DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE ENTORNO, PREVIO A LA NOCION DE LÍMITE EN ESTUDIANTES DE GRADO ONCE, EN UN COLEGIO PÚBLICO

ISRAEL BOCANEGRA PARRA
Cod.2011182014
HERMES VIANNEY HUERFANO CORREA
Cod.2011182019

TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C., OCTUBRE 31 DE 2011

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE ENTORNO, PREVIO A LA NOCION DE LÍMITE EN ESTUDIANTES DE GRADO ONCE, EN UN COLEGIO PÚBLICO

ISRAEL BOCANEGRA PARRA
Cod.2011182014
HERMES VIANNEY HUERFANO CORREA
Cod.2011182019

TRABAJO DE GRADO
Trabajo de grado presentado al Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de
Especialista en Educación Matemática

Asesor
ALBERTO DE JESUS DONADO
Magister en Docencia de las Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C., OCTUBRE 31 DE 2011

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría, en aquellos casos en los que hemos requerido del trabajo de otros autores e investigadores, hemos dados los respectivos créditos.”

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

Nota de aceptación:

____

____

____

____

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, 15 de Noviembre de 2011.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

DEDICATORIA

HERMES VIANNEY HUERFANO CORREA

A mi esposa: Diana y mi hija Jessika, que son el motivo para continuar mi formación académica.

ISARAEL BOCANEGRA

A mi esposa: Nubia y a mis hijas: Alejandra y Sofía por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirnos realizar este trabajo…, A nuestro tutor el Profesor: Alberto Donado por sus orientaciones de todo el proceso, al Profesor: Rodolfo Vergel por su apoyo y asesoría, a la Profesora: Alicia Guzmán por sus comentarios constructivos, a los compañeros de la especialización que hicieron sus aportes y a los estudiantes de los Colegio Roberto Velandia de Mosquera y Carlo Federici de Fóntibón que participaron en la prueba piloto.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

TABLA DE CONTENIDO

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN "RAE"

Tipo de documento: Trabajo de grado para Especialización en Educación Matemática.

Acceso al documento: Universidad Pedagógica Nacional

Título del documento: Diseño de una secuencia de actividades para abordar el concepto de entorno, previo a la noción de límite en estudiantes de grado once, en un colegio público.

Autor(es): HUERFANO CORREA, Hermes Vianney
BOCANEGRA PARRA, Israel.

Publicación: Bogotá, D.C., 2011, 102 páginas

Unidad patrocinante: Universidad Pedagógica Nacional

Palabras claves: Secuencia didáctica, Entorno, Teoría de los Campos Conceptuales, Representaciones, Semiósis, Noesis, Lenguaje natural, Aprendizaje Significativo.

Descripción: Se realiza un diseño de actividades para la enseñanza de la noción de entorno, aplicando una prueba piloto para el rediseño de algunas preguntas y actividades, teniendo como referente teórico la teoría del aprendizaje significativo.

Fuentes: Para la realización del presente documento se realizaron 24 referencias bibliográficas de las cuales se señalan 5 de las más importantes. El lector interesado puede dirigirse a la bibliografía para consultar las demás fuentes.

- *Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo (2a. ed.). Trillas.México.*
- Duval, R.,(1999), *Semiósis y pensamiento humano*, Universidad del Valle, Cali.
- Kreyszig, E.(1989). *Introductory Functional Analysis with applications*, Jhon Wiley and Sons,New York.
- Moreira, M.,(2002) La Teoría de los Campos Conceptuales en la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área, *Revista Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias.*
- Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10* (23): 133-170, Tomado de:Moreira, M.,(2002).

Contenidos: Este trabajo está dividido en cuarto partes principales: una primera parte es el planteamiento y justificación del problema, que consiste en que actividades se necesitan para abordar el concepto de entorno en el grado once; en la segunda se plantean los objetivos del trabajo, que se enfocan en el diseño de una secuencia de actividades, revisión de textos, aplicación de prueba piloto todo lo anterior referente al concepto de entorno; en la tercera se presenta el marco teórico que se divide a su vez en el marco didáctico en el que utilizamos la teorías sobre didáctica de las matemáticas como son: la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, teoría de las representaciones de Duval y la teoría de la interacción social de Vigotsky; en el marco matemático se utiliza el concepto de entorno desde la perspectiva de espacio métrico, una cuarta parte donde se describe el proceso de elaboración y análisis del las actividades (Preguntas previas y prueba piloto).

Metodología: Se realizó un tipo de investigación cualitativa solo para el diseño de las actividades, no se realizó tabulación de información recolectada, porque nuestro trabajo se centró en la elaboración de la secuencia, por lo tanto solo se aplicaron una prueba exploratoria de preguntas previas sobre el concepto de entorno y una prueba piloto para validar las preguntas y rediseñar las situaciones para ajustes de las actividades finales de la secuencia.

Conclusiones:

- Los estudiantes tienen una noción del concepto entorno desde una perspectiva social y lo definen desde su lenguaje natural , como se evidencia en sus representaciones de tipo verbal y grafico, este último en forma de círculo.
- En la revisión de textos, tanto de tipo escolar como universitario, no se evidencian aproximaciones didácticas relacionadas con el concepto de entorno.
- A través de la actividad se logra mostrar algunas facetas del concepto de entorno mediante situaciones que permiten el manejo de las representaciones (conversión y tratamiento) permitiendo un afianzamiento y aprehensión mas significativa del concepto.
- No se desconoce que las palabras cerca y próximo pueden ser ambiguas, aunque también forman parte del lenguaje natural de los estudiantes, precisamente la secuencia pretende avanzar en cerrar la brecha entre el lenguaje natural y la formalización del concepto en el lenguaje matemático.

Fecha de elaboración del resumen (30, Noviembre, 2011).

INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene como objeto la elaboración de una secuencia de actividades que apoye la construcción del concepto de entorno, tomando la definición desde el punto de vista matemático, pero comenzando desde el lenguaje natural del estudiante, ya que cuando en grado once se habla de entorno lo primero que hace el estudiante es asociar la noción a su ambiente, o a algo que lo rodea. Aunque el concepto de entorno es utilizado para hacer la introducción al concepto de límite de una sucesión en algunos textos, además es fundamental para definir el concepto de límite en sucesiones y funciones en grado once.

En la secuencia de actividades definimos entorno en el contexto de la recta numérica, con ello se comienza a construir la definición de límite, por lo cual queremos contribuir en el proceso de rompimiento del lenguaje tradicional para llegar al lenguaje matemático. En este proceso es fundamental la teoría del aprendizaje significativo porque pretendemos que "…se relacione un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal" (Ausubel, 1996, p. 17; Moreira, p.3,1997).

Es decir, a través de la secuencia se construye el concepto de entorno teniendo en cuenta otro significado además del estrictamente formal, usando distintas representaciones, propiciando conversión y tratamiento –desde la perspectiva de Duval-, teniendo en cuenta también la interacción de los estudiantes con el medio social donde se desenvuelven, en palabras de Ausubel: “esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje” (Ausubel, 1996, p.23; Moreira, p.11,1997).

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Cuando se analizan los puntos “cercanos” a un número real a, que están tanto a la derecha como a la izquierda del punto a en la recta numérica y que forman un *entorno* de “a”, y haciendo además la introducción al término épsilon “ε” como una medida de cercanía en cualquier escala que se tome para dicho entorno, surgen dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de entorno, el objetivo de este trabajo es contribuir con una secuencia de actividades que facilite los procesos de construcción del concepto.

1.2. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El concepto de entorno es imprescindible en la construcción del concepto de límite, que es a su vez uno de los cimientos del cálculo, por tanto vemos la necesidad que este concepto sea abordado con la mayor claridad y didáctica posible, específicamente en el curso de cálculo de secundaría donde se dan las bases preliminares para un curso de cálculo universitario.

La secuencia está elaborada asumiendo el enfoque del aprendizaje significativo respecto a la construcción de la noción de entorno y los conceptos involucrados, para que el estudiante asuma con más claridad la construcción de este concepto en el cálculo del límite de una sucesión y en general para el cálculo de límites en funciones.

En este mismo sentido Vergnaud afirma: "…*Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para los estudiantes.* (Vergnaud, 1990,p.3). Por esto se hace necesario el diseño de actividades didácticas que contribuyan a este fin.

En cálculo de grado once cuando se empieza la construcción de la noción de límite y especialmente cuando se comienza con el límite de una sucesión se hace necesario hacer una introducción a la noción de entorno, para poder aplicar la definición de límite de una sucesión como se presenta a continuación.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN, El límite de una sucesión $a_n = f(n)$ es un número real L si dada cualquier vecindad de L, solo un número finito de términos de la sucesión queda por fuera de ella. (M*oreno V. y Restrepo M., 2001, p. 74)*

Esta definición implica que dentro de la vecindad quedan infinitos términos de la sucesión y solo unos pocos por fuera. En notación escribimos $\lim_{\to\infty}\{\quad\} =$ y leemos límite de la sucesión a_n es L, cuando n tiende a infinito.

Una de las ideas centrales de este trabajo se genera a partir de la siguiente definición de vecindad abierta que aparece en M*oreno V. y Restrepo M., (2001, p. 73)*, previo a la noción de límite de una sucesión.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Vecindad Abierta

Si *"a"* es un número real y *"ε"* es una medida muy pequeña, una vecindad abierta con centro en *"a"* y de radio *"ε"* está formada por todos los puntos x cuya distancia al punto *"a"* es menor que *"ε"*. Es decir $|x- a|< \varepsilon$, o en forma equivalente $-\varepsilon < x-a < \varepsilon$, de donde $a - \varepsilon< x < a + \varepsilon$. Escribimos $V_\varepsilon (a)$ para representar la vecindad abierta de centro *"a"* y de radio *"ε"*.

La anterior definición incluye implícitamente el término *cercano*, así: dado un número real *"a"* sobre la recta, los puntos *cercanos* que están a la derecha y a la izquierda del punto *"a"* forman una vecindad de *"a"*. El término "cercano" depende de la escala de medida que se emplee, por ejemplo, con una escala en Km, los estudiantes que están en los extremos opuestos del salón de clase podrían considerarse cercanos, pero si la escala es mm, podrían ahora considerarse como distantes. Lo que antes era cercano con esta escala ahora no lo es.

En matemáticas podemos definir el concepto de cercanía así: dos puntos sobre la recta están "cercanos" si en cualquier escala que se tome como medida están siempre cerca.

En términos matemáticos, se dice que: "… dos puntos x y y sobre la recta real están arbitrariamente cerca si para una medida arbitraria *"ε"* ($\varepsilon> 0$), la distancia entre ellos $|x – y|$ es menor que "ε". (M*oreno V. y Restrepo M., 2001 p 73).*

Estas definiciones están presentes en la secuencia de actividades, pero ´puestas en escena´ y desarrolladas a través de diferentes representaciones, en distintos contextos, utilizando tratamiento y conversión, partiendo del lenguaje usual de entorno utilizado por los estudiantes, hasta llegar paulatinamente a una representación más formal sobre la recta numérica $\Re$.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar un conjunto de actividades que apoye significativamente la construcción del concepto de entorno por parte de estudiantes de grado once desde una perspectiva topológica en la recta real.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1. Realizar una revisión de la literatura en educación matemática que permita orientar el diseño de actividades asociadas con la noción matemática de entorno.

2.2.2. Establecer una caracterización del concepto matemático de entorno a través de las situaciones presentadas en la secuencia didáctica así como reconocer algunas de sus representaciones semióticas.

2.2.3. Realizar una prueba piloto de las actividades diseñadas que permita un afinamiento del tipo de preguntas a proponer en ellas.

3. MARCO TEORICO

3.1. MARCO DIDÁCTICO

Nuestro trabajo se centra en el diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje y construcción del concepto de entorno, como concepto fundamental previo al concepto de límite; el objetivo inmediato de esta secuencia es el desarrollo de ciertas competencias a lo largo de una “secuencia de actividades”.

En este sentido, el conjunto de actividades que diseñamos nos remite a la enseñanza-aprendizaje como momento de construcción, aproximación al concepto y al conocimiento en general, superando la enseñanza de conceptos explícitos y elaborados. De aquí que el proceso de aprendizaje en el aula de clase sea tan importante, teniendo en cuenta además los factores cognoscitivos, afectivos y sociales que lo influyen.

La teoría del aprendizaje significativo explica como ocurre este proceso entendiendo el conocimiento ligado directamente con la realidad que lo genera, y la enseñanza no solo como asimilación de información sino también como construcción del significado de la misma.

Sin embargo, para que las informaciones que se adquieren sean significativas deben además interactuar con conceptos existentes en los estudiantes y se puedan incorporar a la estructura cognitiva de ellos. Para llevarlo a cabo hemos asumido ciertos marcos y planteamientos teóricos referentes o relativos a modelos y concepciones respecto a la enseñanza y al aprendizaje, como se nombran y se exponen a continuación.

- Constructivismo.
- Aprendizaje significativo Desde (Vigotsky). “La interacción social”
- Aprendizaje significativo Desde (Ausubel). “Material potencialmente significativo”
- Teoría de campos conceptuales (Vergnaud). “Tomamos la definición de concepto como una tripleta de tres conjuntos, **C = (S, I, R),** Situaciones, Invariantes y Representaciones”
- Teoría de las representaciones (Duval) “Conversión y Tratamiento”

3.1.1. Actividad didáctica

En el campo de la didáctica, cuando se habla de actividades, generalmente nos referimos a ejercicios planeados, y diseñados con el fin de que los estudiantes lleguen a los objetivos que se proponen.

Consideramos que el taller elaborado es un medio para interrelacionar al estudiante con el profesor para llegar al objetivo propuesto que es llegar a construir el concepto de entorno, como mencionamos arriba es planificado y diseñado cuidadosamente como una secuencia que conlleva al objetivo.

3.1.2. El constructivismo

Básicamente puede decirse que el constructivismo es el modelo que mantiene que una persona, tanto en los aspectos cognitivos, sociales y afectivos del comportamiento, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción de estos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, esta construcción se realiza con los esquemas que la persona ya posee (conocimientos previos), o sea con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea.

El constructivismo cognitivista de Piaget:

Jean Piaget, psicólogo suizo, comenzó a estudiar el desarrollo humano en los años veinte del siglo XX. Su propósito fue postular una teoría del desarrollo que ha sido muy discutida entre los psicólogos y los educadores, basado en un enfoque holístico, que postula que el niño construye el conocimiento a través de mucho canales: la lectura, la escucha, la exploración y "experimentando" su medio ambiente.

Conflictos cognitivos: Surgen cuando un conocimiento asentado es puesto en duda por otro conocimiento nuevo. Esto obliga a los niños a crear nuevos esquemas que rompen el equilibrio entre asimilación y acomodación.

El profesor debe saber adecuar los distintos conocimientos a los procesos de acomodación y desestabilización de las estructuras cognitivas, posiblemente el rol más importante del profesor es proveer un ambiente en el cual el niño pueda experimentar la investigación espontáneamente. Los salones de clase deberían estar llenos con auténticas oportunidades que reten a los estudiantes, los estudiantes deberían tener la libertad para comprender y construir los significados a su propio ritmo a través de las experiencias como ellos las desarrollaron mediante los procesos de desarrollo individuales.

El aprendizaje es un proceso activo en el cuál se cometerán errores y las soluciones serán encontradas. Estos serán importantes para la asimilación y la acomodación para lograr el equilibrio cognitivo.

El aprendizaje también es un proceso social que debería suceder entre los grupos colaborativos con la interacción de los "pares" escenarios que sean lo más natural posible.
Esta construcción que se realiza todos los días y en casi todos los contextos de la vida, depende sobre todo de dos aspectos:

- De la representación inicial que se tiene de la nueva información.
- De la actividad externa o interna que se desarrolla al respecto.

En definitiva, todo aprendizaje constructivo supone una construcción que se realiza a través de un proceso mental que conlleva a la adquisición de un conocimiento nuevo. Pero en este proceso no es solo el nuevo conocimiento que se ha adquirido, sino, sobre todo la posibilidad de construirlo y adquirir una nueva competencia que le permitirá generalizar, es decir, aplicar lo ya conocido a una situación nueva.

El material diseñado tiene una base constructivista es decir teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

− Aprendizaje significativo
− Conocimientos previos del alumno
− Aprendizaje flexible
− Conocimiento de las estructuras intelectuales del alumno
− Más importancia de los procesos que los resultados.

3.1.3. Teoría aprendizaje significativo (Ausubel)

Según Ausubel (1996, p, 17) "todo el aprendizaje en el salón de clases se puede caracterizar por medio de dos dimensiones independientes: la dimensión repetición-aprendizaje significativo y la dimensión recepción-descubrimiento, de acuerdo a éste autor ambos tipos de aprendizaje pueden ser significativos si:

- El estudiante tiene actitud y disposición de relacionar de forma significativa el nuevo material de aprendizaje con su estructura existente de conocimiento.

- El material y/o tarea de aprendizaje en sí es potencialmente significativa, porque se trata de material razonable o sensible, relacionándose de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva del estudiante.

De acuerdo a esto: “en el aprendizaje por recepción el contenido principal de la tarea o actividad se le presenta simplemente al alumno, y él debe relacionarlo de forma activa y significativa con los aspectos importantes de su estructura cognitiva y retenerlo para el recuerdo o reconocimiento posteriores, o como base para el aprendizaje del nuevo material relacionado. Mientras en el aprendizaje por descubrimiento el contenido principal de lo que debe aprenderse, lo debe aprender de forma independiente antes de que lo pueda asimilar en su estructura cognitiva”.(Lara, J. y Lara, L., 2004, p.344).

¿Pero en sí que significa que un material de aprendizaje sea potencialmente significativo?

Lo esencial reside en que ideas expresadas o representadas de diferentes maneras, sean relacionadas de modo no arbitrario y sustancial – no al pie de la letra– con lo que el alumno ya sabe. De forma que el material no debe llegar a ser arbitrario ni vago para que pueda relacionarse de forma ‘sustancial’ con las ideas importantes de los estudiantes, pero no basta con esto, es necesario que exista un contenido pertinente, que forme parte de la estructura cognoscitiva del estudiante. De modo que si el material de aprendizaje muestra la suficiente intencionalidad o falta de arbitrariedad, con respecto a las ideas pertinentes de los estudiantes, se puede deducir que hay una base adecuada y casi obvia de relacionarlo de modo no arbitrario con los tipos de ideas correspondientes que los alumnos son capaces de aprender.

El material de aprendizaje lógicamente significativo puede ser así relacionado de forma no arbitraria con ideas relevantes de los estudiantes, como ejemplos derivados, casos especiales, extensiones, elaboraciones, modificaciones, limitaciones y generalizaciones más inclusivas o con un sistema más amplio de ideas pertinentes siempre y cuando fuese coherentes con ellas, p. ej. La resistencia de una estructura en relación con los materiales que la componen, se relaciona significativamente con un concepto de función.

Al elaborar material de aprendizaje se debe partir del nivel de desarrollo de los estudiantes, es decir de sus capacidades e intereses, aquí es necesario tener en cuenta que la intervención del profesor está condicionada con los conocimientos previos con los que el alumno llega a la escuela. Por tanto el inicio de un nuevo aprendizaje escolar se realiza a partir de conceptos, representaciones y conocimientos que ha elaborado a través de sus experiencias previas. Estos conocimientos son entonces el punto de partida y la herramienta de interpretación de la nueva información que le llega. Por esto mismo, el aprendizaje significativo además de estar determinado por los conocimientos previos, depende también de la capacidad adquirida por los estudiantes a lo largo de su vida, es decir del nivel alcanzado por sus estructuras mentales que le permiten poner en marcha una determinada capacidad de aprender y pensar. Por esto al tener en cuenta el nivel de desarrollo del alumno por conseguir un aprendizaje significativo le exige al maestro tener en cuenta los aspectos antes mencionados: su competencia cognitiva, sus intereses, y los conocimientos que ha construido anteriormente.

El papel del profesor entonces adquiere su real dimensión cuando respeta en todo momento el nivel de desarrollo de sus estudiantes (Vygostki, 1979, p.24) y consigue guiarlo a través de la zona de desarrollo próximo convirtiendo en desarrollo real lo que anteriormente era desarrollo potencial. En este sentido la ayuda del profesor - y de los adultos que lo educan- debe mantener relación estrecha con el nivel de competencia del estudiante, es decir, cuanto más dificultad se encuentre en realizar una tarea, más apoyo y directividad debe recibir y de forma inversa en el caso contrario que no necesite tanta ayuda. Por tanto la labor docente es tanto más eficaz cuanto más 'sostienen' el proceso de aprendizaje de los estudiantes, según el concepto de andamiaje elaborado por Bruner (1976).

Según Ausubel el aprendizaje significativo involucra interacción entre la información nueva y las ideas preexistentes en la estructura cognoscitiva de los estudiantes, este proceso lo denomina afianzamiento, que son conceptos o ideas claves en cualquier tema que los maestros deben cerciorarse que transmitan de manera concienzuda, con diversos ejemplos, con el fin de formar una base firme para el aprendizaje posterior.

Cuando se logran aprendizajes significativos, se logra asegurar la funcionalidad de lo aprendido, es así como la escuela persigue que los conocimientos adquiridos puedan ser utilizados en las circunstancias reales en que el alumno las necesita. Según esto, cuanto mayor sea su significatividad, mayor será su grado de utilidad y funcionalidad y podrá relacionarse con un panorama más amplio de nuevas situaciones y nuevos contenidos. Entonces significación y funcionalidad del aprendizaje están estrechamente relacionados.

3.1.4. El aspecto socio cultural en la educación (Vygotski, l.)

Para Vygotski, el hecho que distingue al hombre del resto de animales es el uso de herramientas en un contexto de trabajo social y de comunicación humana. Entonces los procesos de adaptación del hombre suceden a través de 'instrumentos de mediación', los cuales constituyen el patrimonio cultural, que ha sido objeto de apropiación de las diferentes civilizaciones. El dominio de estos instrumentos cambia en cada caso, los modos y formas de comportamiento de los sujetos.

Producto de su desarrollo el ser humano asume comportamientos y formas de conducta 'naturales', las que se deben transformar en superiores en la medida en que asuma los instrumentos culturales. Es decir, pasar de formas de comportamiento naturales o elementales a superiores, es construir, o apropiarse, de herramientas que posibiliten el dominio del entorno por parte del sujeto, así como el dominio de sus formas de conducta.'(Orobio, H. y Ortiz, M., 1997, p.46).

Como los comportamientos de los individuos se transforman mediante la cultura, y esta crea formas especiales de conducta y cambia sus modos y procedimientos, transformando los códigos y funciones innatas, si el individuo elabora y crea nuevas formas de comportamiento específicamente culturales, los procesos pedagógicos deben estar guiados básica y fundamentalmente por los procesos culturales.

Entonces acceder a la construcción del conocimiento en sus más altos niveles de abstracción, según Vygotski, es pasar de comportamientos naturales a comportamientos superiores. Según esto, si bien la línea de desarrollo natural conduce a formas primarias del comportamiento, la línea de desarrollo social o cultural conduce a formas superiores de comportamiento con la mediación de procesos elementales. De este modo el proceso sociocultural posibilita los siguientes cambios en el desarrollo: “el paso de memoria mecánica a memoria lógica, de atención involuntaria a voluntaria, de imaginación reproductiva a imaginación creadora, de pensamiento en imágenes a pensamiento en conceptos, de voluntad impulsiva a voluntad previsora”. (Orobio, H. y Ortiz, M.,1997,p.47).

Sin embargo el proceso de acceso a las formas superiores del comportamiento no es de ningún modo lineal o mecánico, se caracteriza por el dominio de los medios externos del desarrollo cultural y del pensamiento, como el idioma, el lenguaje, el dibujo, el cálculo, etc., así como también por los procesos de desarrollo de funciones psíquicas especiales no limitadas ni determinadas de ninguna forma precisa, como es la memoria lógica, la atención voluntaria, definidas como funciones psíquicas superiores.

El concepto de zona de desarrollo próximo es importante para Vygotski porque al definirlo como la distancia entre el desarrollo real del niño y su desarrollo potencial, donde el desarrollo real se puede determinar a partir de la resolución independiente de problemas, mientras el desarrollo potencial, más elevado, es el que queda determinado por la resolución de problemas con la guía del adulto o de compañeros más adelantados.

Colocar al niño en la zona de desarrollo próximo significa entonces crear para él unas condiciones que le permitan, a partir del desarrollo que ya ha logrado, acceder a las funciones que en el momento apenas comienzan a aparecer, y cumplir tareas cada vez más complejas. Se trata de establecer no como el niño llega a ser lo que aún no es (Wertsch, 1988, p. 84).

Son importantes en esta teoría los procesos interpsicológicos, los que suponen pequeños grupos de individuos implicados en una interacción social determinada y explicable en términos de dinámicas de grupos pequeños y prácticas comunicativas. Cuando trata de los orígenes sociales de los procesos psicológicos superiores el énfasis de Vygotski está precisamente en el funcionamiento interpsicológico, queda expresado así en la ley genética general del desarrollo cultural: "…cualquier función presente en el desarrollo cultural del niño, aparece dos veces o en dos planos diferentes: en primer lugar aparece en el plano social, para hacerlo luego en el plano psicológico. En principio aparece entre las personas y como una categoría interpsicológica, para luego aparecer en el niño como una categoría intrapsicológica. Esto es igualmente cierto con respecto a la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos y el desarrollo de la voluntad. Debe decirse que la internalización transforma el proceso en sí mismo, cambiando su estructura y funciones. De la misma forma las relaciones sociales subyacen genéticamente a todas las funciones superiores y a sus relaciones". (Orobio, H. y Ortiz, M., 1997, p.66).

Como vemos el concepto de internalización es clave en este proceso, entendido como la realización de algunos aspectos de la estructura de cualquier sujeto en el ‘plano externo’, que pasan a ejecutarse en un ‘plano interno’. Esto significa, que las funciones psíquicas superiores aparecen al inicio en su forma externa, planteamiento que él mismo Vygotski explica así: “…Toda función psicológica superior ha sido externa porque ha sido social en algún momento anterior a su transformación en una auténtica función psicológica interna”. (Vygotski,1979,p.22).

En Vygotski, a diferencia de otros autores, la actividad externa se define en términos de procesos sociales mediatizados semióticamente y las propiedades de los procesos son las que dan la clave para entender la aparición del funcionamiento interno. Por tanto, la internalización es un proceso que siempre estará presente en la transformación de los fenómenos sociales en fenómenos psicológicos.

