

**ESTUDIO DESCRIPTIVO DE LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN LOS
NIÑOS DE GRADO SEXTO**

ANDRÉS FELIPE SUÁREZ FUENTES

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2013**

**ESTUDIO DESCRIPTIVO DE LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN LOS
NIÑOS DE GRADO SEXTO**

ANDRÉS FELIPE SUÁREZ FUENTES

**Trabajo presentado para optar por el título de:
Especialista en Educación Matemática**

Dirigido por:
Edwin Alberto Carranza Vargas

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2013**

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Presidente del jurado

Presidente del jurado

Bogotá, 21 de octubre de 2013

A mi familia y a los que llevo
en mis más profundos recuerdos

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos a:

El profesor Edwin Carranza y a los profesores de la Especialización por guiarme durante este proceso. A las directivas del colegio por brindar su apoyo y a mis estudiantes y sus familias que brindaron la materia prima de este trabajo.

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. JUSTIFICACIÓN	2
2. OBJETIVOS	3
3. MARCO TEÓRICO	4
4. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD	6
4.1. ASPECTOS GENERALES	6
4.1.1. Instrucción 1) Explora la aplicación.	8
4.1.2. Instrucción a) ¿Cómo cambia la figura?	8
4.1.3. Instrucción b) Conteo total de puntos.	9
4.1.4. Afirmación sobre las formas de contar los puntos.	10
4.1.5. Instrucción c) Conteo de puntos por filas.	11
4.1.6. Instrucción d) Conteo de puntos por columnas.	12
4.1.7. Instrucción e) Conteo de puntos por diagonales.	13
4.1.8. Instrucción f) Formas de contar los puntos.	13
4.1.9. Instrucción g) Diferencias entre las formas de contar los puntos.	13
4.1.10. Instrucción h) Una nueva forma de contar los puntos.	13

4.1.11. Instrucción i) Primera suma con una sola operación.	14
4.1.12. Instrucción j) Segunda suma con una sola operación.	14
5. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS	15
5.1. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN	15
5.2. INFORME DE LOS PROCESOS EVIDENCIADOS	16
5.2.1. Instrucción 1) Explora la aplicación.	16
5.2.2. Instrucción a) ¿Cómo cambia la figura?.	16
5.2.3. Instrucción b) Conteo total de puntos.	18
5.2.4. Instrucción c) Conteo de puntos por filas.	23
5.2.5. Instrucción d) Conteo de puntos por columnas.	25
5.2.6. Instrucción e) Conteo de puntos por diagonales.	29
5.2.7. Instrucción f) Formas de contar los puntos.	33
5.2.8. Instrucción g) Diferencias entre las formas de contar los puntos.	41
5.2.9. Instrucción h) Una nueva forma de contar los puntos.	42
5.2.10. Instrucción i) Primera suma con una sola operación.	43
5.2.11. Instrucción j) Segunda suma con una sola operación.	45
6. CONCLUSIONES	46
BIBLIOGRAFÍA	50

TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Conteo de puntos en general.	9
Tabla 2. Conteo de puntos por filas.	10
Tabla 3. Conteo de puntos por columnas.	11
Tabla 4. Conteo de puntos por diagonales.	12

GRÁFICAS

	Pág.
Gráfica 1. Captura de la figura número 1 de la secuencia.	6
Gráfica 2. Captura de la figura número 3 de la secuencia.	7
Gráfica 3. Captura de la figura número 5 de la secuencia.	7
Gráfica 4. Captura de la figura 5 por filas.	10
Gráfica 5. Captura de la figura 5 por columnas.	11
Gráfica 6. Captura de la figura 5 por diagonales.	12
Gráfica 7. Solución de la instrucción 1 por las <i>estudiantes 9 y 10</i> .	17
Gráfica 8. Captura de la figura número 3 de la secuencia.	18
Gráfica 9. Patrón observado por los <i>estudiantes 3 y 4</i> en la figura 4.	18
Gráfica 10. Solución dada por el <i>estudiante 1</i> en la instrucción b)	19
Gráfica 11. Interpretación de la figura 6 por parte del <i>estudiante 1</i>	19
Gráfica 12. Interpretación de la figura 9 por parte de la <i>estudiante 13</i>	21
Gráfica 13. Trabajo realizado con el applet para obtener la figura 6	22
Gráfica 14. Solución dada por el <i>estudiante 11</i> en la instrucción c)	23
Gráfica 15. Solución dada por la <i>estudiante 13</i> en la instrucción c)	24
Gráfica 16. Solución dada por la <i>estudiante 12</i> en la instrucción d)	26

