documento sólo hagamos referencia a la definición que da Cauchy de la derivada, el realizó numerosos estudios y proveyó al cálculo de numerosos resultados que son de gran utilidad como por ejemplo el teorema del valor medio y sus aplicaciones a la aproximación de funciones por polinomios; establece rigurosamente los criterios para la existencia de máximos y mínimos de funciones; aunque ninguno de estos los mencionaremos en este documento.

Para concluir este capítulo vale mencionar que la derivada tal y como la conocemos actualmente tuvo un proceso largo, no lineal y producto del trabajo de cientos de matemáticos que aunque no fueron nombrados en este breve recorrido por la historia contribuyeron con diversos aportes en la consolidación de este concepto. Además después de realizar este recorrido se reconocen diferentes interpretaciones que se le han dado a las derivadas como es la interpretación geométrica a partir de la cual se puede establecer si una función es derivable en un punto a través del análisis de su gráfica y la interpretación como razón de cambio instantánea que está relacionada con la representación analítica. Estas dos interpretaciones se corresponden con la representación visual y analítica de la derivada que pretendemos relacionar en las actividades que planteemos.

3. METODOLOGÍA

A continuación presentamos la metodología que utilizamos en este estudio; la cual se basa principalmente en una revisión documental a través de la estrategia análisis de contenido definida por Hostil y Stone (1990) citado por Abela (s.f, p. 3) como " *una técnica de investigación para formular inferencias identificando de manera sistemática y objetiva ciertas características específicas dentro de un texto*", en este sentido pretendemos identificar en algunos documentos actividades que promuevan la conversión entre la representación analítica y la representación gráfica de la Derivada, e inferir cuál de estas actividades posibilita la comprensión de concepto de la derivada, para la realización de este objetivo consideramos los componentes de análisis de contenidos, en las que resumimos de manera general la secuencia utilizada para la realización de este documento. Estos componentes son:

3.1 COMPONENTE 1: DETERMINACIÓN DEL OBJETO DE ANÁLISIS

Para la elaboración de este documento realizamos una revisión bibliográfica de algunos documentos relativos a la comprensión, la representación, los entornos de geometría dinámica y por ultimo hicimos una consulta del desarrollo histórico del concepto de la derivada el cual presentamos en el segundo capítulo de este documento.

3.2 COMPONENTE 2: DETERMINACIÓN DEL SISTEMA DE CODIFICACIÓN.

A partir de la información que recolectamos realizamos una selección de la misma y consolidamos el marco teórico en el que se fundamentan cada una de las actividades diseñadas con el fin de mejorar la comprensión de la noción de derivada de los estudiantes; la información seleccionada la presentamos a lo largo de cada uno de los capítulos en los que dividimos el documento.

3.3 COMPONENTE 3: DETERMINACIÓN DEL SISTEMA DE CATEGORÍAS

En este componente diseñamos tres actividades con las que pretendemos alcanzar nuestro objetivo inicial; en todas se pide justificar puesto que consideramos que es necesario que ellos argumenten sus respuestas partiendo de lo que están obteniendo al realizar las actividades y utilizando los conocimientos previos o los adquiridos a través de cada una de las situaciones que les planteamos. En cada una de las actividades hacemos explicitas las conclusiones de las que esperamos que el estudiante se apropie luego de realizar cada una de las situaciones planteadas.

El diseño de las actividades se realizó como mencionamos anteriormente partiendo del marco teórico y del desarrollo histórico del concepto de la derivada que planteamos en el documento; estas actividades son:

3.3.1 Actividades

3.3.1.1 Actividad 1: Función cuadrática

1. Realiza la gráfica de $f(x) = x^2$, donde $x \in \Re$.

Compara tu respuesta con el Applet realizado en Geogebra y contesta:

2. La gráfica obtenida es continua. Justifica tu respuesta.

3. La gráfica obtenida es de una función creciente o decreciente. Justifica tu respuesta.

4. Realiza nuevamente la gráfica de la función cuadrática y traza las siguientes rectas secantes:

a. Una recta de color rojo que pase por el punto $A\ (2{,}4)$ y $B\ (3{,}9)$.

b. Una recta de color azul que pase por el punto $A\ (2{,}4)$ y $C\ (1{,}1)$.

c. Una recta de color verde que pase por el punto $A\ (2{,}4)$ y $D\ (4{,}16)$.

d. Calcula la pendiente de cada una de las rectas secantes.

e. Con el siguiente Applet realizado en Geogebra, mueve el punto B hacia el punto A y con base en los resultados obtenidos completa la siguiente tabla.

Punto A	**Puntos cercanos a A**	**Rectas secantes**	**Pendiente de las rectas secantes**
A (2,4)	B (3,9)	$\overline{AB}$	
A (2,4)	B_1 (2.5,6.25)	$\overline{AB_1}$	
A (2,4)	B_2 (2.4,5.76)	$\overline{AB_2}$	
A (2,4)	B_3 (2.3,5.29)	$\overline{AB_3}$	
A (2,4)	B_4 (2.1,4.41)	$\overline{AB_4}$	

f. De acuerdo con la secuencia de valores de las pendientes de las secantes $\overline{AB_i}$, obtenida en el ítem anterior cuando B se mueve hacia A, ¿hacia qué valor tienden las pendientes de las rectas secantes?

g. Repite los puntos e y f pero esta vez el punto A tiene coordenadas $A\ (4,16)$.