3.1.5. Teoría de los campos conceptuales (Vergnaud)

Vergnaud por su parte viene a complementar la teoría del aprendizaje significativo; en cuanto teoría psicológica de conceptualización de lo real se propone localizar y estudiar continuidades y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual. Tiene implícita la idea de que los conocimientos en acción –explícitos- pueden evolucionar a lo largo del tiempo hasta los conocimientos científicos- explícitos-. Parte de la premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio por parte del sujeto ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de la experiencia, madurez, aprendizaje. Campo conceptual es, para él, un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, estructuras, relaciones, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente entrelazados durante el proceso de adquisición. El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. Al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si quisiéramos que los alumnos progresivamente los dominen. De nada sirve rodear las dificultades conceptuales; ellas son superadas en la medida en que son detectadas y enfrentadas, pero esto no ocurre de una sola vez La teoría de los campos conceptuales destaca que la adquisición de conocimientos es moldeada por las situaciones y problemas previamente dominados y que ese conocimiento tiene por lo tanto muchas características contextuales. De esta manera muchas de nuestras concepciones vienen de las primeras situaciones que fuimos capaces de dominar o de nuestra experiencia tratando de modificarlas. Pese a esto, existe una laguna considerable entre las invariantes que los sujetos construyen al interactuar con el medio y los invariantes que constituyen el conocimiento científico (Moreira, M.A. 2002, p. 6). De este modo, las concepciones previas de los alumnos son consideradas errores, concepciones ingenuas o alternativas en relación a las concepciones científicas, esta manera de concebir el conocimiento supone al estudiante o al aprendiz como incompleto, imperfecto o deficiente en comparación con los adultos especialistas, esta visión según Vergnaud es inadecuada para las cuestiones de desarrollo cognitivo involucradas, es más fructífero considerar al sujeto como sistema dinámico con mecanismos regulatorios capaces de asegurar su proceso cognitivo.

Muchos de los conceptos erróneos de los alumnos se derivan de atribuir a ciertas palabras usadas en ciencias para representar conceptos, el mismo significado que atribuyen a esas mismas palabras diariamente, incluso de una ciencia a otra los significados de una misma palabra pueden ser distintos.

No es, por lo tanto, una teoría de enseñanza de conceptos explícitos y formalizados. Se trata de una teoría psicológica del proceso de conceptualización de lo real que permite localizar y estudiar continuidades y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual.

Resumiendo, la teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitiva neopiagetiana que pretende ofrecer un referencial más fructífero que el piagetiano para el estudio del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de competencias complejas, particularmente aquellas implicadas en las ciencias y en las técnicas, teniendo en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio.

Los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales son, además del propio concepto de campo conceptual, los conceptos de esquema (la gran herencia piagetiana de Vergnaud), situación, invariante operatorio (teorema-en-acción o concepto-en-acción), y su propia concepción de concepto.

Tres argumentos principales llevaron a Vergnaud (1983a, p.393) al concepto de campo conceptual: 1) un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones; 2) una situación no se analiza con un solo concepto; 3) la construcción y apropiación de todas las propiedades de un concepto o de todos los aspectos de una situación es un proceso de largo aliento que se extiende a lo largo de los años, a veces de una decena de años, con analogías y mal entendidos entre situaciones, entre conceptos, entre procedimientos, entre significantes.

Vergnaud considera al campo conceptual como una unidad de estudio para dar sentido a las dificultades observadas en la conceptualización de lo real, además la teoría de los campos conceptuales supone que la conceptualización es la esencia del desarrollo cognitivo.

Vergnaud define concepto como un triplete de tres conjuntos (1983 a, p. 393;1988, p. 141; 1990, p. 145; 1993, p. 8; 1997, p. 6), C = (S, I, R) donde: S es un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto; I es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, o un conjunto un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto; R es un conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas.

El primer conjunto – de situaciones – es el *referente* del concepto, el segundo –de invariantes operatorios – es el *significado* del concepto, en cuanto al tercero – de representaciones simbólicas – es el *significante*.

Eso implica que para estudiar el desarrollo y el uso de un concepto, a lo largo del aprendizaje o de su utilización, es necesario considerar esos tres conjuntos simultáneamente. No hay en general, correspondencia biunívoca, entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones; no se puede, por lo tanto, reducir el significado ni a los significantes ni a las situaciones (1990, p. 146).

Por otro lado, un único concepto no se refiere a un solo tipo de situación y una única situación no puede ser analizada con un solo concepto.

Por todo eso, es necesario hablar de campos conceptuales. Pero si los conceptos se tornan significativos a través de situaciones resulta, naturalmente, que las situaciones y no los conceptos constituyen la principal entrada en un campo conceptual. Un campo conceptual es, en primer lugar, un conjunto de situaciones (1988, p. 141; 1990, p.5), cuyo dominio requiere el dominio de varios conceptos de distinta naturaleza.

3.1.5.1. Situaciones

El concepto de situación empleado por Vergnaud no es el de situación didáctica, pero si el de tarea, siendo que toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, para las cuales es importante conocer sus naturalezas y dificultades propias. La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de las diferentes subtareas involucradas, pero es claro que el desempeño en cada subtarea afecta el desempeño global (1990, p. 146; 1993, p.9).

Vergnaud apela también al sentido que, según él (op. cit., p. 150 y p. 12), es atribuido por los psicólogos al concepto de situación: los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones con las cuales es confrontado.

Además de eso, él destaca dos ideas principales con relación al sentido de situación: variedad e historia. Esto es, en un cierto campo conceptual existe una gran variedad de situaciones y los conocimientos de los alumnos son moldeados por las situaciones que encuentran y progresivamente dominan, particularmente por las primeras situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y procedimientos que queremos que aprendan (ibid.). Según Vergnaud, muchas de nuestras concepciones vienen de las primeras situaciones que fuimos capaces de dominar o de nuestra experiencia al intentar modificarlas (1996 a, p. 117). Son las situaciones las responsables por el sentido atribuido al concepto (Barais & Vergnaud, 1990, p.78); un concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones (1994, p. 46). Pero el sentido no está en las situaciones en sí mismas, así como no está en las palabras ni en los símbolos (1990, p. 158), Vergnaud llama esquema a la organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones (1990, p. 136; 1993, p. 2; 1994, p. 53; 1996 c, p.201; 1998, p. 168). Según él, es en los esquemas que se deben investigar los conocimientos en acción del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que hacen que la acción del sujeto sea operatoria.

3.1.5.2. Esquema

Esquema es el concepto introducido por Piaget para dar cuenta de las formas de organización como de las habilidades sensorio-motoras y de las habilidades intelectuales. Un esquema genera acciones y debe contener reglas, pero no es un estereotipo porque la secuencia de acciones depende de los parámetros de la situación (1994, p. 53).

Un esquema es un universal eficiente para toda una gama de situaciones y puede generar diferentes secuencias de acción, de colección de informaciones y de control, dependiendo de las características de cada situación particular. No es el comportamiento que es invariante, pero sí la organización del comportamiento (1998, p. 172).

Para Vergnaud los esquemas se refieren necesariamente a situaciones o clase de situaciones, donde él (1993, p. 2) distingue entre:

- Clases de situaciones en las que el sujeto dispone – dentro de su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias – de las competencias necesarias al tratamiento relativamente inmediato de la situación.

- Clase de situaciones en las que el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, que le obligan a un tiempo de reflexión y exploración, a vacilaciones, a tentativas frustradas, llevando eventualmente al suceso o a un fracaso.

Según Vergnaud (ibíd.), el concepto de esquema no funciona del mismo modo en las dos clases de situaciones. En la primera de ellas, se observa, para una misma clase de situaciones, conductas ampliamente automatizadas, organizadas por un solo esquema en tanto que para la segunda de observa la sucesiva utilización de varios esquemas que pueden entrar en competencia y que, para atender a la meta deseada, deben ser acomodados, desarticulados y recombinados.

Desde el punto de vista teórico, el concepto de esquema proporciona el vínculo indispensable entre la conducta y la representación (1996 c, p.202): la relación entre situaciones y esquemas es la fuente primaria de la representación y, por lo tanto de la conceptualización (1998, p. 177). Por otro lado, son los invariantes operatorios que hacen la articulación esencial entre teoría y práctica, pues la percepción, la búsqueda y la selección de información se basan enteramente en el sistema de conceptos-en-acción disponibles para el sujeto (objetos, atributos, relaciones, condiciones, circunstancias...) y en los teoremas-en-acción subyacentes a su conducta (1996 c, p. 202).

Como las situaciones son las que dan sentido a los conceptos es natural definir campo conceptual, sobre todo, como conjunto de situaciones. Un concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones (1994, p. 46), pero el sentido no está en las situaciones en sí mismas, así como no está en las palabras ni en los símbolos (1990, p. 158). El sentido es una relación del sujeto con situaciones y significantes. Pero precisamente, son los *esquemas*, i. e. las acciones y su organización, evocados en el sujeto por una situación o por un significante que constituyen el sentido de esa situación o de ese significante para ese individuo (1990, p. 158; 1993, p. 18). Vergnaud considera que los esquemas necesariamente se refieren a situaciones, a tal punto que debería hablarse de interacción esquema-situación en vez de interacción sujeto-objeto.

Los esquemas tienen como ingredientes esenciales aquello que Vergnaud llama *invariantes operatorios*, i. e., conceptos-en-acción y teoremas-en-acción que constituyen la parte conceptual de los esquemas, es decir, los conocimientos contenidos en los esquemas.

La construcción del conocimiento por el aprendiz no es un proceso lineal, fácilmente identificable. Al contrario, es complejo, tortuoso, demorado, con avances y retrocesos, continuidades y rupturas. El conocimiento previo es determinante en el progresivo dominio de un campo conceptual, pero también puede, en algunos casos, ser un impedimento. Continuidades y rupturas no son, por lo tanto, excluyentes. Puede haber continuidad y ruptura. El álgebra, por ejemplo, se apoya en la aritmética pero aún así, para aprenderla es necesario romper con la aritmética. La mecánica clásica y la mecánica cuántica presentan continuidades, pero para aprender esta es preciso rupturas con aquella.

En la enseñanza, es necesario desestabilizar cognitivamente al alumno, pero no demasiado. Es preciso identificar sobre cuáles conocimientos previos el niño se puede apoyar para aprender, pero también es necesario distinguir cuáles son las rupturas necesarias. Quiere decir, es preciso proponer también, cuidadosamente situaciones para las cuales los alumnos no tienen donde apoyarse, o no se deben apoyar en conocimientos previos.

3.1.6. Pensamiento y representación (Duval)

Duval parte del hecho de que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación, entendido como un modelo, es decir una imagen de algún proceso o de la realidad, que puede ser externo y mental, es decir la noción de representación resulta esencial puesto que constituye la forma bajo la cual puede describirse una información y tomarse como base para un sistema de transformación. Entendidas las representaciones internas como representaciones mentales, que: "…son las formas que toman las intuiciones y las conceptualizaciones transitorias de un conocimiento que se está construyendo" (Moreno y Sacristán, 1996, citado en: Mora, L. y Torres J.A.,2007, p.46).

Efectivamente las representaciones internas son las que le permiten a la mente operar con las ideas matemáticas, sin embargo este tipo de representaciones sólo puede ser comunicado a través de representaciones externas como dibujos, o expresiones verbales, símbolos, gráficos, objetos físicos, etc., a partir de las cuales es posible observar tales representaciones internas. Como señalan Hiebert y Carpenter, 1992, citado en: Mora, L. y Torres J.A., 2007, p.46) estos dos tipos de representaciones las externas y las internas están relacionadas entre sí, ya que las representaciones externas afectan la naturaleza de las internas, a su vez las representaciones internas proporcionan herramientas para ampliar la visión de las externas, de tal manera que las representaciones externas son el medio para comunicar y observar las representaciones internas que nos permiten pensar sobre las ideas matemáticas.(Mora, L. y Torres, J., 2007, p.46).

Pero en este proceso, ¿Cómo se genera el conocimiento? Hiebert y Carpenter (1992) plantean que las representaciones internas se relacionan generando redes de conocimientos. Estas redes se organizan de manera jerárquica de tal manera que cuando unas representaciones están inmersas en otras más generales, o en forma de tela de araña, esto es cuando las representaciones se relacionan entre sí. Entonces las representaciones se mezclan y generan redes de conocimiento más complejas. Finalmente se presenta la comprensión cuando las representaciones se conectan en redes estructuradas y cohesionadas. Un conocimiento matemático es comprendido cuando sus representaciones se integran a una red interna de conocimientos, por lo que el grado de comprensión está determinado por la cantidad y consistencia de las conexiones. Por esto la comprensión aumenta en la medida en que las redes se vuelven más grandes y mejor estructuradas, haciendo que éstas se reordenen constantemente y su cohesión sea más fuerte con la llegada de nuevas representaciones.

Duval en su enfoque sobre las representaciones parte de los conceptos de semiósis: entendido como las formas de expresión y representación de un concepto, y la Noesis: como el proceso de conceptualización o comprensión realizado a través de la semiósis. De aquí deriva la ley fundamental del funcionamiento cognitivo del pensamiento, no hay *noesis sin semiósis. (Duval, 1999).*

En su teoría la pluralidad de los sistemas semióticos permiten una diversificación tal de la representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales. De esta manera el mismo objeto a través de las representaciones puede darse en sistema semióticos diferentes.

Duval señala en su teoría sobre las representaciones que la lengua natural, tiene su status aparte entre el conjunto de los sistemas semióticos posibles. Benveniste la considera como *"la organización semiótica por excelencia"* (1974, p 62,63)

El progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el primero de ellos, el de la lengua natural. Los sistemas semióticos permiten además poner en correspondencia conocimientos específicos con sus respectivas representaciones, pero para que esto ocurra deben cumplir con las tres actividades cognitivas fundamentales a toda representación: en primer lugar que sean un conjunto de signos o marcas que sean identificables como representación de alguna cosa u objeto en un sistema determinado, luego de esto que se transformen las representaciones de acuerdo a las reglas únicas establecidas por el sistema semiótico, de tal modo que se constituyan en conocimiento nuevo con respecto al que brindaban las representaciones iniciales, y finalmente que permita la conversión de las representaciones propias producto de un sistema determinado en otro sistema, de tal manera que estas últimas permitan explicar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Dado que una de las propiedades fundamentales de las representaciones semióticas es su transformabilidad en otras representaciones, es clave distinguir entre la conversión, cuando se produce una transformación de registros de una misma transformación, p.ej. convertir una fracción representada como partición a su expresión decimal, o en nuestro caso para la secuencia didáctica, es transformación el paso de una representación gráfica en el plano, a una representación formal, utilizando intervalos y valores propios. Es una actividad cognitiva primordial, menos visible que el tratamiento. Mientras en el tratamiento se habla de transformación que produce otra representación en el mismo registro, p.ej. para nosotros es tratamiento la representación de una recta real con diferentes unidades de medición.

Duval le da importancia a las actividades cognitivas que están relacionadas con los sistemas de representación: la formación de representaciones de un sistema, la transformación dentro de un sistema de representación, la traducción entre sistemas de representación, la consolidación de relaciones o procesos y la construcción y prueba de modelos matemáticos.

Finalmente resalta la importancia del dominio y de la coordinación entre los sistemas de representación, partiendo de que el manejo de diferentes sistemas permite seleccionar o complementar los más adecuados para determinadas situaciones, ofreciendo una información más completa del objeto desde diversos puntos de vista.

Uno de los argumentos de la teoría de Duval que retomamos es como el mismo lo señala en su teoría sobre las representaciones; que la lengua natural, tiene su status aparte entre el conjunto de los sistemas semióticos posibles. Benveniste la considera como “la organización semiótica por excelencia” (1974, p 62,63)

3.2. MARCO MATEMATICO

3.2.1. Valor absoluto

3.2.1.1. Definición

El Valor Absoluto se define como la distancia entre dos números reales en la recta numérica. Con el objeto de afianzar el concepto de valor absoluto, es necesario ligarlo a su interpretación geométrica en la recta numérica.

En matemática, el valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta su *signo*, sea este positivo (+) o negativo (-). Así, por ejemplo, 3 es el valor absoluto de 3 y de -3.

El valor absoluto está relacionado con las nociones de magnitud, distancia y norma en diferentes contextos matemáticos y físicos. El concepto de valor absoluto de un número real puede generalizarse a muchos otros objetos matemáticos.

Por definición, el valor absoluto de a siempre será mayor o igual que cero.

Desde un punto de vista geométrico, el valor absoluto de un número real a es siempre positivo o cero. En general, el valor absoluto de la diferencia de dos números reales es la distancia entre ellos. De hecho, el concepto de función distancia o métrica en matemáticas se puede ver como una generalización del valor absoluto de la diferencia, a la distancia a lo largo de la recta numérica real.

3.2.1.2. Propiedades de valor absoluto

Propiedades fundamentales

$\lvert a\rvert \geq 0$	No negatividad
$\lvert a\rvert = 0 \iff a = 0$	Definición positiva
$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	Propiedad multiplicativa

$|a+b| \leq |a| + |b|$ Desigualdad triangular

Otras propiedades

$\|-a\| = \|a\|$	Simetría
$\|a-b\| = 0 \iff a = b$	Identidad de indiscernibles
$\|a-b\| \leq \|a-c\| + \|c-b\|$	Desigualdad triangular
$\|a-b\| \geq \|\|a\| - \|b\|\|$	(equivalente a la propiedad aditiva)
$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|} (si\ b \neq 0)$	Preservación de la división (equivalente a la propiedad multiplicativa)

Otras dos inecuaciones útiles son:

- $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$
- $|a| \geq b \iff a \geq b \vee a \leq -b$

3.2.2. Espacios métricos

3.2.2.1. Definición

Un conjunto E cuyos elementos llamaremos *Puntos,* se dice que es un *espacio métrico* si a cada dos puntos p y q de E hay asociado un número real $d(p,q)$ llamado distancia de p *a* q, tal que posee las siguientes propiedades:

3.2.2.2. Propiedades

1. $\forall x, y \in E: d(x,y) \geq 0$
2. Para $x, y \in E: d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3 . $\forall x, y \in E: d(x,y) = d(y,x)$ (simetría)
4. $\forall x, y, z \in E: d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ (desigualdad triangular)

Es decir,

a) Las distancias son no negativas y el único punto a distancia cero de x es el mismo x;

b) la distancia es una función simétrica;

c) la distancia satisface la desigualdad triangular: la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados; La expresión $d(x,y)$ la leemos distancia entre los puntos x y y, es por tanto una función distancia que verifica la desigualdad triangular.

El par (E, d) constituido por el conjunto E y una métrica definida sobre E, se denomina espacio métrico.

Para la demostración de los espacios métricos es necesario conocer las propiedades del valor absoluto.

3.2.2.3. Definición de bola abierta en cualquier espacio métrico

Dado un punto $x_0 \in E$ y un numero real $r > 0$, se define el concepto de bola abierta como $B_r x_0 = \{ x \in E / d(x, x_0) < r \}$ (Kreyszig,E., 1989)

3.2.3. Ejemplos de espacios métricos

3.2.3.1. Métrica usual en $\Re$

Consideremos el conjunto $\Re$ de los números reales y la función $d_u\ (x,y) =\ x - y$,$\forall$x,y $\in$ R. Mediante aplicación de las propiedades del valor absoluto se comprueba que d_u es una métrica. Esta le da a $\Re$ una estructura de espacio métrico.

3.2.3.1.1. Demostración de las propiedades.

1. $\forall\, x,y \in \Re$: $d_u\ (x,y) \geq 0$

   $d_u\ (x,y) =\ x\text{-}y\ \geq 0$ Por propiedad (1) de valor absoluto.

2. *Para* $x, y \in \Re$: $d_u\ (x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

   $d_u\ (x,y) =\ x - y = 0$ por propiedad (2) de valor absoluto.

   $x - y = 0$ *Sii* $x = 0$

3. $\forall x, y \in \Re$: $d(x,y) = d_u\ (y,x)$ (simetría)

$d_u\ (x,y) =\ \ x\text{-}y\ =\ \text{-}(y\text{-}x)$ por propiedad (5) de valor absoluto.

$=\ y\text{-}x\ \ = d_u\ (y,x)$ por tanto $d_u\ (x,y) = d_u\ (y,x)$

4. $\forall\, x, y, z \in \Re$: $d_u\ (x,y) \leq d_u\ (x,z) +\ d_u\ (y,z)$ (desigualdad triangular)

   $d_u\ (x,y) =\ x\text{-}y\ =\ (x\text{-}z) + (z - y)$ por propiedad (3) valor absoluto

   $(x\text{-}z) +(z\text{-}x)/\ \leq\ x\text{-}z\ \ +\ z\text{-}y$

   $d_u\ (x,z) + d_u\ (z,y)$

   Entonces $d_u(x,y) \leq d_u\ (x,z) + d_u\ (z,y)$.

3.2.3.1.2. Ejemplos de bolas abiertas en este espacio $\Re$

$B_r x_0 = \{ x \in \Re : d_u(x_1, x_0) < r \}$

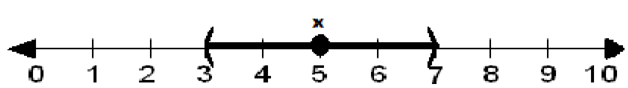
$= \{ x \in \Re : x - x_0 < r \}$

$= \{ x \in \Re : -r < x - x_0 < r \}$

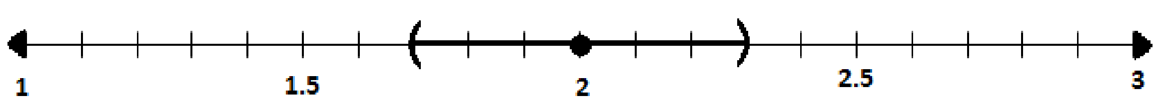
$= \{ x \in \Re : x_0 - r < x < x_0 + r \}$

$= (x_0 - r , x_0 + r)$

- Ej: $B_5\,(2) = (5-2, 5+2) = (3,7)$



- Son: $B_2\ 0.3$ o en expresión similar $(2-0.3, 2+0.3)=(1.7,2.3)$



3.2.3.2. Métrica discreta en un conjunto E.

Sea *E* un conjunto cualquiera no vacío, definamos la función:

$D: E \times E \rightarrow R$, *tal que:* $\forall x, y \in E$:

$d_d\,(x,y) = 1$, si $x \neq y$; $d_d\,(x,y) = 0$ si $x = y$.

Esta función entonces es una métrica para *E.* Al espacio métrico resultante (*E,*d) se le llama discreto, y nos indica que todo conjunto no vacío puede proveerse de una métrica.

3.2.3.2.1. Demostración de las propiedades.

1. $\forall x, y \in E: d_d(x,y) \geq 0$
   Si $x \neq y$, $d_d(x,y) = 1$
   Si $x = y$, $d_d(x,y) = 0$
   Entonces $d_d(x,y) \geq 0$ Por definición.
2. Para $x, y \in E: d_d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   Por definición de d_d, se cumple que si $x = y$ entonces $d_d(x,y) = 0$ *y* que $d_d(x,y)= 0$ *luego* $d_d(x,y) = 0$ *Sii* $x = y$

3. $\forall x, y \in E: d(x,y) = d_d(y,x)$ (simetría)
   Si $x \neq y$ entonces $d_d(x, y) = 1 \quad = d_d(y, x)$ Por definición
   Si $x = y$ entonces $d_d(x, y) = 0 \quad = d_d(y, x)$

4. $\forall x, y, z \in E: d_d(x,y) \leq d_d(x,z) + d_d(y,z)$ (Desigualdad triangular)
   $d_d(x,y) \leq d_d(x,z) + d_d(y,z)$

   Se analizan los casos:

   - Si $x \neq y \neq z$ entonces $d_d(x,y) \leq d_d(x,z) + d_d(y,z)$
     $$1 \leq 1 + 1$$

- Si $x = y = z$ entonces $d_d\,(x,y) \leq d_d\,(x,z) + d_d\,(y,z)$

  $$0 \leq 0 + 0$$

- Si $x = y \neq z$ entonces $d_d\,(x,y) \leq d_d\,(x,z) + d_d\,(y,z)$

  $$0 \leq 1 + 1$$

  $$0 \leq 2$$

- Si $x \neq y = z$ entonces $d_d\,(x,y) \leq d_d\,(x,z) + d_d\,(y,z)$

  $$1 \leq 1 + 0$$

  $$1 \leq 1$$

Por tanto $d_d\,(x,y) \leq d_d\,(x,z) + d_d\,(y,z)$

Ejemplo, si E = $\{a, b, c, d\}$y $x_0=a$ entonces

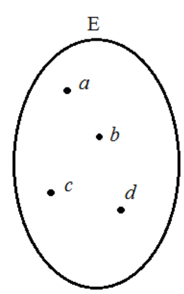
$B_r(a) = \{ x \in E\text{: } d_d(x,a) < r \}$,

si r > 1, $\forall x \in d_d(x,a) = \{1\text{: } si\ x=a \quad \wedge\ 0\ \text{:} si\ x \neq 0\}$

$d_d(X,E) < r$, *entonces*

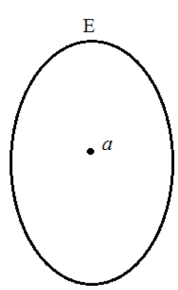
$x \in B_r\,(a)$, entonces

$B_r\,(a) = E$



$d_d(X,E) < 1$ *sii* $x=a$

$B_r\,(a) = \{a\}$



3.2.3.3. La métrica del taxista “D_t Métrica no usual en $\Re^2$”

Consideremos el plano cartesiano de los números reales en $\Re^2$ y la función $d_T(X,Y) = x_2 - x_1 + y_2 - y_1$, $\forall (X,Y) \in \Re^2$. Mediante aplicación de las propiedades del valor absoluto se comprueba que d_T es una métrica. Esta le da a $\Re^2$ una estructura de espacio métrico.