Gráfica 17. Solución dada por las <i>estudiantes 9 y 10</i> en la instrucción d)	27
Gráfica 18. Solución dada por las <i>estudiantes 9 y 10</i> en la instrucción e)	30
Gráfica 19. Solución dada por la <i>estudiante 12</i> en la instrucción e)	30
Gráfica 20. Interpretación de la figura 5 por parte de los <i>estudiantes 11 y 12</i>	31
Gráfica 21. Solución dada por el <i>estudiante 5 y 6</i> en la instrucción e)	32
Gráfica 22. Interpretación de la figura 5 por parte de los <i>estudiantes 5 y 6</i>	32
Gráfica 23. Solución dada por el <i>estudiante 4</i> en la instrucción f)	33
Gráfica 24. Solución dada por las <i>estudiantes 9 y 10</i> en la instrucción f)	33
Gráfica 25. Solución dada por la <i>estudiante 13</i> en la instrucción f)	34
Gráfica 26. Solución dada por el <i>estudiante 14</i> en la instrucción f)	34
Gráfica 27. Solución dada por los <i>estudiante 5 y 6</i> en la instrucción f)	34
Gráfica 28. Solución dada por la <i>estudiante 12</i> en la instrucción g)	35
Gráfica 29. Solución dada por el <i>estudiante 13</i> en la instrucción g)	35
Gráfica 30. Solución dada por el <i>estudiante 4</i> en la instrucción g)	35
Gráfica 31. Solución dada por el <i>estudiante 1</i> en la instrucción g)	36
Gráfica 32. Solución dada por el <i>estudiante 11</i> en la instrucción h)	36
Gráfica 33. Interpretación de la figura 5 por parte de los <i>estudiantes 11 y 12</i>	37
Gráfica 34. Solución dada por el <i>estudiante 14</i> en la instrucción i)	38

Gráfica 35. Solución dada por la <i>estudiante 12</i> en la instrucción i)	38
Gráfica 36. Solución dada por la <i>estudiante 12</i> en la instrucción i)	49



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "*Estudio descriptivo de los procesos de generalización en los niños de grado sexto*" Presentado por el estudiante:

ANDRÉS FELIPE SUÁREZ FUENTES - 2013182030

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **45** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 10 días del mes de diciembre de 2013.

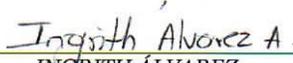
JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a)


EDWIN CARRANZA

Jurado:

Profesor(a)


INGRITH ÁLVAREZ

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página xiv de 69	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo para optar por el título de Especialista en Educación Matemática.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Estudio descriptivo de los procesos de generalización en niños de grado sexto
Autor(es)	Andrés Felipe Suárez Fuentes
Director	Edwin Alberto Carranza Vargas
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. Pag 69
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Generalización, inducción, conjeturación, justificación.
2. Descripción	
<p>El objetivo del trabajo es describir lo que sucede cuando se propone un tipo de actividades basadas en el proceso de generalización, con las cuales se espera que los estudiantes de grado sexto desarrollen diferentes habilidades, en particular la capacidad de definir, observar, registrar y argumentar sobre lo que encuentran en una situación dada.</p>	

3. Fuentes
<p>Castro, E.; Cañadas, M. y Molina, M. (2010) El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. <i>UNO (54)</i>, 55-67</p> <p>Manara R. (2002). <i>La matematica e la realtà</i>, linee di metodo. Génova, Italia: Marietti.</p> <p>Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. y Gowar, N. (1985) <i>Routs to/ Roots of Algebra</i>. Inglaterra: The open University press.</p>

