IDENTIFICACIÓN DE ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO, CON INSTRUCCIÓN PREVIA, AL RESOLVER PROBLEMAS DE TIPO COMBINATORIO SIMPLE

MARY NELSY PEÑA ARIZA
MÓNICA ANDREA VERGARA CHÁVEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2012

IDENTIFICACIÓN DE ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO, CON INSTRUCCIÓN PREVIA, AL RESOLVER PROBLEMAS DE TIPO COMBINATORIO SIMPLE

MARY NELSY PEÑA ARIZA
MÓNICA ANDREA VERGARA CHÁVEZ

Trabajo de grado para optar al título de Especialista en Educación Matemática

Asesora
INGRITH YADIRA ÁLVAREZ ALFONSO
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2012

Para todos los efectos, declaramos que este trabajo es original y de nuestra autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido de trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Identificación de estrategias utilizadas por estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, al resolver problemas de tipo combinatorio simple.
Autor(es)	Peña Ariza, Mary Nelsy; Vergara Chávez, Mónica Andrea
Director	Álvarez Alfonso, Ingrith Yadira
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2012, 68p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	RAZONAMIENTO COMBINATORIO, ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN, PROBLEMAS COMBINATORIOS SIMPLES, ESTUDIANTES CON INSTRUCCIÓN PREVIA.

2. Descripción

El presente trabajo de grado pretende dar respuesta a la pregunta ¿qué estrategias usan los estudiantes de grado octavo al resolver problemas de tipo combinatorio simple, después de haber recibido instrucción en el campo de la probabilidad en años anteriores de la escolaridad básica?, para ello, se realiza un estudio de las investigaciones en esta temática y se diseña y aplica una prueba diagnóstica compuesta por tres problemas combinatorios simples (selección, partición y colocación).
La aplicación de la prueba diagnóstica permite conocer las respuestas de los estudiantes, las cuales son analizadas a la luz de las investigaciones relacionadas en el marco teórico del presente trabajo de indagación, con el fin de describir y categorizar las estrategias de solución a problemas combinatorios simples.

3. Fuentes

En este trabajo de indagación se consultaron dos tesis (una doctoral, una de maestría), ocho artículos y dos documentos oficiales nacionales de Educación Colombiana, entre ellos se destacan:

Bustos, L. (2012). Análisis de estrategias de resolución de problemas combinatorios en estudiantes de noveno grado. Tesis de Maestría. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

English, L. (2007). Children’s strategies for solving two and three dimensional combinational problems. In: Leder, Gilah C. and Forgasz, Helen J., (eds.) Stepping stones for the 21st century: Australasian mathematics education research. Sense Publishers, The Netherlands, 139-156.

Roa, R., Batanero, C. y Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, agosto 15, (002). Santillana, Distrito Federal México, 5 – 25.

Roa, R. (2000) Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Shin, J., y Steffe, L. (2008) Seventh graders’ use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinatorial problems. En Swars, S.L., Stinson, D.W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). (2009). Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University.

4. Contenidos

El presente trabajo de indagación está dividido en los siguientes capítulos:

1. Introducción: se hace una presentación somera de la indagación con el fin de llevar al lector a una ambientación de la misma.

2. Planteamiento del problema: se comenta y sustenta el problema del presente trabajo de indagación basados en referentes teóricos nacionales e internacionales sobre razonamiento combinatorio, para finalmente plantear la pregunta acerca de las estrategias de solución que utilizan estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, al resolver problemas combinatorios simples.

3. Justificación: se comenta la pertinencia del razonamiento combinatorio basado en referentes teóricos nacionales e internacionales, junto con la vinculación de ésta en otras áreas de aplicación.

4. Objetivo: se define el objetivo general de la indagación, el cual busca identificar las estrategias de solución utilizadas por estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, para problemas combinatorios simples. Para cumplir este objetivo, se establecen los siguientes objetivos específicos:

    - Tener un panorama general de las temáticas de probabilidad tratadas en cada nivel escolar a través de una revisión bibliográfica de documentos nacionales y referentes teóricos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria.
    - Proponer y aplicar una prueba diagnóstica que permita evidenciar las estrategias utilizadas por los estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, al resolver problemas combinatorios simples.
    - Describir y categorizar las estrategias utilizadas por los estudiantes de octavo grado a la luz de las investigaciones relacionadas en el marco teórico de dicha indagación.

5. Marco referencial: se describen los referentes teóricos de la indagación, relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria a nivel nacional e internacional, junto con la descripción del esquema combinatorio y lo que la literatura reporta como estrategias de solución para problemas combinatorios.

6. Metodología: se establecen cinco fases para la organización de la indagación: 1) fase de revisión teórica, 2) fase de diseño, 3) fase de aplicación, 4) fase de análisis de datos, 5) fase de caracterización de las estrategias.

7. Conclusiones: Se describe los principales aportes del trabajo relacionados con la pregunta de investigación, en contraste con las investigaciones relacionadas con el tema y las respuestas de los estudiantes para obtener las estrategias de solución a problemas combinatorios simples.

8. Bibliografía: Se detalla las investigaciones y artículos consultados que sustentan la indagación.

9. Anexos: se presenta las tres guías propuestas para la prueba diagnóstica.

5. Metodología

La metodología de este trabajo se enmarca en cinco fases: revisión teórica, diseño, aplicación, análisis de datos y categorización de las estrategias. Para ello, en primera medida se realiza un estudio de investigaciones sobre la combinatoria como sustento de dicha indagación, luego se diseña y aplica una prueba diagnóstica compuesta por tres problemas de combinatoria simple (uno de selección, uno de partición, uno de colocación) a un grupo de 38 estudiantes de octavo grado del Colegio Nuestra Señora de Fátima PONAL.

La información recolectada, a través de las guías resueltas por los estudiantes, se contrastaron con las investigaciones del marco referencial con el fin de describir y categorizar las estrategias de solución, por parte de dichos estudiantes, a problemas de combinatoria simple.

6. Conclusiones

Algunas conclusiones del trabajo de indagación son:

- La enumeración de casos fue la estrategia más utilizada por los estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, al resolver problemas combinatorios simple.
- La estrategia 6 “Ensayo y Error” y la 10 “Odómetro completo” propuestas por English (2007) fueron las más utilizadas al resolver problemas combinatorios de selección y partición. En este caso, todos los estudiantes que utilizaron la estrategia 10 fueron acertados en las respuestas al obtener las combinaciones posibles a los problemas planteados; sin embargo, sólo un estudiante de los que utilizaron la estrategia 6 obtuvo las combinaciones posibles de los problemas.
- La estrategia Descomponer el problema en subproblemas fue utilizada en el problema de colocación para dividir el problema en tres problemas, en el que la reunión de las respuestas de dichos problemas da solución al problema principal.
- Se observó errores al momento de contar las enumeraciones halladas en el problema de colocación, debido a que no se estableció correctamente la *unidad contable* (Shin &Steffe, 2008) como la unión de dos *unidades simples.* Por ejemplo, en el caso del problema de distribuir las cinco personas en las dos carpas, hicieron las reparticiones de las personas en las dos carpas y contaron las dos reparticiones como dos combinaciones posibles, en lugar de tomar la unión de esas dos reparticiones y enumerarla como una combinación posible del problema.
- El no asignar el patrón cíclico o el no llevar un procedimiento sistemático al momento de asignar las variables al objeto de estudio, llevó a que no se establecieran todas las combinaciones posibles del problema y se repitieran algunas de ellas.

Elaborado por:	Peña Ariza, Mary Nelsy; Vergara Chávez, Mónica Andrea.
Revisado por:	Álvarez Alfonso, Ingrith Yadira

Fecha de elaboración del Resumen:	06	11	2012

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

pág.

LISTA DE TABLAS

pág.

INTRODUCCIÓN

La combinatoria es un componente esencial de la matemática discreta - estudia las estructuras contables como por ejemplo: la lógica, los números enteros y los grafos - y como tal, según Kapur (1970) citado por Batanero y Navarro-Pelayo (1996), tiene un papel importante en las matemáticas escolares al no depender del cálculo y al permitir plantear problemas apropiados para diferentes niveles. Así mismo, se puede discutir con los alumnos problemas aún no resueltos, de modo que descubran la necesidad de crear nuevas matemáticas y entrenarlos en la enumeración, la realización de conjeturas, la generalización, la optimización y el pensamiento sistemático. Además ayuda a desarrollar conceptos como: relación de orden, relación de equivalencia, función, muestra, conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc., según lo afirma Batanero (2001).

La combinatoria tiene aplicaciones en diferentes campos como: Química, Biología, Física, Comunicación, Probabilidad, Teoría de números, Grafos, etc., por lo que no es simplemente una herramienta para el cálculo de probabilidad. Debido a la importancia de ella es necesario desarrollar la capacidad combinatoria en el sujeto, pues de lo contrario no es capaz de usar la idea de probabilidad, salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales, tal como lo afirman Piaget e Inhelder (1955) citados por Roa (2000).

Además de su importancia en el desarrollo de la idea de probabilidad, la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal. De acuerdo con Piaget e Inhelder (1955) citados por Roa (2000), el razonamiento hipotético-deductivo opera con las posibilidades que el sujeto descubra y evalúa por medio de operaciones combinatorias; esta capacidad puede relacionarse con los estadios descritos en la teoría de Piaget, ya que después del período de las operaciones formales, el adolescente puede adquirir procedimientos sistemáticos relacionados con combinatoria.

Teniendo en cuenta los aportes antes mencionados, se originó la inquietud por conocer las estrategias de solución utilizadas por estudiantes de grado octavo, con instrucción previa del tema, al enfrentarse con problemas de combinatoria simple – selección, partición y colocación. Por tal motivo, se diseñó y aplicó una actividad diagnóstica a un grupo de estudiantes de grado octavo con el fin de describir y categorizar dichas estrategias a la luz de las investigaciones realizadas por English (2007), Roa, Batanero y Godino (2003) y Shin & Steffe (2008) lo cual se logrará sistematizar al finalizar este documento.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La estadística y la probabilidad se han ido incorporando en el currículo de matemáticas para la enseñanza primaria y secundaria en la mayoría de los países desarrollados, no sólo por cuestiones didácticas, sino con el fin de formar y desarrollar una Cultura Estadística en las personas, de tal manera que los lleve a interpretar y tomar decisiones basadas en informaciones, según Batanero (2001), al considerarse útil en la investigación, la técnica y la vida profesional.

En el caso de la educación colombiana, la formulación de los Lineamientos Curriculares para Matemáticas da importancia al pensamiento aleatorio reorientando el currículo a través de los pensamientos y sistemas que propicien el desarrollo de los cinco procesos fundamentales: formulación, tratamiento y resolución de problemas; la modelación de procesos y fenómenos de la realidad; la comunicación; el razonamiento; la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, en diversos contextos; buscando así un espíritu de exploración y de investigación por parte de los estudiantes como de los docentes. (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998).

En complemento de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el MEN presenta los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que orientan las competencias que los estudiantes deben desarrollar en cada nivel educativo; tales competencias "requieren de ambientes de aprendizajes enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencias más y más complejos" (MEN, 2006). Así mismo, se busca que la educación matemática contemple tres factores prioritarios: la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la búsqueda de equidad en el conocimiento social (MEN, 2006).

Con la intención de cumplir con las directrices del MEN, es necesario centrar la atención en las competencias y estándares del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, los cuales proponen que los estudiantes al terminar de cursar los grados octavo y noveno deben:

- Usar modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.
- Conjeturar acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. (MEN, 2006).

De acuerdo a lo anterior, es importante conocer las habilidades cognitivas y procedimentales que los estudiantes han desarrollado hasta el grado séptimo acerca de combinatoria simple, ya que esto permitirá identificar la manera cómo el estudiante hace uso de sus conocimientos previos para generar soluciones a situaciones que involucren la temática en estudio.

Revisando el plan de estudios de la institución seleccionada para la indagación, se observa que desde tercer grado de básica primaria se incluye Estadística en el currículo, iniciando con representación de datos en gráficas de barras y pictogramas; luego en grado cuarto se realizan actividades de representación de datos en diagramas circulares y análisis de gráficas estadísticas en contextos propios de la edad, y en grado quinto trabajan medidas de tendencia central para datos no agrupados y retoman lo aprendido en los cursos anteriores, de lo cual se puede deducir que los temas tratados en primaria son exclusivamente de índole estadístico dejando de lado, hasta el momento, lo relacionado con el razonamiento probabilístico.

Según este mismo plan de estudio, para sexto y séptimo grado, el estudiante ya se inicia en las nociones básicas de probabilidad donde identifica experimentos aleatorios, determina espacios muéstrales asociados a un experimento y calcula la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio; y en grado octavo, los estudiantes deben determinar los casos posibles y favorables de un evento aleatorio simple y calcular la probabilidad de dichos eventos usando diversos métodos de conteo.

De acuerdo a los conocimientos previos que el estudiante de grado octavo debe dominar, se encuentra pertinente analizar el nivel de razonamiento combinatorio que han desarrollado los adolescentes de este grado, a través de las estrategias que podrían emplear al resolver problemas de combinatoria simple. Por esta razón, para poder desarrollar lo propuesto en el plan de estudios y cumplir con las políticas nacionales referentes al razonamiento probabilístico, es conveniente saber si éstos conceptos fueron abordados y asimilados en los cursos anteriores a octavo grado, no sólo a nivel algorítmico sino de razonamiento, debido a que en el bachillerato se enfatiza en el aprendizaje de fórmulas y proposición de ejercicios típicos sin ser contextualizados, según lo afirman Batanero y Navarro-Pelayo (1996). Además, se conoce que la enseñanza de la probabilidad en Colombia es orientada con metodologías tradicionales debido al poco dominio de tales temáticas por parte de los docentes según lo afirman Fernández, Sarmiento y Soler (2008) lo que ha traído como consecuencia sesgos en los conocimientos de los estudiantes.

Con base en los argumentos anteriores, se pretende indagar sobre ¿qué estrategias usan los estudiantes de grado octavo al resolver problemas de tipo combinatorio simple, después de haber recibido instrucción en el campo de la probabilidad en años anteriores de la escolaridad básica?

2. JUSTIFICACIÓN

De acuerdo a documentos oficiales e investigaciones de autores mencionados a lo largo del trabajo de indagación, se pretende conocer cómo los estudiantes abordan problemas de combinatoria simple, ya que Roa y Navarro–Pelayo (1996) señalan que muchas de las causas de los errores e ideas incorrectas de los niños en el campo de la probabilidad obedecen a la falta de razonamiento combinatorio, mostrando que éste no se desarrolla fácilmente y que es necesario prestar un interés especial a su enseñanza en la escuela.

Al realizar un análisis sobre las estrategias de solución para problemas de combinatoria simple, abordadas por los estudiantes seleccionados como objeto de estudio, se logrará tener conocimiento del proceso de enseñanza de la combinatoria aplicado a la población elegida, lo cual permitirá conocer los avances respecto al razonamiento probabilísticos en niños entre 11 a 13 años de la institución donde se llevará a cabo la indagación. Además dicho pensamiento tiene su base dentro del razonamiento combinatorio pues, como afirma Roa (2000), numerosas investigaciones muestran que, con frecuencia, las personas adultas que presentan dificultades o sesgos dentro de su razonamiento probabilístico se debe a un razonamiento combinatorio deficiente.

Por otra parte, según Batanero y Navarro-Pelayo (1996) el término combinatoria es entendido como el arte de la enumeración de todas las formas posibles en que un número de elementos pueden ser organizados sin perder algún resultado posible. Es por ello que la combinatoria cobra gran importancia, dado que si el sujeto no desarrolla la capacidad de enfrentarse a situaciones de tipo combinatorio y usar la idea de probabilidad, entonces no puede generar un pensamiento probabilístico. Por su parte, Inhelder y Piaget (1955) citado por Roa (2000), sostienen que el razonamiento hipotético-deductivo, opera con las posibilidades que el sujeto descubre y evalúa por medio de la combinatoria, lo cual se da solamente en las operaciones formales.

En consecuencia es importante que los docentes, además de considerar situaciones de aplicación real para introducir los conceptos probabilísticos, deben preparar y utilizar situaciones abiertas, orientadas hacia proyectos, que sean susceptibles de cambios, resultados inesperados e imprevisibles, que aborden temas externos a las matemáticas lo cual permitirán favorecer procesos interdisciplinarios de gran riqueza (MEN, 1998). Aunque se ha implementado la enseñanza de la probabilidad desde la primaria se hace necesario una formación docente fundamentada en el conocimiento teórico, pedagógico y didáctico de las temáticas incorporadas en el currículo de matemáticas (Rico, 1997) porque se observa deficiencias en el dominio de los conceptos probabilísticos por parte de los docentes de educación básica y secundaria que conlleva a una práctica pedagógica con errores según lo manifiesta Fernández, Sarmiento y Soler (2008).

3. OBJETIVO

En este capítulo se hace explícito el objetivo general del presente trabajo de indagación, junto con los objetivos específicos que ayudan al cumplimiento del mismo.

OBJETIVO GENERAL

Describir y categorizar las estrategias utilizadas por los estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, al resolver problemas de tipo combinatorio simple.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Tener un panorama general de las temáticas de probabilidad tratadas en cada nivel escolar a través de una revisión bibliográfica de documentos curriculares oficiales, referentes teóricos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria, y documentos propios de la Institución Educativa seleccionada.

- Proponer y aplicar una prueba diagnóstica, que permita evidenciar las estrategias utilizadas en la solución de problemas de combinatoria simple en estudiantes de grado octavo.

- Describir las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes de grado octavo, con instrucción previa, al resolver problemas de tipo de combinatorio simple.

- Categorizar las estrategias utilizadas por estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, al resolver problemas combinatorios simples, sustentados en las investigaciones relacionadas en el marco teórico del presente trabajo de indagación.

4. MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presenta el marco referencial orientado en tres partes: la primera, hace referencia a la enseñanza de la combinatoria desde las propuestas hechas en los documentos oficiales, en los que se expone su vinculación directa con el pensamiento aleatorio y pensamiento numérico; la segunda, relacionada con la caracterización de los problemas combinatorios simples; y la última, relacionada con las estrategias que utilizan los estudiantes con instrucción previa, ante problemas combinatorios simples.

4.1 COMBINATORIA EN EL MARCO LEGAL

Los documentos oficiales que sirven de referente sobre combinatoria son: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) en los que no se hace mención explícita de su estudio en el aula, pero en la descripción del pensamiento aleatorio sugiere que "debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos" (MEN, 1998, p. 69); aspecto que se puede interpretar como la incorporación implícita de algunos componentes de la combinatoria entendida en este trabajo, como "el arte […] que nos enseña a enumerar todos los modos posibles en que un número dado de objetos puede mezclarse y combinarse de manera que estemos seguros de que no hemos omitido ninguno de los posibles" (Batanero y Navarro-Pelayo, 1996, p. 17).

Por otra parte, en la presentación de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se menciona de manera explícita que "el pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente de la estadística descriptiva y en la combinatoria" (MEN, 2006), en donde líneas más adelante se vuelve a resaltar, como componentes del pensamiento aleatorio, la simulación de experimentos y la realización de conteos, así como la importancia de realizar conteos sistemáticos del número de combinaciones posibles que se pueden asumir como igualmente probables, relacionados con el cálculo de probabilidades que permiten que los estudiantes puedan distinguir entre situaciones determinísticas y aleatorias.

En la Tabla 1, se mencionan los estándares (MEN, 2006), en donde se observan las competencias que se espera logren los estudiantes respecto a la temática de combinatoria simple.

Tabla 1. Estándares curriculares asociados a la combinatoria (MEN, 2006).

Pensamiento aleatorio	**Estándar asociado**
6° y 7°	Uso de modelos (diagrama de árbol, por ejemplo para discutir y predecir la posibilidad de ocurrencia de un evento).
8° y 9°	Calculo de probabilidad de eventos simples, usando métodos diversos (listado, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
Pensamiento numérico	**Estándar**
6° y 7°	Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se espera que los estudiantes al ingresar a octavo grado aborden elementos para desarrollar el razonamiento combinatorio a través de la resolución de problemas combinatorios simples.

4.2 CARACTERIZACIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS SIMPLES

En la revisión teórica se encontró que el instrumento propuesto por Roa (2000), para evaluar el razonamiento combinatorio, relaciona las operaciones combinatorias con la categorización de problemas combinatorios propuesta por Dubois (1984).