Punto A	**Puntos cercanos a A**	**Rectas secantes**	**Pendiente de las rectas secantes**
$A\ (4,16)$	B (5 ,25)	$\overline{AB}$	
$A\ (4,16)$	B_1 (4.8,23.04)	$\overline{AB_1}$	
$A\ (4,16)$	B_2 (4.6 ,21.16)	$\overline{AB_2}$	
$A\ (4,16)$	B_3 (4.4 ,19.36)	$\overline{AB_3}$	

$A\ (4,16)$	$B_4\ \ (4.1\ ,16.81)$	$\overline{AB_4}$	

h. ¿Hacia qué valor tienden las pendientes de las rectas secantes?

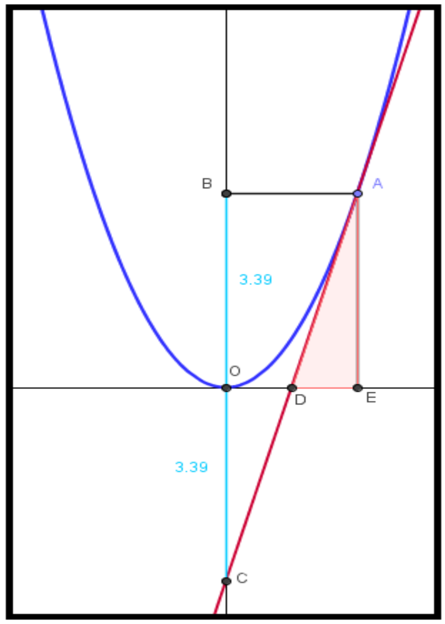
i. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente, si ahora los puntos A y B tienen las siguientes coordenadas $A(1{,}1)$ y $B(5{,}25)$?

CONCLUSIONES

- Cuando B se mueve hacia A, se puede decir que las rectas secantes tienden a convertirse en la recta tangente a la curva en el punto A.
- El valor al cual tienden las pendientes de las rectas secantes, es la pendiente de la recta tangente.

3.3.1.2 Actividad 2: Construcción de la recta tangente puntual a una parábola, el método de Descartes

1. Descartes, como los antiguos griegos, sabía que si en una parábola se toma el segmento OB igual al segmento OC y se dibuja la recta que pasa por los puntos A y C, se obtiene la recta tangente a la parábola en el punto A y, consecuentemente, el segmento DE es siempre la mitad del segmento OE, pues los triángulos DAE y OCD son congruentes. (Ver Figura).



1. Con base en el Applet construido en Geogebra, en donde se muestra la construcción de las rectas tangentes puntuales a la curva $y = x^2$, completar la siguiente tabla:

Coordenadas punto A	**Medida del segmento $\overline{AE}$**	**Medida del segmento $\overline{DE}$**	**Realice el cociente entre la medida de $\overline{AE}$ y la medida de $\overline{DE}$**
$A(1,1)$			
$A(1.2,1.44)$			
$A(1.3,1.69)$			
$A(1.4,1.96)$			
$A(2,4)$			
$A(x,x^2)$			

CONCLUSIONES

- El cociente entre la medida de $\overline{AE}$ y la medida de $\overline{DE}$ es el valor de la pendiente a la recta tangente que contiene el segmento $\overline{AD}$.
- La derivada puntual, en el caso general de $f(x) = x^2$, es decir en cualquier punto de *x*, se halla de la siguiente manera; $f'(x) = 2x$

3.3.1.3 Actividad 3: Razones de cambio

1. Los siguientes gráficos f y g muestran la variación de la distancia respecto del tiempo de dos automóviles A y B en movimiento en un tramo carretero rectilíneo durante 10 minutos:

a) De acuerdo con los gráficos ¿Cuál de los automóviles se desplazó con mayor rapidez? Explica tu respuesta.

> **Para tener en cuenta**
>
> En cálculo se utiliza la letra griega Δ (delta) para denotar el cambio o la diferencia. La razón de cambio está dada por el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$.

b) Completa la siguiente tabla:

Tiempo en segundos	Intervalos de tiempo	Distancia recorrida por el auto A	Distancia recorrida por el auto B	Variación del auto A	Variación del auto B

	Δt	$\Delta d = d_2 - d_1$	$\Delta d_1 = d_2 - d_1$	$\frac{\Delta d}{\Delta t}$	$\frac{\Delta d_1}{\Delta t}$
2	0 - 2				
4	2 - 4				
6	4 - 6				
8	6 - 8				
10	8 - 10				

c) ¿Son variables o constantes las razones de cambio? Justifica tu respuesta.

____

____

d) Realice una gráfica de las razones de cambio en función del tiempo para cada uno de los autos.

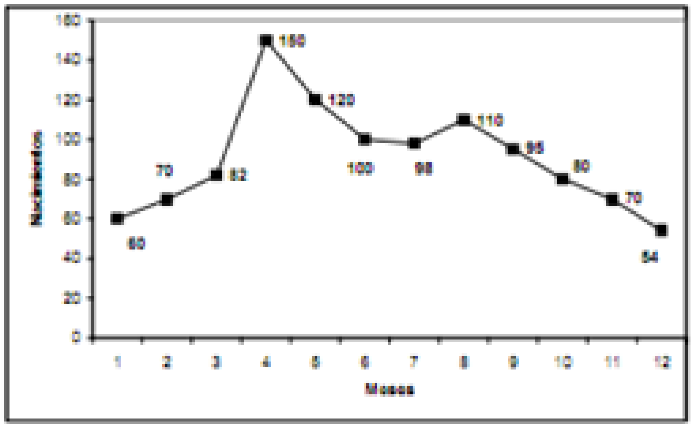
AUTO A	**AUTO B**
	

e) ¿Cómo es la grafica de estas funciones?

____

____

2. La siguiente gráfica nos da el número de nacimientos en cada mes a lo largo de un año en una determinada población:



A partir del gráfico, completa la siguiente tabla:

Meses (x)	**Número de nacimientos por mes (y)**	**Variación meses** $\Delta x = x_2 - x_1$	**Variación del número de nacimientos** $\Delta y = y_2 - y_1$	$\frac{V.nacimientos}{V.meses}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Compara el gráfico y los resultados de la tabla y contesta:

a) ¿Qué ocurre con la función si los cambios son positivos?