Donde $X = (x_1,y_2)$ y $Y = (x_2,y_2)$

3.2.3.3.1. Demostración de las propiedades.

1. $\forall X,Y \in \Re^2$: $d_t(X,Y) \geq 0$

   Por definición $d_T(X,Y) = x_2 - x_1 + y_2 - y_1 \geq 0$

2. *Para* $X,Y \in \Re^2$: $d_t(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

   $d_T(X,Y) = 0$ entonces $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 0$

   Sii $x_2 - x_1 = 0 \wedge y_2 - y_1 = 0$ Por definición

   Sii $x_2 - x_1 = 0 \wedge y_2 - y_1 = 0$

   Sii $x_2 = x_1 \wedge y_2 = y_1$

Entonces $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

$X = Y$

3. $\forall X,Y \in \Re^2$: $d(X,Y) = d_t(Y,X)$ (simetría)

   $d_t(X,Y) = x_2 - x_1 + y_2 - y_1$

   $= -(x_2 - x_1) + -(y_2 - y_1)$ Propiedad distributiva del producto sobre la suma de R

$= \quad x_1 - x_2 \; + \; y_1 - y_2$

$d_t(Y,X) = \quad x_1 - x_2 \; + \; y_1 - y_2$

Por tanto $\quad d_t(X,Y) = d_t(Y,X)$

4. $\forall$ X, Y, Z $\in \Re^2$: d_t (X,Y) ≤ d_t (X,Z) + d_t (Y,Z) (Desigualdad triangular)
   Donde X = (x_1,y_2) y Y = (x_2,y_2) Z = (x_3, y_3)

$$d_t(X,Y) = x_2 - x_1 \; + \; y_2 - y_1$$

$$d_t(X,Y) = (x_2-x_3)+(x_3 - x_1) \; + \; (y_2-y_3)+(y_3 - y_1) \qquad \text{Por propiedad 3}$$

$$d_t(X,Y) = (x_2-x_3) \; + \; (x_3 - x_1) \; + \; (y_2 - y_3) \; + \; (y_3 - y_1)$$

$$d_t(X,Y) = (x_2-x_3) + (y_2-y_3) \; + \; (x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)$$

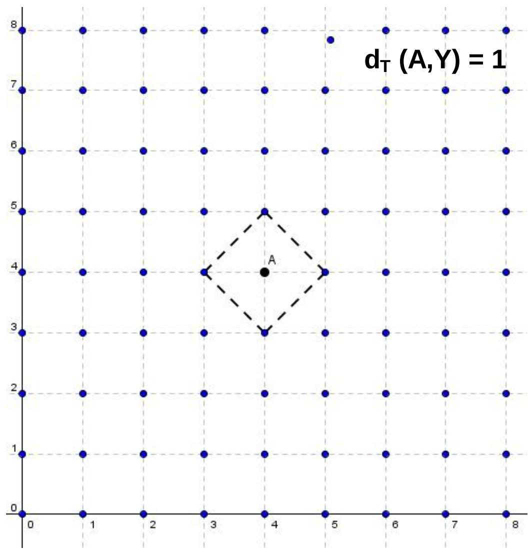
$$d_t(X,Y) \leq d_t(Y,Z) \; + \; d_t(Z,X)$$

3.2.3.3.2. Ejemplos de las bolas abiertas en la métrica D_t .

Ejemplo , si A=(4,4) y r= 1 entonces

$B_1(4,4)= \{(x,y): d_t((4,4) ,(x,y)) < 1\}$

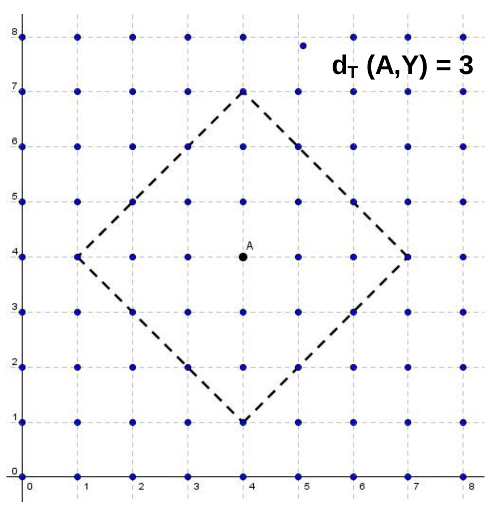
$= \{(x,y): \; x- 4 + \; y - 4 < 1\}$.Resolviendo esta ecuación se obtiene la siguiente bola:



Ejemplo , si A=(4,4) y *r*= 3 entonces

$B_1(4,4)= \{(x,y): d_t((4,4) ,(x,y)) < 3\}$

$= \{(x,y):\ x - 4 + \ y - 4 < 3\}$.Resolviendo la desigualdad se obtiene la siguiente bola:



3.2.3.4. La métrica usual D_2 en $\Re^2$

Consideremos el plano cartesiano y los números Reales en $\Re^2$ y la función $D_2(\ ,\ ) = \sqrt{(\ -\ )\ +(\ -\ )}$, $\forall$ (X,Y) $\in \Re^2$. Mediante aplicación de las propiedades del valor absoluto se comprueba que D_2 es una métrica, esta le da a $\Re^2$ una estructura de espacio métrico.

Donde X = (x_1,y_2), Y = (x_2,y_2) y Z = (x_3, y_3)

$$(\ ,\ ) = \sqrt{(\ -\ )\ +(\ -\ )}$$

3.2.3.4.1. Demostración de las propiedades.

1. $\forall x, y \in E$: $_2$ (X,Y) ≥ 0

   $_2(\ ,\ ) = \sqrt{(\ -\ )\ +(\ -\ )} \geq \quad 0$

   Como $a^2 \geq 0$ para todo $a \in \Re$

   Entonces $(\ -\ ) \geq 0 \quad \wedge \quad (\ -\ ) \geq 0$

   Por tanto $_2(\ ,\ ) = \sqrt{(\ -\ )\ +(\ -\ )} \geq 0$

2. Para x, y $\in E$: $_2$ (X,Y) = 0 $\Leftrightarrow$ X = Y

   $_2(\ ,\ ) = \sqrt{(\ -\ )\ +(\ -\ )}$ Sii X = Y

   Sii $(\ -\ )\ +(\ -\ ) = 0$

   Sii $(\ -\ ) = 0 \quad \wedge \quad (\ -\ ) = 0$

Sii = ∧ =

Entonces $(x_1,y_2) = (x_2,y_2)$

O sea X = Y

3. $\forall x, y \in E$: $d(X,Y) = d_t(Y,X)$ (simetría)

$_2(\; , \;) = \overline{(\; - \;) + (\; - \;)} =$

$_2(\; , \;) = \overline{(\; - \;) + (\; - \;)}$

$_2(\; , \;) = \overline{(\; - \;) + (\; - \;)}$

$_2(\; , \;) = \overline{(-(\; - \;)) + (-(\; - \;))}$ Como $a^2 \geq 0$ para todo $a \in \Re$

$_2(\; , \;) = \overline{(\; - \;) + (\; - \;)}$

Entonces

$_2(\; , \;) = {}_2(\; , \;)$

5. $\forall$ (X, Y, Z) $\in E$: $_2$ (X,Y) ≤ $_2$ (X,Z) + $_2$(Y,Z) (Desigualdad triangular)

Para la demostración se deben tener en cuenta las siguientes propiedades ya demostradas

- $/x+y/ \leq /x/ + /y/$
- $. + . \leq \overline{(\; + \;)(\; + \;)}$

Demostración: $\leq (\; - \;)$

$\leq (\;) - (\;)(\;) + (\;)$

$(\;)(\;) \leq (\;) + (\;)$

$+ (\;)(\;) + \leq + (\;) + (\;) +$

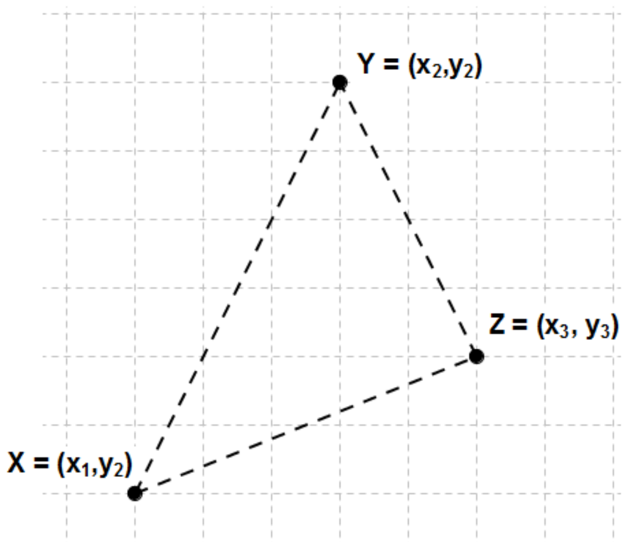
$(\; + \;) \leq (\; + \;)(\; + \;)$

$$+ \quad \leq \quad \overline{(\quad + \quad)(\quad + \quad)}$$

Las anteriores demostraciones se utilizaran para demostrar la siguiente.

Donde X = (x_1,y_2), Y = (x_2,y_2) y Z = (x_3, y_3)

$$_2(\ , \ ) \leq {}_2(\ , \ ) + {}_2(\ , \ )$$



Para demostrar:

$$\overline{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)} \leq \overline{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)} +$$

$$\overline{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)}$$

Partiremos de la siguiente expresión:

$$(\quad - \quad) + (\quad - \quad)$$

$$= [(\quad - \quad) + (\quad - \quad)] + [(\quad - \quad) + (\quad - \quad)]$$

$$= [(\quad - \quad) + (\quad - \quad)(\quad - \quad) + (\quad - \quad)]$$

$$+ [(\quad - \quad) + (\quad - \quad)(\quad - \quad) + (\quad - \quad)]$$

$$= (\quad - \quad) + (\quad - \quad) + (\quad - \quad) + (\quad - \quad)$$

$$+ [(\quad - \quad)(\quad - \quad) + (\quad - \quad)(\quad - \quad)]$$

Como $\; . \; + \; . \; \leq \overline{(\quad + \quad)(\quad + \quad)}$ entonces:

$$(\quad - \quad)(\quad - \quad) + (\quad - \quad)(\quad - \quad)$$

$$\leq \overline{[(\quad - \quad) + (\quad - \quad)].[(\quad - \quad) + (\quad - \quad)]}$$

$$[(\quad - \quad)(\quad - \quad) + (\quad - \quad)(\quad - \quad)]$$

$$\leq \overline{[(\quad - \quad) + (\quad - \quad)].[(\quad - \quad) + (\quad - \quad)]}$$

$$(\quad - \quad) + (\quad - \quad)$$

$$= (\quad - \quad) + (\quad - \quad) + (\quad - \quad) + (\quad - \quad)$$

$$+ (\quad - \quad)(\quad - \quad) + (\quad - \quad)(\quad - \quad)$$

$$\leq$$

$$(\quad - \quad) + (\quad - \quad) + (\quad - \quad) + (\quad - \quad) +$$

$$\overline{[(\quad - \quad) + (\quad - \quad)].[(\quad - \quad) + (\quad - \quad)]}$$

$$= \overline{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)} + \overline{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)}$$

$$(\quad - \quad) + (\quad - \quad) \leq \overline{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)} + \overline{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)}$$

$$(\quad - \quad) + (\quad - \quad) = (\quad - \quad + \quad - \quad) + (\quad - \quad + \quad - \quad)$$

Entonces

$$(\quad - \quad) + (\quad - \quad) \leq \sqrt{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)} + \sqrt{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)}$$

Entonces

$$\sqrt{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)} \leq \sqrt{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)} + \sqrt{(\quad - \quad) + (\quad - \quad)}$$

3.2.3.4.2. Ejemplos de bolas abiertas en la métrica usual en $\Re^2$

A = (x_1,y_2), Y = (x_2,y_2) y Z = (x_3, y_3)

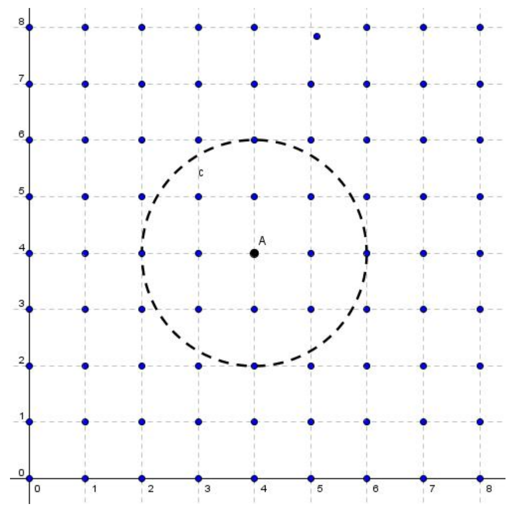
Ejemplo 1 de bolas abiertas con la métrica en $\Re^2$

si A=(4,4) y r= 2 entonces

$B_2(4,4)= \{(x,y): d_2((4,4),(x,y)) < 2\}$

$= \{(x,y): (\quad - \quad) + (\quad - \quad) < 4 \}$. Resolviendo la desigualdad se obtiene la siguiente bola:

$$(\ , \ ) = \sqrt{(\ _2 - \ _1)^2 + (\ _2 - \ _1)^2} = 2$$

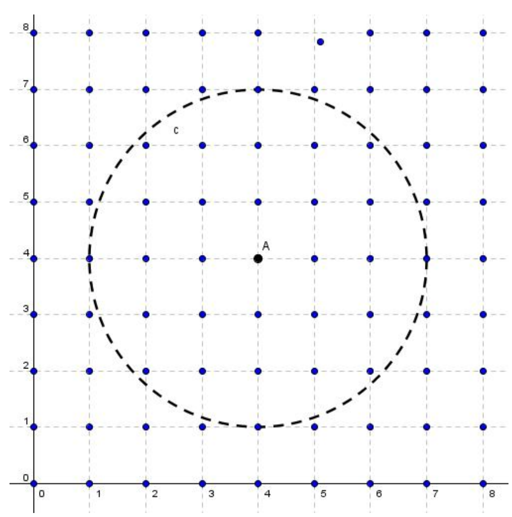


Ejemplo 2: si A=(4,4) y *r*= 4 entonces

$B_2(4,4)$= {(x,y): $d_2((4,4),(x,y)) < 4$}

= *{(x,y):* $(\ - \ ) + (\ - \ ) < 16$*}*. Resolviendo la desigualdad se obtiene la siguiente bola:

$$(\ , \ ) = \sqrt{(\ _2 - \ _1)^2 + (\ _2 - \ _1)^2} = 3$$



3.2.4. Definiciones de conceptos matemáticos en el lenguaje usual

3.2.4.1. Entorno

- Conjunto de circunstancias, físicas y morales, que rodean a una persona o cosa: el entorno de amor y confianza en que se educó propició que fuera una persona abierta y tolerante, ambiente.

- Ambiente que rodea a una persona o cosa e influyen en su desarrollo el entorno determina el carácter.

3.2.4.2. Zona

Extensión de terreno cuyos límites están determinados por razones administrativas, políticas, etc.:

3.2.4.3. Cercanías de un sitio.

Vínculo que liga entre sí a los habitantes de un término municipal, y en virtud del cual participan de los derechos y obligaciones que tienen efectividad dentro del municipio. http://es.thefreedictionary.com/vecindad.

8. METODOLOGIA

8.1. CONTEXTUALIZACION

Las preguntas previas al diseño de las actividades así como la prueba piloto se aplicaron en el Colegio Roberto Velandia de Mosquera y en el Colegio Carlo Federici de Fontibón, a dos grupos de grado once de cada uno de los colegios. La población de la mayoría de estudiantes es de estrato 2 y 3.

Se realizó un tipo de investigación cualitativa solo para el diseño de las actividades, no se realizó tabulación de información recolectada, porque nuestro trabajo se centró en la elaboración de la secuencia, por lo tanto solo se aplicaron pruebas pilotos de ajustes al trabajo.

Las herramientas utilizadas para la recolección de información fueron: dos pruebas, una exploratoria de conocimientos previos que nos permitieron tener las bases para elaborar la secuencia y la otra aplicación de la secuencia para afinamiento de las preguntas y la pertinencia de las situaciones que conforman la actividad.

El argumento teorico como se planteó inicialmente es de fondo constructivista para lo cual hemos tenido en cuenta a los siguientes autores, Duval, Vergnaud y Vygotski, de los cuales iremos hablando como se reflejan sus planteaminetos a través de la explicacion de las actividades.

En la primera parte del taller queremos hacer evidente como los estudiantes pueden partir de un conocimiento previo del concepto y que se encuentra en su lenguaje natural para llevarlo a un conocimiento matematico o cientiífico

8.2. ANALISIS DOCUMENTAL

8.2.1. Validación de la secuencia

La validación de la secuencia de actividades se hizo por medio de los dos instrumentos: prueba de preguntas previas y prueba piloto aplicada a estudiantes del Colegio y Estudiantes de la Especialización de Matemáticas, además se realizaron varias socializaciones con los mismos estudiantes de la maestría y de la especialización quienes nos dieron aportes referentes a la redacción y a la pertinencia de las preguntas, así mismo como la asesoría del Docente Tutor del trabajo de grado y la del Profesor del Seminario de Didáctica.

Por otra parte tuvimos en cuenta otros aspectos para la elaboración de la secuencia como: el marco teórico, marco didáctico y el marco matemático.

8.2.2. Descripción de la validación

Lo primero que se realizó fue la aplicación de una encuesta de preguntas previas sobre la noción de entorno y a partir de allí comenzamos con la recolección de ideas, material y revisión de textos que nos ayudaran con el objetivo de diseñar preguntas y actividades iníciales; las cuales fueron expuestas inicialmente a los Estudiantes del Seminario y al Tutor de Tesis, de la misma manera las exposiciones realizadas ante compañeros de la especialización y profesores nos sirvieron para mejorar la redacción de las preguntas de la prueba piloto, antes de ser aplicadas a los estudiantes de los colegios para confirmar, corregir, o invalidar las preguntas realizadas con miras al diseño final.

Un ejemplo de las sugerencias de los docentes del seminario de didáctica especificamente un comentario de la profesora Alicia Guzman sobre las condiciones de las situaciónes que se presentaban en las actividades fue *“Que en lugar de hablar de entorno se hablara de el lugar geométrico, o lugares geometricos para no alejarse mucho de la concepción matematica”.* Aunque la sugerencia fue escuchada y analizada, no se implementó en el trabajo ya que se tuvo más en cuenta los referentes teoricos que dan importancia al tipo de situaciones donde influyen los aspectos sociales y culturales es decir partiendo del lenguaje natural de los estudiantes.

De acuerdo a las sugerencias de los estudiantes de la especialización algunas preguntas de la actividad no eran muy claras, por tanto tuvimos que hacer algunos cambios en la redacción de las mismas, como también replantear algunas situaciones, este proceso se muestra más adelante en el análisis de la prueba piloto.

Posteriormente cuando la prueba piloto se aplica a los estudiantes de los dos colegios, se comparan las mismas para determinar si cumplía con el objetivo inicial para el que fue diseñada y hacer los ajustes respectivos.

8.2.3. Revisión de textos como apoyo para el diseño de actividades

Al hacer revisión de textos guía como apoyo para el desarrollo de los contenidos en grado once (como por ejemplo: Cálculo de Santillana, Alfa 11 de Edit. Norma, Matemáticas 11, de Edit. Voluntad.) La percepción general es que no hay tratamiento didáctico y profundo acerca del concepto de entorno, sino más bien que se aborda de manera puramente formal direccionado al tema de límites.

También al revisar textos universitarios (ej. Cálculos de: Thomas, Stewart, Larson y Hostetler.) se evidencia la misma situación.

De otra parte tanto en la revisión de los trabajos de grado universitarios como en la de textos especializados: libros, artículos de revistas, en internet no encontramos trabajos sobre didáctica del entorno.

8.3. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS PREVIAS AL DISEÑO.

Antes del diseño de las actividades se realizo una indagación a 4 grupos, cada grupo con 4 integrantes, de los colegios Roberto Velandia de Mosquera y Carlo Federici de Fontibón para conocer los referentes sobre la idea de entorno.

- ¿Qué entiende por entorno?

¿Qué entiende por entorno?
Es Todo lo que esta a nuestro alrededor.

¿Qué entiende por entorno?
El espacio donde convivimos

¿Qué entiende por entorno?
Todo aquello que nos rodea.

Se puede ver que tienen la idea de entorno como algo que se encuentra a su alrededor y como un ambiente de convivencia, sin embargo implícitamente el hecho de decir que esta alrededor se puede tomar como un circulo, porque al preguntarles; ¿qué significaba alrededor? ellos dijeron (comunicación personal, 3 de mayo 2011) “*lo que forma un circulo en redondo*”

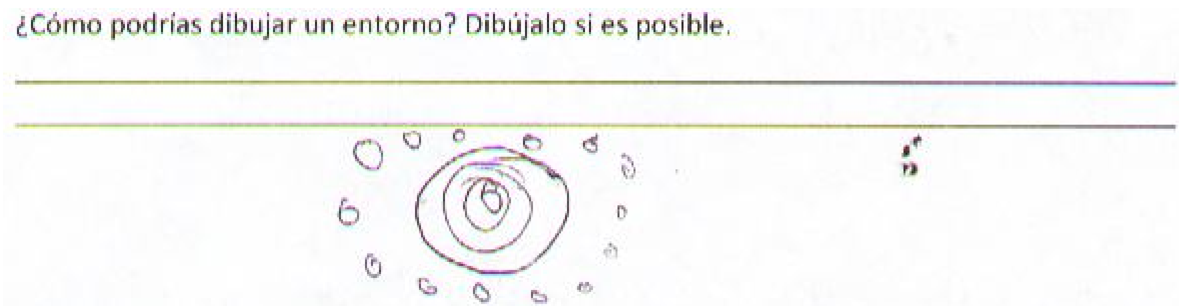
- ¿Qué es un entorno desde el punto de vista matemático?

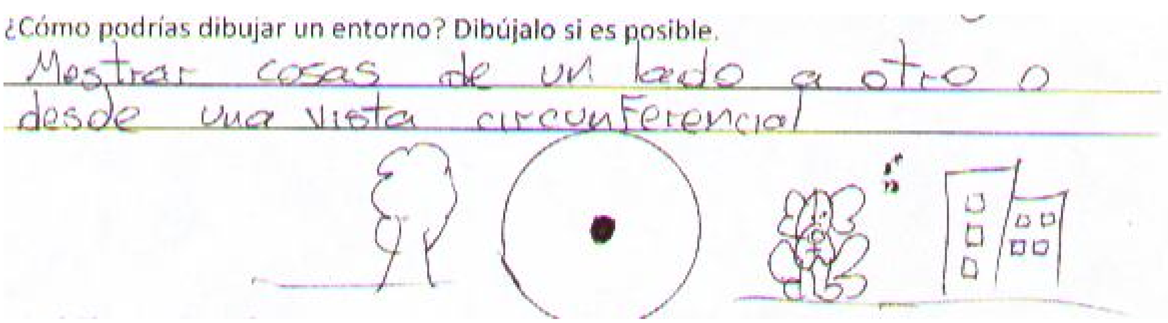
¿Qué es un entrono desde el punto de vista matemático? es una circunferencia de las operaciones, construcciones, uniones numeros, desenvolvimiento, pensamiento, logica

¿Qué es un entrono desde el punto de vista matemático?
un entorno Matematico Es aquel con el cual un numero se aproxima a otro ya sea menor o mayor

En la primera repuesta se observa que definen el entorno matemático como todas las actividades que se realizan en el área, es decirse toma como un “contexto”. Mientras el otro grupo lo tomo como los números que están próximos a otro.

- ¿Cómo podrías dibujar un entorno? Dibújalo si es posible.





En este punto se observa que relacionan el ambiente con la circunferencia, además manejan el entorno como lo que se encuentra cerca de un punto.

- ¿Qué términos y definiciones necesitas ó están involucradas en la palabra entorno?

¿Qué términos y definiciones necesitas ó están involucradas en la palabra entorno?
Alrededor, todo, lugares, personas, Animales, cosas circunferencia

¿Qué términos y definiciones necesitas ó están involucradas en la palabra entorno?
Limite, alepaños y lugares o puntos cercanos o lejanos.

¿Qué términos y definiciones necesitas ó están involucradas en la palabra entorno?
distancia, longitud del radio

En este caso solo uno de los grupos tiene una idea clara de que el entorno está relacionado con una distancia y un radio.

- ¿De qué depende que podamos decir que algo está cerca o está lejos?

¿De qué depende que podamos decir que algo está cerca o está lejos?
Dependiendo en la Distancia que este si uno mira mas este esta lejos puede ser tambien correcta, Incorrecta.

¿De qué depende que podamos decir que algo está cerca o está lejos?
depende de nuestros sentidos y desde el punto de vista que le podamos dar.

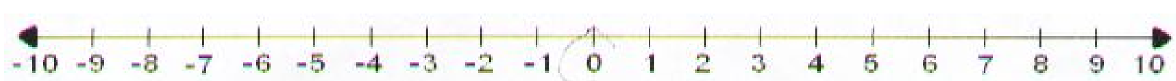
¿De qué depende que podamos decir que algo está cerca o está lejos?
longitud, distancia en la cuál estan los números o términos

En este punto se puede observar que el término cercano los estudiantes no lo tienen claro y tampoco de que depende que se esté cerca o no.

- ¿Cómo sería un entorno en la recta numérica, se puede dibujar?

¿Cómo sería un entorno en la recta numérica? Se puede o No
el entorno sería los numeros que rodean a un solo numero el cual sería cero.

¿Cómo sería un entorno en la recta numérica? Se puede o No
Si se puede el entorno sería la distancia de cada uno de los numeros



No se tiene la idea de entorno sobre la recta numérica, aunque uno de los grupos dibujo algo parecido a un entorno sobre la recta numérica pero sin mucha claridad.

- Como sería el entorno a un punto, dibújalo.

Aquí podemos observar que el estudiante efectivamente relaciona el entorno con un círculo alrededor de un punto.

Teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes sobre entorno, las representaciones que hacen del mismo, el uso de la lengua natural y la predilección por la gráfica del círculo, tomamos estos elementos como base para la elaboración de las demás actividades de la secuencia.

En esta pregunta si quedo claro que el entorno lo relacionan con la idea de circunferencia y círculo.

- ¿Qué se necesita para que un punto o algo pertenezca a un entorno?

Que debe estar dentro del radio de lo que se esta enfocando segun requiera

- Que este al lado o al pie
- Que el limite este como una figura cuadrada
-

Se evidencia que se necesita el concepto de cercanía, pueden también identificar que para que algo pertenezca al entorno debe estar dentro de una distancia que define el entorno.

8.3.1. Conclusión sobre las preguntas previas

Analizando las respuestas que se tuvieron como punto de partida para la elaboración de la secuencia didáctica en las que se pudo reconocer algunas de las ideas previas sobre el concepto de entorno en su lenguaje natural y una forma de representación gráfica asimilada con la idea de circunferencia, además se identifica que los estudiantes tienen ideas preliminares sobre algunos conceptos como radio, cercanía, distancia, longitud, entre otros.

Con estas ideas nos propusimos elaborar la secuencia, tratando de aprovechar la idea que ya se tiene de entorno y de una de sus representaciones gráficas para al final llegar a un conocimiento científico.

8.4. EXPLICACION DE LOS REFERENTES TEORICOS EN LAS ACTIVIDADES

8.4.1. Desde la teoría de Ausubel.

Desde la perspectiva de esta teoría para la elaboración de las actividades se debe tener en cuenta que el estudiante ya tiene alguna idea de entorno, además de unos conocimientos previos que son la base para el diseño, como lo son:

- El concepto de entorno en su lenguaje natural.
- El concepto de cercano en su lenguaje natural
- El manejo de números reales y sus representaciones.
- Intervalos en la recta numérica.
- Distancia y valor absoluto.
- Longitud.
- Plano cartesiano.
- Funciones y gráfica de funciones.
- Circunferencia y Radio de una circunferencia.
- Representación gráfica, entre otros.

Estos conocimientos previos han sido producto de un proceso de reelaboración constante a partir de la interacción que establecen con el medio que los rodea, de constantes rupturas y acomodación de su lenguaje natural en el camino de aprehensión de los conceptos y maduración de sus esquemas mentales, como se evidencia en las siguientes preguntas:

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera Cundinamarca Colombia, y como referencia la esfera terrestre.