A manera de introducción se describen algunas palabras claves que ayudan a la comprensión de los conceptos que se involucran en los problemas combinatorios:

- Como esquema combinatorio se entienden las categorías propuestas por Dubois (1984) al clasificar los problemas combinatorios simples en: selección, partición y colocación.
- Como problemas combinatorios simples se entiende aquellos problemas que para su solución requieren una única técnica de conteo ó regla combinatoria.
- Como técnica de conteo se consideran las permutaciones, variaciones y combinaciones con o sin repetición.
- Como regla combinatoria se consideran: la regla de la suma y la regla del producto.

De otro lado, Fischbein (1975), citado por Bustos (2012), resalta el uso del diagrama de árbol como representación gráfica en la resolución de problemas combinatorios. Además, existen otras representaciones gráficas usadas por los estudiantes como las pictóricas (dibujos), el uso de grafos, listas y fórmulas algébricas (Bustos, 2012).

Así pues, se describe los diferentes tipos de problemas combinatorios simples propuestos por Dubois (1984), citado en Roa (2000), ellos son:

1. Los problemas de selección: se considera un conjunto de *m* objetos (generalmente distintos), de los cuales se extrae una muestra de *n* elementos. A manera de ejemplo se cita el siguiente problema tomado de Dubois (1984), citado por Roa (2000).

> *En un bombo hay cuatro bolas enumeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. La bola extraída se vuelve a introducir en el bombo, se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída vuelve a introducirse en el bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?*

Según el autor, este es un ejemplo de selección, en donde la palabra clave es "elegir", en este caso al seleccionar la muestra, se puede repetir elementos como sucede en este ejemplo.

Al seleccionar una muestra, algunas veces se puede repetir uno o más elementos y otras veces no es posible. Según esta característica y si el orden en que la muestra es extraída es relevante o no, se obtiene las cuatro operaciones combinatorias básicas, que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Diferentes operaciones combinatorias en el esquema de selección.

	Muestra Ordenada	**Muestra No ordenada**
Con Reemplazamiento	VRm,n (Variación con repetición)	Vm,n (Variación sin repetición)
Sin Reemplazamiento	CRm,n (Combinación con repetición)	Cm,n (Combinación ordinaria)

De la tabla 2 y teniendo en cuenta que *m* es el número de elementos del conjunto y *n* son los elementos extraídos de la muestra, donde *m>n,* se aclara que: *VRm,n* es la operación combinatoria *variación con repetición*, *Vm,n* es la operación combinatoria *variación sin repetición; CRm,n* es la operación combinatoria *combinación con repetición; Cm,n* es la operación combinatoria *combinación sin repetición.* En el caso en que *m=n* se da la operación permutación *P* con o sin repetición, es decir, las permutaciones son un caso especial de las variaciones.

2. Los problemas de colocación: se refiere a colocar una serie de *n* objetos en *m* celdas. Existen posibilidades diferentes de problemas en este modelo dependiendo de las siguientes características:
   • Si los objetos a colocar son idénticos;
   • Si las celdas son idénticas o no;
   • Si los objetos colocados dentro de las celdas se deben ordenar;

• Condiciones que se añadan a la colocación, tales como el máximo número de objetos en cada celda.

Para cada posibilidad de problema de colocación no hay una operación combinatoria distinta, y también pueden existir casos en que se utilice la misma operación combinatoria para diferentes problemas de colocación. El siguiente problema, tomado de Dubois (1984) citado por Roa (2000), es un ejemplo de problema de colocación.

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en cuatro sobres diferentes?

3. Los problemas de partición: divide un conjunto de *n* objetos en *m* subconjuntos. Se puede visualizar la colocación de *n* objetos en *m* celdas como la partición de un conjunto de *n* elementos en *m* subconjuntos (las celdas). El siguiente problema, tomado de Dubois (1984) citado por Roa (2000), es un ejemplo de partición.

María y Carmen tienen cuatro cromos números de 1 a 4. Deciden repartírselo entre las dos (dos cromos para cada una) ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos?

Teniendo en cuenta la caracterización de Dubois (1984), citado por Roa (2000), se pretende abordar los problemas combinatorios simples con el fin de observar e identificar las estrategias usadas por los estudiantes de octavo grado, con instrucción previa, en cada uno de los tipos de problemas combinatorios antes mencionados.

Se considera que un estudiante con instrucción previa puede identificar la operación combinatoria en los problemas propuestos de la prueba diagnóstica y ayudarse del razonamiento recursivo, es decir de una secuencia o patrón que se repite, para poder calcular todas las posibilidades sin necesidad de enumerarlas. Además, según Batanero y Navarro-Pelayo (1996), algunas de las dificultades que podría presentarse en estudiantes con instrucción previa, al resolver problemas combinatorios, serían:

• Que no tengan en cuenta el orden y la repetición involucrada en los problemas combinatorios.
• Que usen erradamente las fórmulas combinatorias.
• Que interpreten inadecuadamente el diagrama de árbol

• Que resuelvan incorrectamente problemas combinatorios que involucre una sola operación (combinatoria simple).

4.3. ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS COMBINATORIOS SIMPLES.

En la investigación de Roa, Batanero y Godino (2003) se indaga acerca de los criterios a tener en cuenta en problemas combinatorios simples y compuestos para mejorar su enseñanza. También caracteriza y analiza las estrategias y los errores que comenten los alumnos con preparación académica al resolver problemas combinatorios.

Para la presente indagación se tendrán en cuenta las estrategias mencionadas por dichos autores cuando el estudiante se enfrenta con problemas combinatorios simples, tales como traducir el problema en otro equivalente, descomponer el problema en partes y fijar variables; junto con el uso de las reglas combinatorias de la suma y del producto. A continuación se explicita cada una de las estrategias.

1. Traducir el problema en otro equivalente: se reformula el problema cambiando el contexto de los elementos que intervienen, convirtiéndolo en otro problema con similar estructura combinatoria.
2. Descomponer en subproblemas: se descompone el problema en otros, de estructura combinatoria más sencilla y parámetros de menor tamaño, que recogen de manera exhaustiva todos los casos del problema inicial.
3. Fijar variables: se asigna valores concretos a una o más variables del problema para convertirlo en otro del mismo tipo, pero con valores menores que los parámetros. Luego, resuelve el problema más sencillo, y a partir de él, generaliza para resolver el problema inicial utilizando la recursión.

En cuanto al uso de las reglas combinatorias Roa, Batanero y Godino (2003) afirman que:

- La regla de la suma: Supongamos que un procedimiento A se puede hacer de *m* maneras, y que un segundo procedimiento B se puede hacer de *n* maneras. Además A y B son mutuamente excluyentes. Entonces el número de maneras como se puede hace A o B es (m+n) maneras.
  En términos de conjuntos:
  Si A_1, A_2, A_3,…, A_n son conjuntos finitos no vacíos, entonces:
  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|$

  La regla de la suma se usa cuando el estudiante no recuerda las fórmulas y trata de generalizar un modelo. El estudiante aplica la regla de la suma en el contexto del problema, dividiéndolo en subconjuntos mutuamente excluyentes.

- La regla del producto: supóngase que el proceso consiste en *k* etapas, fases o tareas independientes. La primera tarea se puede realizar de n_1 maneras o da n_1 resultados posibles, para cada uno de estos resultados la segunda tarea se puede realizar de n_2 maneras o da n_2 resultados posibles, para cada uno de estos resultados la tercera tarea se puede realizar de n_3 maneras o da n_3 resultados posibles, y así sucesivamente, entonces el número de maneras como se pueden realizar las *k* tareas está dado por $n_1 x n_2 x n_3 x \ldots x n_k$.
  En términos de conjuntos:
  Si A_1, A_2, A_3,…, A_n son conjuntos finitos no vacíos, entonces:
  $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times |A_3| \times \ldots \times |A_n|$

  La regla del produto se usa en problemas en los cuales el estudiante trate de generalizar un modelo combinatorio, en lugar de emplear fórmulas.

De otro lado, English (2007) detalla las estrategias espontáneas desarrolladas por niños entre 7 a 12 años, al resolver problemas combinatorios bidimensionales y tridimensionales en una escuela australiana, entendiendo los problemas bidimensionales como aquellos que combinan dos conjuntos heterogéneos (por ejemplo: camisas y pantalones); y los problemas tridimensionales donde combinan tres conjuntos (por ejemplo: camisas, pantalones y medias). Así mismo, clasificó las respuestas de los estudiantes en cinco estrategias para los problemas bidimensionales y cinco estrategias similares para los problemas tridimensionales. Dentro de las estrategias para los problemas bidimensionales se encuentran:

Estrategia 1. Caracterizada por ensayo y error, los estudiantes seleccionan aleatoriamente la forma de vestir a los osos sin tener en cuenta algún procedimiento sistemático de conteo.
Estrategia 2 y 3. Los niños empiezan a usar un patrón para formar las combinaciones (posibilidades), pero en la estrategia 2 faltan algunas posibilidades; mientras que en la estrategia 3 logran todas las posibilidades al menos para un elemento.
Estrategia 4 y 5. Los niños usan un patrón llamado odómetro para formar las diferentes combinaciones a partir de un mismo elemento. En las respuestas se observa que terminan las combinaciones de un elemento y pasan al segundo elemento hasta encontrar todas las posibilidades, pero determina todas las combinaciones posibles en la estrategia 5.

De igual forma, en los problemas tridimensionales se caracterizaron las siguientes estrategias:

<u>Estrategia 6:</u> Similar a la estrategia 1 caracterizada por ensayo y error, en algunos casos puede determinar todas las posibilidades.
<u>Estrategia 7:</u> Los niños eligen un elemento constante pero determinar las posibilidades completamente.
<u>Estrategia 8:</u> Los niños adoptan un elemento constante y patrones cíclicos pero los conteos no son determinados completamente.
<u>Estrategia 9:</u> Usan la estrategia del odómetro sin determinar todas las posibilidades del caso.
<u>Estrategia 10.</u> Usan la estrategia del odómetro en forma sistemática y completa.

Finalmente se concluye que los niños de 7 a 12 años tienen mayor éxito en los problemas bidimensionales, siendo la estrategia del odómetro la más usada. En el presente trabajo de indagación se pretende usar dicha clasificación para compara las estrategias generadas por los estudiantes de octavo grado en la prueba diagnóstica y determinar las estrategias más utilizadas al resolver problemas de tipo combinatorio simples.

De igual forma, al revisar la investigación de Shin y Steffe (2008) se encuentran estrategias de solución a problemas combinatorios enumerativos de dos estudiantes de séptimo grado usando su razonamiento aditivo y multiplicativo. Los autores involucran la *unidad contable* como la unión de unidades simples del problema. Por ejemplo, si el interés del problema es encontrar todas las posibles combinaciones con camisetas y pantalonetas, *la unidad contable* es el par de camiseta- pantaloneta. Teniendo en cuenta lo anterior, los autores establecen las siguientes categorías de análisis, partiendo del razonamiento aditivo y multiplicativo:

- **Enumeración Aditiva:** Cuando las unidades contables son reconocidas y contadas aditivamente.
- **Enumeración Multiplicativa:** Cuando las unidades contables son contadas mediante la producción de algún procedimiento multiplicativo que ahorre lo aditivo.
- **Enumeración Multiplicativa Recursiva:** Cuando la cantidad de elementos a combinar o permutar es relativamente grande, hay reconocimiento de que el problema se puede resolver para una cantidad de elementos más pequeña y luego proceder recursivamente para encontrar la respuesta.

Teniendo en cuenta las tres anteriores investigaciones y propuestas de estrategias, se usará la siguiente clasificación de posibles estrategias a utilizar por los estudiantes.

Tabla 3. Estrategias de resolución para problemas combinatorios simples.

Roa-Batanero-Godino (2003)	Shin & Steffe (2008)	English (2007)
Traducir el problema en otro problema equivalente. Descomponer el problema en subproblemas. Fijar variables.	Enumeración Aditiva Enumeración Multiplicativa: Enumeración recursiva multiplicativa	En los problemas tridimensionales se describen cinco estrategias: Estrategia 6. Caracterizada por ensayo y error. Estrategia 7 y 8. Los niños empiezan a usar un patrón para formar las combinaciones (posibilidades). Estrategia 9 y 10. Los niños usan un patrón llamado odómetro para formar las diferentes combinaciones a partir de un mismo elemento.

Las anteriores estrategias se seleccionan por las siguientes razones:

- Las estrategias de Roa, Batanero y Godino (2003) se consideran estrategias generales que pueden utilizarse en cualquier tipo de problema matemático.
- Las estrategias de Shin & Steffe (2008) se consideran importantes en problemas que involucran el conteo de las enumeraciones, para el caso de los problemas combinatorios simples se hace el conteo de las combinaciones posibles determinadas.
- Las estrategias 6 a la 10 de English (2007) se seleccionan porque los problemas combinatorios simples tratados en este trabajo de indagación hacen referencia a problemas tridimensionales.

Las únicas estrategias mencionadas en el marco referencial que no se tienen en cuenta son las estrategias de English (2007) para problemas bidimensionales (estrategias del 1 al 5), puesto que dichos problemas no son tratados en el presente trabajo de indagación.

5. METODOLOGÍA

Par poder cumplir con los propósitos de la indagación, el presente trabajo se desarrolla en las siguientes fases:

1. Fase de Revisión teórica: se realiza un estudio previo sobre problemas combinatorios simples, con el fin de apropiarse del conocimiento matemático y didáctico que se involucra en tal temática.
1. Fase de Diseño: se elabora la prueba diagnóstica que involucra tres problemas de tipo combinatorio simple.
2. Fase de Aplicación: se implementa la prueba diseñada con estudiantes de octavo grado.
3. Fase de Análisis de Resultados: Posterior a la aplicación de la prueba diagnóstica, se describen las respuestas de los estudiantes a la luz de las investigaciones relacionadas en el marco referencial del presente trabajo de indagación, con el fin de identificar las estrategias de solución abordadas por los estudiantes.
4. Fase de Categorización de las estrategias de los estudiantes: Una vez descritas las estrategias de solución, se clasifican según el tipo de problema combinatorio simple (selección, partición, colocación).

A continuación se presenta de manera detallada el desarrollo de cada una de las fases y los resultados de las mismas.

5.1 FASE DE REVISIÓN TEÓRICA

En primera medida, se hace una revisión de los estudios e investigaciones relacionados con la combinatoria, con el fin de tener un amplio espectro de posibilidades teóricas de la temática. A partir de la revisión se encuentra la clasificación de los problemas combinatorios simples propuesta por Dubois (1984), citado en Roa (2000), y diferentes elementos que se debe tener en cuenta al momento de la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria, junto con las estrategias de solución y los errores más comunes al resolver tales problemas.

5.2. FASE DE DISEÑO

En este apartado se comenta el diseño la prueba diagnóstica compuesta por tres problemas combinatorios simples y la gestión en el aula al momento de aplicarla.

5.2.1. Diseño de la prueba diagnóstica

Con el fin de recoger información para responder la pregunta de indagación acerca de las estrategias que usan los estudiantes de grado octavo, con instrucción previa, al resolver problemas de tipo combinatorio simple, se diseñan tres problemas combinatorios simples: uno de selección, otro de partición y otro de colocación.

En las tablas 4, 5 y 6 se relacionan las hipótesis acerca de lo que podrían llegar a hacer los estudiantes al resolver dichos problemas, teniendo en cuenta operaciones de variación, permutación y combinación, con o sin repetición; la regla de la suma y regla del producto; y las estrategias de traducir el problema en otro equivalente, descomponer en subproblemas, fijar variables, enumeración aditiva, enumeración multiplicativa, estrategia 6 "Ensayo y error", estrategia 7, estrategia 8, estrategia 9 "odómetro incompleto" y estrategia 10 "odómetro completo".

- **Problema de selección: Comprando carro nuevo**

La familia Ramírez está decidiendo su "nuevo carro". En el concesionario deben decidir entre camioneta o automóvil, de las marcas Mazda, Renault y Chevrolet y entre los colores blanco, negro y azul. ¿De cuántas formas distintas puede elegir la familia Ramírez su nuevo carro?

Figura 1. Imagen del problema "Comprando carro nuevo".

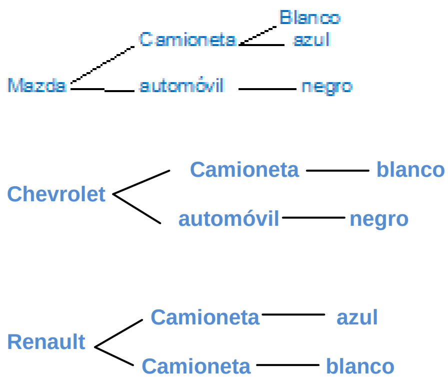
Este problema corresponde a un modelo de selección, según la clasificación de Dubois (1984), porque enumera o cuenta las diferentes posibilidades que pueden formarse a partir de un conjunto inicial (correspondiente a los tres colores, las tres marcas y los dos estilos de carros) y además se clasifica como tridimensional según lo propuesto por English (2007). Por lo tanto es posible que se presenten las estrategias de la N°6 a la N°10 de English (2007), la de fijar variables de Roa, Batanero y Godino (2003) y como operación combinatoria, aplicar la regla del producto tal y como lo mencionan los mismos autores. La descripción del posible uso de estas estrategias se da en la tabla 4.

Tabla 4. Posibles estrategias de resolución para el problema de selección.

HIPÓTESIS

Estrategia N° 6

Los estudiantes seleccionan de forma aleatoria las diferentes posibilidades de los estilos de carros sin tener en cuenta algún procedimiento sistemático para este conteo. Por ejemplo:

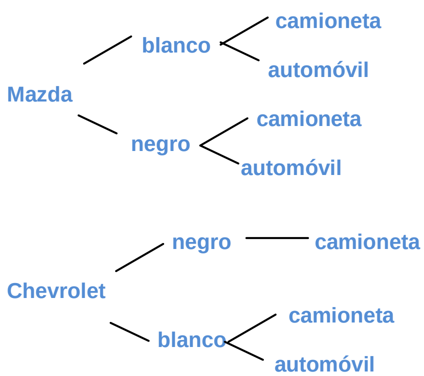


De esta manera continúan cambiando las opciones de combinación, sin tener un orden, obteniendo así un resultado errado, probablemente menos combinaciones de las posibles o repitiendo combinaciones; aunque pueda ser que en algún momento acierten por casualidad en la cantidad de las mismas.

También puede ocurrir que, al no tener un procedimiento sistemático al asignar las tres variables al carro, olvide alguna de ellas y sólo asigne dos variables a la misma al momento de establecer las combinaciones posibles.

Estrategia N° 7

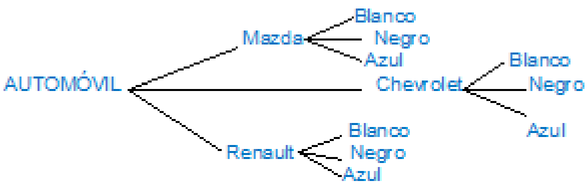
Los estudiantes inician la asignación sistemática de cada uno de los valores de las variables del problema, teniendo en cuenta un patrón. Este patrón se observa al establecer las posibilidades asociadas al primer valor de la variable, pero no se continúa con él en todo el proceso; ni siquiera para determinar todas las combinaciones del primer valor de la variable.

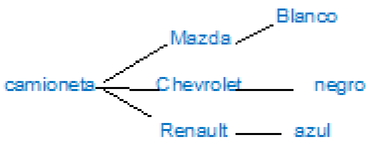


Por ejemplo, asignan los valores Mazda y Chevrolet a la variable marca, luego asocian las posibilidades de color a ambos valores pero de manera incompleta y olvidan asignar el valor Renault a la variable marca.

Estrategia N°8

Los estudiantes realizan una asignación sistemática de los valores a una de las variables del problema, teniendo en cuenta un patrón. Toman un valor de dicha variable y encuentran todas las posibles combinaciones para ella; sin embargo, las combinaciones quedan incompletas en los otros valores de la variable seleccionada, al no establecerse todas las posibilidades en ellas.