4. Contenidos

- Marco Teórico: Se da el marco el cual esta ligado al proceso de generalización y a el razonamiento de tipo inductivo.
- Descripción de la actividad: Se describe la forma en que se propone la actividad, las características del applet y la guía que lo acompaña.
- Resultados de las pruebas realizadas: se presentan las evidencias más importantes bajo el criterio del autor, en el orden en el cual se presentó la guía y se analizan con base al marco teórico dado.
- Conclusiones de la indagación.

5. Metodología

Se propone una actividad basada en un arreglo de puntos que es creciente en forma de triángulo. Haciendo uso del programa geogebra se construyó un applet el cual posee el arreglo de puntos que va cambiando a medida que aumenta un deslizador. Los estudiantes tienen una guía que a grandes rasgos pide realizar el conteo de puntos de algunas figuras, este conteo se puede realizar de varias maneras. Posteriormente se tienen 3 tipos de información. La información de los diferentes desarrollos de los estudiantes es recolectada de manera escrita en la guía, grabada en la pantalla del computador o durante la conversación entre los estudiantes y en algunos casos mediante un diálogo con el profesor para aclarar puntos o para ayudar a la discusión. Al final se presentan los desarrollos más importantes de la actividad bajo el criterio del autor, se hace en el orden en el cual se presentó la guía y se comparan con el marco teórico dado.

6. Conclusiones

- La actividad propuesta genera que los estudiantes desarrollen el proceso de generalización y razonamientos inductivos.
- Genera también discusiones las cuales, por una parte aclaran significados o definiciones y por otra enriquecen el análisis de la situación o el conocimiento que se genera a partir de ella.
- Análisis de la guía y el applet propuestos, recomendaciones a la hora de implementar la actividad en el aula.

Elaborado por:	Andrés Felipe Suárez Fuentes
Revisado por:	Edwin Alberto Carranza Vargas

Fecha de elaboración del Resumen:	2	12	2013
--	---	----	------

INTRODUCCIÓN

En la labor docente que vengo realizando he observado que uno de los temas más importantes y que se les dificulta particularmente a los estudiantes, es el de la introducción al álgebra y el trabajo que se realiza con el concepto de operar letras en vez de números. Es por esto que se busca proponer a alumnos de grado sexto tareas o actividades que comiencen de manera temprana a introducirlos en pensamientos que los induzcan al análisis de procesos de generalización.

Esta actividad está propuesta haciendo uso del programa geogebra, con el cual se construyó un applet, que consiste en un arreglo de puntos que va cambiando a medida que varía un deslizador. Los estudiantes tienen una guía que, a grandes rasgos, pide realizar el conteo de puntos que tiene cada figura, este conteo se realiza de varias maneras, recopilando la información en tablas para que se puedan organizar los datos y con esto logren reconocer patrones o regularidades de una manera más fácil. El ambiente de geogebra ayuda en esto ya que es dinámico, permite brindar ayudas visuales, permite construcciones alternas por parte de los estudiantes y permite pasar de una figura a otra fácilmente. Sin embargo no necesariamente se debe hacer uso del applet ya que el arreglo se puede representar en un tablero, con vasos o hasta con personas.

Una cosa importante que se debe resaltar es que, a pesar de que se busca proponer un espacio donde se desarrolle el proceso de generalización, la actividad se diseñó de tal manera que no requiere conocimientos de álgebra o el manejo como tal del concepto de variable. De hecho, la actividad fue aplicada a estudiantes de grado sexto los cuales no tenían un nivel avanzado de conocimientos en álgebra, pero si el lector lo desea, la misma puede ser usada como base para desarrollar actividades que tienen el mismo espíritu, desarrollan el manejo del álgebra y pueden generar hasta demostraciones.