____

b) ¿Qué ocurre con la función si los cambios son negativos?

____

c) ¿Cuánto ha variado el número de nacimientos entre los meses de enero y abril? ¿Qué significa este resultado?

Procedimiento	Explicación

d) ¿Cuánto ha variado el número de nacimientos entre los meses de mayo y octubre? ¿Qué significa este resultado?

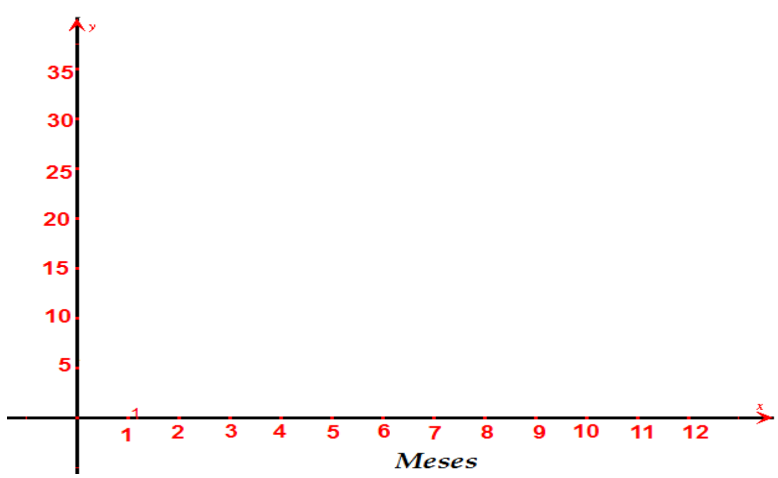
Procedimiento	Explicación

e) ¿Son variables o constantes las razones de cambio? Explica tu respuesta.

____

____

f) Realiza la gráfica de las razones de cambio en función de los meses.



g) Describa la gráfica que obtuvo.

____

____

____

3. Un automóvil está provisto de un velocímetro graduado en cm/seg. Durante el arranque se han obtenido en el velocímetro las siguientes lecturas:

Tiempo t en seg	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Velocidad V en cm/seg	0	10	60	150	300	450	600	660	660

a) Calcula las razones de cambio $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8,$ de la velocidad respecto del tiempo, es decir, la aceleración cada dos segundos:

$R_1 =$ ______	$R_2 = \dfrac{60-10}{4-2} = 25$	$R_3 =$ ______	$R_4 =$ ______
R_5 ______	$R_6 =$ ______	$R_7 =$ ______	$R_8 =$ ______

b) ¿En qué intervalos es constante la velocidad?

____

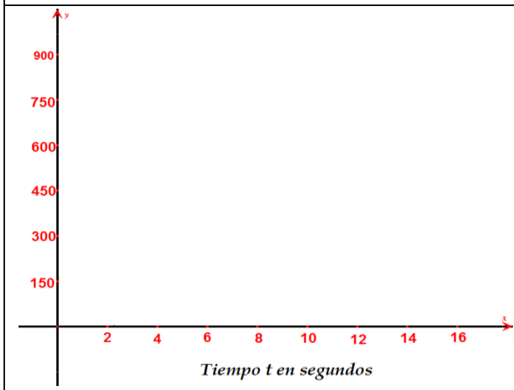
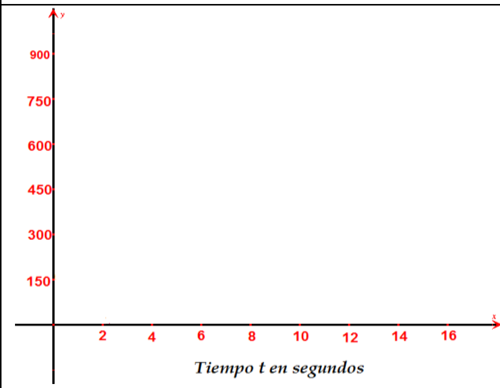
c) ¿Es constante la aceleración durante algún intervalo de tiempo? Escríbalos.

____

d) ¿En qué intervalos el auto aceleró con mayor rapidez?

____

e) En el plano A dibuje el gráfico de la función de velocidad contra el tiempo y en el plano B el gráfico de sus razones de cambio contra el tiempo.

PLANO A	PLANO B
	

f) ¿En que intervalos la razón de cambio (aceleración) permanecio en cero?

____

g) ¿En que intervalos la razón de cambio (aceleración) se mantuvo creciente y en cuáles decreciente?

____

____

CONCLUSIONES

La razón de cambio está dada por el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$.

3.3.2 Análisis de las actividades

3.3.2.1 Actividad 1

OBJETIVOS

- Reconocer y construir las rectas secantes a una curva y calcular su pendiente.

- Encontrar el valor de las pendientes de las rectas secantes a una curva a medida que un punto que pertenece a dicha curva se acerca a un punto fijo de la misma.
- Reconocer que el valor al cual tienden las pendientes de las rectas secantes, es la pendiente de la recta tangente.

Para esta actividad, escogimos la función cuadrática porque es una función familiar para los estudiantes lo cual hace que las dificultades a la hora de graficar y derivar la función sean pocas, lo contrario a lo que ocurre si introdujéramos la actividad con gráficas complejas ya que como afirma (Azcárate, Casadevall, Casellas & Bosch (s.f)). *"Si los alumnos no están familiarizados con las funciones que se les propone por primera vez, se les acumulan dos tipos de dificultades: el encontrar tales funciones por primera vez y el tener que derivarlas*".