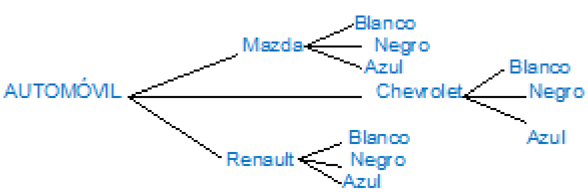


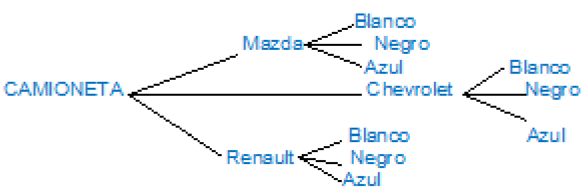


Por ejemplo asignan los valores de automóvil y camioneta a la variable estilo, inician con el valor ‘automóvil’ y le asocian todas las posibles combinaciones (9 combinaciones); pero para el valor ‘camioneta’ no completan el proceso.

Estrategia N° 9 y N° 10 “Odómetro”.
El estudiante toma constante un valor de la variable y asigna sistemáticamente los valores de las otras variables del problema hasta agotar todas las posibles combinaciones. Posteriormente, realiza el mismo procedimiento con los otros valores de la variable.

Cuando el estudiante realiza el anterior procedimiento y establece todas las combinaciones del problema estaría en la **estrategia 10,** en caso contrario el estudiante estaría en la **estrategia 9** porque están incompletas las combinaciones del problema. Por ejemplo, en el problema de los carros, el estudiante selecciona una de las variables del problema (por ejemplo, toma el estilo) y le da un valor concreto (automóvil) y a partir de él asigna, siguiendo el patrón del odómetro, los valores a las otras variables (colores y marcas) hasta agotar todas las posibilidades. Así pues, fijando el estilo automóvil, se asigna primero los tres marcas al carro y luego los tres colores, obteniendo nueve posibilidades.





Después de haber agotado todas las opciones con estilo automóvil, el estudiante realiza el mismo procedimiento con el otro estilo (camioneta), para determinar todas las posibilidades del problema.
Aunque se fija primero, en el planteamiento de las hipótesis, los estilos de carro y a ella le asignan las otras variables (marca y color), se aclara que el estudiante puede fijar cualquiera de las variables a los carros. Por ejemplo, los estudiantes pueden fijar primero los colores, las marcas ó los estilos de los carros.

Estrategia Fijar Variable
El estudiante da valores concretos a una o más variables del problema, por ejemplo fija la variable marca de carro y le asigna el valor Mazda. Luego, para formar las combinaciones, a la marca Mazda le asigna los tres valores de la variable color (blanco, negro y azul) y los dos valores de la variable estilo (automóvil y camioneta), resuelve este problema encontrando todas las posibles combinaciones con la marca Mazda y, a partir de este resultado obtiene la cantidad de combinaciones para un primer valor de variable (seis modelos de carros con la marca Mazda). Como la variable marca tiene tres valores diferentes (Mazda, Chevrolet y Renault) se generaliza el resultado anterior a cada uno de ellas. Por lo tanto, se obtiene:

6 posibilidades X 3 marcas de carro = 18 posibilidades finales

Por ejemplo pueden llegar a usar el método gráfico a través de tablas.

MARCA	**COLOR**	**CARRO**
Mazda	Azul	Carro
Mazda	Azul	Automóvil
Mazda	Blanco	Carro
Mazda	Blanco	Automóvil
Mazda	Negro	Carro
Mazda	Negro	Automóvil

Aunque se fija primero, en el planteamiento de las hipótesis, los estilos de carro y a ella le asignan las otras variables (marca y color), se aclara que el estudiante puede fijar cualquiera de las variables de los carros. Por ejemplo, los estudiantes pueden fijar primero los colores, las marcas ó los estilos de los carros.

Operación Regla del Producto
El estudiante, con un razonamiento más formal que no requiere enumerar todas las posibilidades del problema, aplica la regla del producto en donde multiplica la cantidad de colores, con la cantidad de marcas y la cantidad de estilos de carros:

2 estilos x 3 marcas x 3 colores = 18 posibles carros.

- **Problema de partición: Nuevos uniformes de fútbol**

Una compañía confecciona nuevos uniformes a partir de las prendas de cuatro equipos de fútbol (Cali, Nacional, Millonarios y Colombia) de modo que al combinarlas, un uniforme no queda con prendas de un mismo equipo. Una escuela de fútbol está interesada en contratar a esta compañía con el fin de adquirir los uniformes para sus jugadores. ¿Cuántos uniformes diferentes puede ofrecer la compañía a la escuela?

Figura 2. Imagen del problema “Nuevos Uniformes de Fútbol”.

Este problema, según la clasificación de Dubois (1984), corresponde a un modelo de partición, porque clasifica los elementos del conjunto inicial (las doce prendas de los uniformes de fútbol) en subconjuntos, para formar los nuevos subconjuntos (otros nuevos uniformes). Por parte de English (2007) se considera como un problema tridimensional por lo que es posible que los estudiantes utilicen las estrategias comprendidas entre la N° 6 a la N° 10; o podrán llegar a aplicar la de fijar variables, traducir el problema en otro equivalente y como operación, la permutación sin repetición, según lo afirma Roa (2000).

En esta situación, el problema de los uniformes está compuesto por dos variables correspondientes a: la variable prenda con los valores - camiseta, pantaloneta y medias -, y la variable equipo con los valores - Millonarios, Nacional, Cali y Colombia.

Los estudiantes pueden asumir las siguientes posturas al momento de formar los nuevos uniformes de fútbol:

- Tomar los valores de la variable prenda como principales y a éstos asignarles implícitamente los valores de la variable equipo.
- Tomar los valores de los equipos como principales, formando grupos de tres valores diferentes con ellos, y a éstos asignarles implícitamente los valores de las prendas.

Aunque puede escogerse cualquiera de las dos posturas, para el planteamiento de las hipótesis se asume como principal los valores de la variable prenda a las que se les asigna implícitamente los valores de la variable equipo.

Tabla 5. Posibles estrategias de resolución para el problema de partición.

HIPÓTESIS

Estrategia N° 6.
Los estudiantes, en primera medida, seleccionan los valores de la variable prenda para el nuevo uniforme (camiseta, pantaloneta y medias) y a cada una de ellas le asignan en forma aleatoria y sin repetir, valores de la variable equipos (Millonarios, Nacional, Cali y Colombia), con el fin de establecer todas las posibles combinaciones.

CAMISETA	PANTALONETA	MEDIAS
Cali	Colombia	Nacional
Cali	Nacional	Millonarios
Colombia	Nacional	Millonarios
Nacional	Cali	Colombia
Nacional	Millonarios	Colombia
Millonarios	Cali	Nacional

De esta manera, los estudiantes continúan cambiando las opciones de combinación, sin tener en cuenta un orden, obteniendo así un resultado equivocado de las combinaciones posibles o por casualidad pueden llegar a la cantidad de repuestas correctas sin ser sistemáticos en el proceso.

También puede ocurrir que, al asignar sin ningún procedimiento sistemático los valores de los equipos a cada uno de los valores de las prendas, repita algún valor en dos prendas del uniforme, llevando a que no cumpla con las condiciones del problema propuesto.

Estrategia N° 7.
El estudiante fija un valor de la variable prenda (camiseta) y a ella le asigna sistemáticamente algún valor de la variable equipo (Cali). Luego, combina los valores restantes de la variable equipo (Colombia, Nacional y Millonarios) a algunas de las prendas restantes (pantaloneta y medias) de tal forma que establecen las posibilidades para el primer valor de la variable (Camiseta de Cali) de manera incompleta; además, no continúa con este razonamiento para los otros valores de la variable equipo para el valor fijado camiseta, logrando una solución parcial de la situación.

CAMISETA	PANTALONETA	MEDIAS
Cali	Colombia	Nacional
Cali	Colombia	Millonarios
Cali	Nacional	Millonarios
Cali	Nacional	Colombia
Colombia	Millonarios	Cali
Colombia	Millonarios	Nacional
Millonarios	Colombia	Cali

Estrategia N° 8
El estudiante fija un valor de la variable prenda (camiseta) y a ella le asigna sistemáticamente algún valor de la variable equipo (Cali). Luego, combina los valores restantes de la variable equipo (Colombia, Nacional y Millonarios) a las prendas restantes (pantaloneta y medias) de tal forma que establecen de manera correcta todas las posibilidades para el primer valor de la variable (Camiseta de Cali), pero no continúa con este razonamiento para los otros valores de la variable equipo para el valor fijado camiseta; logrando una solución parcial de la situación.

CAMISETA	PANTALONETA	MEDIAS
Cali	Colombia	Nacional
Cali	Colombia	Millonarios
Cali	Nacional	Millonarios
Cali	Nacional	Colombia
Cali	Millonarios	Colombia
Cali	Millonarios	Nacional
Colombia	Nacional	Cali
Colombia	Cali	Nacional
Millonarios	Cali	Nacional

Estrategia N° 9 y N°10 "Odómetro"
El estudiante toma constante un valor de la variable y asigna sistemáticamente los valores de las otras variables hasta agotar todas las posibles combinaciones. Posteriormente, realiza el mismo procedimiento con los otros valores de la variable seleccionada.

Cuando el estudiante realiza el anterior procedimiento y establece todas las combinaciones del problema estaría en la estrategia 10, en caso contrario el estudiante estaría en la estrategia 9 porque le hacen falta algunas combinaciones del problema.

Por ejemplo, en el problema de los uniformes, el estudiante selecciona algún valor de la variable principal, en este caso la prenda (camiseta) y a ella le asigna implícitamente un valor de la variable equipo (Cali), luego le asignan los valores restantes de la variable equipo (Colombia, Nacional y Millonarios) a los valores restantes de la variable prenda (pantaloneta y medias), de tal modo que no tenga el mismo valor de la camiseta (al no existir la posibilidad de tener dos prendas de un mismo equipo), hasta agotar todas las posibilidades.

Una vez se fija el valor de la variable principal con su respectivo valor de la variable implícita, en este caso que algún valor de la variable prenda asuma algún valor de la variable equipo (camiseta de Cali), se asigna los valores de la variable equipo a la prenda pantaloneta, siguiendo el patrón del odómetro (tomando los tres valores de la variable equipo, en el orden que se desee y por último hace el mismo patrón con la prenda medias, tomando sólo los valores restantes de la variable equipo que no han sido asignadas ni a la camiseta ni a la pantaloneta).

CAMISETA	PANTALONETA	MEDIAS
Cali	Colombia	Nacional
Cali	Colombia	Millonarios
Cali	Nacional	Colombia
Cali	Nacional	Millonarios
Cali	Millonarios	Colombia
Cali	Millonarios	Nacional
Nacional	Colombia	Cali
Nacional	Colombia	Millonarios
Nacional	Millonarios	Colombia
Nacional	Cali	Colombia
Nacional	Millonarios	Cali
Nacional	Cali	Millonarios
Colombia	Cali	Nacional
Colombia	Cali	Millonarios
Colombia	Nacional	Cali
Colombia	Nacional	Millonarios

Colombia	Millonarios	Cali
Colombia	Millonarios	Nacional
Millonarios	Colombia	Nacional
Millonarios	Colombia	Cali
Millonarios	Nacional	Colombia
Millonarios	Nacional	Cali
Millonarios	Cali	Colombia
Millonarios	Cali	Nacional

Después de haber agotado todas las opciones con la camiseta de Cali, realiza el mismo procedimiento con los valores restantes de la camiseta (Colombia, Nacional y Millonarios) para determinar todas las posibilidades del problema.

Estrategia Fijar Variable

El estudiante da valores concretos a una o más variables del problema, en este caso fija algún valor de la variable prenda (camiseta) y le asigna implícitamente algún valor de la variable equipo (Cali); luego, para formar las combinaciones, a la camiseta de Cali le asigna el valor de la pantaloneta con los tres valores restantes de la variable equipo (Colombia, Nacional y Millonarios) que puede asumir dicha variable principal, finalmente asigna el valor de las medias con los dos valores restantes que puede asumir la variable implícita equipos (diferente a los valores asignados a la camiseta y a la pantaloneta); resuelve este problema encontrando todas las posibles combinaciones con la camiseta de Cali y a partir de este resultado obtiene la cantidad de combinaciones para un primer valor de variable (seis uniformes con la camiseta de Cali). Como la prenda camiseta puede asumir los cuatro valores de la variable equipo (Cali, Colombia, Millonarios y Nacional) se generaliza el resultado anterior a cada uno de ellas.

Se aclara que el estudiante puede fijar cualquiera de los valores de las prendas y la asignación implícita de los valores de la variable equipo a las mismas. Por ejemplo, los estudiantes pueden fijar primero las medias, luego la pantaloneta y por último la camiseta, asumiendo cualquiera de los cuatro valores de la variable equipo. Procediendo de la anterior forma, se obtiene:

6 posibilidades X 4 valores de camisetas = 24 posibilidades finales

Por ejemplo pueden llegar a usar el método gráfico a través de tablas.

CAMISETA	PANTALONETA	MEDIAS
Cali	Colombia	Nacional
Cali	Colombia	Millonarios
Cali	Nacional	Colombia
Cali	Nacional	Millonarios
Cali	Millonarios	Nacional
Cali	Millonarios	Colombia

Estrategia Traducción del problema a otro equivalente

El estudiante reformula el problema de los nuevos uniformes de fútbol planteando un problema equivalente de muestreo, y a través de la solución de dicho problema se da respuesta al problema original. A continuación se hace el comparativo del problema principal y un posible problema equivalente así:

PROBLEMA PRINCIPAL	PROBLEMA EQUIVALENTE
Organizar Uniformes para el Equipo de Fútbol *1.* Se cuenta con 3 prendas (camiseta, pantaloneta y	*Formar grupos de 3 equipos de fútbol, Seleccionándolos de los 4 equipos de fútbol dados.* 1. Se cuenta con 4 equipos de

medias). *2.* A cada prenda se le asigna un equipo de fútbol diferente. Son 4 equipos de fútbol los que se tienen en cuenta. *3. ¿cuántos uniformes diferentes puede ofrecer la compañía a la escuela?*	fútbol (Cali, Colombia, Nacional y Millonarios). 2. Se debe formar grupos de 3 equipos de fútbol. 3. *¿Cuántos grupos diferentes de 3 equipos de fútbol se puede formar con los 4 equipos de fútbol dados?*

Con el problema equivalente, el estudiante cambia el contexto del problema principal convirtiéndolo en uno de muestreo, donde de los cuatro equipos de fútbol se forman grupos a través de la selección de tres de ellos. Las diferentes posibilidades de formar los grupos de tres equipos de fútbol equivalen a la asignación de dichos equipos en las prendas de los uniformes, así que la respuesta del problema equivalente es la misma para el problema principal.

Operación Permutación sin repetición
El estudiante puede aplicar la fórmula de permutación sin repetición, porque requiere formar grupos de uniformes con prendas que no provengan del mismo equipo de fútbol. Para ello, el estudiante puede asumir el siguiente razonamiento:

1. Asignar las cuatro opciones a una prenda, correspondiente al número de equipos de fútbol (por ejemplo a las camisetas).
2. Luego se multiplica por las tres opciones de otra prenda, al no poder ser escogida del mismo equipo de la camiseta. Por ejemplo, si la camiseta fuese de Cali, la pantaloneta debe ser escogida entre Millonarios, Colombia y Nacional.
3. Finalmente se multiplica por las dos opciones que le quedan a la última prenda, en este caso las medias, porque debe ser escogidas de las prendas de los equipos que no fueron seleccionados para la camiseta ni para la pantaloneta.

4 camisetas x 3 pantalonetas x 2 medias = 24 uniformes.

- **Problema de colocación: El campamento del grupo de Scout**

El grupo de Scout, formado por tres estudiantes (Juan, Luis y Ana) y dos profesores (Carlos y Elías), sale de campamento. Para la estadía llevan dos carpas. ¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse los miembros de Scout en las carpas?

Figura 3. Imagen del problema "El campamento del grupo de Scout".

Este problema corresponde a un modelo de colocación, según la clasificación de Dubois (1984), porque distribuye los objetos (los tres niños y dos profesores) en cajas o casillas (las dos carpas). Por consiguiente es posible que los estudiantes usen las enumeraciones aditiva y multiplicativa que proponen Shin y Steffe (2008), la traducción del problema en otro equivalente y la descomposición del problema en subproblemas según lo plantea Roa, Batanero y Godino (2003) y como operación, la variación con repetición, según lo afirma Roa (2000).

Tabla 6. Posibles estrategias de resolución para el problema de colocación.

HIPÓTESIS

Estrategia Descomponer el problema en subproblemas

El estudiante divide la situación principal (distribuir cinco personas en dos carpas) en tres sub-problemas que resuelve independientemente, y con las soluciones parciales de los subproblemas da respuesta al problema principal. Los tres sub-problemas que el estudiante debe plantearse son:

1. Distribuir las cinco personas en sólo una de las carpas.
2. Distribuir cuatro personas en una carpa y una persona en la otra carpa.
3. Distribuir tres personas en una carpa y dos personas en la otra carpa.

Cuando el estudiante resuelva los tres sub-problemas obtiene los siguientes resultados:

1. Al distribuir las cinco personas en sólo una de las carpas obtiene dos posibilidades (las cinco personas en la carpa 1, las cinco personas en la carpa 2).
2. Al distribuir cuatro personas en una carpa y una sola persona en la otra carpa se obtiene 10 posibilidades (cinco posibilidades en donde las cuatro personas están en la carpa 1 y sólo 1 persona en la carpa 2; y las otras cinco posibilidades cuando las cuatro personas que estaban en la carpa 1 pasan a la carpa 2 y la persona que estaba en la carpa 2 pasa a la carpa 1).
3. Al distribuir tres personas en una carpa y dos en la otra carpa se obtienen 20 posibilidades (10 posibilidades en donde tres personas están en la carpa 1 y dos personas están en la carpa 2; y las otras 10 posibilidades cambiando de carpa al grupo de personas, es decir, las tres personas que estaban en la carpa 1 pasan a la carpa 2 y las dos personas que estaban en la carpa 2 pasan a la carpa 1).

Ahora, conociendo los resultados de los sub-problemas se determina la respuesta del problema principal así:

2 + 10 + 20= 32 formas diferentes de distribuirse las 5 personas en 2 carpas.

Enumeración Aditiva

Los estudiantes identifican como unidad contable el número de carpas donde son distribuidas las cinco personas. Luego, ellos realizan la distribución de las personas en las dos carpas y enumeran las combinaciones obtenidas a través de conteo. Por ejemplo:

Nº	CARPA1	CARPA 2
1	Juan, Luis, Ana, Carlos y Elías	Vacía
2	Vacía	Juan, Luis, Ana, Carlos y Elías
3	Juan, Luis, Ana, Carlos	Elías
4	Elías	Juan, Luis, Ana, Carlos Elías
5	Juan, Luis, Ana, Elías	Carlos
6	Carlos	Juan, Luis, Ana, Elías Carlos
7	Juan, Luis, Calos, Elías	Ana
8	Ana	Juan, Luis, Carlos, Elías
9	Juan, Ana, Carlos, Elías	Luis

10	Luis	Juan, Ana, Carlos, Elías
11	Luis, Ana, Carlos, Elías	Juan
12	Juan	Luis, Ana, Carlos, Elías
13	Juan, Luis, Ana	Carlos, Elías
14	Carlos, Elías	Juan, Luis, Ana
15	Juan, Luis, Carlos	Ana, Elías
16	Ana, Elías	Juan, Luis, Carlos
17	Juan, Carlos, Ana	Luis, Elías
18	Luis, Elías	Juan, Carlos, Ana
19	Luis, Carlos, Ana	Juan, Elías
20	Juan, Elías	Luis, Carlos, Ana
21	Luis, Juan, Elías	Carlos, Ana
22	Carlos, Ana	Luis, Juan, Elías
23	Ana, Juan, Elías	Carlos, Luis
24	Carlos, Luis	Ana, Juan, Elías
25	Ana, Luis, Elías	Carlos, Juan
26	Carlos, Juan	Ana, Luis, Elías
27	Juan, Carlos, Elías	Ana, Luis
28	Ana, Luis	Juan, Carlos, Elías
29	Luis, Carlos, Elías	Ana, Juan
30	Ana, Juan	Luis, Carlos, Elías
31	Ana, Carlos, Elías	Luis, Juan
32	Luis, Juan	Ana, Carlos, Elías

Por ejemplo, en la representación tabular se observa la enumeración de las dos combinaciones posibles para distribuir el grupo de las 5 personas en alguna de las carpas (ver color rosado), luego establece las 10 combinaciones posibles para distribuir 4 personas en una carpa y 1 persona en la otra carpa (ver color azul) y finalmente establece las 20 combinaciones para distribuir tres personas en una carpa y dos personas en la otra carpa (ver color naranja). En resumen, el objetivo principal de la enumeración aditiva es contar – o como su nombre lo indica- enumerar todas las combinaciones posibles del problema en forma aditiva.