Por otra parte, la actividad permite abrir un espacio donde el alumno no está obligado a dar un resultado cuya respuesta es única, por el contrario se le da la libertad de modelar la situación a su manera, escogiendo sus reglas y sin necesariamente tener que ceñirse a la guía o a la forma de explicar de un profesor, cosa que puede ser útil para que los alumnos valoren sus propios resultados.

A lo largo de este trabajo se presentaran algunos resultados de las diferentes representaciones o de los diferentes argumentos que se pudieron evidenciar en el desarrollo de la actividad, por parte de los estudiantes de grado sexto del colegio Alessandro Volta. Este informe está estructurado de acuerdo a la forma en la que fue desarrollada la guía que debían resolver los alumnos, para cada punto se mostrarán los ejemplos más destacados o más relevantes según el criterio del autor y se contrastaran con el marco teórico propuesto.

Los datos serán analizados desde dos puntos de vista teóricos, el primero pretende dar cuenta de la forma como un estudiante de grado sexto “ve”, “registra” y “expresa” una generalidad o regularidad. El segundo se basa en un modelo del razonamiento inductivo el cual permitirá ver hasta que punto de este modelo alcanzan a llegar algunos estudiantes.

1. JUSTIFICACIÓN

En el trabajo que he hecho como docente se ha observado que durante el aprendizaje matemático de los estudiantes, se presentan muchas dificultades en cuanto a los procesos en los cuales intervienen la relación entre situaciones concretas y el uso de las matemáticas para resolver propuestas de cambio en dichas situaciones, ya que no se identifican conexiones o características similares entre ellas. Es por eso que surge el interés en los procesos de generalización ya que estos requieren la percepción de patrones, la representación de los mismos y por último la capacidad de expresar con instrumentos matemáticos dichas representaciones y resultados.

Los procesos de generalización hacen parte del razonamiento inductivo, que a su vez es un tipo de razonamiento importante ya que es la esencia de los procesos que se siguen en las investigaciones científicas, puesto que se trabaja con casos particulares para luego formular una hipótesis o una conjetura y al final poder demostrar o refutar dicha conjetura.

Los procesos de generalización son reconocidos también internacionalmente, puesto que por ejemplo hacen parte de los objetivos que se dan en los “principios y estándares para la educación matemática” publicado por el N.C.T.M.

2. OBJETIVOS

El trabajo está encaminado a desarrollar un tipo de actividad que permita desarrollar en los estudiantes la capacidad de buscar patrones y de predecir el comportamiento de dichos patrones, utilizando el conocimiento matemático que poseen. A su vez con esta actividad se pretende describir el proceso que desarrollan los estudiantes de grado sexto cuando resuelven un problema que tiene que ver con el proceso de generalización, con el fin de saber hasta qué punto de este proceso llegan los estudiantes, e identificar el tipo de preguntas o indicaciones que favorecen el desarrollo de este proceso.

Posteriormente, a partir de estos resultados, se espera proponer cambios en la actividad que permitan que esta pueda ser utilizada en el aula y que se desarrolle de la mejor manera al tener en cuenta las instrucciones en donde vale la pena hacer énfasis para obtener resultados diversos.

3. MARCO TEÓRICO

Durante el desarrollo de este trabajo se busca describir la actividad matemática desarrollada por estudiantes de grado sexto y en particular lo que tiene que ver con los procesos de generalización. Primero se comienza por definir lo que significa que un estudiante realice un proceso de generalización, este proceso se puede describir de la siguiente manera, según Mason, Graham, Pimm y Gower, (1985) el estudiante: “debe percibir algún patrón o regularidad, luego tratar de expresar lo que se percibe en forma sucinta para poder comunicarlo a alguien”(p. 16).

Es evidente que los procesos de generalización juegan un papel importante cuando se trabaja en matemáticas, ya que se busca constantemente expresar propiedades sobre los objetos matemáticos de tal manera que se puedan usar en diferentes contextos o que dichas propiedades sean aplicables a un conjunto de elementos determinado, por ende es importante ejercitar la habilidad de nuestros estudiantes en cuanto a los procesos de generalización.