En esta actividad se pretende que los estudiantes logren identificar la representación gráfica de la derivada, esto quiere decir que realicen la construcción de la recta tangente a la curva por un punto dado, como se expuso anteriormente en el Marco Histórico, el concepto de la Derivada surgió por cuatro problemas planteados desde los griegos, donde uno de ellos precisamente tiene que ver con la determinación de la recta tangente a una curva dada, podemos observar que la primera definición dada a la recta tangente a una curva, bueno más precisamente al círculo, se la debemos a Euclides en el libro III de los Elementos "*define la tangente al círculo como la recta que lo toca y al prolongarla no lo corta y a partir de esta definición se deduce un procedimiento geométrico para su trazo (p. 20)".* (Dolores, 1996), como podemos observar si la relacionamos a un contexto actual, se está refiriendo a una recta secante particular que toca al círculo en un solo punto, por tal motivo como primera parte basándonos en esa primera definición, decidimos plantear esta parte de la actividad de tal manera que a partir del trazado de las rectas secantes que pasan por dos puntos y la variación de uno de los puntos que pertenece a la recta secante se pueda encontrar la recta tangente a la parábola.

Ahora bien, en este sentido se le pide a los estudiantes que grafiquen las rectas secantes que pasen por dos puntos de la curva de la función cuadrática, de tal forma que se pueda analizar el comportamiento de todas las rectas secantes que se generan al acercar uno de los puntos de la recta secante al otro, esto quiere decir, se desea que el estudiante observe que sucede cuando la distancia entre los puntos o el incremento entre ellos tiende a cero, esta observación se va analizar a partir de la conversión de dos representaciones de la derivada , se parte de la representación analítica de la derivada, en este caso del cálculo de las pendientes de las rectas secantes, en donde el estudiante debe realizar el estudio de la pendiente de una curva según un incremento fijo: aproximación a la pendiente de un punto cualquiera de una curva como la pendiente según un incremento fijo, esto con el fin de que establezca que el incremento fijo de la pendiente de las rectas secantes generado por la aproximación de las rectas secantes a un punto fijo, es el valor de la pendiente de la recta tangente, teniendo en cuenta lo mencionado es claro que esta actividad tiene como principio base la utilización del triángulo diferencial de Barrow que mencionamos anteriormente; esta conclusión no se puede lograr solamente a partir de la representación analítica de la derivada, es necesario realizar la conversión de la representación analítica a la representación geométrica de la derivada, ya que de esta manera el estudiante podrá observar que efectivamente se genera la recta tangente a la curva.

Para poder observar la representación geométrica de la derivada, se hizo uso de un Applet construido en el entorno de Geometría dinámica Geogebra, donde el estudiante puede visualizar la recta tangente a una curva dada, que se genera a partir de las rectas que se generan a partir de la aproximación de un punto a otro punto, esta conclusión se logra gracias a algunas características que nos brinda un software de geometría dinámica que son el arrastre, la visualización y el Dinamismo.

3.3.2.2 Actividad 2

OBJETIVOS

- Reconocer el método de Descartes para hallar la recta tangente a la parábola.
- Conjeturar a partir de la representación gráfica del método de Descartes que el corte con el eje de las abscisas siempre se da en el punto medio del segmento OE, independientemente de la parábola que se trate.
- Reconocer la derivada puntual y la función derivada de una parábola, como la razón del cateto opuesto al cateto adyacente.

Iniciamos esta actividad haciendo uso de la historia de la evolución del concepto de la derivada utilizando uno de los métodos para construir la recta tangente a una curva, exactamente el método de Descartes para la construcción de la recta tangente a una parábola, introducimos esta actividad con un método histórico por la importancia de conocer la evolución histórica del concepto de la derivada y todos los problemas que surgieron en torno a la construcción de la definición de la derivada, *"ya que el conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado"* Nolla (2001) citado por González (2004).

Después del reconocimiento del método de Descartes, se le proporciona al alumno un Applet construido en el entorno de geometría dinámica Geogebra ya que al ser un mediador instrumental favorece la representación y conversión entre representaciones, por tal motivo en el Applet se decide realizar el método de Descartes para la construcción de las rectas tangentes a la curva de la función cuadrática (ver gráfico 1), a partir de esta representación grafica de la derivada, se pretende que el estudiante complete una tabla, en donde tenga que ingresar las medidas de los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ las cuales varían a medida que se arrastra el punto A por donde pasan las rectas tangentes a la curva. Como se puede observar en la gráfica, el triangulo formado por los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{DE}$ y el segmento contenido en la recta tangente que pasa por el punto A ($\overline{AO}$), hace referencia al triángulo diferencial planteado hace mucho tiempo por Barrow.

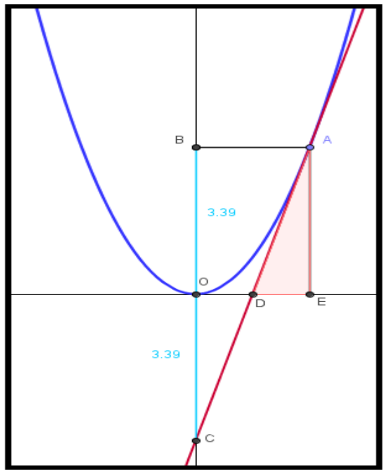


Gráfico 1

A partir de los datos obtenidos en la tabla, se pretende que el estudiante, pueda descubrir que el corte con el eje de las abscisas siempre se da en el punto medio del segmento *OE*, independientemente de la parábola que se trate, ahora bien gracias al triángulo diferencial de Barrow, se puede realizar la conversión entre la representación grafica de la derivada y la representación analítica, ya que se puede encontrar la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto A de la parábola, que se deduce entre el cociente de $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$, de esta forma el estudiante visualiza y deduce la derivada puntual y la función derivada de una parábola, como la razón del cateto opuesto al cateto adyacente .