Si el estudiante no lleva una secuencia en la enumeración de los casos podría ocurrir que determine parcialmente las combinaciones posibles dando una respuesta errada del problema.

Enumeración Multiplicativa

El estudiante puede reducir la enumeración de los casos si se ayuda del razonamiento multiplicativo. Para el problema de las carpas, el estudiante descompone el problema en tres subproblemas (mirar la primera estrategia) y para dar respuesta a ellos (distribuir cinco personas en una carpa y dejar la otra carpa vacía, distribuir cuatro personas en una carpa y una persona en la otra carpa, distribuir tres personas en una carpa y dos personas en la otra carpa) se ayuda de la enumeración multiplicativa.

Al distribuir las cinco personas en la carpa 1 y dejar la carpa 2 vacía se obtiene:

Nº	**CARPA 1**	**CARPA 2**
1	Juan, Luis, Ana, Carlos, Elías	

Pero, como el mismo grupo de cinco personas puedan ser distribuidas en la carpa 2 y dejar la carpa 1 vacía, es ahí donde el estudiante se ayuda de la enumeración multiplicativa para resolver los subproblemas. En este caso, **1 caso x 2 carpas = 2 posibilidades.**

Así mismo, al distribuir cuatro personas en una carpa y una persona en la otra carpa, el estudiante hace todas las posibilidades de que las cuatro personas estén en la carpa 1 y la otra persona en la carpa 2, obteniendo 5 combinaciones posibles. Luego multiplica por dos las combinaciones anteriores, indicando que ocurren las mismas posibilidades con cambiar de carpas a las personas.

Nº	CARPA 1	CARPA 2
1	Juan, Luis, Ana, Carlos	Elías
2	Juan, Luis, Ana, Elías	Carlos
3	Juan, Luis, Calos, Elías	Ana
4	Juan, Ana, Carlos, Elías	Luis
5	Luis, Ana, Carlos, Elías	Juan

Ahora, si cada persona de la carpa 1 pasa a la 2, y las cuatro personas de la carpa 2 pasan a la carpa 1, se obtendrían cinco posibilidades más.

5 posibilidades x 2 carpas = 10 posibilidades totales

Así mismo, el estudiante puede ayudarse de la enumeración multiplicativa para distribuir tres personas en una carpa y dos en la otra carpa, estableciendo las posibilidades que el grupo de tres personas esté en la carpa 1 y las otras dos personas estén en la carpa 2.

Nº	CARPA 1	CARPA 2
1	Juan, Luis, Ana	Carlos, Elías
2	Juan, Luis, Ana, Elías	Ana, Elías
3	Juan, Luis, Calos, Elías	Luis, Elías
4	Juan, Ana, Carlos, Elías	Juan, Elías
5	Luis, Ana, Carlos, Elías	Carlos, Ana
6	Juan, Ana, Elías	Carlos, Luis
7	Luis, Ana, Elías	Carlos, Juan
8	Juan, Carlos, Elías	Ana, Luis
9	Luis, Carlos, Elías	Ana, Juan
10	Ana, Carlos, Elías	Luis, Juan

Posteriormente, asume que ocurren los mismos casos si sólo se cambia de lugar a las personas de carpas (los que estaban en la carpa 1 pasan a la carpa 2 y viceversa).

10 posibilidades x 2 carpas= 20 posibilidades.

Por último, suma los tres resultados obtenidos anteriormente con el fin de dar respuesta al problema principal. Sin embargo, si el estudiante determina en forma parcial las combinaciones en cada subproblema (las obtenidas en forma enumerativa y luego multiplica por dos) estaría dando una respuesta errada al problema.

Traducción del problema en otro equivalente
El estudiante reformula el problema de organizar cinco personas en dis carpas en un problema de lanzar cinco veces una moneda normal y determinar su espacio muestral, es decir, tiene que describir las diferentes posibilidades de obtener (cara o sello) en un lanzamiento, en dos lanzamientos, en tres lanzamientos, en cuatro lanzamientos y en cinco lanzamientos.

El estudiante asume los cinco lanzamientos como las cinco personas del problema principal y la composición de una moneda (cara, sello) es asumida como las dos carpas del problema principal.

El estudiante resuelve el problema de los cinco lanzamientos de la moneda y asume esa respuesta al de la organización de las cinco personas en las dos capas, al ser problemas equivalentes. Por tanto, la respuesta es 32 posibilidades.

Operación Variación con repetición
El estudiante aplica la fórmula de variación con repetición $VR=n^k$ porque quiere formar con los elementos *n* de un conjunto, en este caso las dos carpas, grupos de k elementos, para este caso las cinco personas, de tal modo que los elementos de cada arreglo contienen elementos distintos (no puede estar la misma persona en las dos carpas a la vez). Por esa razón, se va asignar grupos de 1, 2, 3, 4 y 5 personas en dos carpas diferentes así:

5 personas	**4 personas**	**3 personas**	**2 personas**	**1 persona**
2 posibilidades	2 posibilidades	2 posibilidades	2 posibilidades	2 Posibilidades

Como cada grupo de personas tiene dos posibilidades de carpas, el estudiante deduce que se repite 5 veces el número 2, es decir, $2x2x2x2x2=2^5=32$ posibilidades.

5.2.2. Diseño general de la intervención

En este apartado se comenta la gestión prevista en el aula para el desarrollo de cada uno de los problemas, junto con los materiales e implementos a utilizar.

La prueba diagnóstica se realiza, en forma individual, a 38 estudiantes de un curso de octavo grado. A cada uno de ellos se les entregará tres guías en donde se presentan los problemas con un espacio en blanco para que los estudiantes realicen allí los procedimientos pertinentes; así mismo, se entregan los materiales necesarios: en el problema de formar nuevos uniformes se entregan los recortes (camiseta, medias y pantaloneta) de los cuatro equipos de fútbol, en los otros dos problemas (comprando carro nuevo y el campamento de los scout) solamente se entrega la guía.

5.3. FASE DE APLICACIÓN

La prueba diagnóstica se desarrolló en dos horas de clase (100 minutos) a un grupo de 38 estudiantes de octavo grado del colegio Nuestra Señora de Fátima. Las dos horas de clase para dicha aplicación se pidieron a la docente de matemáticas titular del curso con anterioridad.

El día de la realización de la prueba diagnóstica, los estudiantes fueron muy colaboradores y dispuestos a la misma. Las docentes investigadoras les comentaron que la prueba que iban a realizar mostraría lo que ellos conocían, hasta el momento, sobre probabilidad, y más específicamente sobre problemas combinatorios. Luego se les dio las instrucciones sobre el desarrollo de las guías. Cada estudiante resolvió los problemas propuestos de forma individual.

La primera guía entregada fue “Nuevos Uniformes de Fútbol” en donde la mayoría de los estudiantes llamaban a alguna de las docentes para preguntar por lo que debían hacer, en este caso las profesoras les pedía que contaran con sus propias palabras lo que habían entendido del problema y de ahí se iniciaba el direccionamiento a una mejor comprensión del mismo.

A nivel general se preguntó a los estudiantes sobre el problema y se llegó a la comprensión del mismo escuchando los comentarios de ellos y así todos entendieron. Los estudiantes se ayudaron de los recortes de los uniformes para formar todas las combinaciones posibles.

Cada estudiante tenía el tiempo necesario para resolver los problemas, según su ritmo de trabajo se iban entregando las otras pruebas. Por esa razón, cuando el estudiante terminaba el problema de los nuevos uniformes, se le entregaba el problema de los carros y una vez terminado éste se le entregaba el problema de las carpas. Finalmente se recibieron todas las guías para luego ser analizadas, con el fin de dar solución a la pregunta de indagación.

5.4. FASE DE ANÁLISIS DE DATOS

Se da inicio al proceso de observación y descripción de las respuestas abordadas por los estudiantes en cada uno de los problemas propuestos, a través del contraste con el marco referencial según se mostró en la tabla 3 y al mismo tiempo con las hipótesis planteadas en las tablas 4, 5 y 6.

A continuación se describe las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes en los tres problemas combinatorios simples.

5.4.1. Estrategias de solución a problemas combinatorios de selección

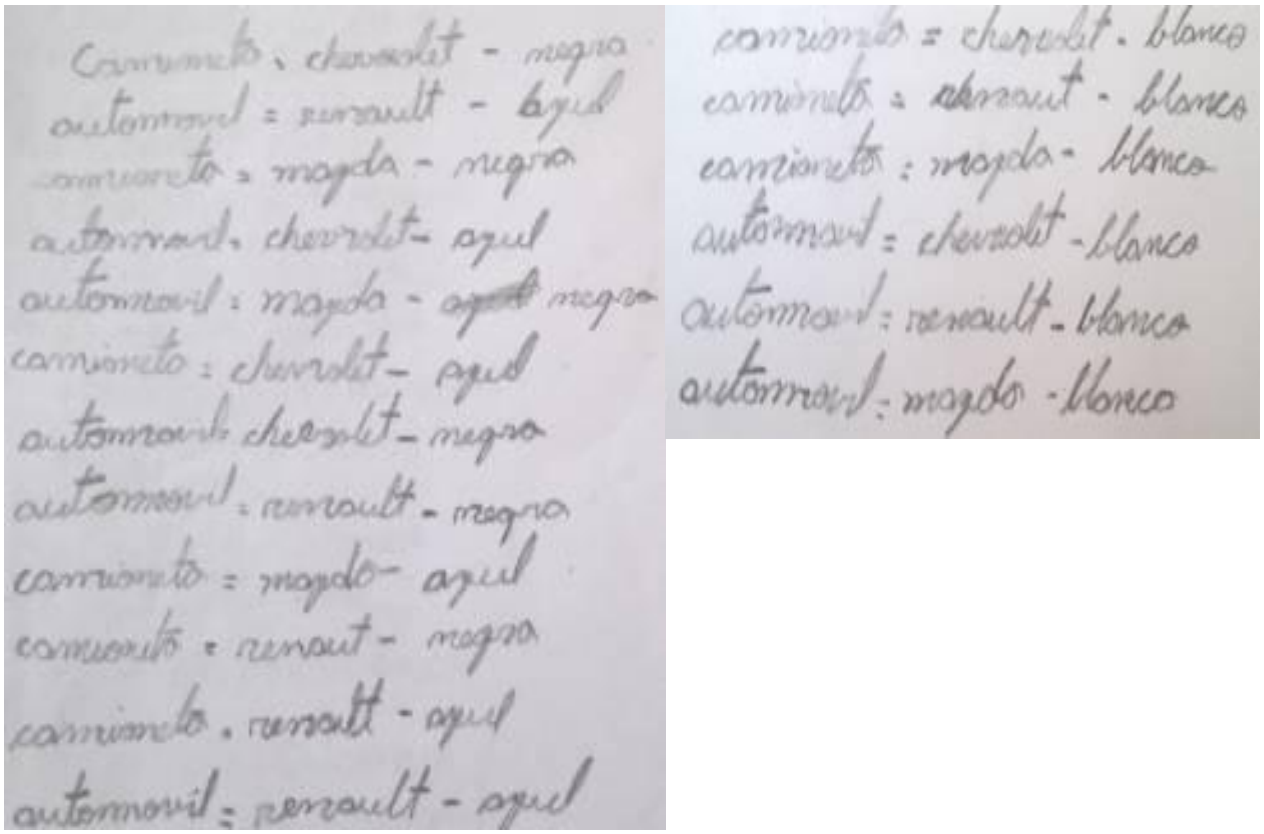
En esta sección se comenta las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes ante el problema combinatorio de selección titulado “Comprando nuevo carro” propuesto en la prueba diagnóstica.

> *La familia Ramírez está decidiendo su “nuevo carro”. En el concesionario deben decidir entre camioneta o automóvil, de las marcas Mazda, Renault y Chevrolet y entre los colores blanco, negro y azul. ¿De cuántas formas distintas puede elegir la familia Ramírez su nuevo carro?*

- **Estrategia 6 “Ensayo y error”.**

Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, asumieron las características que nombra English (2007), pues no siguieron un patrón al momento de asignar los valores a las tres variables del problema (marca, estilo y color), conllevando a que no se establecieran todas las combinaciones o que repitieran varias veces la misma combinación. Sin embargo, aunque English (2007) concibe tal estrategia muy básica y de poca efectividad en la resolución del problema, se encontró que un estudiante determinó todas las combinaciones posibles al problema de los carros con dicha estrategia (figura 4).

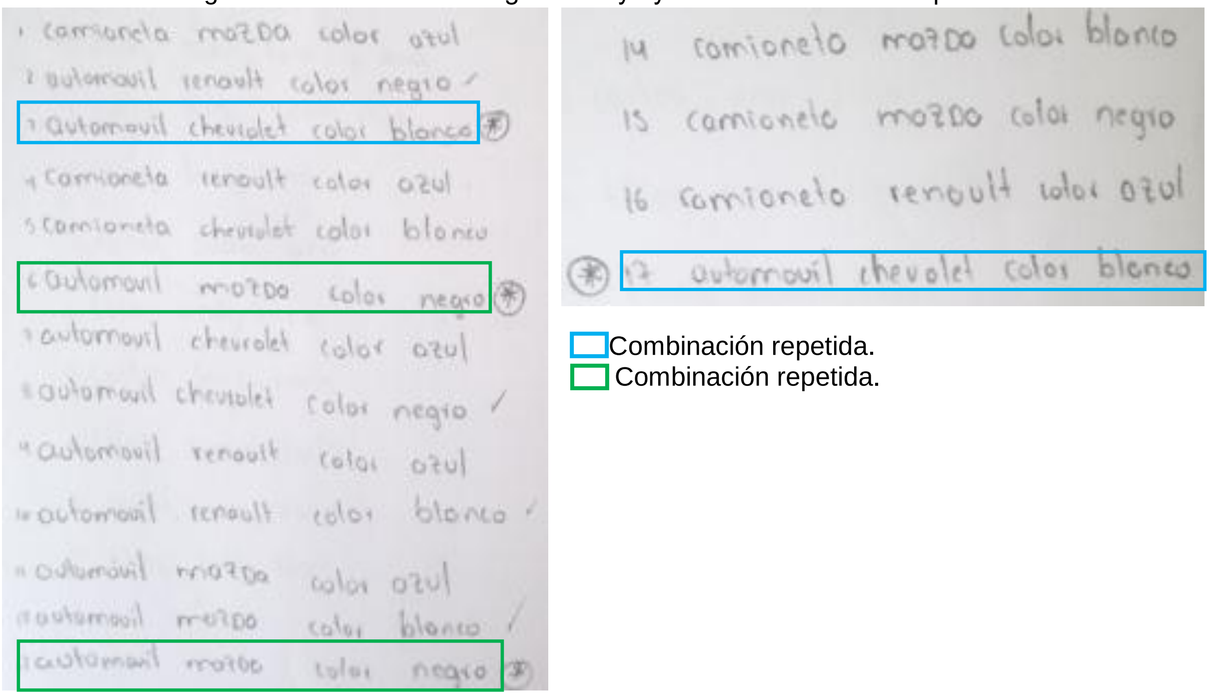
Figura 4. Estrategia “Ensayo y Error” al problema de selección.



En primera medida, en la figura 4 se observa que el estudiante asume la asignación de las características del carro en el siguiente orden: estilo – marca – color. Sin embargo, al momento al momento de asignar los valores de cada variable no se observa un orden sistemático, pero logra determinar todas las posibles combinaciones del problema.

De otro lado, en la utilización de esta estrategia se hizo evidente la falta de combinaciones o la repetición de las mismas, lo que lleva a que no obtenga las combinaciones posibles del problema. Por ejemplo, en la figura 5 se presentan 17 combinaciones de las cuales 2 se encuentran repetidas, lo que indica que solamente se determinaron 15 de las 18 combinaciones posibles.

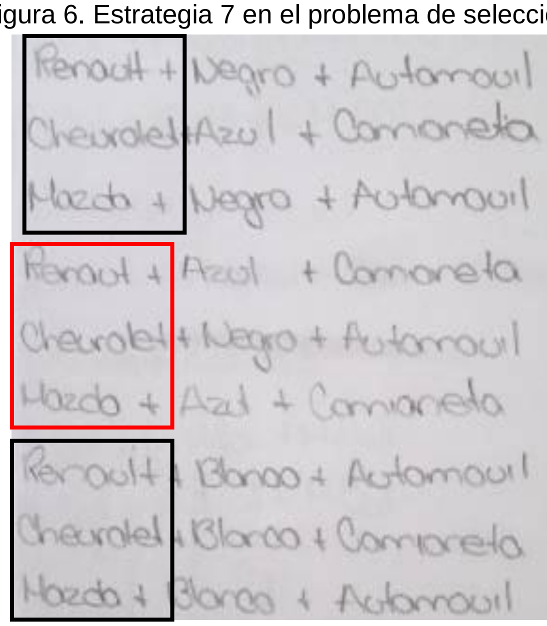
Figura 5. Utilización estrategia “Ensayo y Error” en forma incompleta.



- **Estrategia 7**

Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, asignaron, tal y como lo afirma English (2007), un patrón cíclico a una de las variables y posteriormente, a ella le asoció los valores de las otras dos variables haciendo uso de un patrón cíclico. Sin embargo, en algunos casos, cambiaron el patrón cíclico en el mismo problema y dejan pendiente o repiten algunas combinaciones.

Figura 6. Estrategia 7 en el problema de selección.

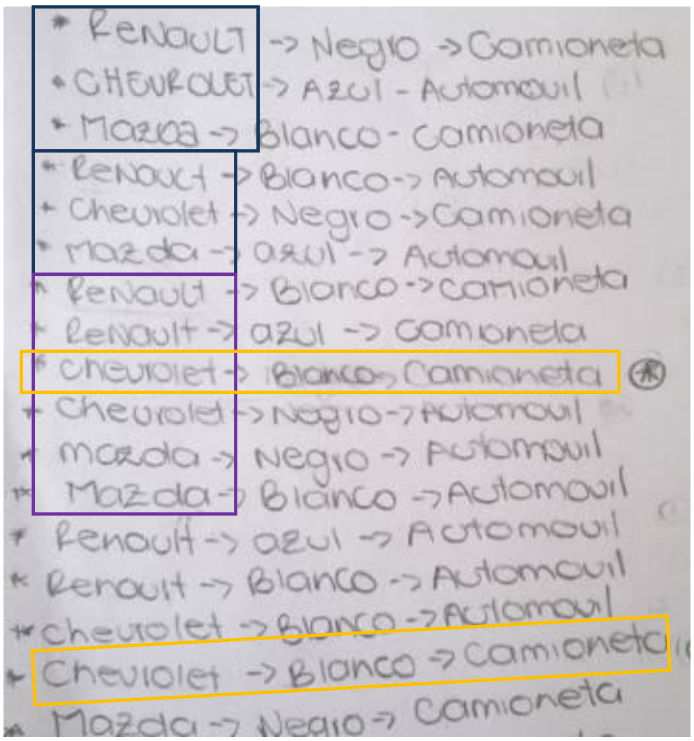


En la figura 6 se evidencia la utilización de la estrategia 7, puesto que el estudiante asigna el patrón Renault, Chevrolet y Mazda a la variable Marca en tres ciclos y le asocia a ellas las otras variables (color y estilo), pero no logra obtener todas las combinaciones, al menos para un valor de la variable marca. Por ejemplo, le hizo falta en la marca Renault las combinaciones: Renault- negro- camioneta, Renault- azul- automóvil, Renault – blanco- camioneta.

- **Estrategia 8**

La única diferencia de ésta estrategia con la estrategia 7 se debe a la determinación de las combinaciones posibles, pues en la estrategia 8 se establecen dichas combinaciones al menos para un valor de la variable fijada.

Figura 7. Estrategia 8 al problema de selección.



Primer patrón cíclico (Renault –Chevrolet- Mazda)

Segundo patrón cíclico (2 veces la marca de carro).