Nombre cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

- Tomando como su lugar de vivienda Mosquera Cundinamarca Colombia, y como referencia la cuadra donde vive

Nombre cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

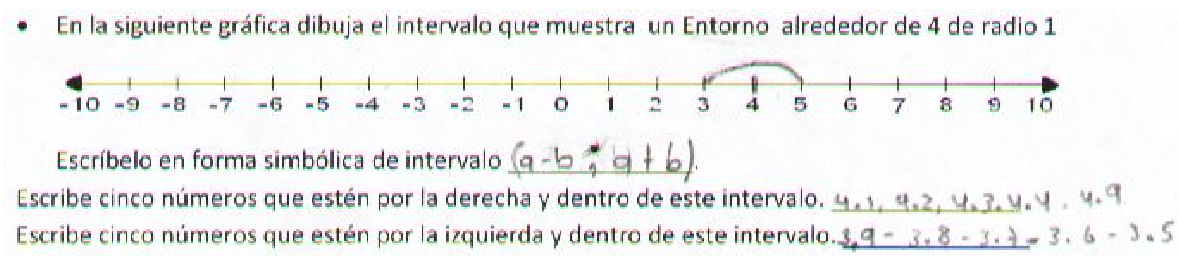
Por medio de estas preguntas se problematiza el concepto del entorno en su lenguaje usual, para posteriormente llegar a su definición formal en matemáticas.

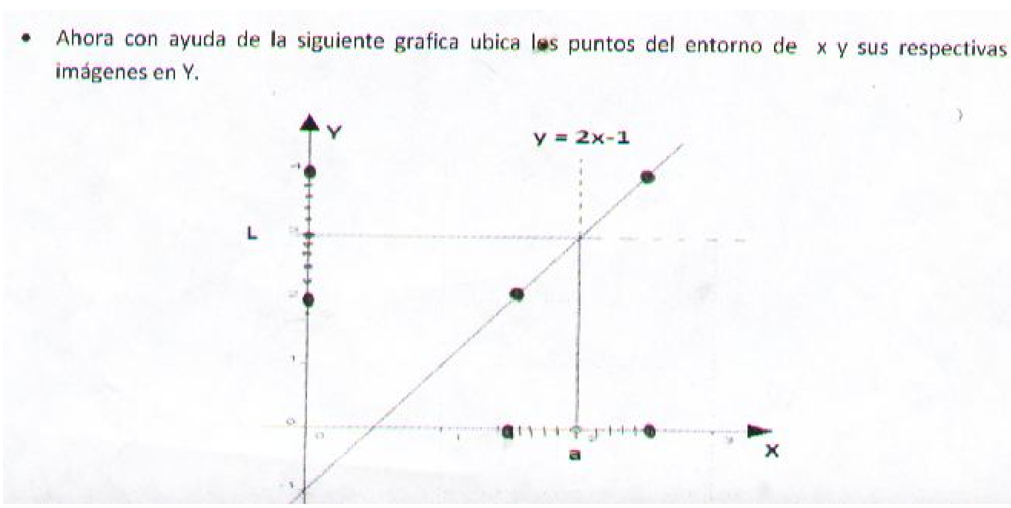
Se pretende entonces relacionar de manera sustancial y no arbitraria la idea de entorno y sus ideas relacionadas, con la estructura cognoscitiva del estudiante, de tal manera que el material ha sido validado en diferentes contextos como los estudiantes de la especialización, los 4 grupos de estudiantes de los colegios así como las asesorías de los docentes del seminario de didáctica y el profesor tutor del trabajo, quienes han hecho las respectivas correcciones y recomendaciones.

Cuando se le hacen estos tipos de preguntas en forma secuencial el estudiante va explorando las diferentes posibilidades que se pueden presentar antes de definir el concepto, en este tipo de situaciones el estudiante puede analizar la definición del concepto y ver que la misma depende de otras es el concepto de cercanía y el concepto de distancia, conceptos que intuitivamente manejan.

La secuencia didáctica se elaboró de tal forma que el estudiante a través de los razonamientos que utiliza para responder las preguntas, pueda reconocer diferentes tipos de entornos y llegar a reconocer el entorno sobre la recta real.

Como vemos en el siguiente ejemplo los estudiantes después de un trabajo significativo, se le facilita el dominio del concepto y pueden pasar de la representación en el espacio de la recta numérica a la representación de los entornos de una función en el plano cartesiano.



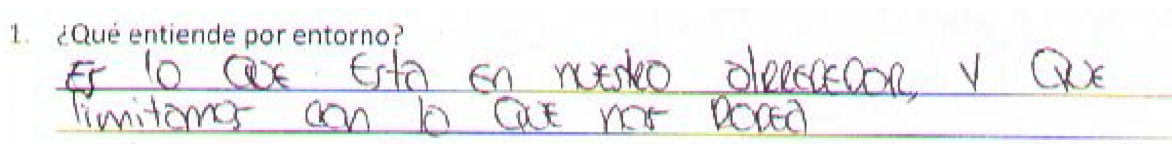


8.4.2. Desde la teoría de la interacción social de Vygotski

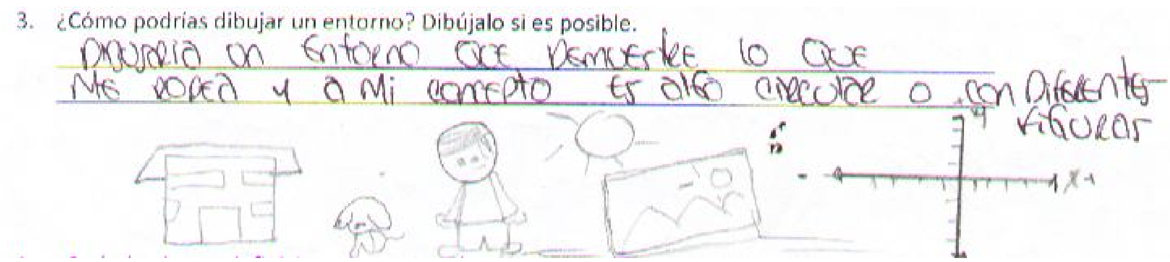
Tal como afirma Vygotski en su teoría: *"el proceso de acceso a las formas superiores del comportamiento no es de ningún modo lineal o mecánico, se caracteriza por el dominio de los medios externos del desarrollo cultural y del pensamiento, como el idioma, el lenguaje, el dibujo, el cálculo, etc"* (Vygotski,1979, p. 31) , es así como partiendo del dominio natural de los estudiantes se pretende llegar a un dominio científico del concepto.

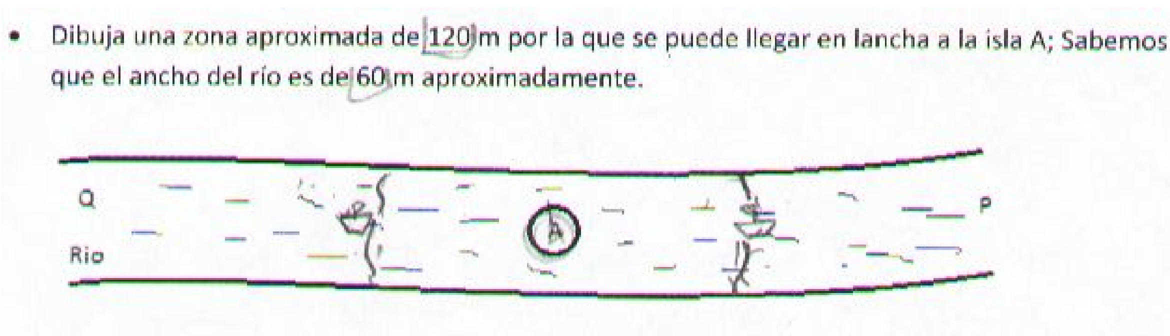
Se evidencia la influencia del medio socio-cultural (tal como afirma Vygotski) de los estudiantes en la definición de conceptos y respuestas a las preguntas realizadas en la secuencia, ejemplo en las respuestas a la definición de entorno como un ambiente y como lo que se encuentra a su alrededor. Como dice Vygotski: "acceder a la construcción del conocimiento en sus más altos niveles de abstracción, es pasar de comportamientos naturales a comportamientos superiores."(Vygotski, 1979).

Efectivamente, en respuesta a las preguntas previas al diseño de las actividades, los estudiantes muestran un concepto de entorno influenciado por el medio social. Cuando se les pregunta por la idea de entorno:


1. ¿Qué entiende por entorno?
Es lo Que Esta en nuestro alrrededor, y Que limitamos con lo Que nos rodea

Aunque no tienen la definición formal de entorno matemático, en la respuesta: "es lo que está en nuestro alrededor" intuitivamente asemeja el concepto de entorno a un círculo, utilizando en su definición el concepto de distancia y radio como se observa en la siguiente pregunta.





Se plantean ejercicios como el anterior, donde el estudiante pueda analizar y discutir con los compañeros de grupo como llegaron a las respuestas partiendo de sus conocimientos previos.

8.4.3. Desde la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (Situaciones)

De La Teoría de Los Campos Conceptuales de Vergnaud, destacamos la situación didáctica como la que da sentido a los conceptos, en este caso proponemos al estudiante una situación real sobre un mapa de los barrios que se encuentran cerca a su lugar de vivienda, con el objetivo de identificar el concepto de “zona” que está involucrado en la construcción del concepto de entorno.

En la siguiente actividad proponemos una situación donde se puede visualizar la relación del concepto con la vida cotidiana, como lo es la cobertura de las antenas de comunicación celular en una zona urbana para realizar las llamadas desde los diferentes puntos de la ciudad.

El mapa es tomado de Google Earth que es actualizado cada doce meses aproximadamente.

En la siguiente actividad se pretende que el estudiante relacione el concepto de entorno con la definición de zona, que a su vez está limitada por una condición dada, en este caso por la zona que cubre la señal de una antena de telefonía celular.

Retomamos algunas de las ideas de Vergnaud, claves para el desarrollo de la secuencia de actividades, como son:

La propuesta de varias situaciones se hace con el fin de tener un conocimiento y dominio más amplio del concepto, como lo dice la teoria “una sola situación no agota el concepto” (Vergnaud)

Una situación es una faceta del concepto, que muestra ciertos aspectos del concepto pero no todos, por que un concepto no se instala con una sola situación se necesitan de diferentes situaciones para el desarrollo y comprensión del concepto" (Vergnaud)

Este es un ejemplo donde se pueden reconocer los fundamentos de la teoria de Vergnaud; la tripleta (S;I;R), (Situaciones, Invariantes, Representaciones)

SITUACION 1 (Antenas parabólicas)

Debido a los niveles de radiación de las antenas y a las bajas potencias de trasmisión de los móviles y de las estaciones base, es necesario distribuir en las grandes ciudades un grupo de estaciones base con el fin de garantizar niveles óptimos de señal a los usuarios. La cobertura de una estación base urbana típica está en un radio entre 400 m y 500 m aproximadamente (tomado del documento:(Tomado de Telefonía Celular Móvil. Funcionamiento y relación de la radiación con la salud humana. Recuperado el 30 de junio de 2011en: http://www.asocel.org.co/conferencias/conferencia_3.pdf)

I

INVARIANTES (situación1 : antena parabólica)

Aquí podríamos reconcocer los invariantes operatorios los cuales son:

- El concepto de distancia y relacionado con valor absoluto de un numero siempre es positlivo.
- El concepto de radio; el cual permite realizar la gráfica de una circunferencia.
- El concepto de punto.

REPRESENTACIONES (situación1 : antena parabólica)

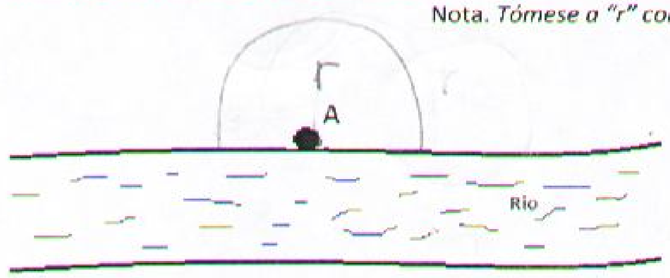
- Representaciónes mentales
- Representación verbal.
- Representación gráfica.

A continuación se presentan otros tipos de situaciones donde los entornos en sus representaciones gráficas pueden ser diferentes, además se realiza un cambio de representación del verbal y escrito al tipo de representación gráfico.

La situación está condicionada a que no se puede caminar por el rio y tampoco hacer algún condicionamiento diferente al del problema.

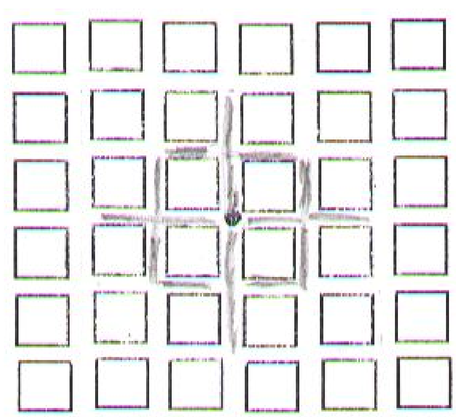
- Su pongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuje un entorno o "Zona" de radio "r" aproximado de 50 metros por el cual se puede llegar caminando al punto A.

Nota. *Tómese a "r" como el radio de una circunferencia.*



En el siguiente punto también se pudo observar como con una situación condicionada permite que su representación gráfica del entorno cambie.

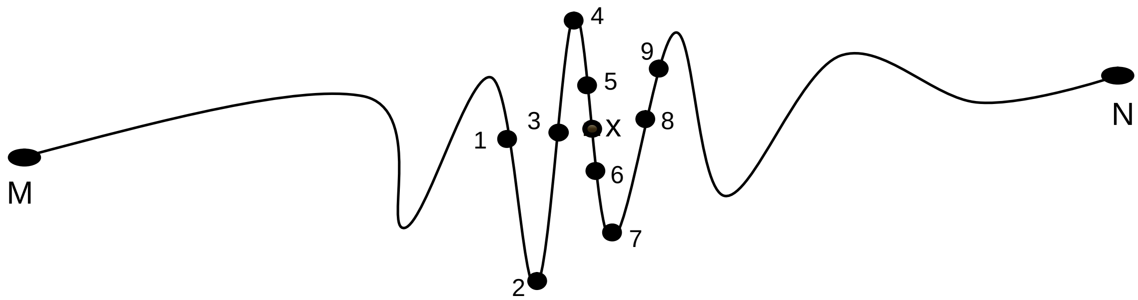
- Supongamos que el punto A es un taxista y recibe una llamada para una carrera, pero solo tiene combustible de reserva para 200 m, Dibuja la zona hasta dónde podría llegar el taxista con dicha reserva. “La longitud de cada cuadra es de 100 m”



Otro tipo de situación condicionada es la siguiente: se representa el río por una línea donde se le plantea unas preguntas.

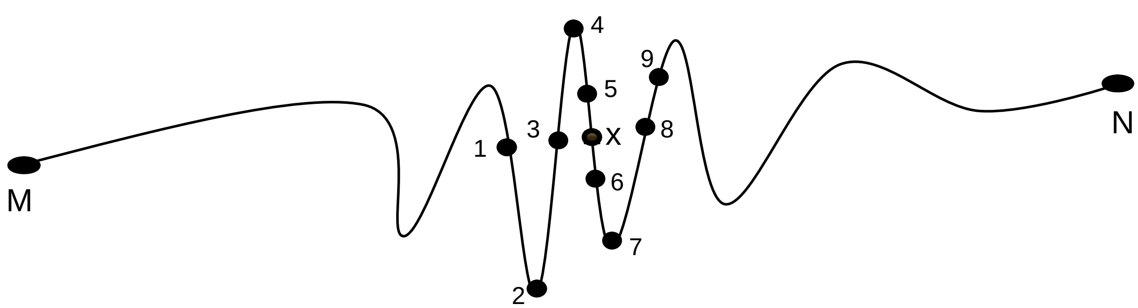
En esta gráfica de un río, al estudiante no se le dice que es un un río, sino que es una gráfica no especificada sobre el plano; es decir que no se ha condicionado el problema. Con esto al preguntarle sobre los puntos cercanos al punto “x”, se espera que como no se ha llevado a alguna situación en particular y se ha venido trabajando sobre el plano cartesiano el estudiante proponga los puntos cercanos al punto x, como se puede observar en la siguiente actividad:

- Según la figura escribe los puntos que están cerca o el entorno de x



En la misma gráfica pero condicionando el problema en particular a un rio es decir que la gráfica o la línea representa al rio, y que para llegar al punto "x" solo es posible trasladarse sobre él "rio" por medio de una lancha o bote, se le pregunta nuevamente por los puntos más cercanos y el entorno sobre el mismo; como se observa a continuación.

- La línea que se observa en la figura representa un río que va desde M hasta N teniendo en cuenta que una lancha se desplaza por este medio. ¿Cuáles puntos están cerca de x?



Lo que se pudo observar cómo se muestra en el análisis de la aplicación de la prueba piloto es que efectivamente una situación condicionada puede cambiar los resultados obtenidos y esto hace que reflexione el estudiante y que haya discusión en el grupo. Es necesario aclarar que los resultados dados en estas preguntas fueron los esperados en cuanto a llegar a definir el concepto de entorno y los relacionados con el.

8.4.4. Desde la teoria de las representaciones (Duval)

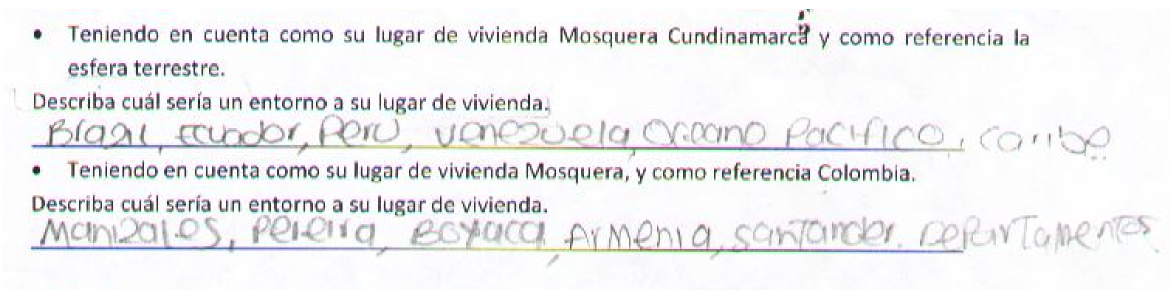
Desde la teoría de los campos de representación se hicierondiferentes tipos de representaciones del concepto, es por eso que se realizan diversas preguntas orientadas a tal fin.

También queremos hacer evidente los ejercicios que un tipo de representación hace visible algunos aspectos que no se hacen visibles en otro, como es el caso del tipo de representación grafico donde se pueden encontrar diferentes formas de entorno representados por diferentes figuras, que no lo puede hacer el tipo de representación simbólico.

Si bien es cierto que se tiene el concepto en el tipo de representación verbal y uno gráfico, estos no son suficientes para agotar el objeto matemático, ese es la pretensión de las actividades dar a conocer más posibilidades de representación y de tipos de entornos que resultan en diferentes situaciones, hasta que llegar a conocer el que se realiza sobre la recta real.

Según Duval (1999, p.28) “no hay noesis sin semiósis” es precisamente lo que se quiere con las actividades, trabajar varias representaciones del concepto para que pueda ampliar su noción del mismo en su representación mental.

Estas actividades ayudan a tender el puente del lenguaje natural y el lenguaje matemático, comenzando por las representaciones que se materializan en las actividades.



- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera Cundinamarca y como referencia la esfera terrestre.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Brasil, Ecuador, Peru, venezuela, Oceano Pacifico, caribe

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Colombia.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Manizales, Pereira, Boyaca, Armenia, santander. Departamentos

Cuando el estudiante contesta a la pregunta ¿cuál seria un entorno a su lugar de vivienda? él asigna implicitamente una distancia o un radio que foma un círculo alrededor de él, para nombrar los puntos que puden estar en dicho entorno. Es decir que el estudiante lo que hace desde su primer tipo de representación con su “lenguaje natural” y utilizando sus conocimientos previos es una representación de tipo escrito cuando nombra los puntos, que en este caso dependiendo del marco de referencia pueden estar más cerca o más lejos.

En este ejemplo podemos ver como utiliza su lenguaje usual y sus conocimentos previos, cuando responde al significado estar cerca de y que condiciona a la cercanía:

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

- Teniendo su habitación como referencia. ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana, cuál podría ser esta distancia?

3 METROS

- Si observas tu pocillo de café sobre la mesa del comedor que ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana a tu pocillo? ¿Cuál podría ser esta distancia?

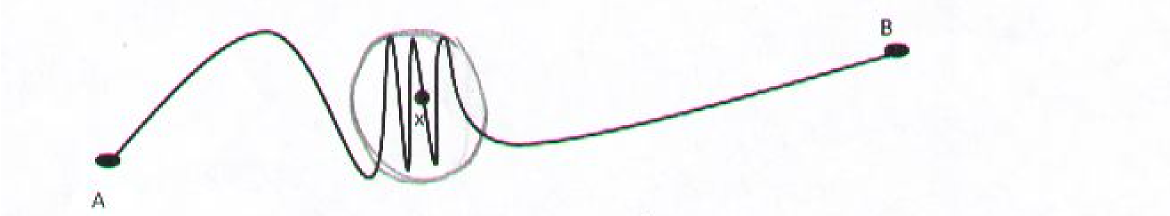
50 CENTIMETROS

- Si haces un punto en tu cuaderno con la sola huella del lápiz
¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana? ¿Cuál podría ser esta distancia?

MILIMETROS

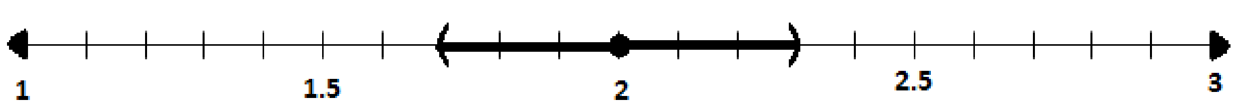
En el siguiente ejemplo se evidencia un cambio de representación del lenguaje verbal y natural al gráfico.

- En la siguiente grafica, la línea representa una carretera que une las ciudades A y B. Dibuja un entorno en el punto x.



En este otro ejercicio se observa un cambio de representación del sistema de representación gráfico a dos tipos de representación simbólica y además el tratamiento dentro del sistema de representación simbólica.

- La siguiente gráfica representa un entorno alrededor de 2



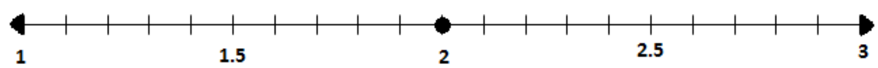
¿Cuánto vale el Épsilon “ε”? ________________

Escríbelo en forma ($a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$) _________________

Y en la forma $B_{\varepsilon}a$ _______________

En este otro caso se observa el cambio del tipo de representación del simbólico al tipo de representación gráfico

- En la siguiente recta dibuja el entorno (2-0.1, 2 + 0.1)

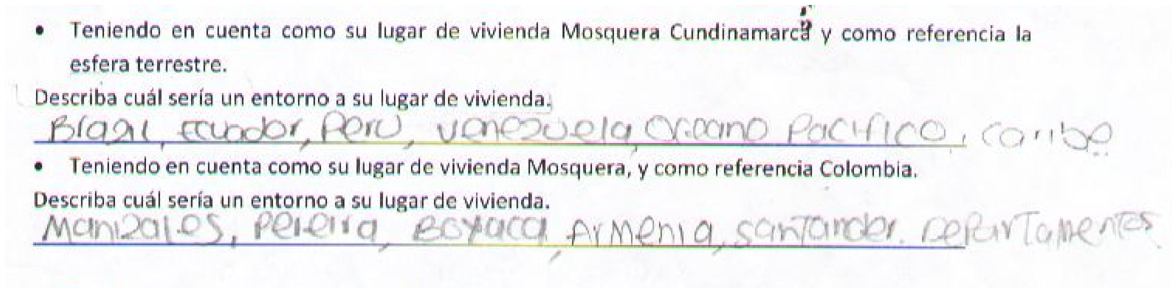


Escríbelo de la forma simbólica $B_{\varepsilon}a$ ________________

8.5. ANALISIS DE LA PRUEBA PILOTO

En el trascurso de la elaboracion de la secuencia se fueron aplicando actividades a los Compañeros de Especialización y revisión con el Tutor, posteriormente se aplicaban las preguntas para ver su pertinencia a dos grupos de 4 estudiantes del Colegio Roberto Velandia de Mosquera y el Colegio Carlo Federici, donde se evidencio que algunas preguntas no estaban bien formuladas por lo que se replantearon y se aplicaban nuevamente.

Lo que se observa en la primera actividad es que los estudiantes ya tienen una idea del concepto de entorno y que ademas esta relacionado con el concepto de distancia y radio, como se puede ver implicitamente en las respuestas a las preguntas que se realizan.



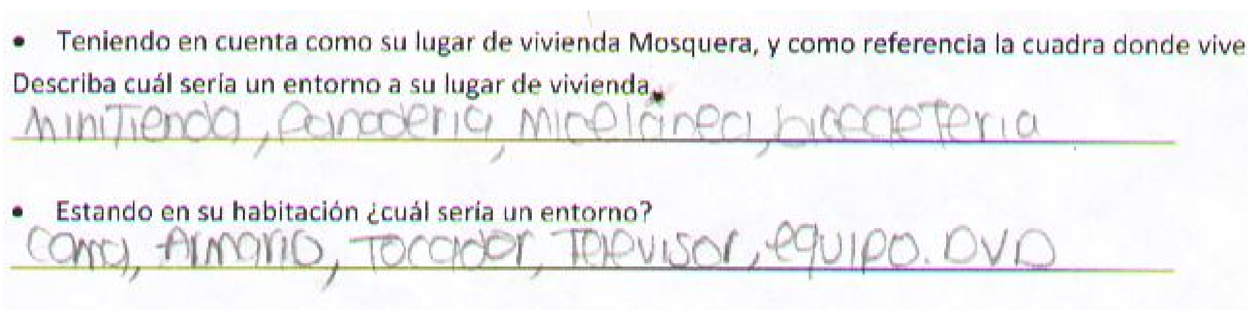
- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera Cundinamarca y como referencia la esfera terrestre.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Brasil, ecuador, Peru, venezuela oceano pacifico, caribe

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Colombia.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Manizales, Pereira, Boyaca, Armenia, santander, departamentos

Cuando el estudiante contesta a la pregunta cuál seria un entorno a su lugar de vivienda, él asigna una distancia para nombrar los puntos que puden estar en dicho entorno y lo asemaja a un círculo, Aqui el estudiante hace una representación de tipo escrito y cuando se produce la discusión entre los estudiantes del grupo se hace una representación de verbal, basado en el lenguaje natural.



- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia la cuadra donde vive

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
minitienda, panaderia, micelanea, bicicleteria

- Estando en su habitación ¿cuál sería un entorno?

cama, Armario, tocador, Televisor, equipo. DVD

Lo que se buscaba en la siguiente actividad es que el estudiante comprendiera que un entorno esta dado matemáticamente por una distancia, y que dicho entorno cambia dependiendo del marco de referencia que se tome.

Dentro del lenguaje natural también se encuentra definido el término cercano el cual se puede comprobar con las siguientes preguntas.

- Si vives en Mosquera y viajas en avión ¿Cuáles ciudades del mundo están cerca de Mosquera?

BOGOTA, CALI, MEDELLIN, BOYACA, VILLAVICENCIO ...

- Si vives en Mosquera y viajas en bicicleta ¿Cuáles ciudades están cerca de Mosquera?

Madrid, Funza, Fontibon, El Rosal.

- Si vas a pie ¿Qué está cerca de tu casa?