En conclusión, encontrar que la derivada puntual, en el caso general de $f(x) = x^2$, es decir en cualquier punto de *x*, se halla de la siguiente manera;

$$f'(x) = 2x$$

3.3.2.3 Actividad 3

OBJETIVOS

- Identificar razones de cambio a partir de los registros tabulares y gráficos.
- Realizar conversiones entre la representación gráfica y analítica de la derivada utilizando la representación tabular.
- Utilizar la simbolización asociada a razones de cambio.

- Diferenciar los cambios variables de los constantes.
- Analizar las gráficas de las razones de cambio.

Aunque en esta actividad planteamos una situación relacionada con la velocidad vale mencionar que en ningún momento pretendemos que los estudiantes relacionen la derivada con la noción de velocidad simplemente intentamos mostrar la razón de cambio a través de esta situación.

Con el primer punto el estudiante debe mencionar que se desplazó con mayor rapidez el auto que recorrió mayor distancia en menor tiempo antes de mostrarle al estudiante la simbolización utilizada en cálculo para las variaciones o cambios de las variables, a partir de esta se le pide que complete una tabla que lo va llevando a utilizar dicha simbolización y que le permite ver que auto iba con mayor rapidez y que además la rapidez en ambos autos fue constante; luego se le pide al estudiante que trace la gráfica de las razones de cambio en función del tiempo para cada uno de los autos, es decir, se le pide que trace la gráfica de la derivada; con el último literal de este punto se pretende que el estudiante recuerde, repase o refuerce algunas de las características de las funciones.

En la segunda situación se procede prácticamente del mismo modo que en la anterior, también se presenta la situación en una gráfica pero ahora en esta se modela el número de nacimientos en cada mes a lo largo de un año en una determinada población; al estudiante se le pide completar una tabla en la que se evidencie la variación o razón e cambio en determinados intervalos de tiempo; luego se le pide que haga una comparación con el gráfico dado y la tabla completada con el fin de empezar a identificar algunas relaciones, como que por ejemplo si los cambios son positivos es porque la función dada es creciente en el intervalo en el que los cambios son positivos, al finalizar el alumno se da cuenta que los cambios en esta situación son variables; creemos que es importante que el estudiante distinga entre cambios variables y constantes y que los aprenda a identificar, por ello planteamos las dos situaciones que hemos mencionado; sin embargo estamos seguras de que solamente con estas dos situaciones no lograra diferenciarlos totalmente pero si tendrá un buen acercamiento.

En la última situación nuevamente volvemos a la velocidad para calcular la aceleración pero ahora presentamos la información en una tabla y a partir de esta el estudiante debe inferir la información y responder a cada una de las preguntas planteadas que están formuladas más o menos de la misma manera que en las situaciones anteriores de esta actividad, otra de las diferencias con las otras situaciones es que el estudiante ya debe hacer más evidente el uso de la simbolización de la razón e cambio al tener que mostrar todo el procedimiento utilizado para encontrar las razones de cambio en los intervalos de tiempo pedidos.

En todas las situaciones se le pide a los estudiantes que tracen las gráficas de las funciones razones de cambio puesto que nos parece importante que ellos tracen estas gráficas y que además empiecen a detectar relaciones entre la función derivada y la función teniendo en cuenta las gráficas y tablas de cada una de estas; también en todas se utilizaron las tablas puesto que según el Ministerio de Educación Nacional (2004) a partir del manejo de variable el estudiante puede acercarse al concepto de variación utilizando tablas puesto que allí se puede evidenciar que los valores que tomen las variables pueden variar.

En todas las situaciones de esta actividad se modelan situaciones de cambio, las cuales están totalmente enmarcadas en los estándares de matemáticas de grado décimo y once en los que se plantea la interpretación de la derivada como razón de cambio y para lo cual se utiliza lo planteado en el pensamiento variacional que como mencionamos anteriormente tiene que ver con "*el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos*". (Ministerio de Educación Nacional, 2004).

En estas se hace evidente el uso de las dos representaciones que planteamos para este trabajo la gráfica y la analítica que según el M.E.N. hacen referencia a las representaciones de carácter cuantitativo y que otros autores reconocen como representaciones externas entre ellos Duval; recordemos que este autor también menciona la conversión de un registro semiótico a otro, en este caso que logren la conversión entre la representación grafica y analítica del concepto de la derivada.

De la historia para esta actividad retomamos los trabajos de Oresme al intentar que los estudiantes representen simbólicamente la variación y sobre todo con la idea de representar gráficamente cantidades variables utilizando para ello una idea primitiva del plano cartesiano, y también retomamos a Cauchy dándoles a los estudiantes la simbolización Δx y Δy para representar la razón de cambio.

3.4 COMPONENTE 4: DOCUMENTO FINAL

En esta fase consolidamos un documento organizado y coherente que recopila de manera sucinta la información encontrada que se presenta en el marco teórico y en el capítulo del desarrollo histórico del concepto de derivada, además presentamos las actividades con su posterior análisis y por supuesto las conclusiones de nuestro trabajo.

4. ANÁLISIS PROSPECTIVO

En la metodología se pudo observar que nuestras actividades están fundamentadas en el marco teórico planteado y en el capítulo del desarrollo histórico, por ello en esta sección pretendemos hacer un análisis prospectivo del trabajo realizado teniendo en cuenta que este se queda en el diseño de las actividades se hace necesario incluirlo, en este presentamos las dificultades que se nos presentaron en el proceso de realizar el trabajo y las dificultades que suponemos tendrían los estudiantes al enfrentarse a cada una de las situaciones planteadas en las actividades, entre otras.