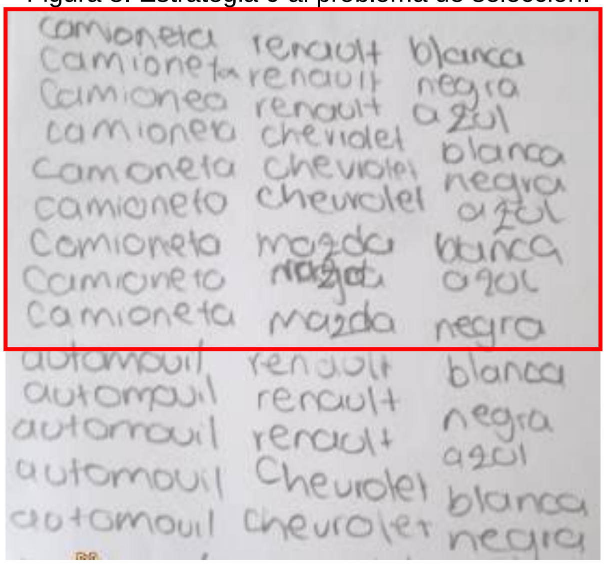
Combinación repetida.

En la figura 7 se evidencia la utilización de la estrategia 8 propuesta por English (2007), puesto que el estudiante asigna dos veces el patrón Renault, Chevrolet y Mazda a la variable Marca para luego asignar los otros valores de las dos variables restantes (color y estilo). Sin embargo, se observa un cambio al interior del patrón cíclico primario, ahora repite dos veces cada valor de la marca conservando el patrón Renault, Chevrolet y Mazda. Aunque el estudiante no determina todas las combinaciones del problema, al menos establece las combinaciones posibles con la marca Renault.

- **Estrategia "Odómetro Incompleto".**

Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, tuvieron en cuenta lo descrito por English (2007) porque fijaron un valor de una de las variables y a ella le asociaron las otras dos variables, pero no lograron determinar todas las combinaciones del problema.

Figura 8. Estrategia 9 al problema de selección.



Para el caso expuesto en la figura 8, el estudiante fija la camioneta como valor de la variable estilo y a ella le asocian los valores de las otras dos variables (marca y color), obteniendo todas las combinaciones con la camioneta (9 combinaciones para la camioneta). Así mismo, continúa el mismo procedimiento con el valor automóvil pero no logra determinar todas las combinaciones para la segunda asignación.

- **Estrategia 10**

Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, fijaron una de las tres variables del problema (marca, color ó estilo) y a ella le asociaron los respectivos valores de las otras dos variables, con el fin de obtener las posibles combinaciones con el primer valor de la variable fijada. Luego, realiza el mismo procedimiento con los otros valores de la variable fijada y así obtiene todas las posibles combinaciones del problema.

Las figuras 9 y 10 son ejemplos de utilización del odómetro completo propuesta por English (2007), puesto que establecieron las variables fijas con sus respectivos valores (para la figura 9 se fijó la marca del carro, y para la figura 10 se fijó el estilo del carro), obteniéndose las 18 combinaciones posibles del problema.

Figura 9. Estrategia del odómetro completo con variable fija.

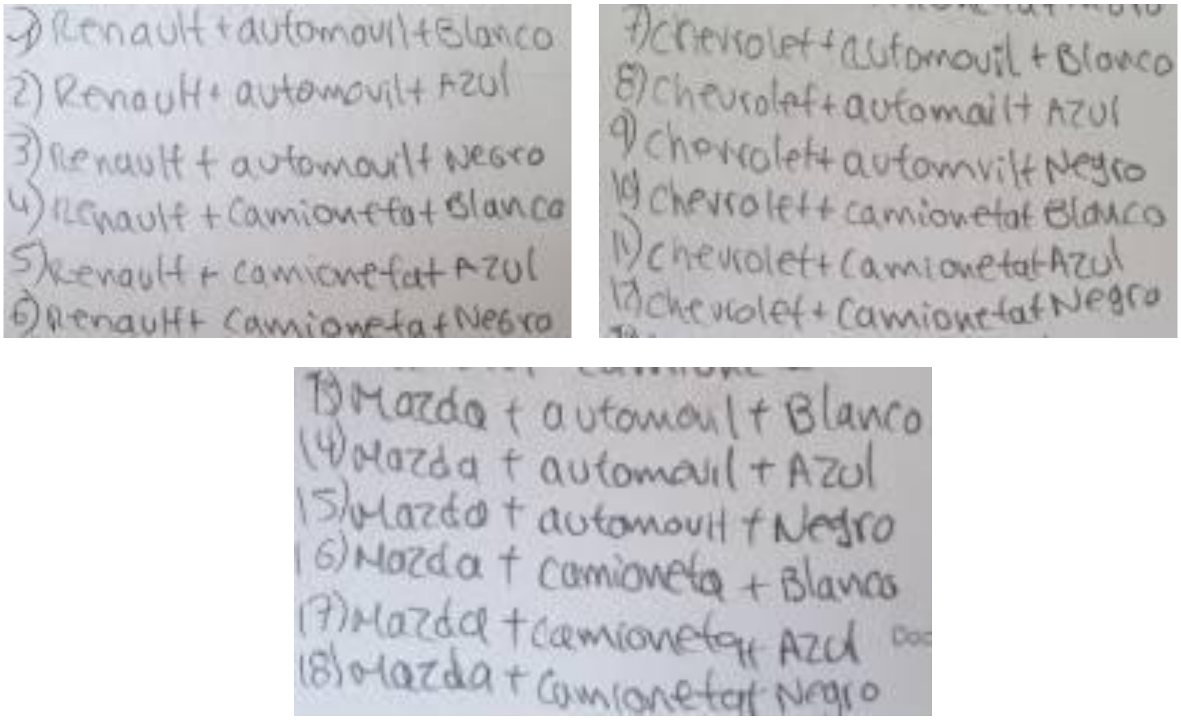
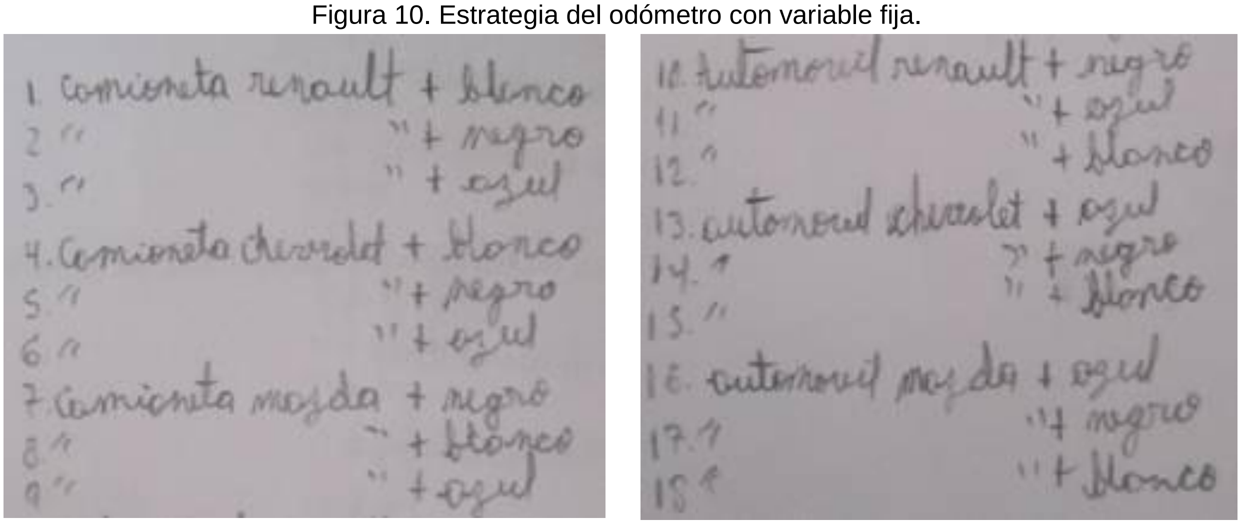
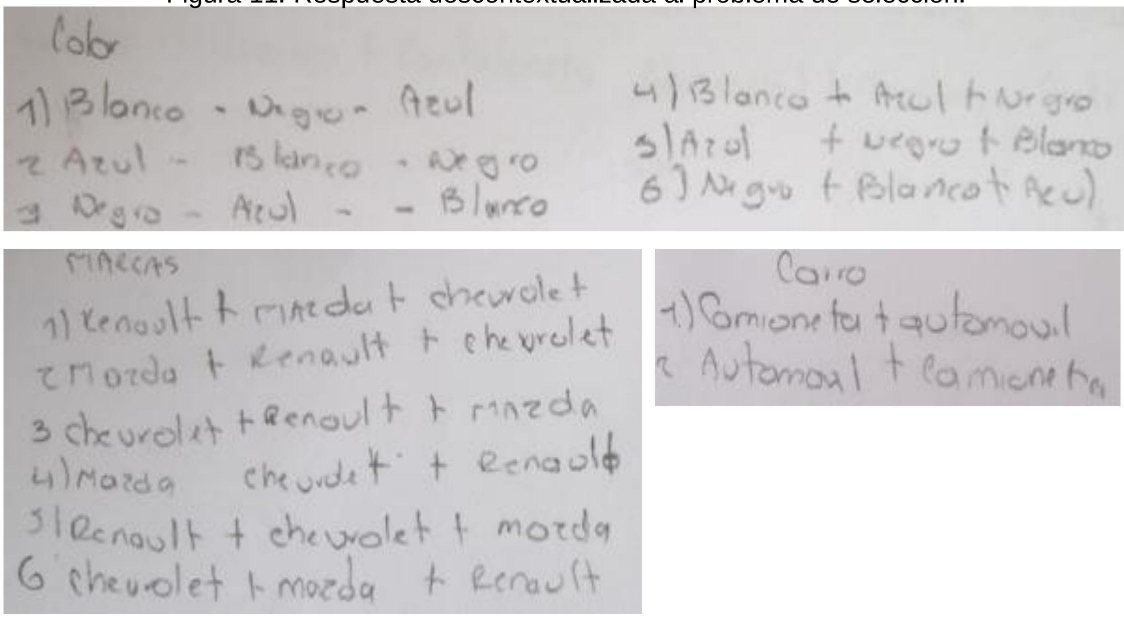


Figura 10. Estrategia del odómetro con variable fija.



De otro lado, se observaron dos respuestas descontextualizadas que pudieron haberse originado por la inadecuada comprensión al problema de selección, al no realizar las combinaciones posibles con las tres variables indicadas para dar solución al problema de los carros. A continuación se detallan los razonamientos de estos estudiantes.

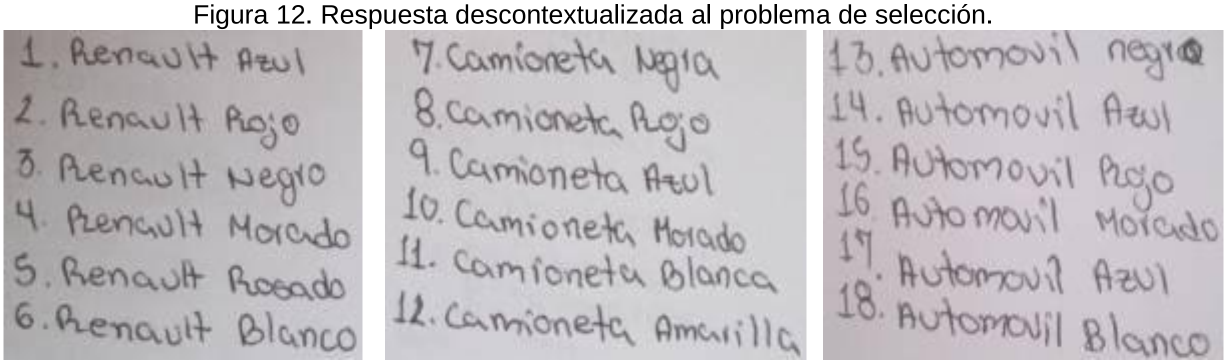
Figura 11. Respuesta descontextualizada al problema de selección.


Color
1) Blanco - Negro - Azul
2 Azul - Blanco - Negro
3 Negro - Azul - - Blanco
4) Blanco + Azul + Negro
5) Azul + negro + Blanco
6) Negro + Blanco + Azul
MARCAS
1) Renault + mazda + chevrolet
2 Mazda + Renault + chevrolet
3 chevrolet + Renault + mazda
4) Mazda chevrolet + Renault
5) Renault + chevrolet + mazda
6 chevrolet + mazda + Renault
Carro
1) Camioneta + automovil
2 Automovil + camioneta

En la figura 11 se observa que el estudiante concibió cada una de las tres variables (color, marcas y estilos de carros) en forma independiente, estableciendo las ordenaciones en cada grupo y no como la unión de las tres variables para determinar las posibles combinaciones para el nuevo carro. Este razonamiento muestra que el estudiante no comprendió el problema de selección, pues de haber sido así, tenía que haber asignado las tres variables al conjunto principal, en este caso, a la determinación del carro.

En la Figura 12, se observó el caso de la asignación de colores diferentes a los carros y no tuvo en cuenta los estilos en los carros marca Renault (primera columna), y en las otras combinaciones no tuvo en cuenta la marca del carro (segunda y tercera columna). Aunque estableció 18 combinaciones, el mismo número de combinaciones posibles para el problema de los carros, no se pueden asumir como válidas pues sólo tuvo en cuenta dos de las tres variables pedidas en el problema.

Figura 12. Respuesta descontextualizada al problema de selección.


1. Renault Azul
2. Renault Rojo
3. Renault Negro
4. Renault Morado
5. Renault Rosado
6. Renault Blanco
7. Camioneta Negra
8. Camioneta Rojo
9. Camioneta Azul
10. Camioneta Morado
11. Camioneta Blanca
12. Camioneta Amarilla
13. Automovil negro
14. Automovil Azul
15. Automovil Rojo
16. Automovil Morado
17. Automovil Azul
18. Automovil Blanco

5.4.2. Estrategias de solución a problemas combinatorios de partición.
En esta sección se comentan las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes al problema combinatorio de partición titulado “Nuevos Uniformes de Fútbol” propuesto en la prueba diagnóstica.

> *Una compañía confecciona nuevos uniformes a partir de las prendas de cuatro equipos de fútbol (Cali, Nacional, Millonarios y Colombia) de modo que al combinarlas, un uniforme no queda con prendas de un mismo equipo. Una escuela de fútbol está interesada en contratar a esta compañía con el fin de adquirir los uniformes para sus jugadores. ¿Cuántos uniformes diferentes puede ofrecer la compañía a la escuela?*

A continuación se comentan las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes al resolver este problema.

- **Estrategia 6 “Ensayo y Error”.**

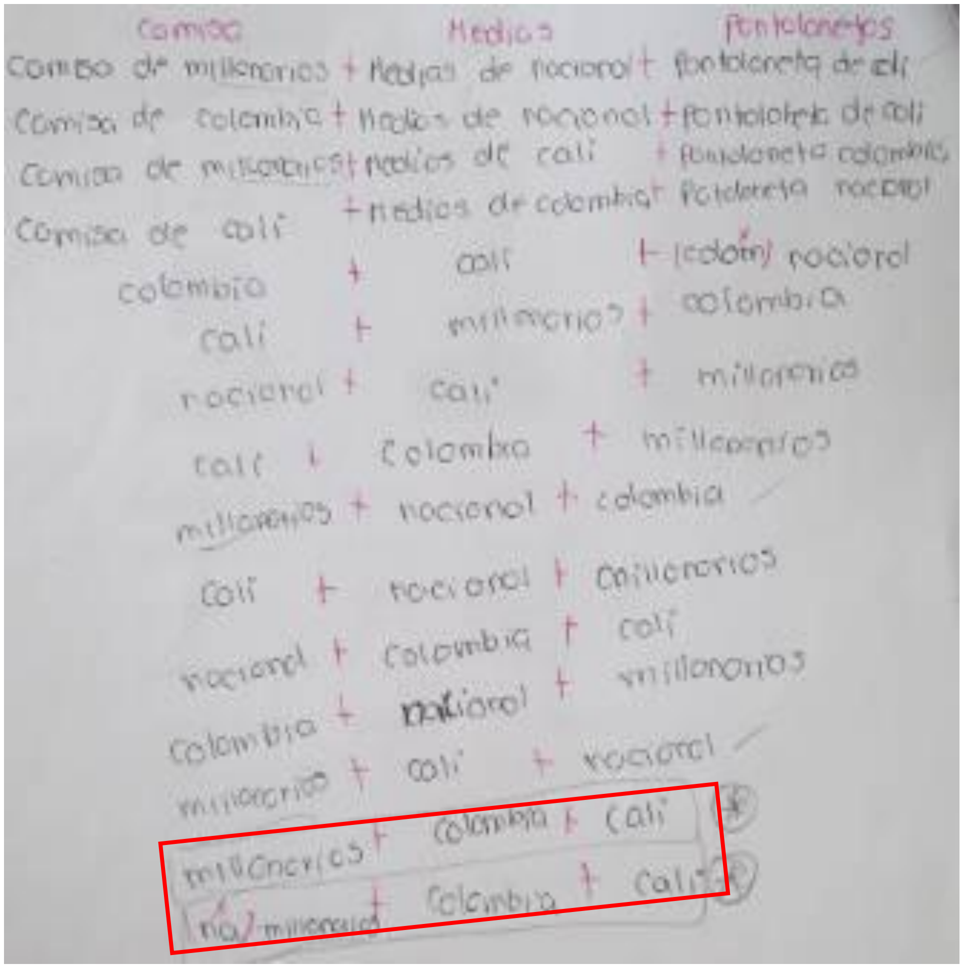
Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, tuvieron en cuenta lo propuesto por English (2007), porque asignaron aleatoriamente los valores de la variable equipo (Nacional, Millonarios, Cali y Colombia) a cada uno de los valores de la variable prenda (camiseta, pantaloneta y medias) para formar los nuevos uniformes de fútbol, de tal forma que no hubiese prendas con el mismo valor de la variable equipo.

Al no llevar una asignación sistemática de los valores a cada una de las prendas del uniforme, hubo estudiantes que repitieron combinaciones o dejaron incompleta las combinaciones.

Para el caso del problema de los nuevos uniformes no se halló evidencia de una correcta solución a través de esta estrategia, pues de los estudiantes que la aplicaron, ninguno de ellos obtuvo todas las combinaciones posibles.

Por ejemplo, en la figura 13 no se observa un orden al momento de asignar los valores de la variable equipo (Nacional, Millonarios, Cali y Colombia) a cada una de las prendas, y aunque tuvo en cuenta no repetir los valores de los equipos en cada una de las prendas, al final determina dos veces la misma combinación.

Figura 13. Estrategia “Ensayo y Error” al problema de partición.

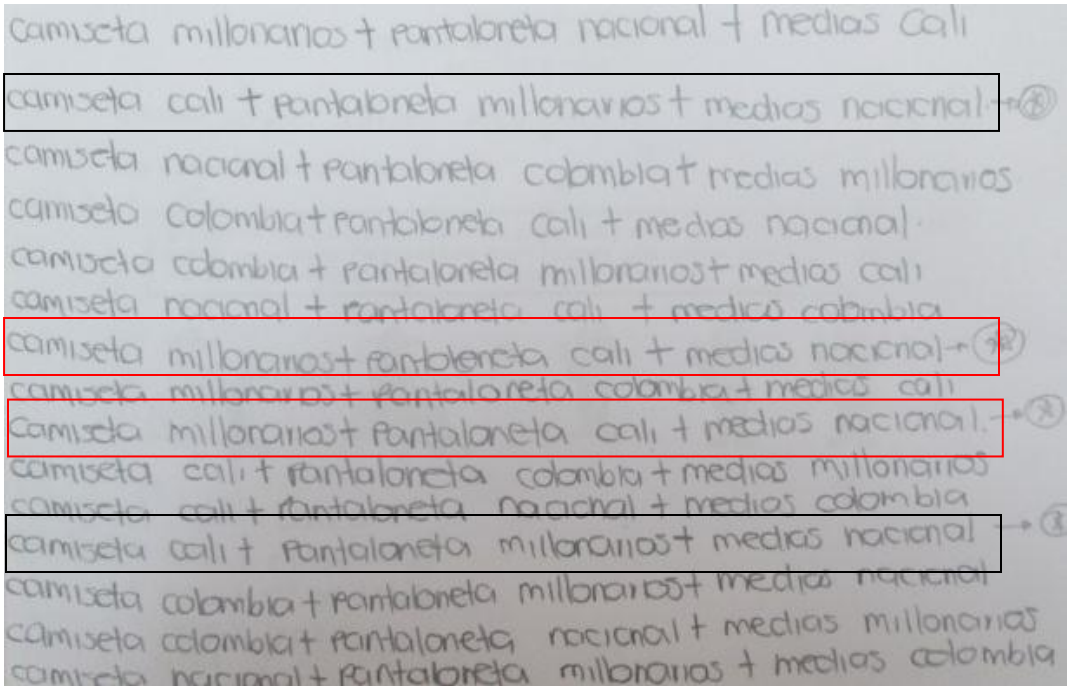


Repite la combinación millonarios – Colombia – Cali

También puede ocurrir que el estudiante obtiene las combinaciones dejando como variables fijas las prendas con los valores (camiseta, pantaloneta y medias) y realiza todas las posibles combinaciones sin tener en cuenta un conteo sistemático, de tal forma que le asigna el mismo valor a las prendas (camiseta y pantaloneta).