Santana, santelmo, Villa nueva, el trebol.

Las actividades también reflejan las propuestas teóricas de Vergnaud del cual tomamos los referentes sobre el concepto situación, definición que se encuentra ligada a la teoría de campos conceptuales del mismo autor.

En el siguiente punto se observo que los estudiantes relacionaron el concepto de cercano con unidades de longitud y que por tanto depende del contexto en que se tome.

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Cundinamarca. ¿Qué unidad de medida utilizaria para medir una distancia cercana y cuál podría ser esta distancia?

Km - 6 km de distancia aprox.

Efectivamente reconocen desde su lenguaje usual y conocimentos previos que significa estar cerca de y que condiciona a la cercanía.

- Teniendo su habitación como referencia. ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana, cuál podría ser esta distancia?

3 Metros

- Si observas tu pocillo de café sobre la mesa del comedor que ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana a tu pocillo? ¿Cuál podría ser esta distancia?

50 centimetros

- Si haces un punto en tu cuaderno con la sola huella del lápiz ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana? ¿Cuál podría ser esta distancia?

Milimetros

Aquí una vez más se evidencia la importancia de las situaciones y de los problemas. (en el enfoque TCP de Vergnaud) para dar sentido a los conceptos y definiciones que tienen los estudiantes.

En el siguiente ejemplo se ve la importancia de la interaccion social como factor que da sentido a esta situación para los estudiantes y donde se pueden reconocer los fundamentos de la teoria de Vergnaud: la tripleta (S;I;R), (Situaciones, Invariantes, Representaciones)

Situación

Debido a los niveles de radiación de las antenas y a las bajas potencias de trasmisión de los móviles y de las estaciones base, es necesario distribuir en las grandes ciudades un grupo de estaciones base con el fin de garantizar niveles óptimos de señal a los usuarios. La cobertura de una estación base urbana típica está entre 200 m y 500 m aproximadamente (tomado del documento: TELEFONÍA MÓVIL CELULAR. Funcionamiento y relación de la radiación con la salud humana http://www.asocel.org.co/conferencias/conferencia_3.pdf)

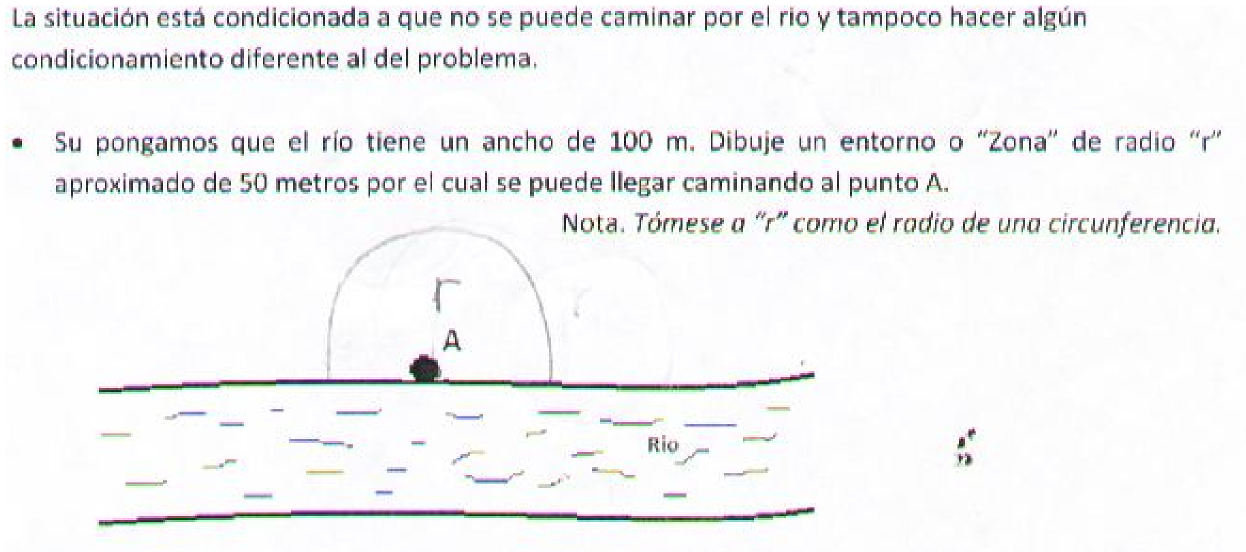
- Dibuja la zona aproximada que está cubriendo cada antena.

Aquí se puede observar que efectivamente los estudiantes aplican el concepto de distancia y el de circunferencia, relacionandolo con el concepto de entorno, se puede observar que el estudiante hace una representación del concepto de tipo gráfico.

En este ejercicio cobra una vez más relevancia la interacción social de que habla Vygotski, es decir el conocimiento no está aislado del medio en que vive el alumno,si no que está acompañado de todo el conocimiento que la comunidad y su experiencia personal le ofrece.

En la siguiente respuesta los estudiantes no solo se quedan con la representación gráfica circular si no que cuando se le pide el entorno al municipio de Mosquera, ellos grafican otro tipo de entorno en su representación gráfica asi.

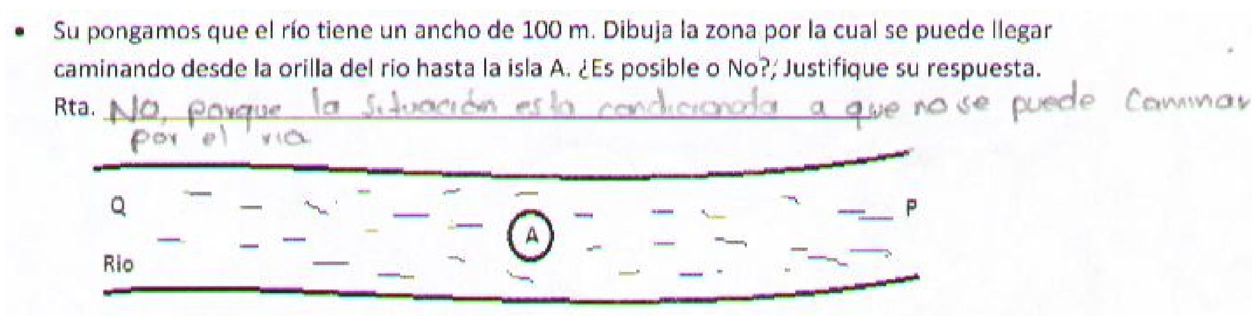
A continuación se presentan otros tipos de situaciones donde los entornos en sus representaciones gráficas pueden ser diferentes, además se realiza un cambio de representación del verbal y escrito al gráfico.


La situación está condicionada a que no se puede caminar por el rio y tampoco hacer algún condicionamiento diferente al del problema.

- Su pongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuje un entorno o "Zona" de radio "r" aproximado de 50 metros por el cual se puede llegar caminando al punto A.

Nota. *Tómese a "r" como el radio de una circunferencia.*

En el siguiente punto también se pudo observar como con una situación condicionada permite que su representación gráfica cambie.

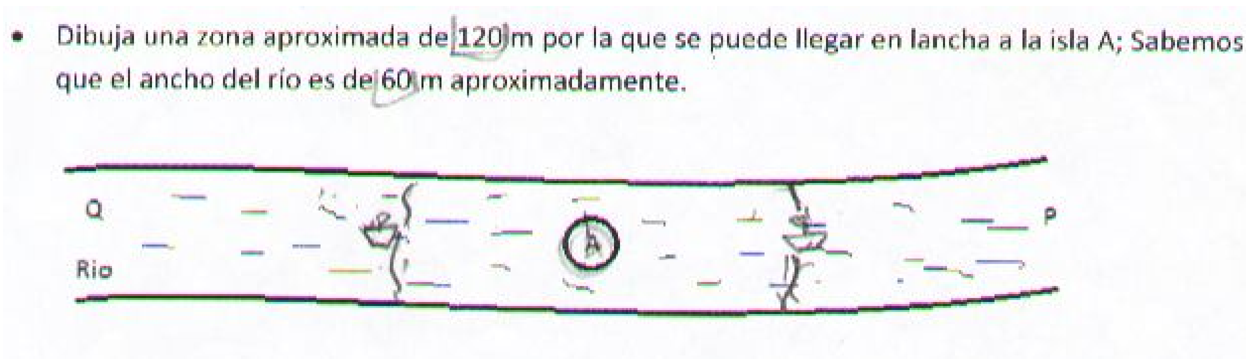

- Su pongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuja la zona por la cual se puede llegar caminando desde la orilla del rio hasta la isla A. ¿Es posible o No?, Justifique su respuesta.

Rta. No, porque la situación es la condicionada a que no se puede caminar por el rio

Aquí se replantearon las preguntas después de la prueba piloto, pues ambos grupos no comprendían bien la pregunta porque no se entendía que se dibujara el entorno alrededor del punto A. Se trató después del cambio en la redacción, de ser más específico en la pregunta y efectivamente los estudiantes la interpretaron mejor, como se evidencia a continuación.

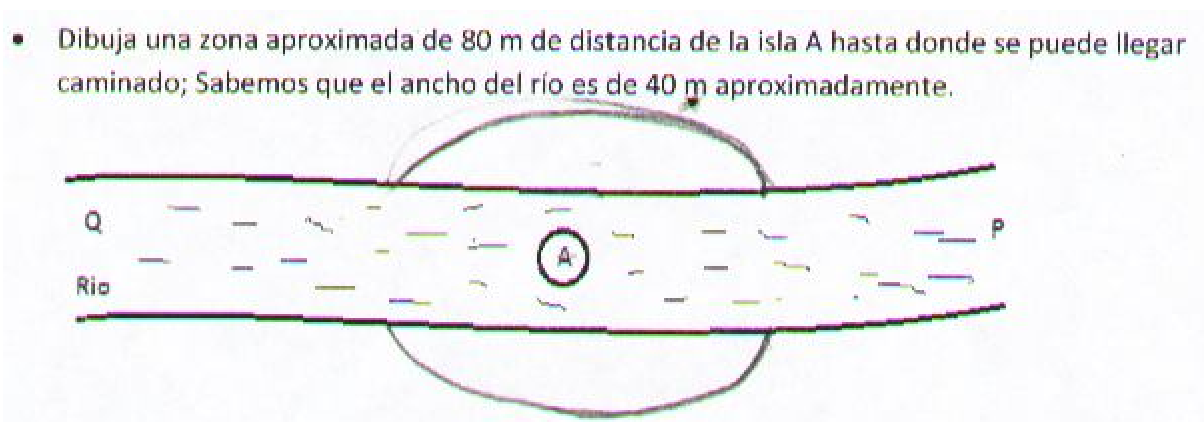
- Supongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuje la zona de radio “r = 60 m” alrededor del punto A, por el cual se puede llegar caminando a dicho punto A.

Nota. *Tómese a “r” como el radio de una circunferencia.*



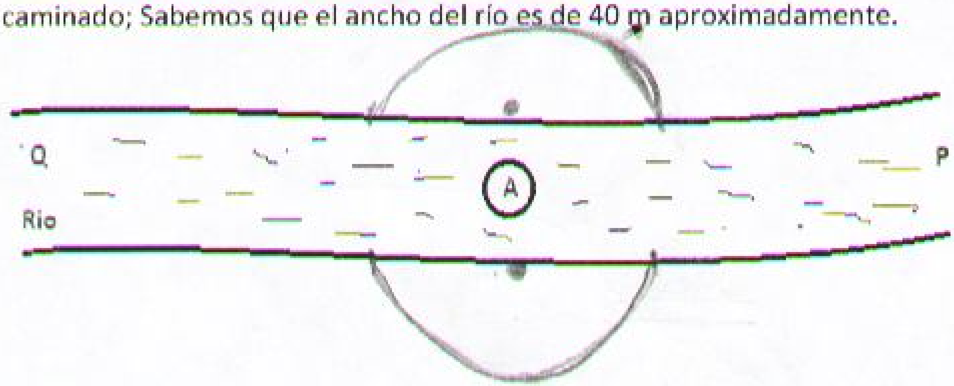
Aquí podemos observar que el tipo de representación gráfica es una parte de una circunferencia.

Al igual que en el siguiente punto.



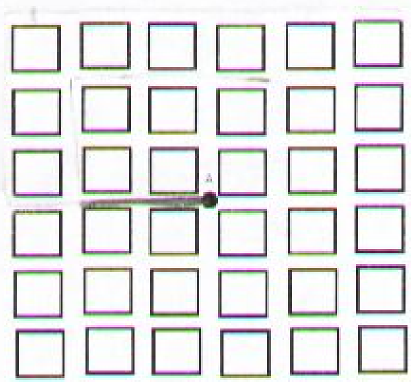
Este grupo ademas coloco dos puntos dentro del entorno y asi continuó en los ejercicios que veremos a continuación.

- Dibuja una zona aproximada de 80 m de distancia de la isla A hasta donde se puede llegar caminado; Sabemos que el ancho del río es de 40 m aproximadamente.



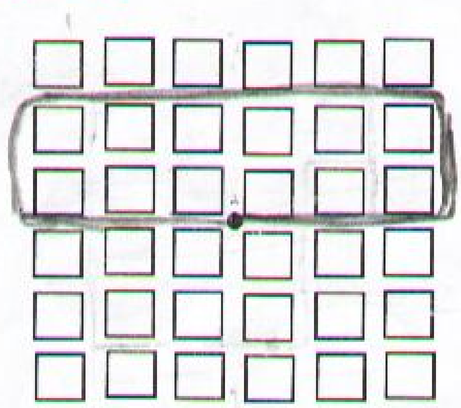
Al cambiar los tipos de entornos es decir utilizando otra metrica, tuvimos problemas en la formulación de la pregunta por lo cual fue necesario replantearla como se obseva a continuación en la metrica del taxista.

- Dibuja la zona que puede cubrir el taxista en una distancia de 200 m. "La longitud de cada calle es de 100 m aproximadamente"



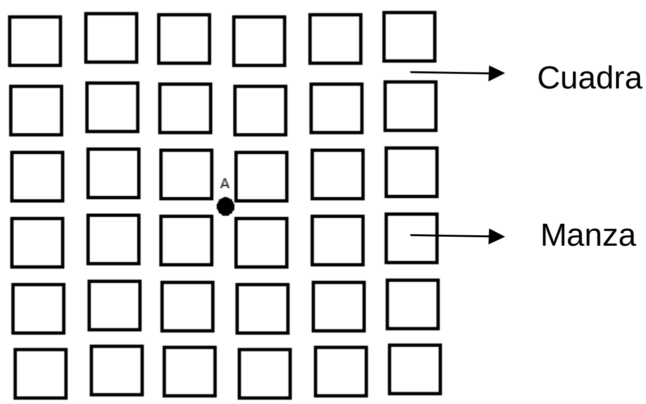
En este grupo aunque se identificó la longitud de las cuadras no logró llegar a identificar el entorno esperado.

- Dibuja la zona que puede cubrir el taxista en una distancia de 200 m. "La longitud de cada calle es de 100 m aproximadamente"



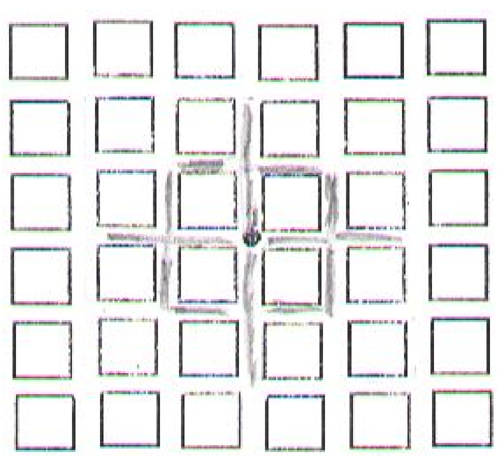
Y en este caso no lograron identificar la longitud de las cuadras y no identificaron las manzanas. Por lo que se replanteo la situación así:

Supongamos que el punto A es un taxista y recibe una llamada para una carrera, pero solo tiene combustible de reserva para 200 m, dibuja la zona hasta donde podría llegar el taxista con dicha reserva. “La longitud de cada cuadra es de 100 m”



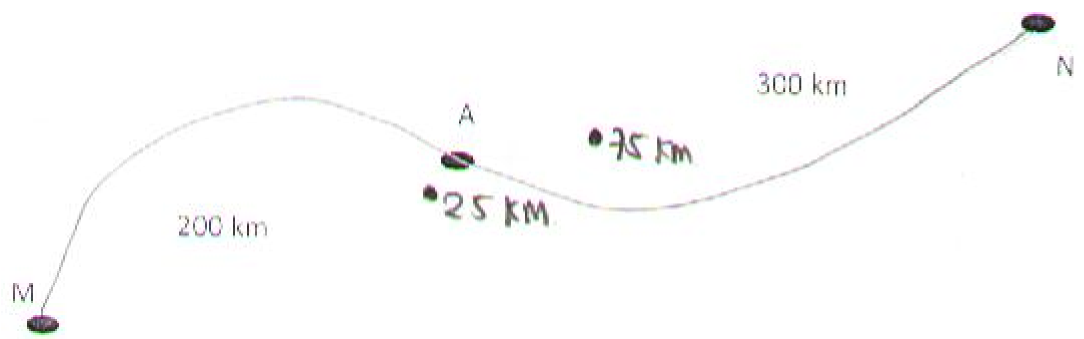
Tratamos de ser más especificos en el planteamiento de la situación y al aplicar nuevamente el ejercicio se logró la respuesta esperada.

Dibuja el entorno que puede cubrir el taxista en una distancia de 200 m. “La longitud de cada calle es de 100 m aproximadamente”



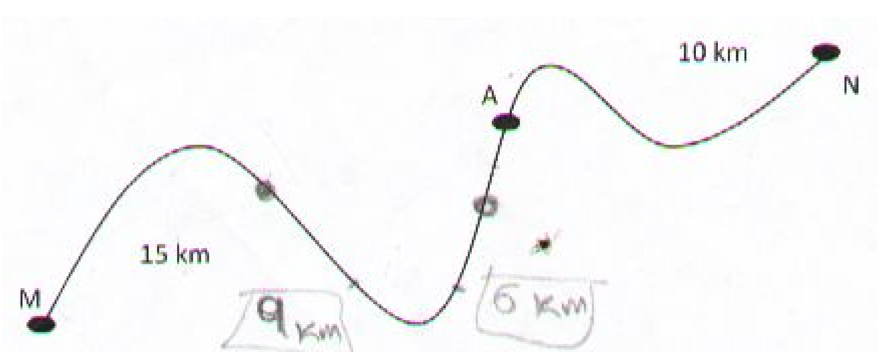
En la siguiente situación se les pidio a los estudiantes que ubicaran puntos cercanos a otro y se observo que si la situación no estaba condicionada uno de los grupos ubicó los puntos por fuera de la recta “entorno en el plano”, como se ve a continuación.

- Consideremos la siguiente gráfica: la línea representa una carretera que une a las ciudades M, A y N. Dibuja dos puntos cualesquiera, cercanos a la ciudad A y asígnales una distancia desde A.

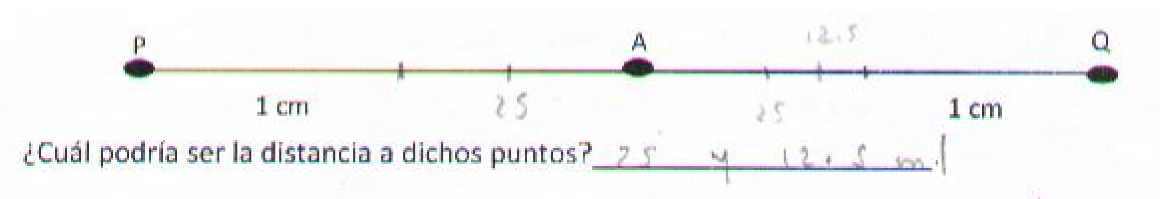


Cuando se condiciona la situación se observa que ubican los puntos sobre la linea.

- Dibuja dos puntos cualesquiera, cercanos a la ciudad A, que estén sobre la carretera y asígnales una distancia desde A.

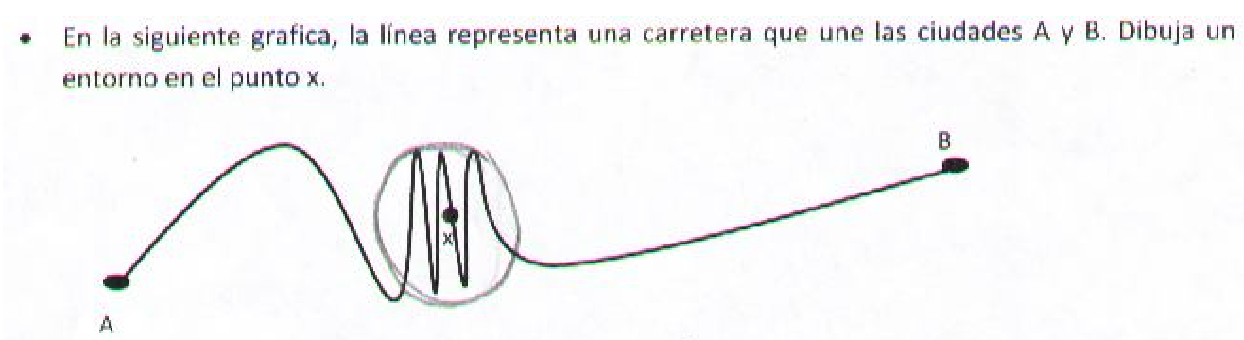


- En la recta uno de los grupos ubicó los puntos uno por derecha y otro por izquierda a igual distancia.



- Paso del entorno en el plano al entorno sobre una línea

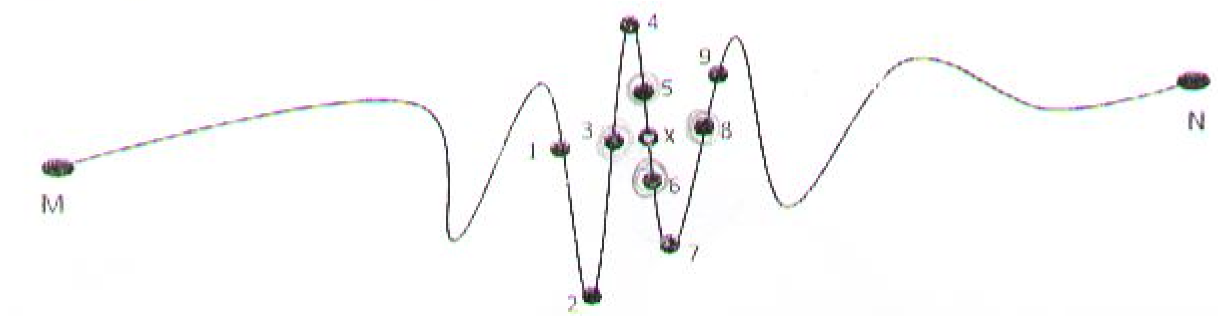
En la siguiente actividad los estudiantes podrán analizar como cambia el entorno al condicionar la situación a una linea.



Como la situación no estaba condicionada el entorno que se halló se hizo pensando en el plano.

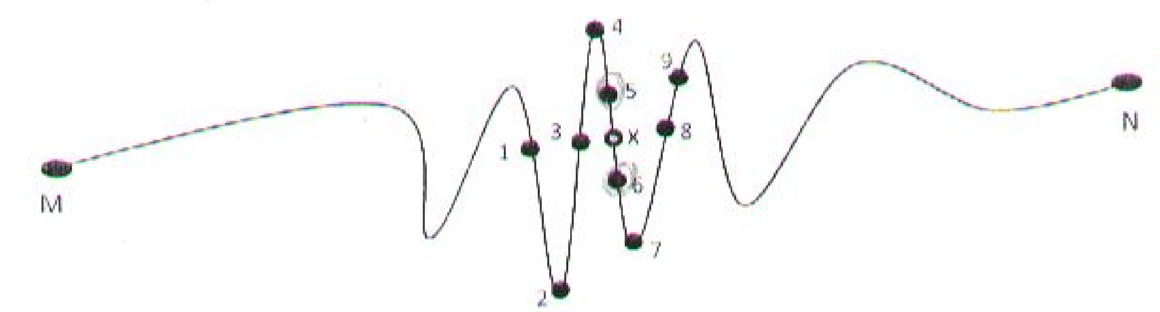
En el siguiente punto se evidencia que los estudiantes tienen claro el entorno en el plano.

Según la figura escribe los puntos que están cerca o en el entorno de x



Luego se condiciona la situación para encontrar los puntos cercanos a x

La línea que se observa en la figura representa un río que va desde M hasta N teniendo en cuenta que una lancha se desplaza por este medio. ¿Cuáles puntos están cerca de x?



Las repuestas cambian radicalmente cuando se pregunta por lo puntos que estan cerca segun el condicionamiento.

Con la siguiente actividad se quiere formalizar el concepto de entorno sobre la recta numerica.

Y efectivamente los estudiantes reconocen números que estan cerca de otro número en estudio.

- Teniendo en cuenta la recta numérica ¿cuáles números están cerca del número 2?

Rta. 1 - 3.

y además se hace notar que el cambio de escala cambia el concepto de los números cercanos al número de estudio, como se ve a continuación.

- Teniendo en cuenta la recta Numérica. ¿Cuáles números están cerca del número 2 por la derecha y por la izquierda?

Rta. D. 1,6, 1,7 1,8 1,9 y I 2,1 2,2 2,3 2,4, 2,5

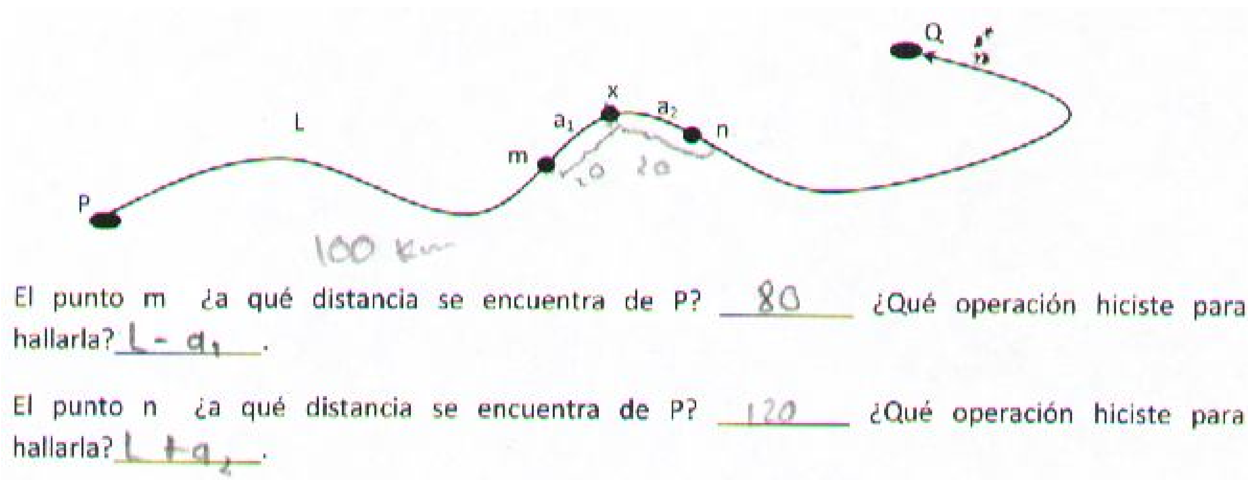
En la tabla se hace notar la densidad de los números reales

Completa la tabla tomando valores cada vez más próximos a los siguientes números, acercándonos tanto por izquierda como por derecha.