En primer lugar nos referiremos al proceso que llevamos a cabo para consolidar este documento, primero realizamos la revisión de algunos documentos a partir de los cuales planteamos nuestro marco teórico y nuestro referente histórico, seguidamente empezamos a diseñar la primera actividad con la cual se tuvieron dificultades puesto que es un poco complicado tomar información del capítulo de historia; plantear una actividad a partir de esta y diseñar situaciones para enseñar un concepto en este caso el de la derivada; sin embargo planteamos la primera actividad para ello hicimos uso de material manipulable (una hoja de papel) a partir del cual el estudiante debe resolver la situación que se le plantea con el fin de que al concluirla observe que el valor al cual tienden las pendientes de las rectas secantes, es la pendiente de la recta tangente. La segunda actividad fue un poco más fácil de construir puesto que nos basamos totalmente en el método de Descartes para construir la recta tangente a una curva por un punto dado; en esta se hizo uso únicamente del software Geogebra y por tanto consideramos que en esta actividad es en la que menos dificultades podrían tener los estudiantes; pero esto lo explicamos más adelante. En la última actividad se trabajó con la simbolización propia de las razones de cambio puesto que como menciona Duval (1999) *"La formación del pensamiento científico es inseparable del desarrollo de simbolismos específicos para representar los objetos y sus relaciones (p. 15)".*

En todas las actividades fue complicado plantear preguntas secuenciales, que apunten a la consecución de los objetivos que planteamos para cada actividad y a las que los estudiantes puedan enfrentarse sin necesitar gran ayuda del profesor, puesto que la idea es que el profesor sea un facilitador que no participe activamente en el desarrollo de las mismas, por ello al final de cada actividad se encuentran las debidas conclusiones de la misma para que cada estudiante las lea, analice y relacione con la actividad realizada ya que es muy probable que no logré inferirlas cuando termine la actividad.

En segundo lugar consideramos que las dificultades que se pueden presentar al trabajar con diferentes representaciones, teniendo en cuenta a Duval son:

- Los estudiantes no reconozcan el concepto de derivada cuando trabajen con la representación analítica y cuando trabajen con la gráfica sino que piensen que están aprendiendo cosas diferentes ya que como afirma Duval (1999) "*los alumnos, por lo regular, no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que puedan darse en sistemas semióticos diferentes" (p. 16)* también menciona que esta dificultad se puede tener así en la enseñanza se hayan utilizado diferentes sistemas semióticos de representación.

- Los estudiantes no logren hacer la conversión de una representación a otra puesto que como menciona Duval (1999) *"Se ha probado que cambiar la forma de representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, es una operación difícil e incluso en ocasiones imposible" (p. 28);* explica que sucede como si para la mayoría de los estudiantes la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación utilizada.

- Otra de las dificultades también propuesta por Duval consiste en que el estudiante confunda el concepto de derivada con la representación analítica o la gráfica del mismo lo que ocasionaría que no existiera comprensión del objeto matemático menciona

> toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una perdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ninguna transformación productora(p.p 13-14).

Duval no sólo plantea las dificultades que pueden tener los estudiantes al trabajar con diferentes representaciones también menciona algunas de las ventajas que tienen que ver básicamente con algunas de las razones que presenta del por qué son tan interesantes las representaciones semióticas. Las razones son: por la economía del tratamiento y la complementariedad de los sistemas las cuales se explican y amplían en el marco teórico.

Por otro lado en el marco teórico mencionamos que los entornos de geometría dinámica más que artefactos tecnológicos

> "Son instrumentos mediadores que regulan y transforman tecnológicamente la relación educativa de un modo definido otorgando a los sujetos formas de actuación externa para el aprendizaje, pero a su vez, a partir de esa misma estructura y atributos tecnológicos, promueve en el sujeto una modificación interna de sus estrategias de pensamiento y aprendizaje". (Suarez, s.f)

Teniendo en cuenta que las ayudas tecnológicas promueven una modificación interna de las estrategias de aprendizaje de los estudiantes, estos pueden llegar a presentar dificultades u obstáculos si la utilización de tecnologías computacionales en la enseñanza de las Matemáticas no se hace con total cautela y responsabilidad. Una de las dificultades que se pueden presentar es que se puede creer que los estudiantes aprendieron o comprendieron el concepto por el hecho de haber manipulado el software ya que como afirma Sordo (2005) *"Se puede llegar a confundir manipulación con conocimiento matemático, típico de cuando se adquiere un aprendizaje memorístico de la matemática consistente en el almacenamiento de algoritmos, definiciones y teoremas en vez de una construcción de las matemáticas para la resolución de problemas"(p. 36).*

En definitiva se puede observar que con el hecho de plantear las actividades haciendo uso de estas tecnologías los estudiantes van a encontrar más ventajas que desventajas y que si surge alguna dificultad será debido a que quién dirija la actividad no lo haga de la manera adecuada y le haga más énfasis del necesario al trabajo con estas ayudas tecnológicas.

La última dificultad a la que queremos hacer mención y no es que sea menos importante es que se pueden crear dificultades por que los estudiantes no cuenten con los conocimientos previos necesarios para abordar las actividades, en dado caso será indispensable reformular las actividades o tal vez planear una actividad inicial con la cual se puedan trabajar los conceptos que el estudiante desconozca o no haya trabajado lo suficiente.

Queda demostrado que la revisión de los aspectos históricos y didácticos es importante para el diseño de actividades, para la fundamentación de las mismas y para prever las posibles dificultades y obstáculos que se podrían crear en los estudiantes al aplicarles las actividades, ya que de esta manera se pueden plantear medidas para disminuirlas.