Por un lado, en la figura 14, el estudiante toma de forma aleatoria los valores de los equipos y se los asigna a las prendas, sin tener en cuenta un orden o secuencia que le permita obtener de forma correcta las combinaciones requeridas para dar una correcta solución a la situación presentada.

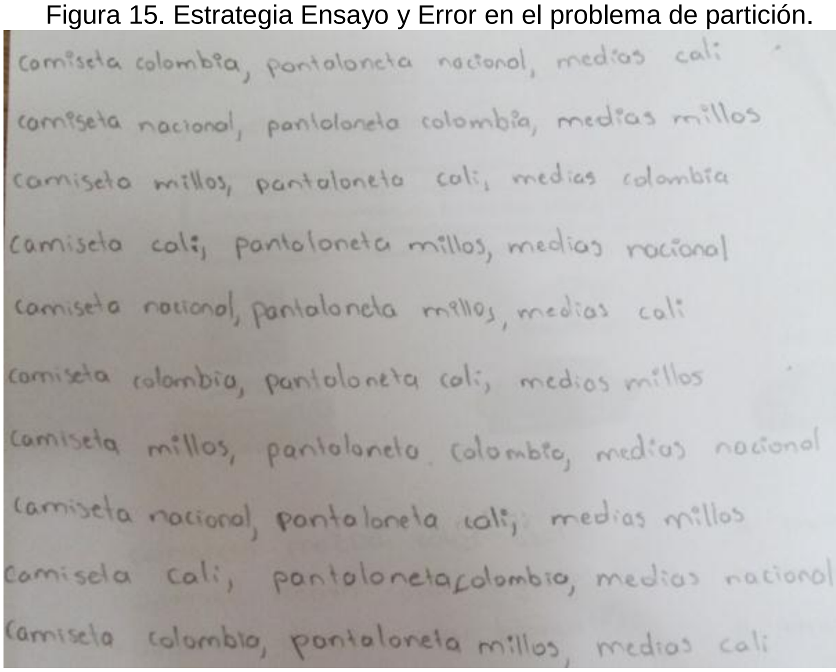
Figura 14. Valores iguales en el problema de partición.



camiseta millonarios + pantaloneta nacional + medias Cali
camiseta cali + pantaloneta millonarios + medias nacional
camiseta nacional + pantaloneta colombia + medias millonarios
camiseta Colombia + pantaloneta cali + medias nacional
camiseta colombia + pantaloneta millonarios + medias cali
camiseta nacional + pantaloneta cali + medias colombia
camiseta millonarios + pantaloneta cali + medias nacional
camiseta millonarios + pantaloneta colombia + medias cali
camiseta millonarios + pantaloneta cali + medias nacional
camiseta cali + pantaloneta colombia + medias millonarios
camiseta cali + pantaloneta nacional + medias colombia
camiseta cali + pantaloneta millonarios + medias nacional
camiseta colombia + pantaloneta millonarios + medias nacional
camiseta colombia + pantaloneta nacional + medias millonarios
camiseta nacional + pantaloneta millonarios + medias colombia

Sin embargo, a la mayoría de los estudiantes les hizo falta combinaciones, debido a que no seguían un patrón al momento de asignarle los valores a cada una de las prendas, tal y como se evidencia en la figura 15.

Figura 15. Estrategia Ensayo y Error en el problema de partición.



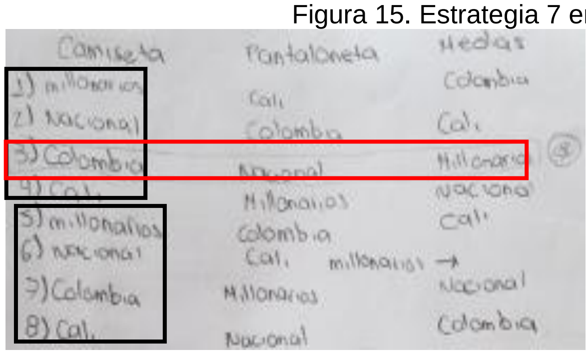
camiseta colombia, pantaloneta nacional, medias cali
camiseta nacional, pantaloneta colombia, medias millos
camiseta millos, pantaloneta cali, medias colombia
camiseta cali, pantaloneta millos, medias nacional
camiseta nacional, pantaloneta millos, medias cali
camiseta colombia, pantaloneta cali, medias millos
camiseta millos, pantaloneta colombia, medias nacional
camiseta nacional, pantaloneta cali, medias millos
camiseta cali, pantaloneta colombia, medias nacional
camiseta colombia, pantaloneta millos, medias cali

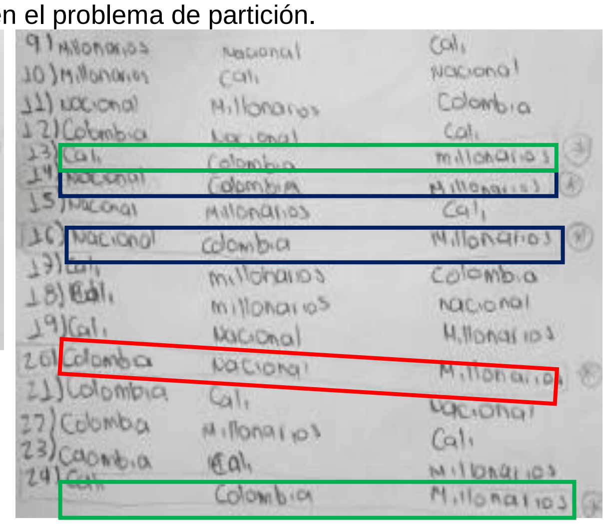
- **Estrategia 7**

Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, fijaron un valor de la variable equipos a alguno de los valores de la variable prenda, por ejemplo, tomaron la camiseta y le fijaron el valor de Cali; posteriormente, asignaron a través de un patrón los valores restantes de los equipos a cada una de las prendas restantes, teniendo en cuenta que los valores de ellas no se repitieran con el valor de la primera prenda fijada. Sin embargo, el patrón se mantiene dos veces y finalmente recurren a ensayo y error para establecer las otras combinaciones. Además, no encuentra todas las combinaciones posibles ni siquiera para el primer valor de la prenda.

Al analizar la respuesta presentada en la figura 16, se observa un patrón cíclico (Millonarios, Nacional, Colombia y Cali) en la prenda camiseta, tal y como lo menciona English (2007), en dos bloques y a ellas le asocia los otros valores de los equipos a las pantalonetas y a las medias. Luego, se olvida del patrón anterior y empieza la asignación del valor a la camiseta sin un orden, lo que lleva a que repita algunas combinaciones (Ver figura 16).

Figura 15. Estrategia 7 en el problema de partición.

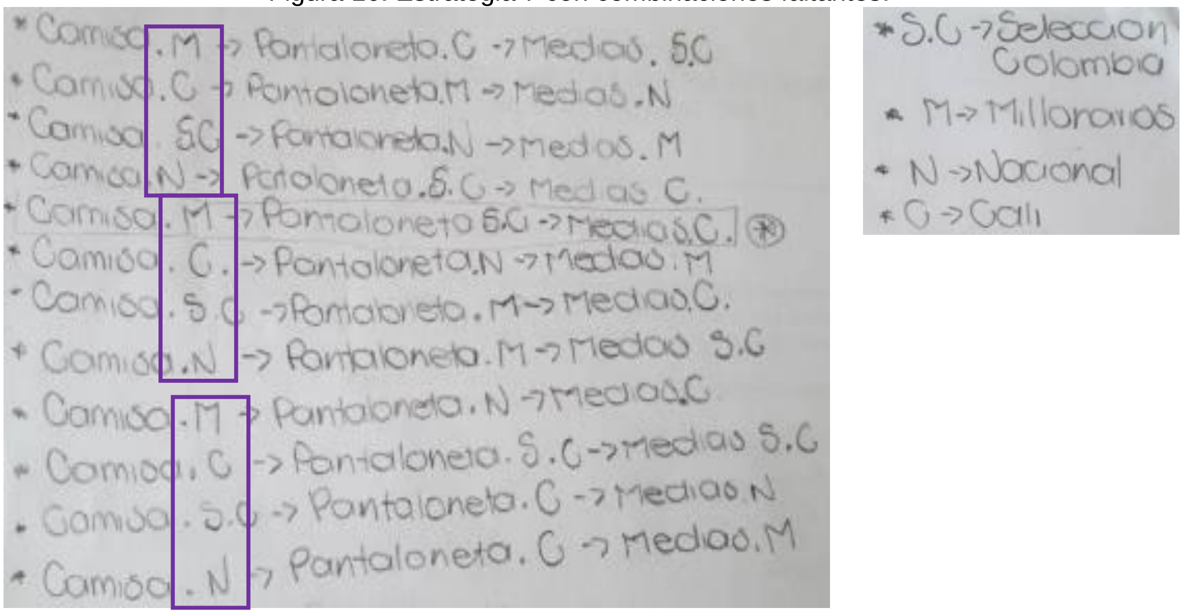




Patrón cíclico establecido al principio.
Repetición de combinaciones.
Repetición de combinaciones.
Repetición de combinaciones.

También puede ocurrir que aunque el patrón cíclico está presente en todas las combinaciones establecidas, no logra determinar todas las combinaciones al menos para un valor de la prenda. Tal caso se expone en la figura 17, en donde se asigna el patrón cíclico Millonarios, Cali, Colombia y Nacional a la camiseta, luego le asocia los otros valores a las dos prendas restantes (pantaloneta y medias) sin lograr determinar las combinaciones al menos para un valor de la variable camiseta, pues a cada una de ellas le determinó 3 combinaciones de las 6 combinaciones.

Figura 16. Estrategia 7 con combinaciones faltantes.

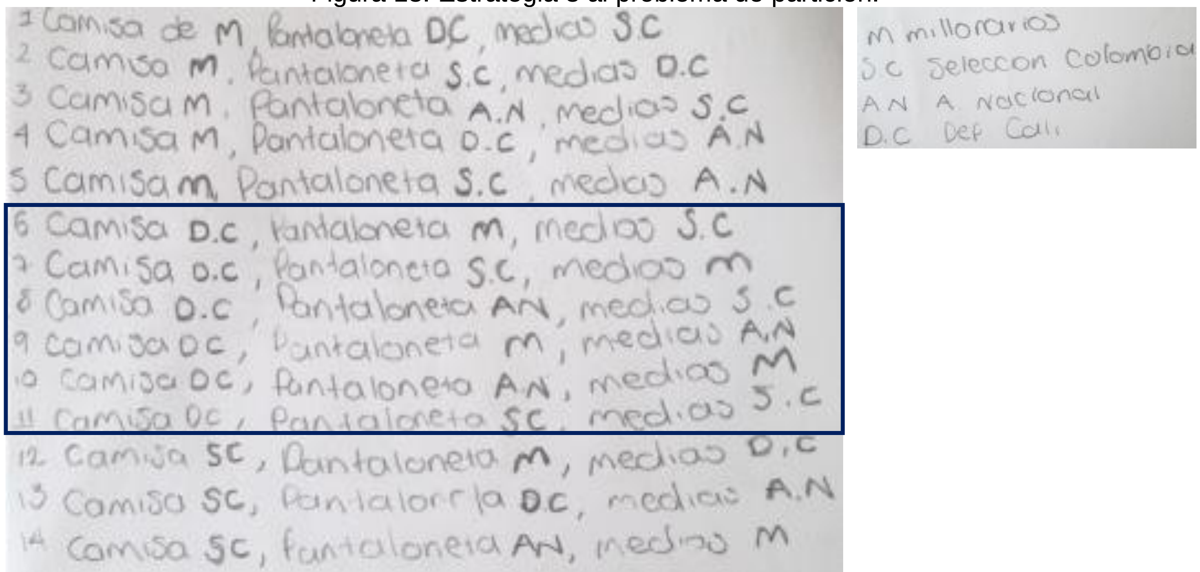


- **Estrategia 8**

El estudiante que utilizó esta estrategia, asignó un valor fijo de la variable equipo (Nacional, Cali, Colombia y Millonarios) a la prenda camiseta, luego le asoció a ella la pantaloneta y las medias con valores diferentes al asignado a la camiseta. Posteriormente, realizó el mismo procedimiento asignando los otros valores de los equipos a la camiseta y así poder hallar las otras combinaciones. Aunque establece catorce combinaciones, sólo determina todas las combinaciones para la camiseta con valor de variable Colombia (6 combinaciones posibles), dejando los otros casos incompletos.

Por ejemplo, en la figura 18 se observa lo propuesto por English (2007), porque el estudiante asigna un valor fijo de la variable equipo a la prenda camiseta (M que significa Millonarios) y a ella le asocia las prendas restantes con valores diferentes a la camiseta; luego, asigna dos valores restantes (Cali y Colombia) a la prenda camiseta y realiza el mismo procedimiento anterior. Aunque el valor de la variable fijada se observa en todas las combinaciones halladas, olvidó tomar a Nacional como un valor posible para dicha combinación; además, sólo establece las seis combinaciones posibles fijando el valor de Colombia a la prenda camiseta.

Figura 18. Estrategia 8 al problema de partición.



Combinaciones completas para la camiseta de Colombia.

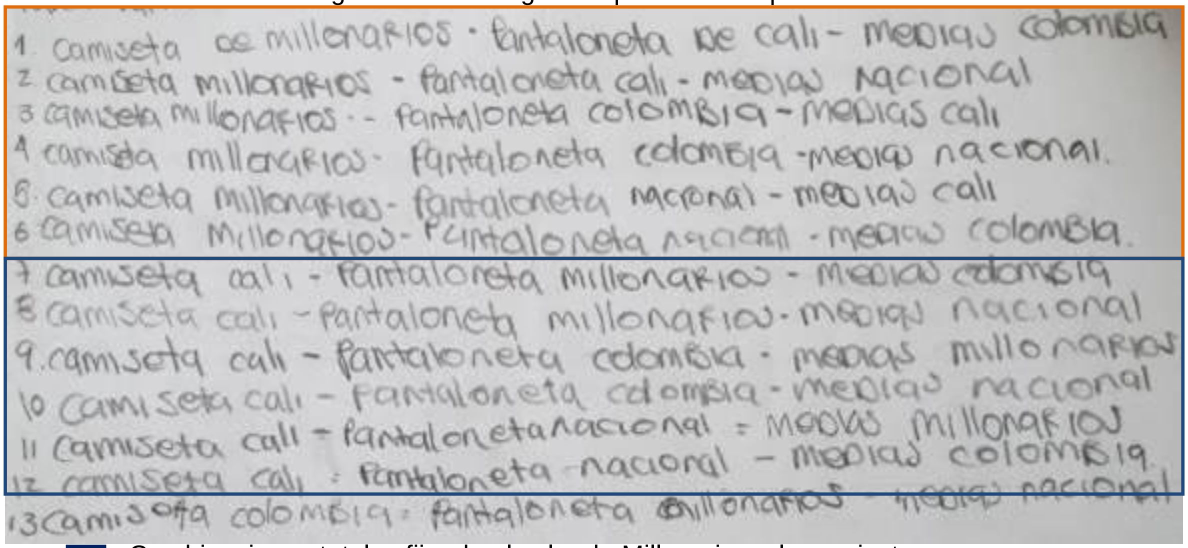
- **Estrategia “Odómetro Incompleto”.**

Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, fijaron un valor de la variable equipos y la asignaron a un valor de la variable prenda. La mayoría de los estudiantes asumieron el patrón camiseta – pantaloneta – medias al momento de formar los nuevos uniformes. Una vez fijada la prenda con su respectivo valor de la variable equipo, le asocian las otras prendas con valores diferentes a la camiseta para obtener las combinaciones posibles con el primer valor de la variable (6 combinaciones posibles).

Posteriormente, fija los valores restantes de la variable equipo a la prenda camiseta y procede de igual manera, para establecer las combinaciones totales; sin embargo, le hacen falta algunas combinaciones. Por ejemplo, en la figura 18 se observa, en primer lugar, la asignación del valor millonarios a la prenda camiseta y a ella le asocian los valores restantes de la variable prenda (pantaloneta y medias) con valores diferentes de la variable equipo, esto con el fin de no repetir el valor de los equipos en las tres prendas del uniforme de fútbol.

Sin embargo, sólo obtuvo una combinación fijando el valor de Colombia a la camiseta y olvidó fijar el valor de Nacional a la camiseta para determinar las combinaciones faltantes.

Figura 19. Estrategia 9 al problema de partición.



Combinaciones totales fijando el valor de Millonarios a la camiseta.
Combinaciones totales fijando el valor de Cali a la camiseta.

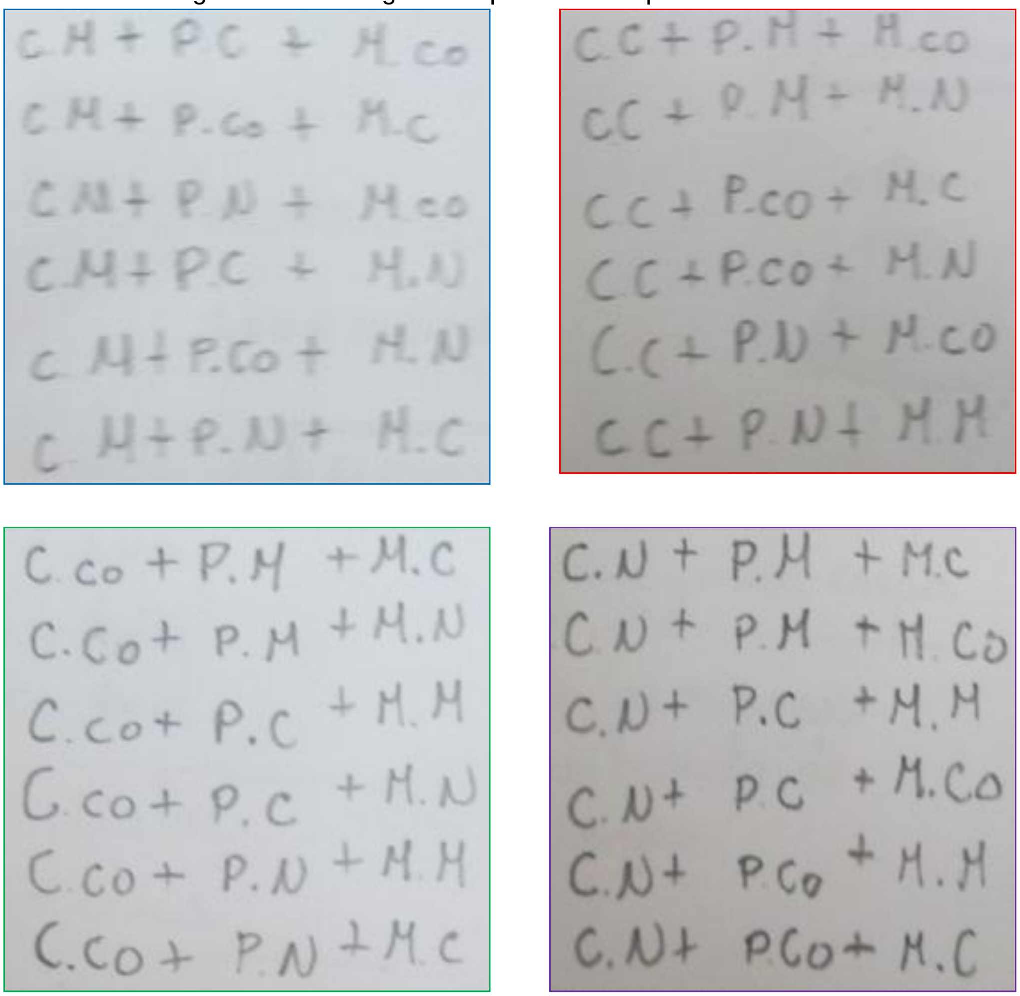
- **Estrategia "Odómetro completo"**

Los estudiantes que utilizaron esta estrategia, determinaron todas las posibles combinaciones al problema de los nuevos uniformes, tal y como lo afirma English (2007) al ser la estrategia máxima que ésta autora propone. El razonamiento es similar al expuesto en la estrategia 9, difiriendo únicamente en que en la estrategia 10 se establecen todas las combinaciones del problema planteado.