10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

En este punto se quiere que el estudiante reconozca una forma de representar un intervalo desde antes y después del punto en estudio.

- En el gráfico; la línea representa una carretera que une las ciudades P y Q, de la ciudad P hasta el punto "X" existe una distancia de 100 Km y la llamamos L. También se conoce la distancia a_1 = 20 km desde "X" hasta el punto "m" y la distancia a_2 = 20 km desde "X" hasta el punto "n".

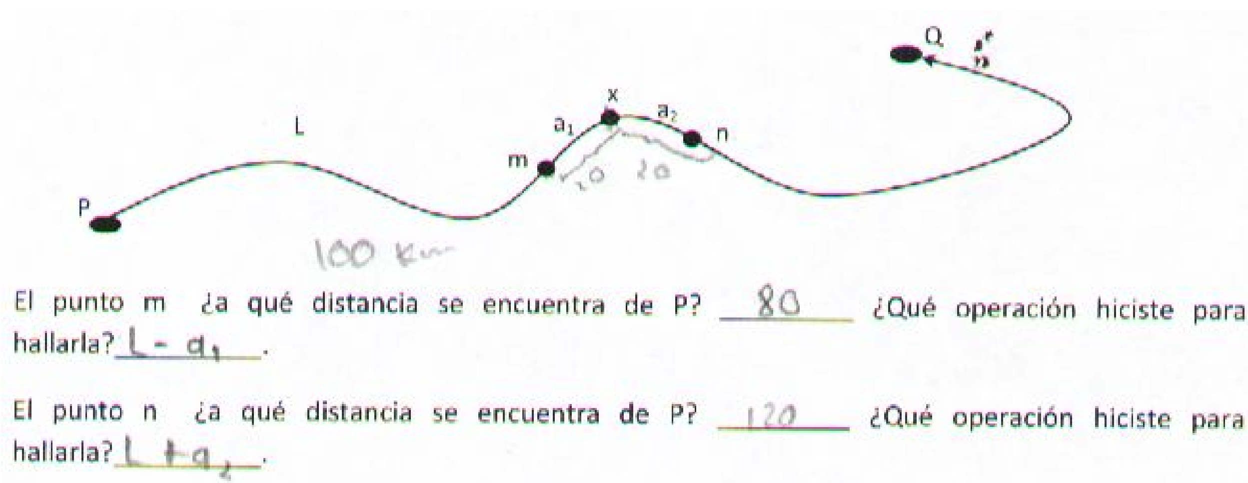


El punto m ¿a qué distancia se encuentra de P? 80 ¿Qué operación hiciste para hallarla? $L - d_1$.

El punto n ¿a qué distancia se encuentra de P? 120 ¿Qué operación hiciste para hallarla? $L + a_2$.

Los grupos hicieron la representación simbólica de la respuesta solicitada en el problema.

En siguiente punto se evidencia que se reconoce el intervalo entre la ubicación de un punto antes y uno despues del punto en estudio.


Q
x
a_1
a_2
L
m
n
P
10
20
100 Km

El punto m ¿a qué distancia se encuentra de P? 80 ¿Qué operación hiciste para hallarla? $L - d_1$.

El punto n ¿a qué distancia se encuentra de P? 120 ¿Qué operación hiciste para hallarla? $L + a_2$.

Finalmente se llega a la representación del entorno en la recta real como se ve a continuación.

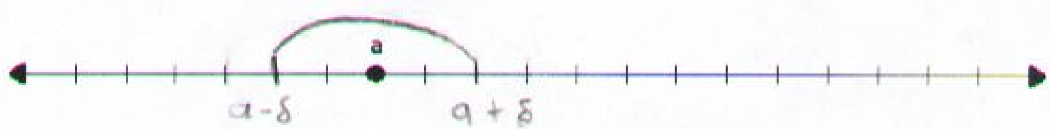
- En la recta numérica, ubica el punto x-2 y el punto x + 2.

Escribe 6 números que están entre estos puntos 4,9 - 4,5 - 5,1, 5,2 - 5.3

Escribe el intervalo que representa esta expresión (x-2, x+2)

Y luego con los siguientes ejercicios se generaliza la simbolización.

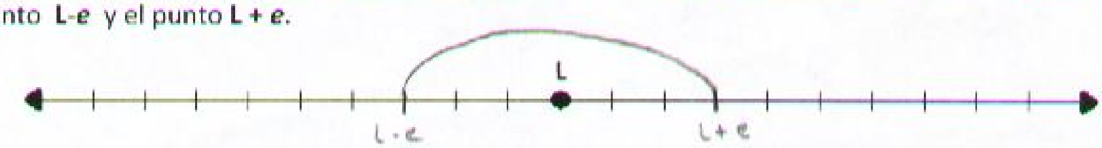
- Sea **a** un número cualquiera en la recta; y δ "sigma" un radio igual a 2. Dibuja en la recta el punto a- δ y el punto a + δ.



Escribe el intervalo que representa esta longitud. (a-δ, a+δ)

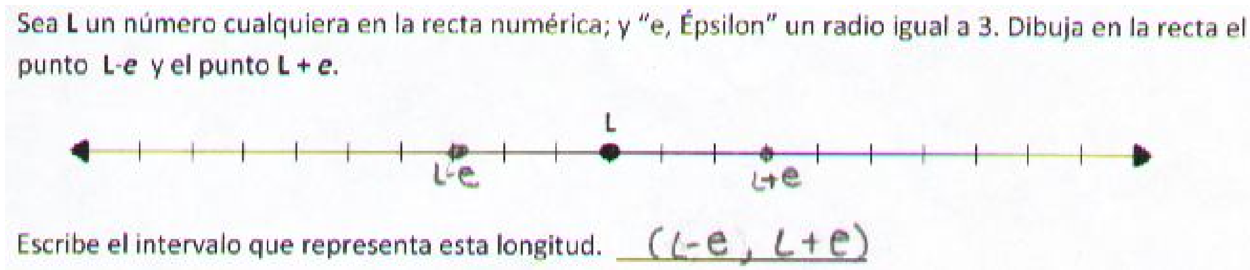
Se observa que los estudiantes hicieron notar el entorno al punto en estudio; aunque la figura en forma de círculo no representa el entorno en el plano; sino que quieren indicar "*desde que punto hasta cual otro va el entorno sobre la recta*", (Comunicación personal, 6 de septiembre de 2011)

Sea **L** un número cualquiera en la recta numérica; y "e, Épsilon" un radio igual a 3. Dibuja en la recta el punto **L-*e*** y el punto **L + *e***.



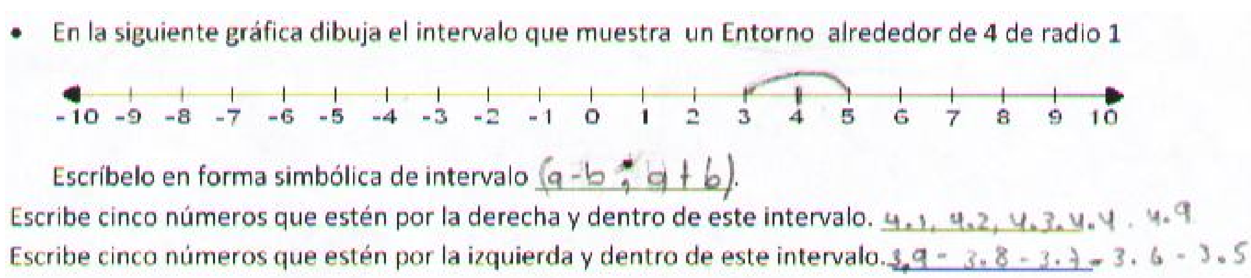
Escribe el intervalo que representa esta longitud. (L-e, L+e)

Otro grupo solamente ubicó los puntos así:

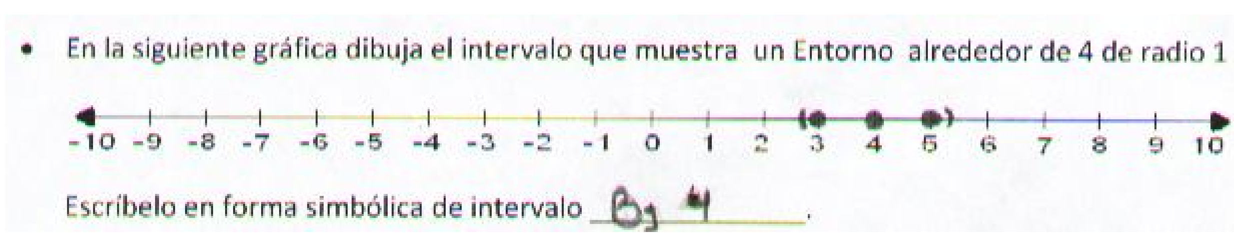


A continuación se hace la formalización del concepto de entorno en la recta numérica R y su forma de representación gráfica y dos de sus representaciones símbolicas.

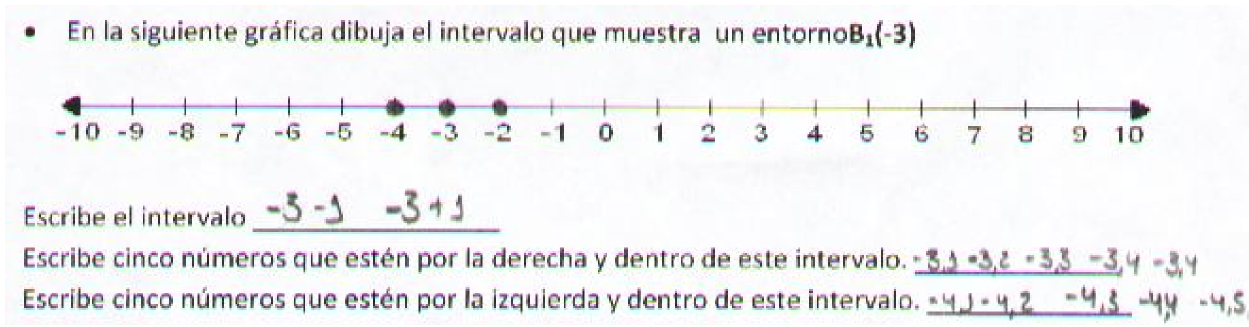
Además se realizan conversiones entre los sistemas de representación y tratamiento dentro del sistema de representación simbólico.



Otro grupo en el mismo punto también hizo conversión entre los sistemas de representación simbólico al gráfico como se ve a continuación.



Igualmente en este ejercicio del otro grupo

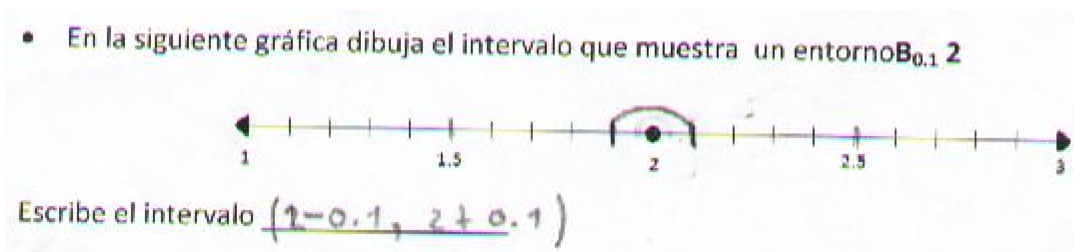

- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un entorno$B_1(-3)$

Escribe el intervalo -3-1 -3+1

Escribe cinco números que estén por la derecha y dentro de este intervalo. -3,1 -3,2 -3,3 -3,4 -3,4

Escribe cinco números que estén por la izquierda y dentro de este intervalo. -4,1 -4,2 -4,3 -4,4 -4,5

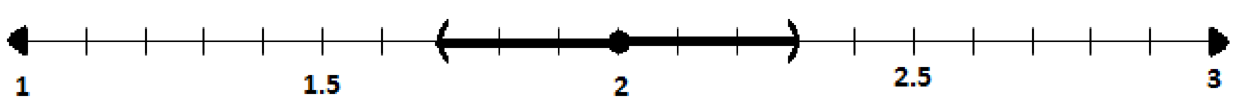
En este ejercicio se evidencia el tratamiento y la conversión como lo llama Duval (1999,p 31)


- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un entorno$B_{0.1}$ 2

Escribe el intervalo (2-0.1, 2+0.1)

Para la conversión del sistema de representación gráfico al simbólico tuvimos que agregar unos ejercicios como:

- La siguiente gráfica representa un entorno alrededor de 2



¿Cuánto vale el Épsilon "ε"? ________________

Escríbelo en forma ($a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$) _________________

Y en la forma $B_\varepsilon a$ _______________

Para finalizar se hicieron más ejercicios con radios de tipo épsilon, con el objeto de formalizar el concepto de entorno.

Por último utilizamos una función para hallar el entorno tanto de “x” como de sus Imágenes f(x) y con esto finalizamos las actividades que tenían como objetivo reconocer el concepto de entorno en la recta real, lo anterior dirigido al entorno en las funciones reales.

Comenzamos con la tabla, que los grupos completaron perfectamente.

- Construya un entorno alrededor de x=2 a un radio máximo de 0.5. Halle cinco valores que estén por la derecha y cinco por a izquierda de 2; a esos puntos halle sus correspondientes imágenes por la función f(x)= 2x -1. Puedes ayudarte con la tabla.

“Se supone que ya conocen la función y su gráfica”

Valor/ función	Izquierda					Valor en estudio	Derecha				
x	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
F(x)	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4

Y a las preguntas realizadas, los grupos contestaron de la misma manera, de acuerdo con los resultados esperados, es decir que identificaran los aspectos involucrados con entorno desde la recta numérica.

Preguntas

1. ¿Alrededor de que número se forma el entorno en el eje X? 2 .
2. ¿Las imágenes "f(x)" de los puntos que están en el entorno de "x" forman un entorno? Si
3. Justifica tu respuesta anterior. Porque al rededor de "f(x)" hay otros más puntos
4. Si su respuesta es sí. ¿Alrededor que numero se forma el entorno? 3
5. ¿cómo es el entorno que se forma en las imágenes "f(x), más grande, más pequeño igual al entorno de x? más grande

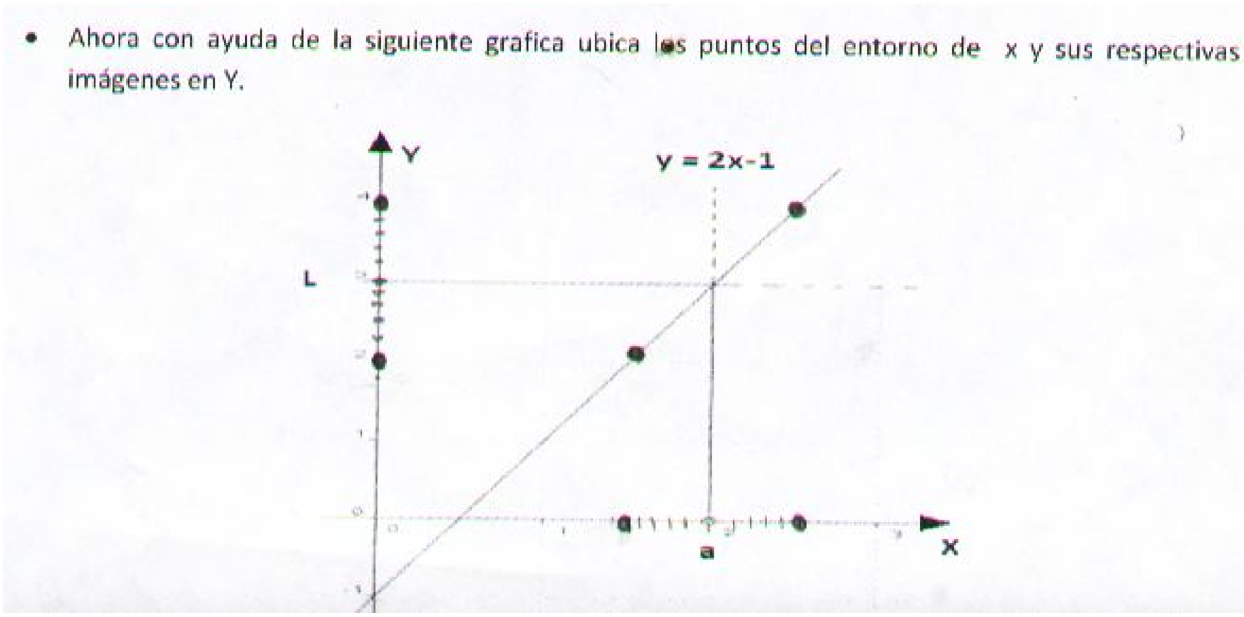
Para la representación de la función en el plano, se les apoyo con la gráfica de la función.

En la primera pregunta se observa que efectivamente reconocen con facilidad el entorno y alrededor de que número se forma.

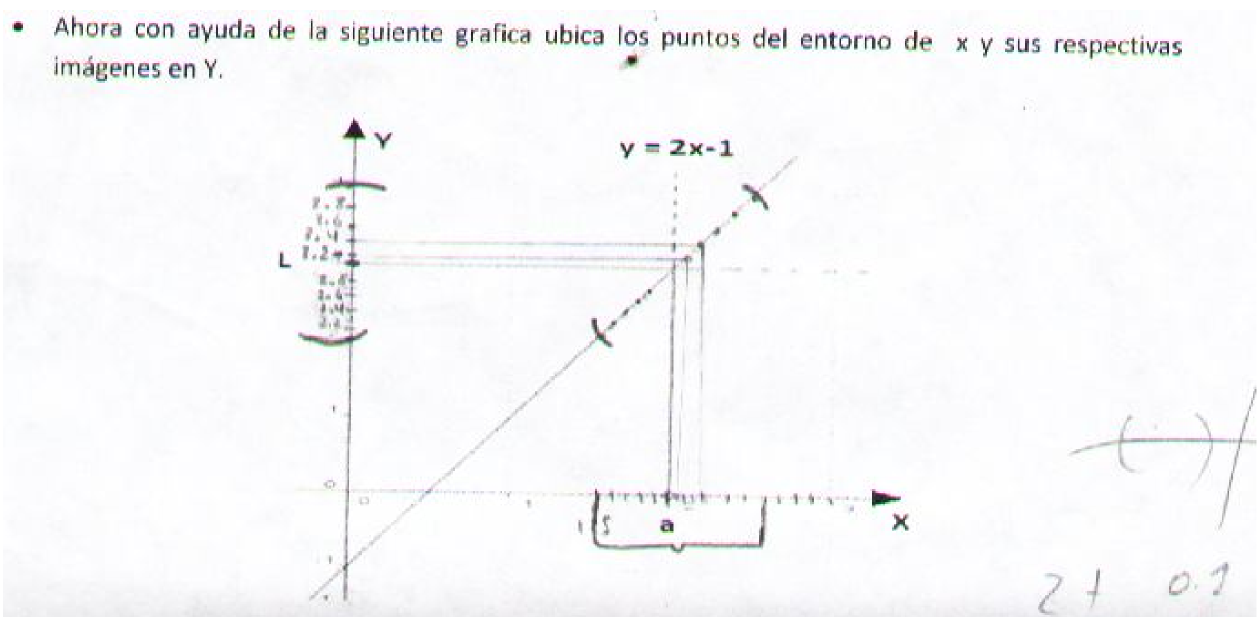
En la segunda pregunta tambien reconocen que las imágenes de los elementos que están en el entorno en el eje x también forman un entorno sobre el eje y.

En la tercera y cuarta pregunta efectivamente justifican correctamente el porque se forma el entorno y alrededor de que puntos se forma el entorno en el eje y.
Con lo que se concluye que efectivamente los estudiantes reconocen el entorno sobre la recta numérica, independientemente de los ejes coordenados.

Un grupo representó los entornos de la siguiente manera:



Y el otro grupo lo hizo de la siguiente forma:



En ambos casos se observa que identifican el entorno tanto en el eje y como en el eje x; y además se observa que identifican un entorno sobre la gráfica de la función, en este caso la recta que representa la función.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

También se evidencia que el mismo grupo que quiso indicar desde que punto hasta que otro va el entorno en los ejercicios sobre la recta numérica también lo hizo sobre el eje x cuando quiso indicar el entorno formado.

9. REFLEXION

Se cumplió con el objetivo del diseño de la secuencia puesto que con ayuda de la prueba piloto se pudo evidenciar que los estudiantes enfrentaron con mayor claridad y fluidez el concepto de entorno cuando se aplicó en una función.

Una situación didáctica bien planteada puede ayudar a que los estudiantes construyan un objeto matemático .

También se evidencia la influencia que tiene la interacción social en la concepción y formas de representación de los conceptos matemáticos en los estudiantes.

Una de las mayores dificultades encontradas en el diseño de las actividades se presentó en relación con la estructura y redacción de las preguntas, para que fueran coherentes y contribuyeran a la construcción del concepto.

Otra dificultad que tuvimos en las distintas representaciones utilizadas por los estudiantes fue identificar invariantes en el sentido de la Teoría de los Campos Conceptuales, específicamente los teoremas en acción y los conceptos.

En el análisis de la prueba piloto se alcanza a observar algunas dificultades que presentan los estudiantes, al hacer conversiones entre los diferentes sistemas de representación , como lo menciona Duval, (1999,p.47)

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

10. EPILOGO

En el aspecto profesional la elaboración de este trabajo representó un gran aporte, porque en el proceso de su elaboración pudimos afianzar el conocimiento sobre los referentes teóricos del proceso enseñanza -aprendizaje de la matemática, y en el diseño específico de las actividades desarrollamos habilidades en elaboración de actividades didácticas, trabajos de investigación y su proceso de validación.

11. CONCLUSIONES

- Se evidenció en las preguntas previas al diseño que los estudiantes tienen una noción del concepto entorno desde una perspectiva social y lo definen desde su lenguaje natural y sus representaciónes son de tipo verbal y gráfico, este último en forma de círculo.

- En la revisión de textos, tanto de tipo escolar como universitario, no se evidencian aproximaciones didácticas relacionadas con el concepto de entorno.

- A través de la actividad se logra mostrar algunas facetas del concepto de entorno mediante situaciones que permiten el manejo de las representaciones (conversión y tratamiento)

- No siempre la redaccion de las preguntas y las situaciones dieron el resultado esperado, fue así como a raiz de las socializaciones con los compañeros y docentes de la especialización y ayuda de la prueba piloto se replantearon algunas de ellas.

- Las situaciones que se plantearon en la secuencia facilitan una aprehensión y afianzamiento del concepto de una manera más significativa, como se ve en el análisis de la prueba piloto.

- En el momento en que se propuso un ejemplo de entorno con una función se evidenció que los estudiantes tuvieron un manejo fluido del concepto, como se mostró en el análisis de la prueba piloto.

- Si bien las actividades diseñadas tienen un argumento constructivista tambien algunas de ellas condujeron al estudiante a la idea de entorno.

- El producto de este trabajo es la secuencia de actividades que aporta elementos didácticos para la costrucción del concepto de entorno en el grado once.

- Aunque no desconocemos que las plabras cerca y próximo pueden ser ambiguas, tambien forman parte del lenguaje natural de los estudiantes; precisamente la secuencia pretende avanzar en cerrar la brecha entre el lenguaje natural y la formalización del concepto en el lenguaje matemático.

BIBLIOGRAFIA

1) *Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo (2a. ed.). Trillas.México.*

2) Benveniste, E.(1974). *Problèmes de linguistique générale*, 2. Paris: Gallimard.,Tomado de: Duval, R.,(1999).

3) Bruner, J.S.,(1960),*The process of Education*, Cambridge , Harvard, University Press.),p. 349.

4) Dearden, R. F. (1976): *Problems in Prímary Education.* Londres, Routledge & Kegan Paul, (Citado en: Guerrero J. y Guerrero, L., 2004.)

5) Duval, R.,(1999), *Semiósis y pensamiento humano*, Universidad del Valle, Cali.

6) Guerrero, J., y Guerrero, L., (2004), Recursos para un aprendizaje significativo, En: *Enseñanza*, Granada., p. 344 y ss.

7) Hiebert, J. y Carpenter, T. Learning and Teaching with understanding. En: Patricia Perry y Hernando Alfonso (trads.) *Handbook of research on mathematics*. Bogotá: NCTM Una empresa docente, Universidad de los Andes, 1992.

8) Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161.Tomado de:Moreira, M.,(2002).

9) Kreyszig, E.(1989). *Introductory Functional Analysis with applications*, Jhon Wiley and Sons,New York.

10) Mora, L. y Torres J. (2007), *Concepciones de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre números reales*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

11) Moreira, M.,(2002) La Teoría de los Campos Conceptuales en la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área, *Revista Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias.*

12) Moreno, L. y Sacristán,A. Representaciones conceptuales y procesos recursivos. En: *Revista EMA, 1(2),1996.*

13) Nisbet, J. y Shucksmith J. (1990): *Estrategias de aprendizaje.* Madrid, Santillana (Citado en: Guerrero J. y Guerrero, L., 2004.).

14) Novak, J. D. y Gowin, B. (1988). Aprendiendo a aprender. Martínez Roca. Barcelona.

15) Orobio,H., y Ortiz,M.(1997), *Educación matemática y desarrollo del sujeto,* Editorial Magisterio, Bogotá.

16) Vergnaud, G. (1983a). Quelques problèmes theóriques de la didactique a roposd'unexample: les structures additives. *Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique*. La Londe les Maures, Francia, 26 de junio a 13 de julio. Tomado de: Moreira, M.,(2002).

*17)*Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In: Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.).*Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades.*

*18)*Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10* (23): 133-170, Tomado de:Moreira, M.,(2002).

*19)*Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. p. 1-26. Tomado de: Moreira, M.,(2002).

20)Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59. Tomado de: Moreira, M.,(2002).

21)Vergnaud, g. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica.

22)*Perspectivas, 26*(10): 195-207. Tomado de: Moreira, M.,(2002).

23)Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2): 167-181. Tomado de: Moreira, M.,(2002).

24)Wertsch, J.(1988),*Vygotski y la formación de la mente,* Paidós, Barcelona, Citado en: Orobio,H., y Ortiz,M.(1997).

ANEXO A

ACTIVIDADES

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCION DEL CONCEPTO DE ENTORNO

OBJETIVO GENERAL DE LAS ACTIVIDADES

Reconocer el concepto de ENTORNO como conceptos matemáticos previos a la noción de límite en sucesiones y funciones para grado Once, El cual también involucra los conceptos de: Vecindad, Proximidad, cercanía y distancia.

ACTIVIDAD UNO

Tomaremos como referencia a su lugar de vivienda en Mosquera, “Cundinamarca, Colombia”

OBJETIVO: Identificación de entornos en términos de proximidad y lenguaje natural.

PARTE A.

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera Cundinamarca y como referencia la esfera terrestre.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

____

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Colombia.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

____

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Cundinamarca.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

____

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Mosquera.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

____

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia su barrio donde vive.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

____

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia la cuadra donde vive

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.