Para terminar vale mencionar que las actividades tal y como están diseñadas, están influenciadas por el marco teórico y la parte histórica y que todas ellas pueden ayudar a mejorar la comprensión de la noción del concepto de derivada puesto que entre otras se están trabajando diferentes representaciones del mismo objeto y como afirma Duval (1999) *"No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (p. 25).*

5. CONCLUSIONES

DEL OBJETIVO GENERAL DE ESTE ESTUDIO

a) Al finalizar este estudio es posible señalar que el objetivo general se cumplió, ya que se diseñaron tres actividades en donde se pudo evidenciar la relación entre la representación visual (pendiente de la recta tangente) y la representación analítica (razón de cambio) de la derivada, las cuales tienen como nombre, *Función cuadrática, construcción de la recta tangente puntual a una parábola y el método de Descartes y razones de cambio;* en la primera se hizo evidente la relación entre estas representaciones cuando el estudiante tenía que establecer el valor de pendiente de la recta tangente calculando el valor de la pendiente de la recta secante, a partir de la aproximación de las rectas secantes a un punto fijo y a partir de la representación gráfica realizada en el Applet, en la segunda actividad se parte de la representación gráfica de la derivada planteada por Descartes, a partir de esta se realiza la conversión a la representación analítica de la derivada, más precisamente se halla la fórmula para calcular la derivada puntual y finalmente en la tercera actividad, se realiza constantemente una conversión entre las representaciones gráficas y analíticas, ya que en todas las situaciones se le pide a los estudiantes que tracen las gráficas de las funciones razones de cambio y que además empiecen a detectar relaciones entre la función derivada y la función teniendo en cuenta las gráficas y tablas de cada una de estas.

En cuanto a las representaciones, la teoría de Duval sobre representaciones semióticas fue de gran valor en el momento de sustentar lo relacionado con la importancia de utilizar diversas representaciones de un mismo concepto para facilitar la comprensión del mismo; teniendo en cuenta que dependiendo de los "rasgos" que se quieren destacar del objeto matemático (en este caso el de derivada), de las personas con las que se pretende establecer comunicación, así como del contexto y de los elementos disponibles para tal comunicación, se opta por una u otra representación, en uno u otro sistema semiótico de representación.

DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE ESTE ESTUDIO

b) El primer objetivo específico que se planteó en este trabajo, fue estudiar y profundizar en el concepto de la derivada y, a partir de este, aportar al desarrollo de las actividades, por esta razón, se realizó una búsqueda de información sobre la derivada, las diferentes representaciones atribuidas a esta, las notaciones empleadas, la teoría de Duval sobre las representaciones, la importancia de la historia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las características de los entornos de geometría dinámica.

c) El segundo objetivo específico que se planteó en este trabajo, fue presentar información sobre el desarrollo histórico relacionado con las representaciones del concepto de la derivada, de tal manera que se convirtiera en una herramienta para el diseño de las actividades. Tras la investigación y recopilación de información, es posible decir que el referente histórico presentado sobre las representaciones del concepto de la derivada, desde la representación gráfica de la derivada dada por los Griegos hasta la representación analítica que conocemos actualmente gracias a Cauchy, fue de gran importancia en el diseño de las actividades que relacionan la representación gráfica y analítica de la derivada, ya que se pudo evidenciar que a partir de la primera definición planteada por Euclides sobre la derivada, más específicamente de la construcción de tangente a una curva (el círculo), o sea la representación gráfica de la derivada, y a partir de la representación analítica brindada por el triángulo diferencial de Barrow, se pudo plantear la primera actividad en donde se pudiera realizar la conversión entre representaciones, lo mismo sucedió en la segunda actividad, en donde se realizó una conversión entre representaciones a partir del método de Descartes y de Euclides.

d) El tercer objetivo específico que se planteó en este trabajo, fue el de utilizar un software de geometría dinámica para mostrar la representación gráfica de la derivada. Tras la realización de las actividades, podemos evidenciar que efectivamente se hizo uso de un entorno de geometría dinámica llamado Geogebra, para la primera actividad *Función cuadrática,* se realizó un Applet en Geogebra, en donde se modeló la construcción de la recta tangente a una curva a partir de la aproximación de las rectas secantes a un punto específico y en la segunda actividad *construcción de la recta tangente puntual a una parábola y el método de Descartes* se desarrolló un Applet en Geogebra en donde se mostró el método de Descartes, para la construcción de la recta tangente a la parábola, los dos Applet fueron un recurso importante para la representación gráfica de la derivada que era lo que queríamos poner en evidencia, y lo que creíamos crucial en la realización de nuestro trabajo, pero no contábamos con que el entorno de geometría dinámica al ser un instrumento de mediación favorecería la conversión entre la representación gráfica y analítica de la derivada.

e) Por último queremos mencionar que el estudio que presentamos en este documento nos permitió ampliar nuestros conocimientos en relación con la historia de la derivada y el uso de recursos como el software Geogebra, lo cual muy seguramente nos será de gran utilidad en nuestro desempeño profesional. El desarrollo de este estudió también nos permitió realizar un acercamiento al trabajo de investigadoras; consideramos que investigar profundamente, por una parte, es la mejor manera de orientar el aprendizaje no solo del cálculo diferencial sino de cualquier otro tópico; por otra, es la forma más adecuada de introducir desde la primaria situaciones que le permitan a los estudiantes acercarse a la comprensión de determinado objeto matemático. Por otro lado la realización de este documento nos aportó como futuras investigadoras la evidencia de la importancia de revisar los aspectos históricos y didácticos para el diseño de actividades; la importancia de tener clara una metodología de trabajo y por supuesto la necesidad de fundamentar cada una de las actividades y cada uno de nuestros juicios.