Por ejemplo, en la figura 20 se observa como el estudiante toma la camiseta y a ella le asigna los distintos valores que asume la variable equipo. En primera medida, fija el valor de millonarios a la camiseta y le asocia la prenda pantaloneta con los tres valores restantes de la variable equipo – en este orden, Cali, Colombia y Nacional. Posteriormente, a cada combinación de camiseta y pantaloneta le asocian las medias con los dos valores restantes que puede asumir de la variable equipo, obteniendo así seis combinaciones posibles para el primer valor de la camiseta.

Finalmente, realiza el mismo procedimiento con los otros tres valores de la variable equipo (Cali, Colombia y Nacional) que puede asumir la prenda camiseta y así obtiene las combinaciones totales del problema planteado.

Figura 20. Estrategia 10 al problema de partición.



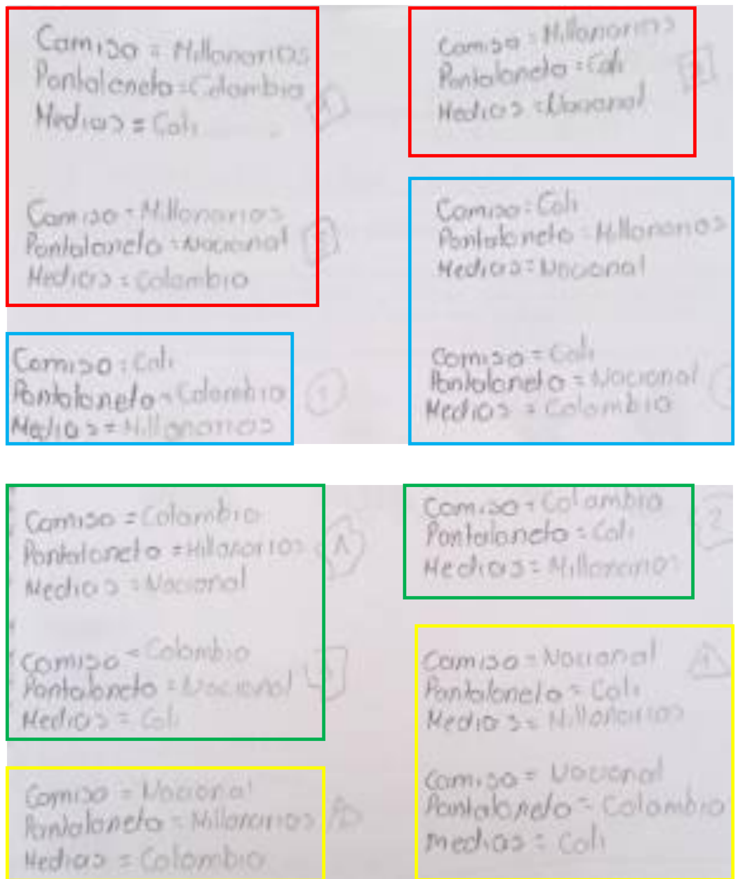
Combinaciones totales fijando el valor Millonarios a la camiseta.
Combinaciones totales fijando el valor Cali a la camiseta.
Combinaciones totales fijando el valor Colombia a la camiseta.
Combinaciones totales fijando el valor Colombia a la camiseta.

- **Otra estrategia**

Algunos estudiantes aplicaron una estrategia no conocida ni reportada en las investigaciones relacionadas en el marco referencial del presente trabajo. Sin embargo, sólo un estudiante obtuvo éxito con esta estrategia al obtener todas las combinaciones posibles del problema.

Se considera una estrategia muy intuitiva y recursiva, pues determina las posibles combinaciones fijando un valor para a la primera prenda (en este caso a la camiseta) y los valores restantes los asigna a las otras dos prendas (pantaloneta y medias) atendiendo a no repetir, obteniendo así tres combinaciones para el primer valor de la prenda fijada. Realiza el mismo procedimiento con los otros tres valores que puede asumir la camiseta y obtiene 12 combinaciones posibles en total.

Figura 21. Nueva estrategia de solución para el problema de partición.

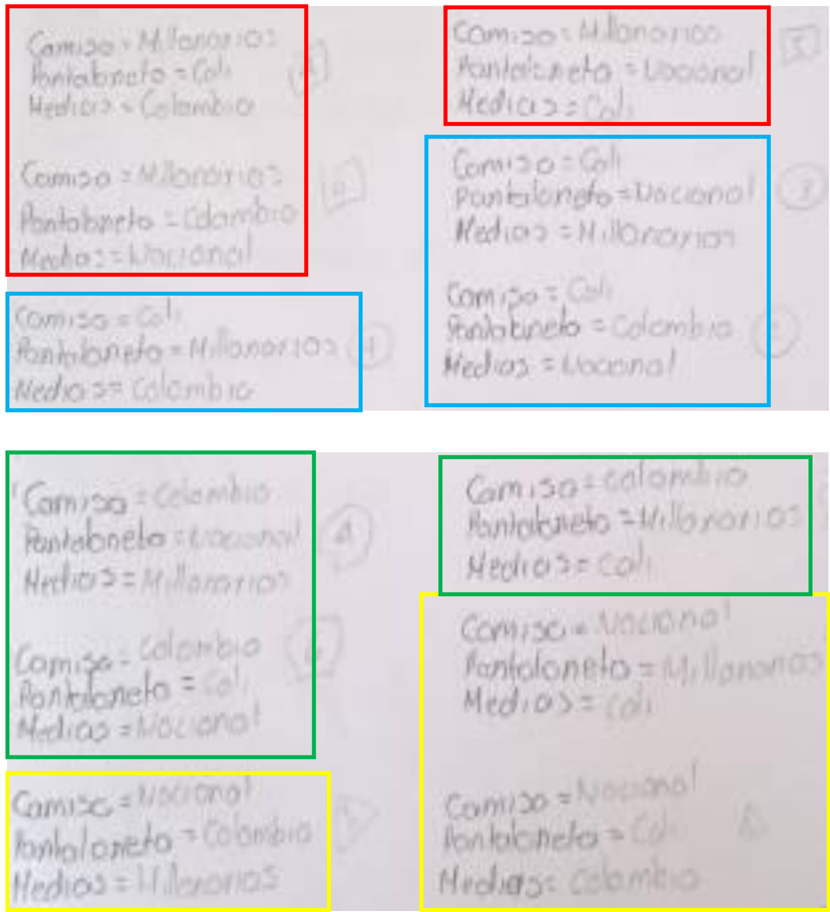


Combinaciones parciales para la camiseta con valor fijo Millonarios.
Combinaciones parciales para la camiseta con valor fijo Cali.
Combinaciones parciales para la camiseta con valor fijo Colombia.
Combinaciones parciales para la camiseta con valor fijo Nacional.

Luego, a cada una de las doce combinaciones anteriores, deja fijo el valor de la camiseta y sólo cambia el valor de la pantaloneta con el valor de las medias y viceversa. Por ejemplo, comparando las combinaciones de la camiseta con valor fijo millonarios de la figura 21 (ver combinaciones de color rojo) con las combinaciones de la camiseta con valor fijo millonarios de la figura 22 (ver combinaciones de color rojo), se observa el cambio de valores de la pantaloneta con el de las medias y viceversa.

Con cada una de las combinaciones realiza el mismo procedimiento, obteniendo doce nuevas combinaciones posibles, para un total de 24 combinaciones en total.

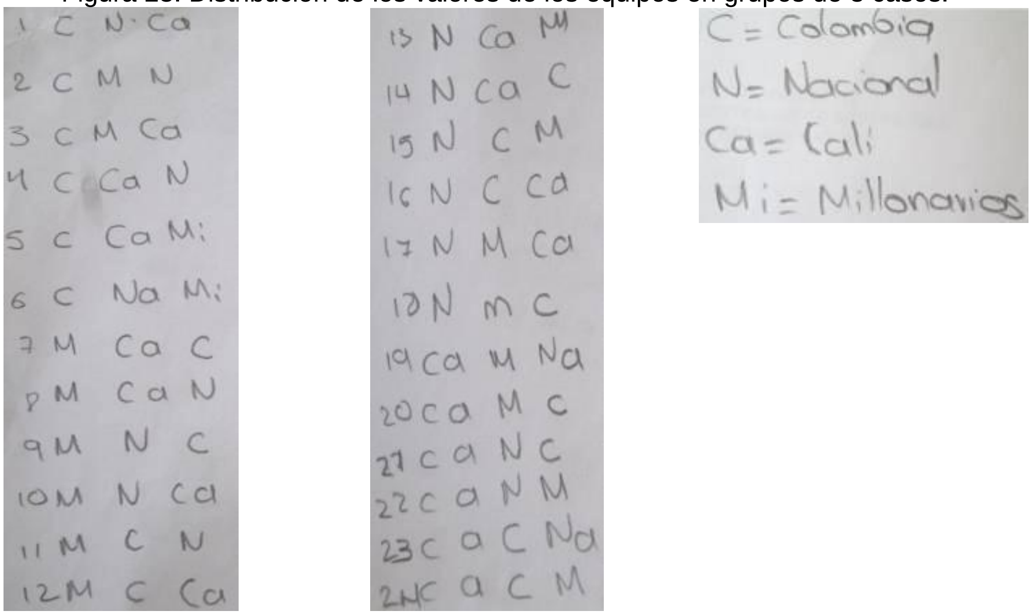
Figura 22. Continuación de la estrategia para el problema de partición.



Combinaciones faltantes para la camiseta con valor fijo Millonarios.
Combinaciones faltantes para la camiseta con valor fijo Cali.
Combinaciones faltantes para la camiseta con valor fijo Colombia.
Combinaciones faltantes para la camiseta con valor fijo Nacional.

También se encontró otro estudiante que realizó combinaciones con los valores de los equipos, repartiendo estos valores en grupos de tres, encontrando 24 posibilidades, pero no tuvo en cuenta la variable prendas, lo que no le permitió tener una adecuada solución al problema (ver figura 23).

Figura 23. Distribución de los valores de los equipos en grupos de 3 casos.



Lo curioso de la solución presentada en la figura 23 es que, el número y la enumeración de las combinaciones obtenidas por el estudiante coinciden con las combinaciones posibles del problema de los nuevos uniformes, lo que lleva a deducir que posiblemente el estudiante empezó a formar las combinaciones de tres equipos y olvidó agregarlos implícitamente a la variable principal, en este caso las prendas de los uniformes de fútbol (camiseta, pantaloneta y medias).

5.4.3. Estrategias de solución a problemas combinatorios de colocación.

En esta sección se comentan las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes ante el problema combinatorio de colocación titulado “El campamento del grupo de Scout”.

El grupo de Scout, formado por tres estudiantes (Juan, Luis y Ana) y dos profesores (Carlos y Elías), sale de campamento. Para la estadía llevan 2 carpas. ¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse los miembros de Scout en las carpas?

En este caso, todos los estudiantes asumieron el problema de distribuir las cinco personas en las dos carpas como la asignación de grupos de personas a cada carpa. Sin embargo, al momento de la asignación de las personas se presentaron errores que llevaron al no establecimiento de las combinaciones totales, mostrando que la dificultad se debió más a la inadecuada asignación sistemática de las cinco personas en las carpas en lugar de una inadecuada utilización de la estrategia.

El único estudiante que asumió ambas carpas a la vez y asignó las personas a cada una de ellas se puede observa en la figura 25. Para ello, descompuso el problema en 3 subproblemas (colocar cinco personas en una carpa y la otra carpa vacía, distribuir cuatro personas en una carpa y una persona en la otra carpa, distribuir tres personas en una carpa y dos en la otra carpa) y estableció las diferentes combinaciones para cada una de ellas tal y como se había propuesto en la hipótesis descomponer el problema en subproblema, descrito en la tabla 6.

Luego, con el símbolo (←→), indica que a cada combinación hallada le cambia el grupo de persona que tenía en la carpa, asumiendo que las personas son las mismas de la primera combinación sólo que en la otra carpa. Este último razonamiento muestra la enumeración multiplicativa de Shin & Steffe (2008) pues, en un momento, establece todas las combinaciones sin tener en cuenta cambiarlas de carpa, pero al intercambia los grupos de personas obtiene las otras combinaciones restantes. Sin embargo, el estudiante determinó las dos combinaciones para que el grupo de cinco personas estuvieran en alguna de las dos carpas y asumió la enumeración multiplicativa allí, obteniendo dos veces las combinaciones anteriores.

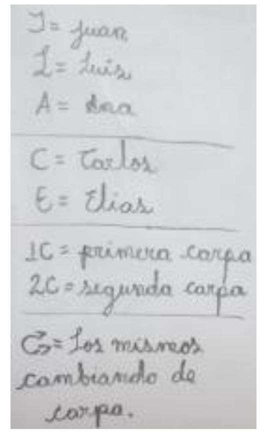
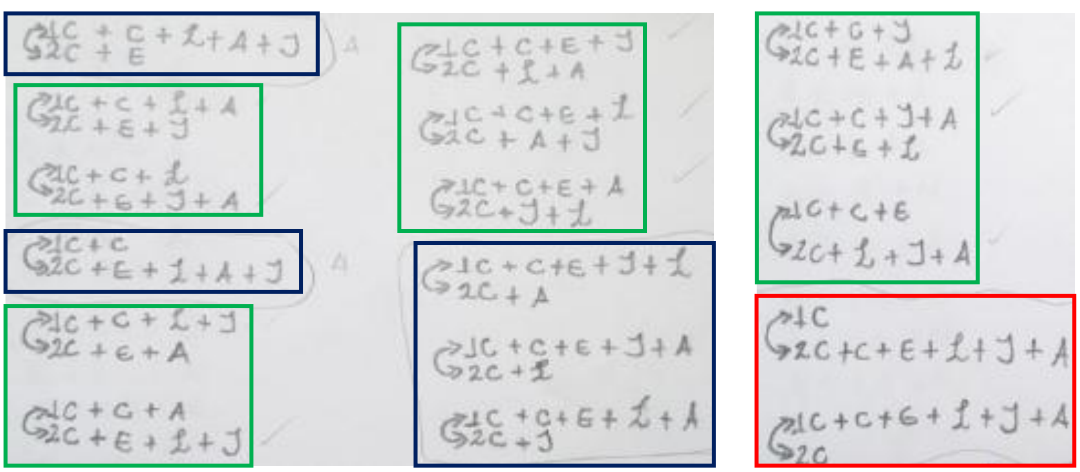


Figura 24. Convenciones al problema de colocación.

A continuación se presenta la representación simbólica y las combinaciones establecidas para el problema del nuevo uniforme.

Figura 25. Estrategia descomponer el problema en subproblemas.

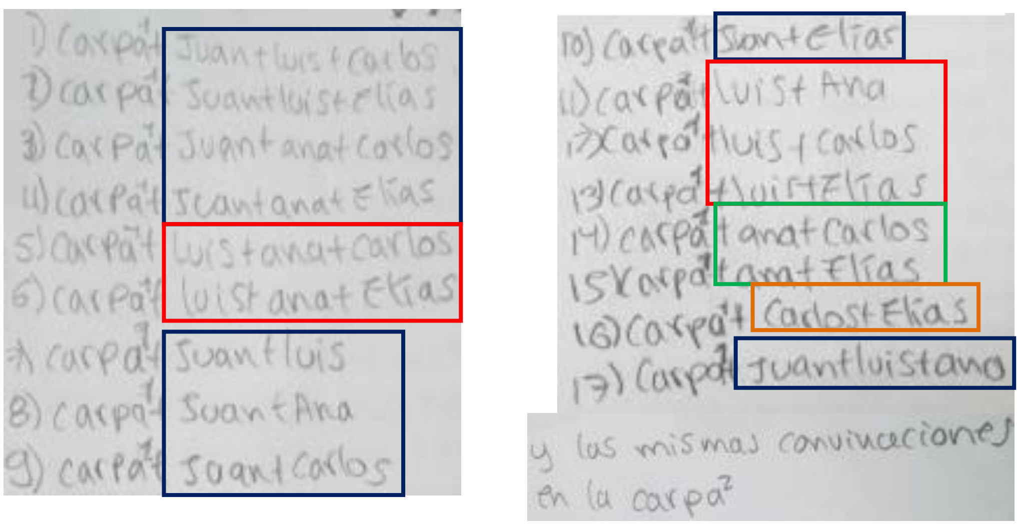


Combinaciones para distribuir 5 personas en una de las carpas.
Combinaciones para distribuir 4 personas en una carpa y 1 persona en la otra carpa.
Combinaciones para distribuir 3 personas en una carpa y 2 personas en la otra carpa.

De otro lado, algunos estudiantes asumieron la distribución posible de las cinco personas únicamente en la carpa 1. Por ejemplo, en la figura 25 se observa la asignación de las personas en grupos de dos y tres personas en la carpa 1. Para ello, empieza a fijar a Juan para formar las combinaciones de dos y tres personas, obteniendo ocho combinaciones; luego realiza el mismo procedimiento fijando a Luis obteniendo cinco combinaciones, al fijar a Ana sólo obtiene dos combinaciones y al fijar Carlos sólo determina una combinación. Al final enumera 17 combinaciones y afirma que ocurren los mismos casos para la carpa 2.

Analizando con mayor detalle la propuesta del estudiante, se observa que obtuvo la mayoría de las combinaciones posibles al distribuir tres personas en una carpa y las otras dos personas en la otra carpa, pero hace el conteo de tales combinaciones por separado y no como unidad contable, es decir, olvida asumir la asignación de las personas en la carpa 1 y en la carpa 2 como el par de objetos a combinar como la unidad contable propuesto por Shin y Steffe (2008).

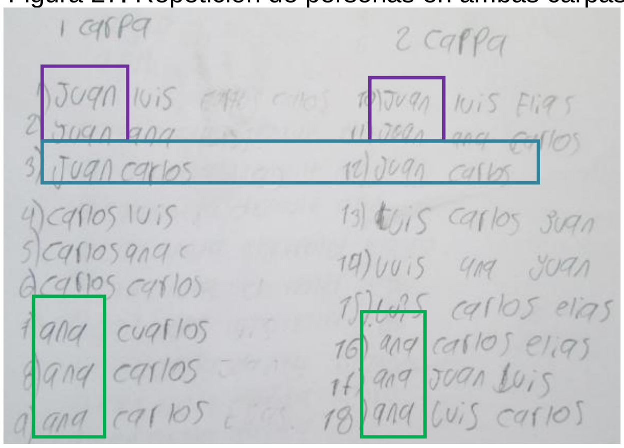
Figura 26. Distribución de las 5 personas únicamente para la carpa 1.



Juan es fijado para la combinación. Luis es fijado en la combinación.
Ana es fijada en la combinación. Carlos es fijado en la combinación.

Por otra parte se observó que, aunque los estudiantes hayan asumido las dos carpas a la vez, al momento de distribuir los grupos de personas, asignaba la misma persona en ambas carpas lo cual no es posible. En este caso, en la figura 27, se observa a Juan asignado, en las dos primeras combinaciones, en ambas carpas; y las dos personas de la tercera combinación (Juan y Carlos) se encuentran en ambas carpas; en las tres últimas combinaciones asigna a Ana en ambas carpas; de hecho, en todas las combinaciones establecidas existe alguna persona en ambas carpas. Sin embargo, al observar la enumeración de las combinaciones se podría pensar que el estudiante formó grupos de dos y tres personas, en forma separada, para distribuirlas en las carpas; pero olvidó asignar dichos grupos de personas en las carpas, lo cual lleva a pensar que no identificó la unidad contable del problema (primer grupo de personas para la carpa 1 y el segundo grupo de personas para la carpa 2).