____

- Estando en su habitación ¿cuál sería un entorno?

____

PARTE B

OBJETIVO: Identificar qué las proximidades o cercanías son relativas y dependen del contexto en que se establezca el ejercicio.

- Si vives en Mosquera y viajas en avión ¿Cuáles ciudades del mundo están cerca de Mosquera?

____

- Si vives en Mosquera y viajas en automóvil ¿Cuáles ciudades podrían estar cerca de Mosquera?

____

- Si vives en Mosquera y viajas en bicicleta ¿Cuáles ciudades están cerca de Mosquera?

____

- Si vas a pie ¿Qué está cerca de tu casa?

____

PARTE C

OBJETIVO: Relacionar el concepto de entorno con unidades de longitud y con distancia cercana.

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Cundinamarca. ¿Qué unidad de medida utilizaría para medir una distancia cercana y cuál podría ser esta distancia?

  ____

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia a Mosquera. ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana, cuál podría ser esta distancia?

  ____

- Teniendo su habitación como referencia. ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana, cuál podría ser esta distancia?

  ____

Si observas tu pocillo de café sobre la mesa del comedor que ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana a tu pocillo? ¿Cuál podría ser esta distancia?

  ____

- Si haces un punto en tu cuaderno con la sola huella del lápiz
  ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana? ¿Cuál podría ser esta distancia?

  ____

ACTIVIDAD 2

OBJETIVO: Relacionar los conceptos de entorno con el de la ZONA determinada por un punto y dada una condición o un radio de acción.

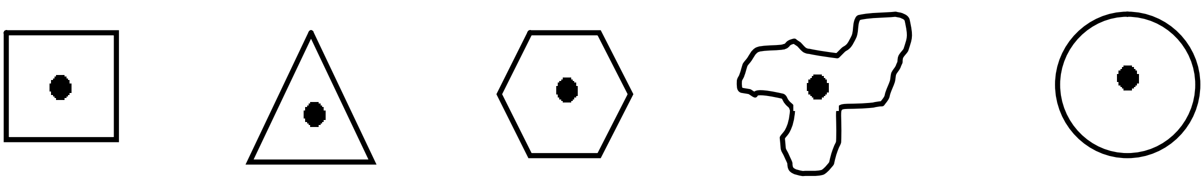
Situación 1.

Debido a los niveles de radiación de las antenas y a las bajas potencias de trasmisión de los móviles y de las estaciones base, es necesario distribuir en las grandes ciudades un grupo de estaciones base con el fin de garantizar niveles óptimos de señal a los usuarios. La cobertura de una estación base urbana típica está en un radio entre 400 m y 500 m aproximadamente (tomado del documento: TELEFONÍA MÓVIL CELULAR. Funcionamiento y relación de la radiación con la salud humana http://www.asocel.org.co/conferencias/conferencia_3.pdf)

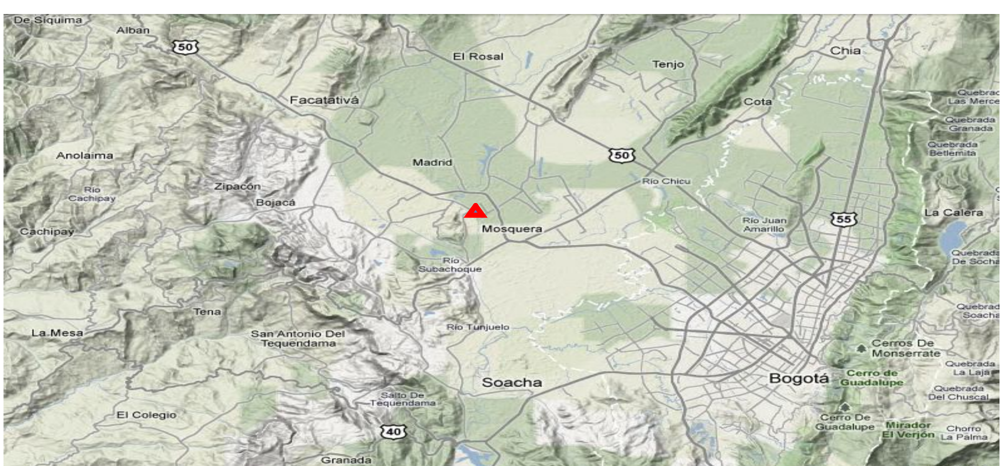
- Dibuja la zona aproximada que está cubriendo cada antena.

- ¿Cuál figura se asemeja a la dibujaste la zona o entorno de la señal que cubren las antenas en los ejercicios anteriores?

A. B. C. D. E.

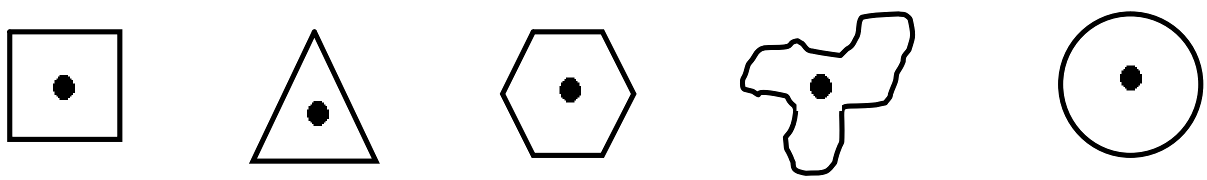


- Según el mapa, dibuja un entorno aproximado al municipio de Mosquera.



- ¿Cuál figura se asemeja a la dibujaste la zona o entorno del municipio de Mosquera?

  B. B. C. D. E.



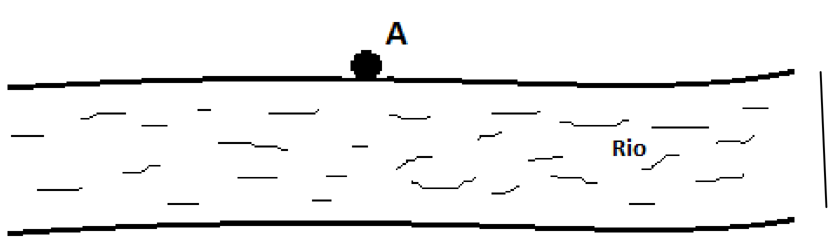
ACTIVIDAD 3.

OBJETIVO: Identificación grafica de entornos dependiendo del contexto y situación.

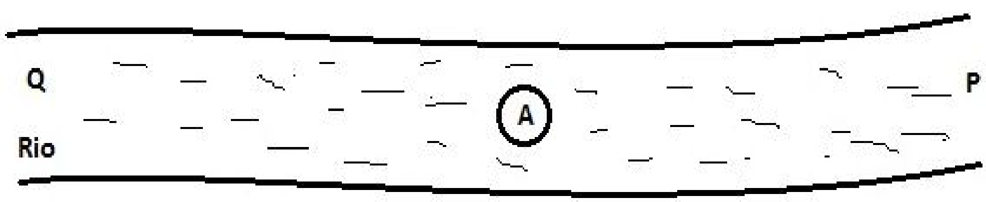
La situación está condicionada a que no se puede caminar por el rio y tampoco hacer algún condicionamiento diferente al del problema.

- Supongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuje la Zona de radio “r = 60 m” alrededor del punto A, por el cual se puede llegar caminando a dicho punto A.

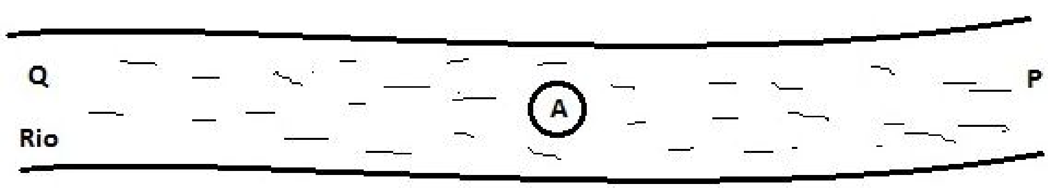
Nota. *Tómese a “r” como el radio de una circunferencia.*



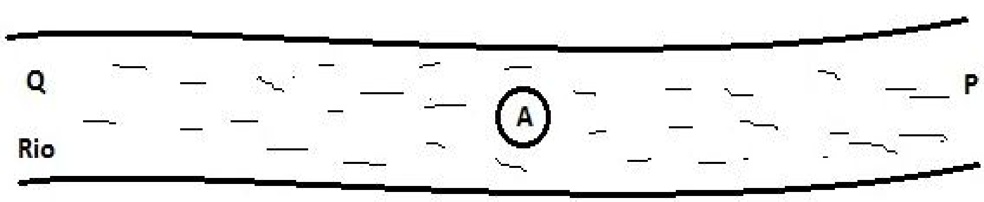
- Supongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuja la zona por la cual se puede llegar caminando desde la orilla del rio hasta la isla A. ¿Es posible o No?, Justifique su respuesta.
  Rta. ____.



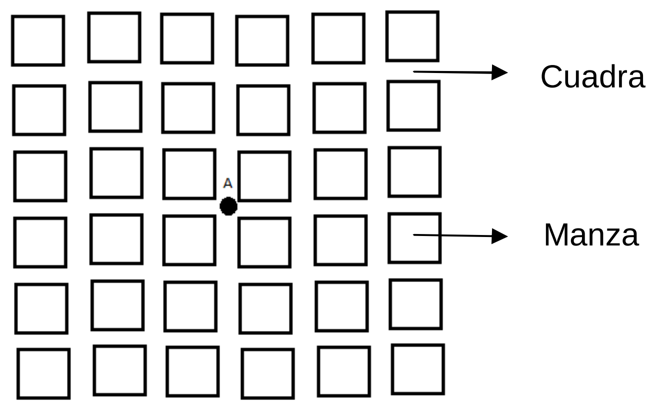
- Dibuja una zona aproximada de “r = 90 m” de distancia, por la que se puede llegar en lancha a la isla A; Sabemos que el ancho del río es de 100 m aproximadamente.
  Nota. *Tómese a “r” como el radio de una circunferencia.*



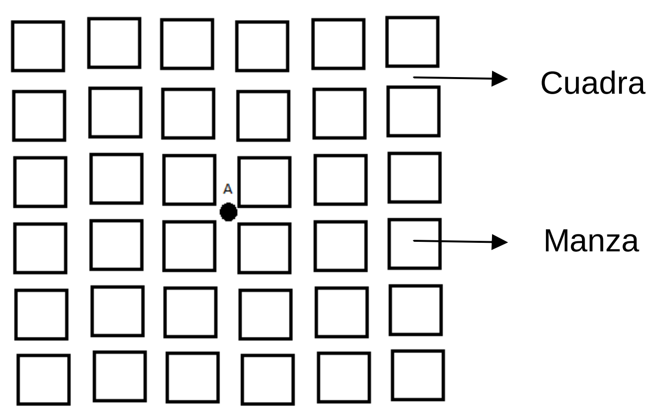
- Dibuja una zona aproximada de “r = 80 m” de distancia de la isla A hasta donde se puede llegar caminado; Sabemos que el ancho del río es de 60 m aproximadamente.



- Supongamos que el punto A es un taxista y recibe una llamada para una carrera, pero solo tiene combustible de reserva para 200 m, Dibuja la zona hasta dónde podría llegar el taxista con dicha reserva. La longitud de cada cuadra es de 100 m”



- Con la misma situación anterior. Dibuja la zona hasta dónde podría llegar el taxista si la reserva le alcanza para 300 m. “La longitud de cada cuadra es de 100 m”.



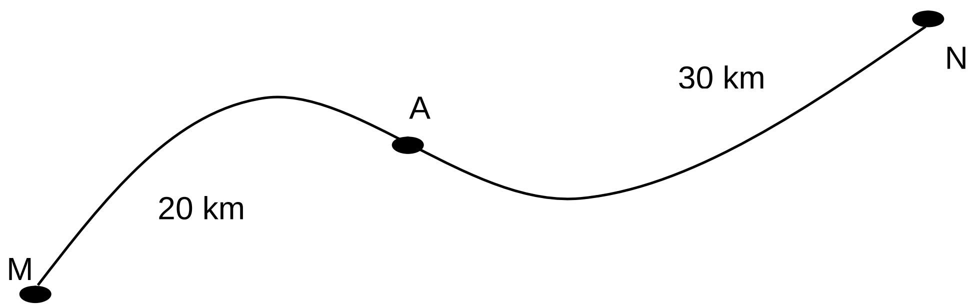
ACTIVIDAD 4

Dirigida a encontrar puntos cercanos a otro punto sobre una línea tratando de ir ubicando los puntos cerca o en un entrono del punto en estudio.

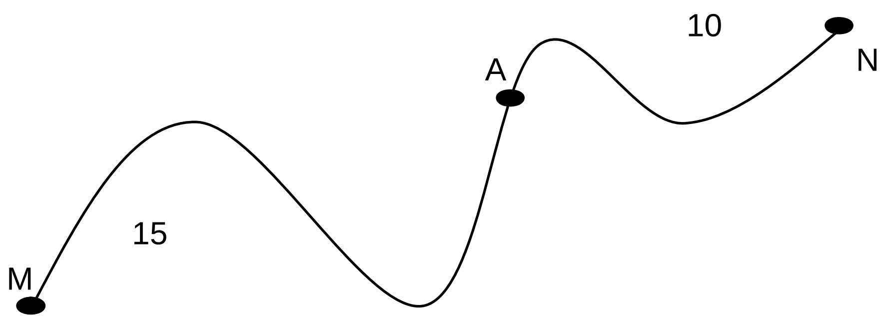
Parte A.

OBJETIVO: Ubicar puntos cercanos a un punto dado en diferentes situaciones.

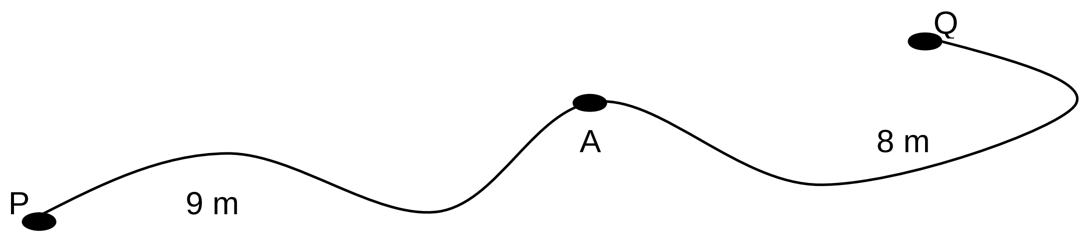
- Consideremos grafica; la línea nos representa una carretera que une a las ciudades M, A y N. Dibuja dos puntos cuales quiera, cercanos a la ciudad A y asígnales una distancia desde A.



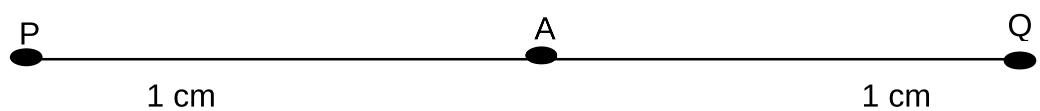
Con la misma situación anterior dibuja dos puntos cuales quiera, cercanos a la ciudad A, que estén sobre la carretera y asígnales una distancia desde A.



- Consideremos grafica; la línea une los puntos P, A y Q. Dibuja dos puntos cuales quiera “uno a la derecha y uno a la izquierda”, cercanos al punto A que estén sobre la línea y asígnales una distancia desde A.



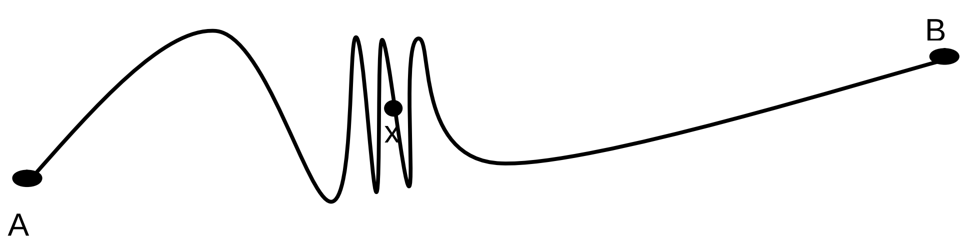
- ¿Consideremos grafica; la línea une los puntos P, A y Q. Dibuja dos puntos cuales quiera "uno a la derecha y uno a la izquierda", cercanos al punto A que estén sobre la línea y asígnales una distancia desde A.



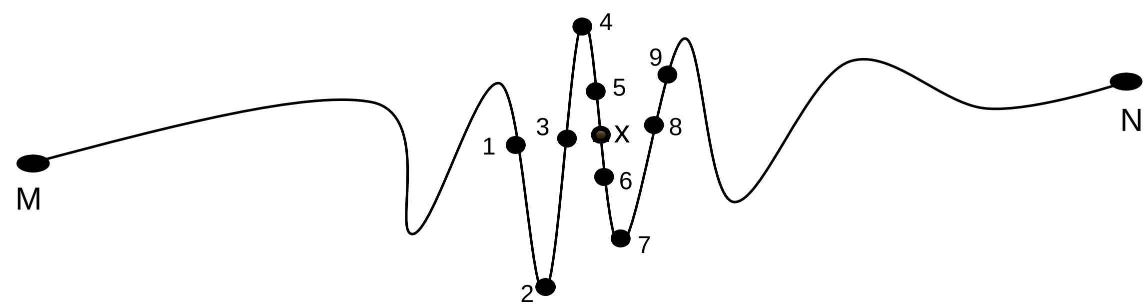
Parte B.

Objetivo: Determinar el entorno en una situación dependiendo del condicionamiento de la misma.

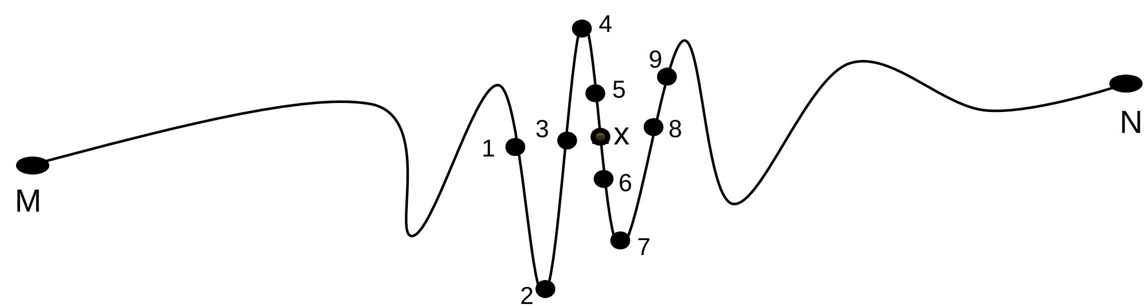
- En la siguiente grafica, la línea representa una carretera que une las ciudades A y B. Dibuja un entorno en el punto x.



- La siguiente figura no representa una situación en particular. Escribe los puntos que están cerca o en un entorno de “x” _______________.

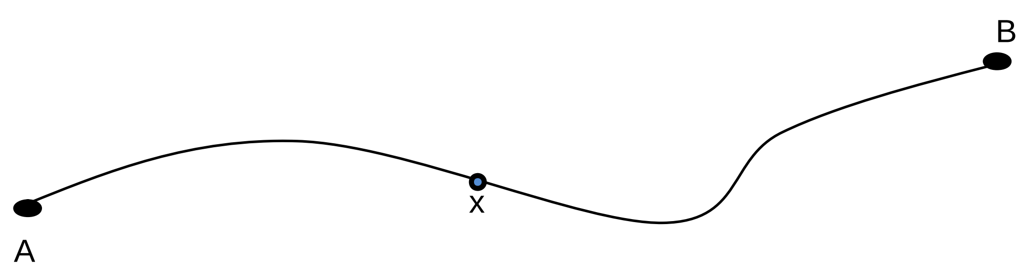


- En la siguiente grafica, la línea que se observa en la figura representa un río que une los pueblos rivereños N y M, y el único medio de desplazamiento en lancha.



Teniendo en cuenta esta situación ¿Cuáles puntos están cerca de x? _________________.

- En la siguiente grafica, La línea representa un río, pinta un entorno cercano “Por derecha y por izquierda” por el cual se puede llegar en lancha hasta x.



- ¿Cuál figura utilizaría para representar el entorno “cercano a x” en el ejercicio anterior?

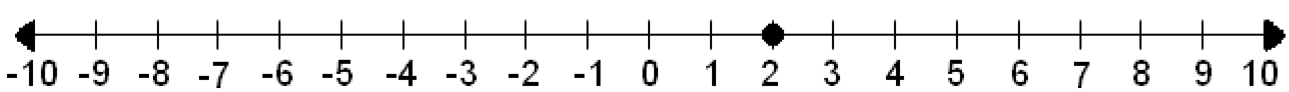
A. B. C. D.

ACTIVIDAD 5

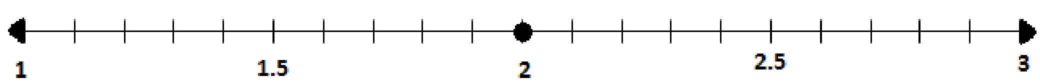
Parte A

OBJETIVO: Formalizar el concepto de entorno relacionado con un radio del tipo Épsilon (L-*E*, L+*E*). Llegar a reconocer que un radio de tipo Épsilon es muy pequeño e inducir la forma de escribir un entorno alrededor de un punto.

- Teniendo en cuenta la recta numérica ¿cuáles números están cerca del número 2? Rta.________________



- Teniendo en cuenta la recta Numérica. ¿Cuáles números están cerca del número 2 por la derecha y por la izquierda?

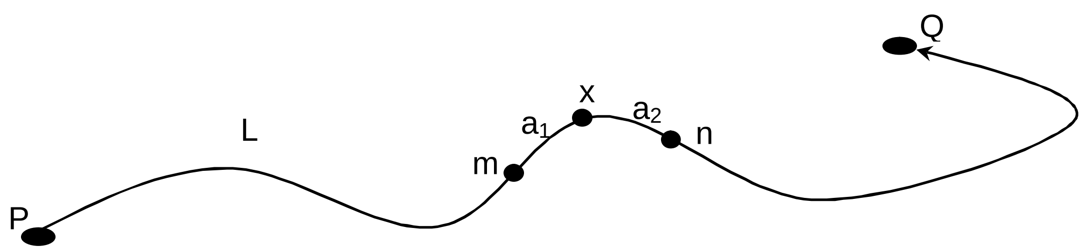


Rta.________________.

Completa la tabla tomando valores cada vez más próximos a los siguientes números, acercándonos tanto por izquierda como por derecha.

				50				
				5				
				0.5				
				0.05				

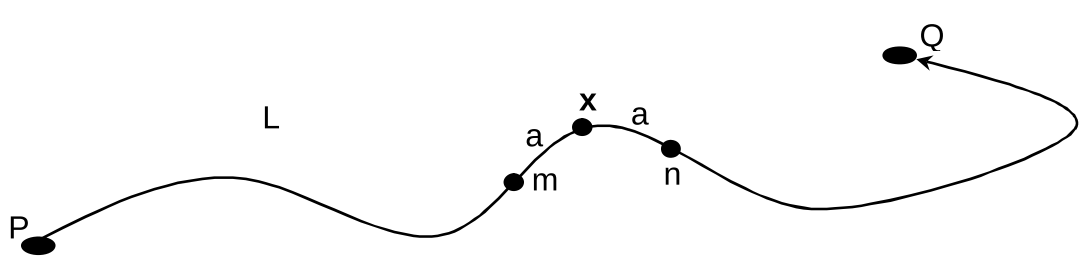
- En El gráfico la línea representa una carretera que une las ciudades P y Q, de la ciudad P hasta el punto “**X”** existe una distancia de 100 Km y la llamamos L. También se conoce la distancia a_1 = 20 km desde “X” hasta el punto “m” y la distancia a_2 = 20 km desde “X” hasta el punto “n”.



El punto m ¿a qué distancia se encuentra de P? _________ ¿Qué operación hiciste para hallarla?__________.
El punto n ¿a qué distancia se encuentra de P? _________ ¿Qué operación hiciste para hallarla?__________.

Situación similar a la anterior pero escribiendo solo las letras que representan las distancias.

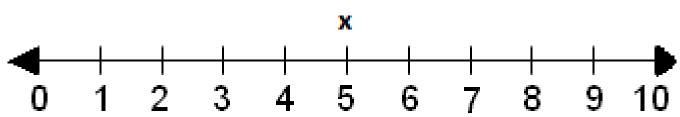
- Se conoce la distancia “L” que hay entre P y el punto “x”**,** También se conoce la distancia que llamamos “a” desde “**x**” a los puntos “m” y “n”, que estan a la izquierda y a la derecha de “**x”** a igual distancia.



¿Cómo escribirías la distancia que hay desde el punto P hasta el punto “m” utilizando solo las letras? ____________.

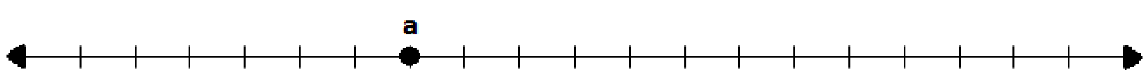
¿Cómo escribirías la distancia que hay desde el punto P hasta el punto “n” utilizando solo las letras? ____________.

- En la recta numérica, ubica el punto $x-2$ y el punto $x + 2$.



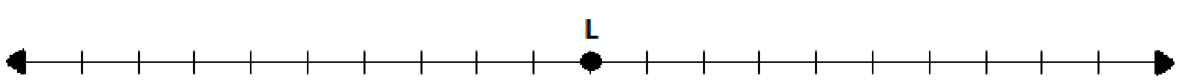
- Escribe 6 números que están entre estos puntos______________________________.
- Escribe el intervalo que representa esta expresión ______________________________

- Sea **a** un número cualquiera en la recta; y δ “sigma”un radio igual a 2. Dibuja en la recta el punto $a- \delta$ y el punto $a + \delta$.



Escribe el intervalo que representa esta longitud. _______________

Sea L un número cualquiera en la recta numérica; y “ε, Épsilon” un radio igual a 3. Dibuja en la recta el punto $L- \varepsilon$ y el punto $L + \varepsilon$.



Escribe el intervalo que representa esta longitud. _________________

Parte B.

FORMALIZACION DE ENTORNO

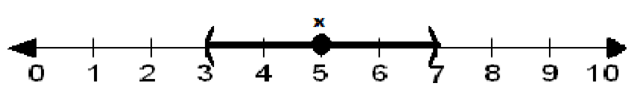
Objetivo: Identificar entornos a alrededor de un número real a.