6. BIBLIOGRAFÍA

Abela; J. (s.f). Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada. Universidad de Granada, p. 3 .Recuperado el 24 de octubre del 2011 desde http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Alarcon; S, Suescún; M & Gómez; A.(2005). El método de máximos y mínimos de Fermat. *Revista lasallista de Investigación*. Antioquia Colombia, pp. 31-37 Recuperado el 30 de septiembre del 2011 desde http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=69520207

Apóstol. T. (1998).*Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal.* Volumen 1. Segunda edición. Editorial Reverté, S.A. Barcelona.

Azcárate. C; Casadevall. M; Casellas. E & Bosch. D. (s.f). *Cálculo Diferencial e Integral*. Ed Síntesis. Valle hermoso, Madrid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol 4. Nº 3, pp. 219-236. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid. España. Extraído desde http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33540302 el 18 de abril de 2011.

Boyer. C. (1986). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. España.

Collette, J. (2007). *La historia de las matemáticas II*. Editorial Siglo XXI. México.

Cortés. J, Calvo. G. (2004). El método de Descartes para trazar normales a curvas [Versión Electrónica]. *Revista SUMA,* 47, Noviembre, 41-46.

Dolores. C. (1996). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Instituto superior pedagógico "Enrique José Varona". Ciudad de la Habana, cuba. Extraído el 18 de abril de 2011 desde http://www.cimateuagro.org/images/pdf/1996.pdf

Duval. R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticas y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Espinosa. M. (s.f). Los sistemas de representación en la solución de problemas de algebra elemental. *Revista Internacional Alammi.* Instituto tecnológico de Minatitlán. Extraído desde http://www.alammi.info/revista/numero2/pon_0009.pdf el 18 de abril de 2011.

Fernández. J. (2000). Un estudio exploratorio sobre ideas Variacionales en estudiantes escolarizados De bachillerato. Tesis presentada con opción al grado de maestría en ciencias en el área de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero. Extraída el 18 de abril de 2011 desde http://www.cimateuagro.org/images/pdf/2000-4.pdf

Gairín; J. (2001). Sistemas de Representación de números Racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos: Revista de Educación*.4, pp.137-159. Universidad de Zaragoza.

Gamboa; R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. [Versión Electrónica]. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Número 3, pp.11-44

Gómez; P. Carulla; C. (2000). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*. Grupo Editorial Gaia. En Asociación Colombiana de Matemática Educativa (Asocolme). Extraído el 5 de mayo de 2011, del sitio Web de la Universidad de los Andes: http://funes.uniandes.edu.co/345/1/GomezP01-2276.PDF.

González. P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer. *Revista SUMA*. Febrero, pp. *17-28*.

López, C. (s.f). *Resolución de los problemas de la Tangente, máximos y mínimos en los albores del cálculo diferencial*. Instituto de Educación Secundaria**.**

Matamoros, G. García. M, Llinares. S. (2006). *El* desarrollo del esquema de la derivada. Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas. Vol. 24 No. 1, pp. 85-98. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas* Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Sevilla. Recuperado el 3 de marzo del 2011. Desde http://math.unipa.it/~grim/dott_HD_MphCh/LLInares_4_EC-derivada_06_Esp.pdf

Matamoros, G. García, M. LLinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 11, pp. 267-296. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal de México. Recuperado el 3 de marzo del 2011 http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33511205.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *La revolución educativa estándares básicos de matemáticas y lenguaje educación básica y media. "Estudiantes competentes porque aprenden de verdad"*. Talleres Departamentales de Calidad de la Educación.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia.

Nolasco, A. (2001). La calculadora y los sistemas semióticos de representación. Hacia un aprendizaje de los conceptos matemáticos. *Revista electrónica de Didáctica de las matemáticas*. Número 1. Universidad de Queretano. Recuperado el 25 de octubre del 2011 desde http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0502.pdf.

Ortega. T. & Sierra. M. (1998). El concepto de derivada: Algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado.* Extraído el 18 de abril de 2011 desde http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117981

Penalva; C. Torregrosa ; G. (s.f). *Representación y aprendizaje de las matemáticas*. Área de didáctica de la Matemática. Facultad de Educación. Universidad de Alicante.

Pérez. G. (s.f). Orígenes del Cálculo. Historia de las Matemáticas. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada. Extraído el 21 de abril de 2011 desde http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/Apuntes/Origenes_del_Calculo.pdf

Ramírez. E. (2009). Ponencia: Historia y epistemología de la función derivada. 4° Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias. *Tecné, Episteme y Didaxis: TEΔ No. Extraordinario.* Extraído desde http://www.pedagogica.edu.co/revistas/ojs/index.php/TED/article/viewDownloadInterstitial/261/252 el 18 de abril de 2011.

Romero; I. Rico; L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista EMA*. Vol. 4, Nº 2, 117-151.

Solache. J. & Díaz. R. (1999). El desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia pedagógica en situación Escolar en el bachillerato. Tesis presentada en opción al grado de licenciatura en Matemática Educativa. Universidad autónoma de guerrero. Extraído el 18 de abril del 2011 desde http://www.cimateuagro.org/images/pdf/1999.pdf

Sordo, J. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría dinámica. Tesis doctoral. Universidad complutense de Madrid. Facultad de Educación Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Extraído desde http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28911.pdf el 28 de septiembre de 2011.

Suarez. C. (s.f). *Los entornos de aprendizaje como instrumento de mediación*. Universidad de Salamanca. Recuperado el 25 de octubre de http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_04/n4_art_suarez.htm

Vasco. C. (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.* Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Proyecto Zero, Universidad de Harvard.

Vrancken. S, Engler. A, Müller. D. (2007). *Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultado*. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral (Argentina). Recuperado el 2 de marzo del 2011. Desde http://www.soarem.org.ar/Documentos/38%20Vrancken.pdf