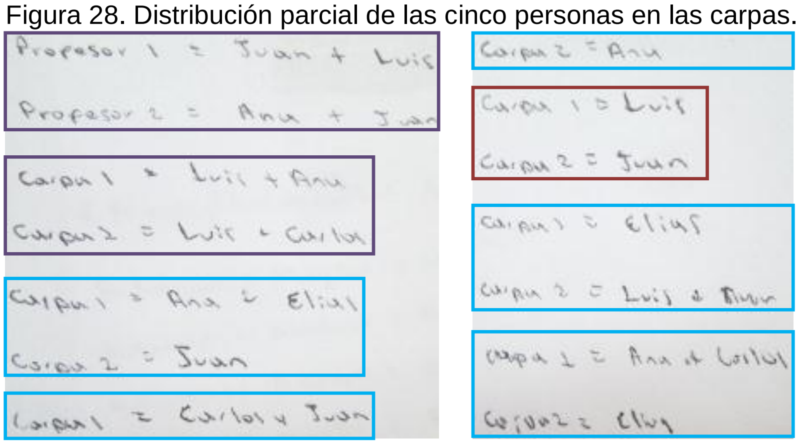
Figura 27. Repetición de personas en ambas carpas.



Combinaciones en los que Juan está en ambas carpas.
Combinación en la que Juan y Carlos están en ambas carpas.
Combinaciones en las que Ana está en ambas carpas.

Así mismo, se encontraron casos en los que faltaban personas para ser distribuidas en las carpas, indicando que los estudiantes no asumieron correctamente el problema porque repartían personas en las dos carpas, pero no las cinco personas propuestas en el problema. Ejemplo de ello se muestra en la figura 28 en donde las combinaciones de los grupos de personas para distribuir en la carpa 1 y la carpa 2, no se encuentran las cinco personas de Scout dejando a miembros sin asignar en las carpas. Además, presenta el error descrito anteriormente, pues asigna la misma persona en ambas carpas.

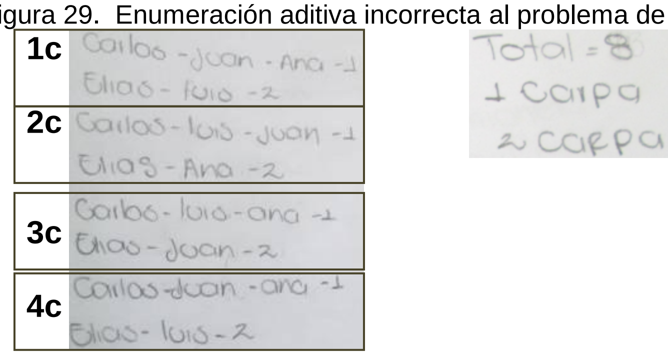
Figura 28. Distribución parcial de las cinco personas en las carpas.



Asigna la misma persona en ambas carpas.
Distribuye 3 personas en las carpas.
Distribuye 2 personas en las capas.

Continuando con el análisis de las respuestas de los estudiantes, se observa una inadecuada enumeración aditiva de las combinaciones establecidas. Por ejemplo, la figura 29 muestra cuatro posibles combinaciones para distribuir las cinco personas en las dos carpas; sin embargo, el estudiante da como respuesta ocho combinaciones finales, esto se debe a que, si bien asigna cada par de combinación a la carpa 1 a la carpa 2, no asumió la unidad contable al momento de dar respuesta al problema (el grupo de personas de la carpa 1 y el grupo de personas de la carpa 2 es la unidad contable en la asignación de las carpas).

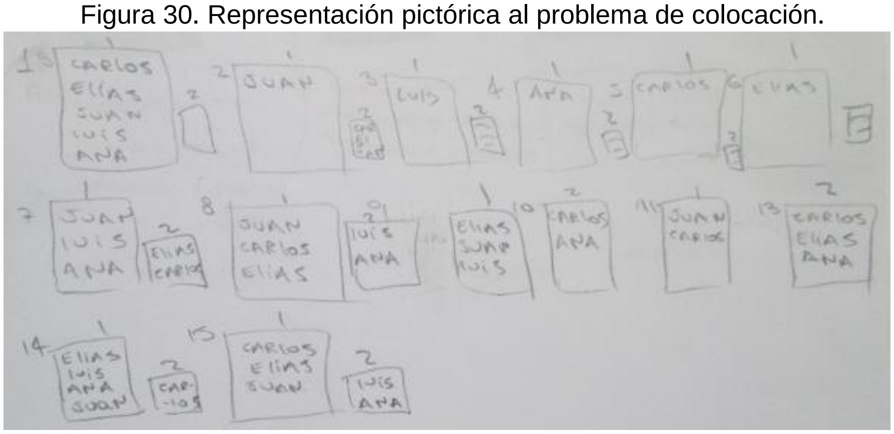
Figura 29. Enumeración aditiva incorrecta al problema de colocación.



Según la investigación de Shin & Steffe (2008), la *unidad contable* está compuesta por unidades simples al momento de la enumeración. Para el caso del problema de las carpas, *la unidad contable* son los grupos de personas que se forma para ser distribuidas en la carpa 1 y en la carpa 2. Sin embargo, en la figura 28 se enumeran las unidades simples como combinaciones finales en lugar de la unión de los casos de la carpa 1 y de la carpa 2 como la posible combinación.

Por último, se resalta la importancia de la representación pictórica para abordar el problema, y a la vez, sirve de ayuda a la enumeración de las combinaciones. Tal es el caso de la figura 30 donde se observan dos rectángulos que representan las dos carpas y en ellas escriben los nombres de las personas que habitarán allí.

Figura 30. Representación pictórica al problema de colocación.



Para la distribución de las personas en las carpas, en la figura 30 se observa implícitamente la descomposición del problema en subproblemas al distribuir cinco personas en una carpa y dejar la otra vacía, al distribuir cuatro personas en una carpa y una persona en la otra carpa, al distribuir tres personas en una carpa y dos personas en la otra carpa. Sin embargo, olvidó asumir el cambio del grupo de personas a la otra carpa de las combinaciones halladas – es decir, las personas que estaban en la carpa 1 pasan a la carpa 2 y viceversa- con el fin de obtener las combinaciones restantes.

5.5. FASE DE CARACTERIZACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS

Una vez descrita las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes a los tres problemas combinatorios simples descritos en la prueba diagnóstica, se da paso a la caracterización de dichas estrategias. Para ello, se contrastan las hipótesis planteadas en las tablas 4, 5 y 6 y el marco teórico con las respuestas dadas a cada uno de los problemas combinatorios simples (selección, partición y colocación) de Dubois (1984).

5.5.1. Caracterización de las estrategias al problema de selección

El problema de selección titulado “Comprando carro nuevo” corresponde a un problema tridimensional según English (2007), porque asigna tres variables (marca, color y estilo) a un objeto (el carro). Por tal motivo se asumió en las hipótesis las cinco estrategias (N° 6 al N° 10) propuesta por dicha autora, pero al momento de contrastarlas con las respuestas de los estudiantes prevaleció el uso de la estrategia 6 “Ensayo y Error” y la estrategia 10 “Odómetro completo”, siendo ésta última la más asertiva al obtener todas las combinaciones posibles del problema; y sólo un estudiante de los que utilizaron la estrategia N° 6 “Ensayo y Error” obtuvo todas las combinaciones posibles del problema.

De otro lado, los estudiantes no asumieron la estrategia Fijar variable de Roa, Batanero y Godino (2003), ni aplicaron la operación combinatoria regla del producto.

A continuación se presenta, en la tabla 7, las estrategias propuestas en las hipótesis junto con el número de estudiantes que utilizaron dichas estrategias para resolver el problema de selección.

Tabla 7. Utilización de las estrategias al problema de selección.

HIPÓTESIS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estrategia 6 “Ensayo y Error”	10
Estrategia 7	5
Estrategia 8	0
Estrategia 9	2
Estrategia 10	19
Fijar Variable	0

Oper. Regla del producto	0
otras	2
	38

5.5.2. Caracterización de las estrategias al problema de partición

El problema de partición titulado "Nuevos Uniformes de fútbol" corresponde a un problema tridimensional según English (2007), pues se debe asignar las tres diferentes prendas (camiseta, pantaloneta y medias), las cuales pueden ser de Cali, Colombia, Millonarios y Nacional, para formar el nuevo uniforme, es decir, se está asignando tres características a un objeto.

Por esa razón, se asumió en las hipótesis las estrategias las cinco estrategias (N° 6 al N° 10) propuesta por dicha autora, pero al momento de contrastarlas con las respuestas de los estudiantes prevaleció el uso de la estrategia 6 "Ensayo y Error" y la estrategia 10 "Odómetro completo", siendo ésta última la más asertiva al obtener todas las combinaciones posibles del problema; mientras que los estudiantes que al utilizar la estrategia N° 6 no se obtuvo todas las combinaciones posibles del problema.

De otro lado, los estudiantes no asumieron las estrategias – fijar variable y traducir el problema en otro equivalente – de Roa, Batanero y Godino (2003), ni aplicaron la operación combinatoria permutación sin repetición.

A continuación se presenta, en la tabla 8, las estrategias propuestas en las hipótesis junto con el número de estudiantes que utilizaron dichas estrategias para resolver el problema de partición.

Tabla 8. Utilización de las estrategias al problema de partición.

HIPÓTESIS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estrategia 6 "Ensayo y Error"	19
Estrategia 7	4
Estrategia 8	1
Estrategia 9	1
Estrategia 10	7
Fijar Variable	0
Traducción problema en otro equivalente	0
Oper. Permutación sin repetición	0
Traducir el problema en otro equivalente	1
otras	5
TOTAL ESTUDIANTES	38

5.5.3. Caracterización de las estrategias al problema de colocación

En el problema de colocación titulado "El campamento del grupo de Scout" se asumió en las hipótesis las estrategias: descomponer en problema en subproblemas y traducir el problema en otro equivalente de Roa, Batanero y

Godino (2003); enumeración aditiva y enumeración multiplicativa de Shin & Steffe (2008) y la operación combinatoria variación con repetición.

De las estrategias antes mencionadas: descomponer el problema en subproblemas fue la utilizada por todos los estudiantes con el fin de dar respuesta al problema de colocación, ratificando la afirmación de Roa (2000) acerca de la utilización de dicha estrategia principalmente en problemas de partición y colocación.

Sin embargo, al momento de obtener las combinaciones posibles a cada subproblema se observó dificultad en la enumeración de dichos casos; debido a que no determinaron las combinaciones totales o porque hacían un conteo errado de dichas combinaciones. La mayoría de los estudiantes utilizaron la enumeración aditiva de Shin &Steffe (2008) para establecer las combinaciones posibles del problema y sólo un estudiante utilizó la numeración multiplicativa de Shin & Steffe (2008) para el mismo fin.

De otro lado, los estudiantes no asumieron la estrategia – traducir el problema en otro equivalente – de Roa, Batanero y Godino (2003), ni aplicaron la operación combinatoria variación con repetición.

A continuación se presenta, en la tabla 7, las estrategias propuestas en las hipótesis junto con el número de estudiantes que utilizaron dichas estrategias para resolver el problema de selección.

Tabla 9. Utilización de las estrategias al problema de colocación.

HIPÓTESIS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Descomponer el problema en subproblemas	38
Enumeración aditiva	37
Enumeración Multiplicativa	1
Traducción problema en otro equivalente	0
Oper. Variación repetición	0

6. CONCLUSIONES

A continuación se presenta los comentarios generales del estudio realizado sobre las estrategias de solución de problemas combinatorios simples en estudiantes de octavo grado. Para ello, las conclusiones están organizadas en tres secciones: la primera da respuesta a la pregunta de indagación; la segunda comenta las generalidades obtenidas al cumplimiento del objetivo general, relacionada con las conclusiones obtenidas al contrastar las hipótesis con las respuestas de los estudiantes, y por último se comenta algunas consideraciones respecto al problema de la indagación.

Así, con respecto a la pregunta de indagación se logró dar respuesta a la pregunta de indagación al identificarse las estrategias de solución a problemas combinatorios simples por parte de estudiantes de octavo grado, quienes en años anteriores, tuvieron instrucción en probabilidad, para lo cual se llevaron a cabo las siguientes acciones:

- Revisión bibliográfica de documentos nacionales y extranjeros sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, más específicamente de la combinatoria, que sirvió para generar el marco referencial con el cual se realizó el análisis de las respuestas de los estudiantes.
- Se diseñó y aplicó una prueba diagnóstica compuesta por tres problemas combinatorios (un problema de selección, un problema de partición, un problema de colocación).
- Se describieron las respuestas de los estudiantes a cada uno de los tres problemas combinatorios propuestos en la prueba diagnóstica, más específicamente las estrategias de solución a dichos problemas. A partir de allí, se categorizaron dichas estrategias a la luz de las investigaciones consultadas y reportadas en el marco referencial.

Con respecto a la categorización de las estrategias de solución a problemas combinatorios simples, se establece dichas estrategias según el tipo de problema combinatorio simple (selección, partición y colocación), para ello, se hace un contraste de las hipótesis planteadas con las respuestas de los estudiantes a los problemas combinatorios propuestos a la luz de las investigaciones relacionadas en el marco de referencia, obteniéndose las siguientes conclusiones:

- La estrategia del odómetro (English, 2007) fue la más utilizada por los estudiantes al resolver los problemas combinatorios de selección, siendo la más efectiva ya que los estudiantes que la utilizaron obtuvieron todas las combinaciones posibles al problema planteado y encontraron la respuesta correcta.

- La estrategia 6 “Ensayo y Error” de English (2007) prevaleció como estrategias de solución en los problemas de partición, pero sólo un estudiante obtuvo todas las posibles combinaciones del problema con esta estrategia, lo que implica que, aunque se considera muy primaria su aplicación, se puede obtener respuesta satisfactoria con ella.

- Ningún estudiante resolvió el problema planteado a través de la utilización de alguna operación combinatoria, es decir, no se aplicó la regla del producto para resolver el problema de selección, la permutación sin repetición en el problema de partición ni la variación con repetición en el problema de colocación; aunque estas operaciones fueron vistos por ellos en grado séptimo como técnicas de conteo, mostrando que aunque se tenga instrucción previa en la temática, no se logra identificar la operación combinatoria del problema, contrario a lo que afirman Batanero y Navarro-Pelayo (1996).

- En el problema combinatorio de colocación prevaleció la utilización de la estrategia – descomponer el problema en subproblemas – estrategia propuesta por Roa, Batanero y Godino (2003), al asumir la distribución de las cinco personas en las dos carpas en tres subproblemas así: distribuir las cinco personas en una carpa y dejar vacía la otra carpa, distribuir cuatro personas en una carpa y una persona en la otra carpa, distribuir tres personas en una carpa y las otras dos personas en la otra carpa.
  Así mismo, la utilización de esta estrategia en el problema de colocación corrobora lo expuesto por Roa (2000), quien afirma que los estudiantes suelen utilizar la estrategia de descomponer el problema en subproblemas en problemas de partición y de colocación.

- Se presentaron errores en la enumeración de los combinaciones posibles del problema de colocación al no identificarse correctamente la unidad contable (Shin & Steffe, 2008) como la unión de dos o más unidades simples, lo que llevó a que los estudiantes asumieran, en el problema de las carpas y las cinco personas, la distribución de las personas en la carpa 1 y en la carpa 2 como dos combinaciones diferentes en lugar de tomarlas como la unión de ellas para una combinación posibles del problema.

- El establecimiento no adecuado de un patrón cíclico en las combinaciones posibles conllevó a que éstas no se determinaran en forma completa o que alguna de ellas se repitieran, por lo que no dieron respuesta satisfactoria al problema planteado.

- Tener una buena comprensión del problema ayuda en su resolución y por ende a la determinación de las combinaciones pedidas. Sin embargo, cuando ésta no existe se originan combinaciones no adecuadas al problema.

- Los estudiantes se ayudaron de convenciones y representaciones gráficas pictóricas al momento de resolver los problemas propuestos, lo que significa que dichas representaciones fomentan la comprensión de los problemas (Bustos, 2012).

- Se resalta la innovación y recursividad de los estudiantes al momento de abordar los problemas, pues emplean estrategias de solución efectivas que no son referenciadas en las investigaciones relacionadas del presente trabajo de indagación.

Se recomienda continuar el estudio de la combinatoria a nivel investigativo, pues aunque los estudiantes dan respuestas correctas a los problemas planteados, se requiere la comprensión y formalización a través del uso adecuado de las operaciones combinatorias y no sólo a través de la enumeración de las combinaciones posibles. El hecho no es abolir la enumeración de los casos, pues éste es el pilar de un adecuado pensamiento combinatorio en situaciones que involucren cantidades pequeñas, pero se requiere generalizar dicho razonamiento en situaciones con cantidades grandes y es ahí donde se ve la importancia de la formalización procedimental y posteriormente la aplicación de éstos en contextos como la probabilidad y otras disciplinas.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2001). Situación actual y perspectivas futuras de la didáctica Estadística Universidad de Granada. Granada, España.

Batanero, C., & Navarro-Pelayo, V. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Bachillerato. Educación Matemática.

Bustos, L. (2012). Análisis de estrategias de resolución de problemas combinatorios en estudiantes de noveno grado. Tesis de Maestría. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

English, L. (2007). Children's strategies for solving two and three dimensional combinational problems. In: Leder, Gilah C. and Forgasz, Helen J., (eds.) Stepping stones for the 21st century: Australasian mathematics education research. Sense Publishers, The Netherlands, 139-156.

Fernández, F., Sarmiento, B., y Soler, N. (2008).Conocimiento estadístico y probabilístico de profesores de educación básica y media. Informe de Investigación DMA 014-06. Centro de Investigaciones (CIUP).

Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university stdents. Educational Studies in Mathematics, 60 (1), 3-36

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998) Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia: Corporativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos en competencias matemáticas. En *Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*, 46-95. Bogotá, Colombia.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE / Horsori.

Roa, R., Batanero, C. y Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, agosto 15, (002). Santillana, Distrito Federal México,5 – 25.

Roa, R. (2000) Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Shin, J., y Steffe, L. (2008) Seventh graders' use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinatorial problems. En Swars, S.L., Stinson, D.W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). (2009). Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University.

ANEXOS

Anexo 1. Nuevos Uniformes para el equipo de fútbol.

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE FÁTIMA
ÁREA DE MATEMÁTICAS

NOMBRE: ____ CURSO_____

Leo con mucha atención y resuelvo la siguiente situación.

La compañía confecciona nuevos uniformes a partir de las prendas de cuatro equipos de fútbol (Cali, Nacional, Millonarios y Colombia) de modo que al combinarlas, un uniforme no queda con prendas de un mismo equipo. Una escuela de fútbol está interesada en contratar a esta compañía con el fin de adquirir los uniformes para sus jugadores. ¿Cuántos uniformes diferentes puede ofrecer la compañía a la escuela?

Docentes: Mary Nelsy Peña Ariza – Mónica Andrea Vergara Chávez

Anexo 2. Comprando carro nuevo.

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE FÁTIMA
ÁREA DE MATEMÁTICAS

NOMBRE____ CURSO_____

Leo y resuelvo la siguiente situación.

La familia Álvarez está decidiendo su "nuevo carro". En el concesionario debían decidir entre camioneta o automóvil, de las marcas Mazda, Renault y Chevrolet y entre los colores blanco, negro y azul. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir la familia Álvarez su nuevo carro?

RENAULT CHEVROLET mazda

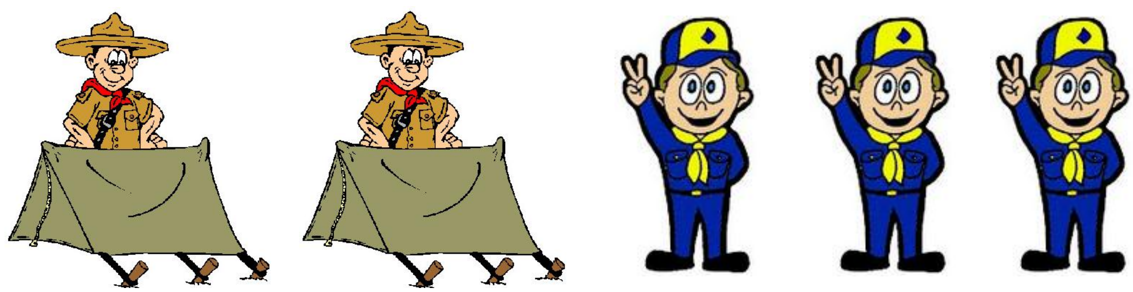
Anexo 3. El campamento del grupo de scout.

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE FÁTIMA
ÁREA DE MATEMÁTICAS

NOMBRE____ CURSO_____

Leo y resuelvo la siguiente situación.

El grupo de Scout, formado por tres niños (Juan, Luis y Ana) y dos profesores (Carlos y Elías), sale de campamento. Para la estadía llevan 2 carpas. ¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse los miembros de Scout en las carpas?



Docentes: Mary Nelsy Peña Ariza – Mónica Andrea Vergara Chávez