Llamemos ENTORNO "**B**" de un número "***a***" a los números próximos a "***a***" que están tanto por la derecha como por la izquierda a una distancia o radio pequeño que llamaremos *"ε"* "épsilon" y lo denotamos por la expresiones simbólicas $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ o en forma similar Escribimos $\mathbf{B}_{\varepsilon}\, \boldsymbol{a}$ y se lee "Entorno de radio ***"ε"*** del número *a"*

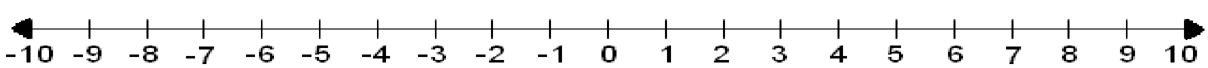
Observemos el siguiente ejemplo:

En la recta numérica, El punto de estudio es a = 5 y el radio es e = 2, el cual se puede escribir de las dos formas simbólicas:

1. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ numéricamente el entorno se escribe (5-2,5+2).
2. $\mathbf{B}_{\varepsilon}\, \boldsymbol{a}$ numéricamente B_5 2 "y se lee entorno B alrededor de 5 y de radio 2"



- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un Entorno alrededor de 4 de radio 1



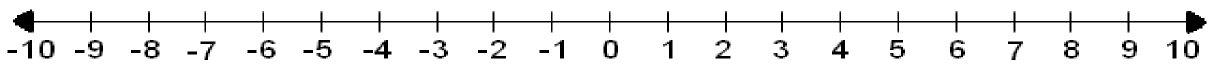
Escribe el entorno en las dos formas simbólicas ______________, ________________.

Escribe cinco números que estén por la derecha y dentro de este intervalo.

____

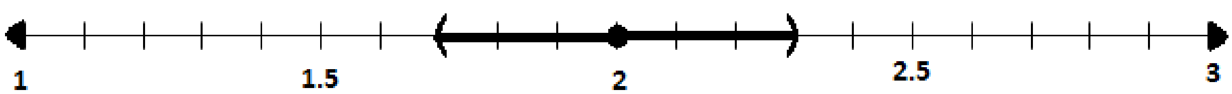
Escribe cinco números que estén por la izquierda y dentro de este intervalo. ______________

- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un entorno **B_1(-3)**



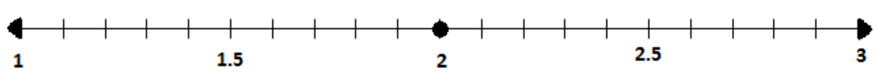
Escríbelo en forma *(a- ε, a+ ε)* _________________
Escribe cinco números que estén por la derecha y dentro de este intervalo. ______________
Escribe cinco números que estén por la izquierda y dentro de este intervalo. ______________

- La siguiente grafica representa un entorno alrededor de 2



¿Cuánto vale el Épsilon "e"? ________________
Escríbelo en forma *(a- ε, a+ ε)* _________________
Y en la forma B_e a ________________

- En la siguiente recta dibuja el entorno (2-0.1, 2 + 0.1)



Escríbelo de la forma simbólica **B_e a** ________________

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

ENTORNO DE X y F(x) EN UNA FUNCIÓN.

Objetivo: Hallar algunos puntos que estén en un entorno de $x=2$ de radio no mayor 0.5 y ver cuáles son las imágenes de estos puntos a través de la función $f(x)$ analizar si también sus imágenes forman un entorno alrededor de un número. Para tal caso se tomó una función lineal y continua.

- Construya un entorno alrededor de $x=2$ a un radio máximo de 0.5. Halle cinco valores que estén por la derecha y cinco por a izquierda de 2; a esos puntos halle sus correspondientes imágenes por la función $f(x)= 2x -1$. Puedes ayudarte con la tabla.

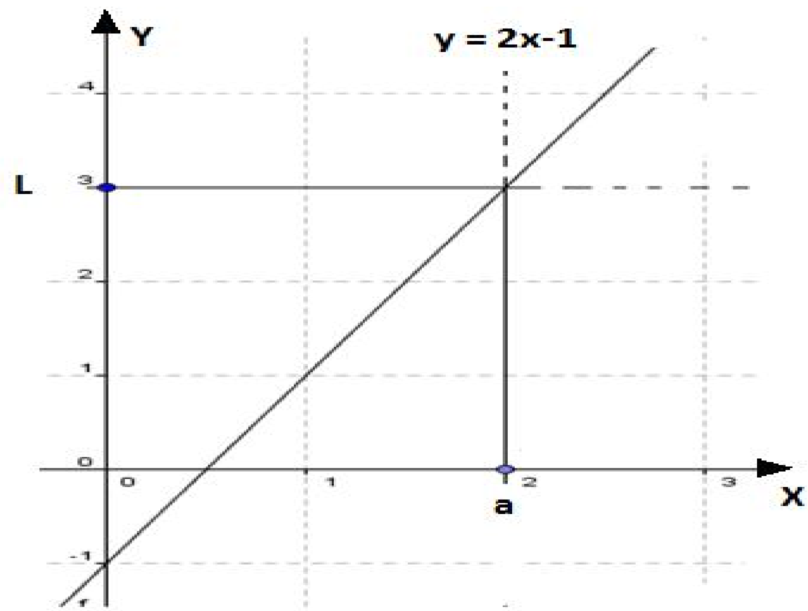
"Se supone que ya conocen la función y su gráfica"

Valor/ función	Izquierda					Valor en estudio	Derecha				
x						**2**					
$F(x)$											

Preguntas

1. ¿Alrededor de que número se forma el entorno en el eje X?_________.
2. ¿Las imágenes "$f(x)$" de los puntos que están en el entorno de "x" forman un entorno? _________
3. Justifica tu respuesta anterior.____
4. Si su respuesta es sí. ¿Alrededor que numero se forma el entorno? _______________
5. ¿cómo es el entorno que se forma en las imágenes "$f(x)$, más grande, más pequeño igual al entorno de x? ____________________________________

- Ahora con ayuda de la siguiente grafica ubica los puntos del entorno en el eje *X* en *a =2* y sus respectivas imágenes *f(x)* en el eje *Y*.



CUESTIONARIO PREGUNTAS PREVIAS

ANEXO B

PREGUNTAS PREVIAS AL DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDACTICA PARA LA NOCION DE ENTORNO

1. ¿Qué entiende por entorno?

Es lo que esta en nuestro alrededor, y que limitamos con lo que nos rodea

2. ¿Qué es un entrono desde el punto de vista matemático?

un entorno matematico es aquel con el cual un numero se aproxima a otro ya sea menor o mayor

3. ¿Cómo podrías dibujar un entorno? Dibújalo si es posible.

dibujaria un entorno que demuestre lo que me rodea y a mi concepto es algo circular o con diferentes figuras

4. ¿Qué términos y definiciones necesitas ó están involucradas en la palabra entorno?

limite, alrededores y lugares o puntos cercanos. o lejanos.

5. ¿De qué depende que podamos decir que algo está cerca o está lejos?

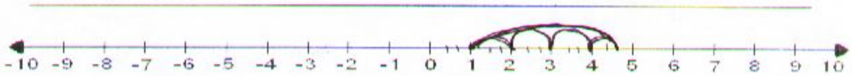
dependiendo en la distancia que este si uno mide mas este esta lejos puede ser tambien directa, indirecta.

6. ¿Existen distancias positivas y negativas? Justifique.

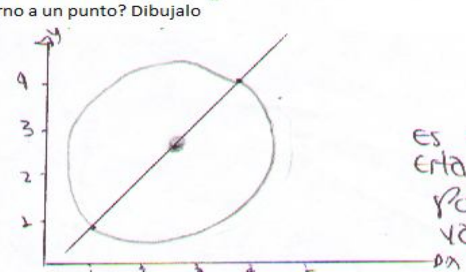
en un plano cartesiano o una recta numerica si donde hay positivos y negativos dependiendo de los puntos que nos den.

7. ¿Cómo sería un entorno en la recta numérica? Se puede o No

si.



8. ¿Cómo seria el entorno a un punto? Dibujalo



es aquello que esta cerca del punto lo rodea ya que es el punto central.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

ANEXO C

PREGUNTAS PREVIAS AL DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDACTICA PARA LA NOCION DE ENTORNO

1. ¿Qué entiende por entorno?

   Es Todo lo que esta a nuestro alrededor.

2. ¿Qué es un entrono desde el punto de vista matemático?

   Es. Todo aquello que podemos. contar con. solo un vistaso.

3. ¿Cómo podrías dibujar un entorno? Dibújalo si es posible.

4. ¿Qué términos y definiciones necesitas ó están involucradas en la palabra entorno?

   El espacio, objetos,

5. ¿De qué depende que podamos decir que algo está cerca o está lejos?

   Depende de nuestros sentidos. y desde el punto de. vista que le podamos dar.

6. ¿Existen distancias positivas y negativas? Justifique.

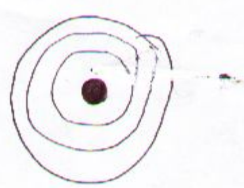
   La positivas irian hacia una direccion determinada y las negativas. al sentido contrario. de las positivas.

7. ¿Cómo seria un entorno en la recta numérica? Se puede o No

   el entorno sería. los numeros que rodean a un. solo numero el cual seria cero.

-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

8. Como seria el entorno a un punto Dibújalo.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

APLICACIÓN DE LA PRUEBA PILOTO.

ANEXO D

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCION DEL CONCEPTO DE ENTORNO

OBJETIVO GENERAL DE LAS ACTIVIDADES

Reconocer el concepto de ENTORNO como conceptos matemáticos previos a la noción de límite en sucesiones y funciones para grado Once, El cual también involucra los conceptos de: Vecindad, Proximidad, cercanía y distancia.

ACTIVIDAD UNO

PARTE A. Tomaremos como referencia a su lugar de vivienda en Mosquera, "Cundinamarca Colombia"

OBJETIVO: Identificación de entornos en términos de proximidad.

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera Cundinamarca y como referencia la esfera terrestre.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Brasil, Ecuador, Peru, venezuela, Oceano Pacifico, caribe

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Colombia.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Manizales, Pereira, Boyaca, Armenia, santander. departamentos

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Cundinamarca.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Funza, Madrid, Facatativa, Bogota, Soacha

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Mosquera.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Santana, santelmo, Poblado, Piedras, Trebol, Arboleda. otros barrios..

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia su barrio donde vive.

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Jardin, Panaderia, Miscelanea, parque.

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia la cuadra donde vive

Describa cuál sería un entorno a su lugar de vivienda.
Minitienda, panaderia, Miscelanea, bicicleteria

- Estando en su habitación ¿cuál sería un entorno?

cama, Armario, Tocador, Televisor, equipo. DVD

PARTE B

OBJETIVO: Identificar qué las proximidades o cercanías son relativas y dependen del contexto en que se establezca el ejercicio.

- Si vives en Mosquera y viajas en avión ¿Cuáles ciudades del mundo están cerca de Mosquera?

Bogota, Cali, Medellin, Boyaca, Villavicencio ...

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

ANEXO E

- Si vives en Mosquera y viajas en automóvil ¿Cuáles ciudades podrían estar cerca de Mosquera?

  Bogota, Manizales, Cali, Villavicencio... Soacha

- Si vives en Mosquera y viajas en bicicleta ¿Cuáles ciudades están cerca de Mosquera?

  Bogota, villavicencio, Madrid, funza, Soacha

- Si vas a pie ¿Qué está cerca de tu casa?

  santana, Madrid, funza, Mosquera, poblado, villa Maria,...

PARTE C

OBJETIVO: Relacionar el concepto de entorno con unidades de longitud y más exactamente con distancia cercana.

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia Cundinamarca. ¿Qué unidad de medida utilizaría para medir una distancia cercana y cuál podría ser esta distancia?

  Kilometros

- Teniendo en cuenta como su lugar de vivienda Mosquera, y como referencia a Mosquera. ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana, cuál podría ser esta distancia?

  3 kilometros

- Teniendo su habitación como referencia. ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana, cuál podría ser esta distancia?

  3 Metros

- Si observas tu pocillo de café sobre la mesa del comedor que ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana a tu pocillo? ¿Cuál podría ser esta distancia?

  50 centimetros

- Si haces un punto en tu cuaderno con la sola huella del lápiz ¿Qué unidad se utilizaría para medir una distancia cercana? ¿Cuál podría ser esta distancia?

  Milimetros

ACTIVIDAD 2

Parte A.

OBJETIVO: Relacionar los conceptos de entorno con el concepto de la ZONA determinada por un punto y dada una condición o un radio de acción.

Situación

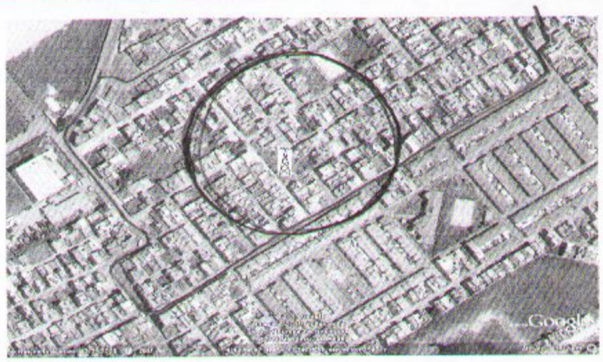
Debido a los niveles de radiación de las antenas y a las bajas potencias de trasmisión de los móviles y de las estaciones base, es necesario distribuir en las grandes ciudades un grupo de estaciones base con el fin de garantizar niveles óptimos de señal a los usuarios. La cobertura de una estación base urbana típica está entre 200 m y 500 m aproximadamente (tomado del documento: TELEFONÍA MÓVIL CELULAR. Funcionamiento y relación de la radiación con la salud humana http://www.asocel.org.co/conferencias/conferencia_3.pdf)

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

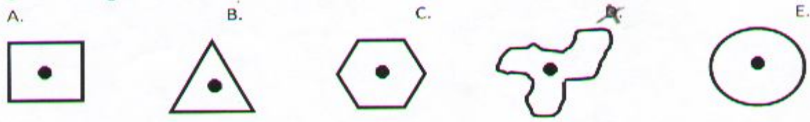
ANEXO F

- Dibuja la zona aproximada que está cubriendo cada antena.



- ¿Con cuál figura DIBUJARIAS una Zona o entorno en los ejercicios anteriores?

A. B. C. E.



Según el mapa, dibuja un entorno aproximado al municipio de Mosquera.

ANEXO G

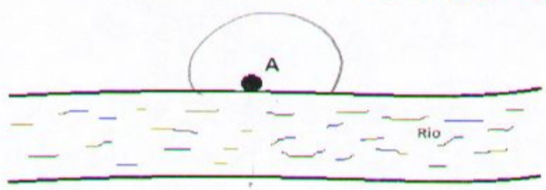
ACTIVIDAD 3.

OBJETIVO: Identificación grafica de entornos dependiendo del contexto y situación.

La situación está condicionada a que no se puede caminar por el rio y tampoco hacer algún condicionamiento diferente al del problema.

- Su pongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuje un entorno o "Zona" de radio "r" aproximado de 50 metros por el cual se puede llegar caminando al punto A.

Nota. *Tómese a "r" como el radio de una circunferencia.*



- Su pongamos que el río tiene un ancho de 100 m. Dibuja la zona por la cual se puede llegar caminando desde la orilla del rio hasta la isla A. ¿Es posible o No?, Justifique su respuesta.

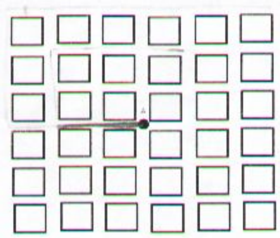
Rta. no, es posible.

- Dibuja una zona aproximada de 120 m por la que se puede llegar en lancha a la isla A; Sabemos que el ancho del río es de 60 m aproximadamente.

- Dibuja una zona aproximada de 80 m de distancia de la isla A hasta donde se puede llegar caminado; Sabemos que el ancho del río es de 40 m aproximadamente.

ANEXO H

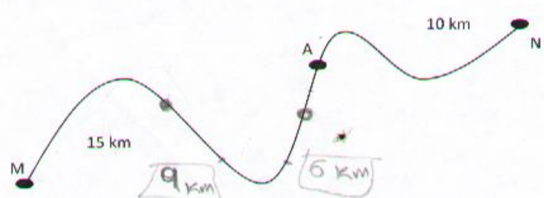
- Dibuja la zona que puede cubrir el taxista en una distancia de 200 m. "La longitud de cada calle es de 100 m aproximadamente"



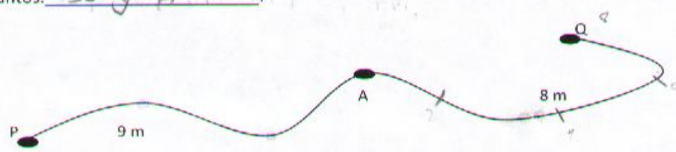
OBJETIVO: Ubicar puntos cercanos a un punto dado en diferentes situaciones y acercándonos al entorno de la recta real.

- Consideremos grafica; la línea nos representa una carretera que une a las ciudades M y N que se encuentran sobre la carretera y la ciudad A esta a cierta distancia de las ciudades M, N.
  Dibuja dos puntos cercanos a la ciudad A y escribe cual podría ser la distancia a dichos puntos. 67 KM - 66 KM - 67 KM

La misma situación anterior.
Dibuja dos puntos cercanos a la ciudad A que estén sobre la carretera y escribe cual podría ser la distancia a dichos puntos. 9 Km - 6 Km.



- Consideremos grafica; la línea une los puntos P y Q que se encuentran sobre la misma y el punto A esta a cierta distancia de los puntos P, Q. Dibuja dos puntos cercanos al punto A que estén sobre la línea y escribe cual podría ser la distancia a dichos puntos. 12 y 6.



ANEXO J

La misma situación anterior para los dos siguientes ejercicios.

¿Cuál podría ser la distancia a dichos puntos? 7 CM 35 CM

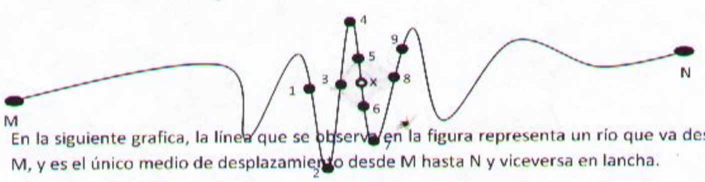
¿Cuál podría ser la distancia a dichos puntos? 25 y 12.5.

Parte C.

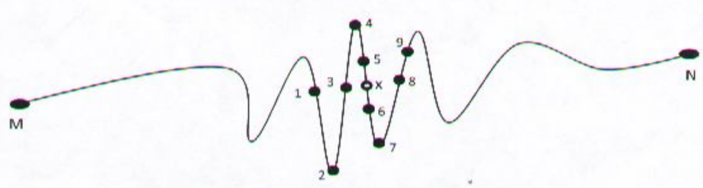
Objetivo: Este tipo de situación permite determinar el entorno a un punto dependiendo del condicionamiento de la misma.

- En la siguiente grafica, la línea representa una carretera que une las ciudades A y B. Dibuja un entorno en el punto x.

- La siguiente figura no representa una situación en particular. Escribe los puntos que están cerca o el entorno de x 3, 5, 8, 6, 4, 9



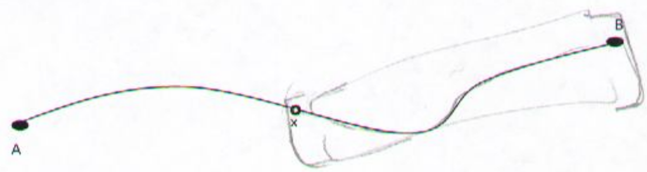
- En la siguiente grafica, la línea que se observa en la figura representa un río que va desde N hasta M, y es el único medio de desplazamiento desde M hasta N y viceversa en lancha.



. ¿Cuáles puntos están cerca de x? 7, 6, 5, 4.

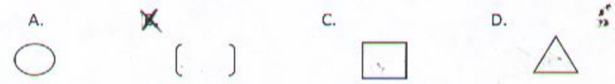
ANEXO K

- La siguiente gráfica representa un río, pinta un entorno cercano por el cual se puede llegar en lancha hasta x. "Por derecha y por izquierda"



- ¿Cuál figura utilizaría para representar el entorno "cercano a x" en el ejercicio anterior?

A. B. C. D.



ACTIVIDAD 4

Parte A

OBJETIVO: Formalizar el concepto de entorno relacionado con un radio del tipo Épsilon (L-*E*, L+*E*). Llegar a reconocer que un radio de tipo Épsilon es muy pequeño e inducir la forma de escribir un entorno alrededor de un punto.

- Teniendo en cuenta la recta numérica ¿cuáles números están cerca del número 2?

  Rta. 1,9 , y 2,1

- Teniendo en cuenta la recta Numérica. ¿Cuáles números están cerca del número 2 por la derecha y por la izquierda?

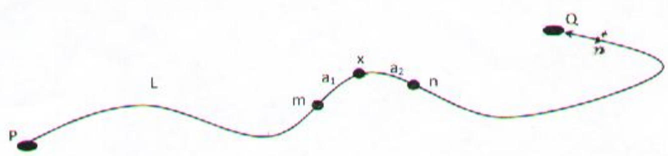
Rta. 1,6 , 1,7 1,8 1,9 y 2,1 2,2 2,3 2,4 , 2,5

ANEXO L

Completa la tabla tomando valores cada vez más próximos a los siguientes números, acercándonos tanto por izquierda como por derecha.

10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

- En El grafico; la línea representa una carretera que une las ciudades P y Q, de la ciudad P hasta el punto "**X**" existe una distancia de 100 Km y la llamamos L. También se conoce la distancia $a_1 = 20$ km desde "X" hasta el punto "m" y la distancia $a_2 = 20$ km desde "X" hasta el punto "n".

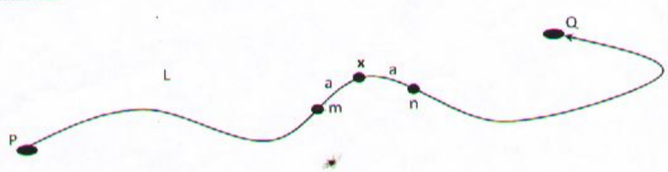


El punto m ¿a qué distancia se encuentra de P? 80 ¿Qué operación hiciste para hallarla? $L - a_1$.

El punto n ¿a qué distancia se encuentra de P? 120 ¿Qué operación hiciste para hallarla? $L + a_2$.

Situación similar a la anterior pero escribiendo solo las letras que representan las distancias.

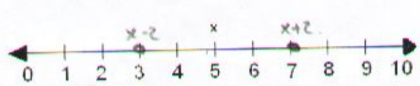
- Se conoce la distancia "L" que hay entre P y el punto "x", También se conoce la distancia que llamamos "a" desde "**x**" a los puntos "m" y "n", que están a la **izquierda** y a la derecha de "**x**" a igual distancia.



¿Cómo escribirías la distancia que hay desde el punto P hasta el punto "m" utilizando solo las letras? $L - a$.

¿Cómo escribirías la distancia que hay desde el punto P hasta el punto "n" utilizando solo las letras? $L + a$.

- En la recta numérica, ubica el punto x-2 y el punto x + 2.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

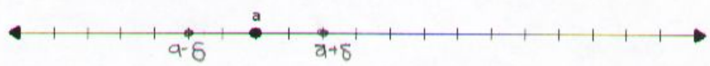
Educadora de educadores

ANEXO M

Escribe 6 números que están entre estos puntos 3, 4, 5, 6, 7, 3,1

Escribe el intervalo que representa esta expresión (3, 7)

- Sea **a** un número cualquiera en la recta; y δ "sigma" un radio igual a 2. Dibuja en la recta el punto a- δ y el punto a + δ.



Escribe el intervalo que representa esta longitud. (a-δ, a+δ)

Escribe cinco números que estén por la derecha y dentro de este intervalo. 1,1 -1,2 -1,3 -1,4 -1,5

Escribe cinco números que estén por la izquierda y dentro de este intervalo. -1,1 -1,2 -1,3 -1,4 -1,5

Sea **L** un número cualquiera en la recta numérica; y "e, Épsilon" un radio igual a 3. Dibuja en la recta el punto **L-*e*** y el punto **L + *e***.

Escribe el intervalo que representa esta longitud. (L-e, L+e)

Parte B.

FORMALIZACION DE ENTORNO

Objetivo: Identificar entornos a alrededor de un número real a.

Llamemos ENTORNO "**B**" de un número "**a**" a los números próximos a "**a**" que están tanto por la derecha como por la izquierda a una Longitud equidistante o radio pequeño que llamaremos "*e*" "épsilon" y lo denotamos por la expresión simbólica (a-e, a+e) o en forma similar Escribimos $\mathbf{B_e}$ **a** y se lee "Entorno de radio ***"e"*** del número a"

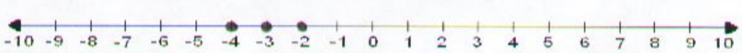
- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un Entorno alrededor de 4 de radio 1

Escríbelo en forma simbólica de intervalo B_1 4.

Escribe cinco números que estén por la derecha y dentro de este intervalo. 4,1 - 4,2 - 4,3 - 4,4 - 4,5

Escribe cinco números que estén por la izquierda y dentro de este intervalo. 3,1 - 3,2 - 3,3 - 3,4 - 3,5

- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un entorno**$\mathbf{B_1}$(-3)**



Escribe el intervalo -3 -1 -3 +1

Escribe cinco números que estén por la derecha y dentro de este intervalo. -3,1 -3,2 -3,3 -3,4 -3,4

Escribe cinco números que estén por la izquierda y dentro de este intervalo. -4,1 -4,2 -4,3 -4,4 -4,5

ANEXO N

- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un entorno alrededor de 2 de radio 0.3

Escribe en forma de intervalo 2 - 0.3   2 + 0.3
Escribe cinco números que estén por la derecha y dentro de este intervalo. 0.3, 0.2, 0.1, 0.01, 0.02
Escribe cinco números que estén por la izquierda y dentro de este intervalo. -0.01, -0.02, -0.03 -0,04 -0,05.

- En la siguiente gráfica dibuja el intervalo que muestra un entorno $B_{0.1}$ 2

Escribe el intervalo 0.1 - 2   0,1 + 2

ENTORNODE X y F(x) EN UNA FUNCIÓN.

Objetivo: Hallar algunos puntos que estén en un entorno de x=2 de radio no mayor 0.5 y ver cuáles son las imágenes de estos puntos a través de la función f(x) analizar si también sus imágenes forman un entorno alrededor de un número. Para tal caso se tomó una función lineal y continua.

- Construya un entorno alrededor de x=2 a un radio máximo de 0.5. Halle cinco valores que estén por la derecha y cinco por a izquierda de 2; a esos puntos halle sus correspondientes imágenes por la función f(x)= 2x -1. Puedes ayudarte con la tabla.

"Se supone que ya conocen la función y su gráfica"

Valor/ función	Izquierda					Valor en estudio	Derecha				
x	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	**2**	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
F(x)	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4

Preguntas

1. ¿Alrededor de que número se forma el entorno en el eje X? 2.
2. ¿Las imágenes "f(x)" de los puntos que están en el entorno de "x" forman un entorno? 0
3. Justifica tu respuesta anterior. xq" los puntos de f(x) es la misma cantidad del entorno
4. Si su respuesta es sí. ¿Alrededor que numero se forma el entorno? 3
5. ¿cómo es el entorno que se forma en las imágenes "f(x), más grande, más pequeño igual al entorno de x? Más grande

- Ahora con ayuda de la siguiente grafica ubica los puntos del entorno de x y sus respectivas imágenes en Y.