Dentro del proceso de generalización encontramos tres etapas. La primera consiste en ‘ver’ u ‘observar’ un patrón o una regularidad, este proceso según Mason, et al. (1985): “hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación” (p. 16), generalmente ocurre cuando se trabaja con casos particulares que permiten identificar lo que está sucediendo en determinada situación, podríamos decir que es un paso intuitivo donde la persona reconoce que algo particular está sucediendo y se repite bajo ciertas condiciones. Esta primera etapa no solo es importante para el proceso de generalización ya que en el trabajo matemático el ‘observar’ permite recoger datos, establecer diferencias y despierta el interés de llegar a entender una situación a fondo. El ‘observar’ no solo está ligado a entender un problema como tal, sino también a ligarlo o a reconocerlo en otros ámbitos, a desarrollar la capacidad de analizar diferentes situaciones u objetos desde diferentes puntos de vista, en general como lo dice Manara (2002) “para resolver problemas se necesita saber observar” (p. 44).

La segunda etapa se podría definir como ‘registrar’ o ‘describir’ la situación que se ‘ve’ o se ‘observa’, según Mason et al. (1985) consiste en “hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación

escrita” (p. 16). Esta etapa será la que permita a la persona abstraer los elementos de la situación dada, para luego poder trabajar con ella y encontrar diferentes resultados o propiedades. Durante este proceso es primordial la capacidad de manejar herramientas que permitan modelar la situación en que se encuentra, ya que si una persona no maneja un concepto o no lo entiende no se puede esperar que piense en usarlo en una situación particular. Estas maneras de representar también generan argumentos al compararlas entre ellas, ya que, por ejemplo, surge la necesidad justificar si las representaciones son diferentes entre ellas o no. En este aspecto es importante proponer un tipo de actividad en la cual los estudiantes estén bastante interesados ya que, las ganas de describir por parte del estudiante serán mas profundas si el estudiante de alguna manera se siente identificado con la actividad y esto a su vez genera la realización de un trabajo con interés y profundidad (Manara, 2002).

Para la última etapa tiene que ver con el ‘decir’ o ‘expresar’ los resultados que se tienen durante el desarrollo de la actividad, tomo entonces la definición de Mason, et al. (1985) “es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido” (p. 16).

El proceso de generalización hace parte del razonamiento de tipo inductivo, el cual es un razonamiento que se genera a partir de la ‘observación’ de casos particulares o premisas dadas, luego se conjetura un posible modelo para la situación, se prueba esta conjetura con casos particulares para posteriormente llegar a demostrar dicha conjetura. “Poincaré (1902), utiliza el término inducción cuando reflexiona y trata de la naturaleza del razonamiento matemático. Considera la inducción como la vía para llegar al conocimiento en cualquier ciencia, en particular en la ciencia matemática, partiendo de situaciones particulares, observando las regularidades y alcanzando la generalización” (Castro, Cañadas y Molina. 2010, p. 57).

A continuación se presenta un modelo que consta de siete pasos, el cual se utilizará durante este trabajo con el objetivo de medir o dar cuenta de los alcances que llegan a tener los estudiantes de grado sexto cuando realizan este tipo de razonamientos. El modelo fue propuesto por Castro, Cañadas y Molina. (2010, p 57):

Trabajo con casos particulares: Casos concretos o ejemplos con los que se inicia el proceso. Suelen ser casos sencillos y fácilmente observables.

Organización de casos particulares: Disponer los datos obtenidos de forma que ayude a la

percepción de patrones, ya sea en una tabla, en filas y columnas, con algún orden.

Identificación de patrones: El patrón, o pauta, es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse.

Formulación de conjeturas: Una conjetura es una proposición que se supone verdadera pero que no ha sido sometida a exploración. Dicha exploración puede dar como resultado su aceptación o su rechazo. Si se presenta un ejemplo para el que la conjetura no es válida, ésta se rechaza.

Justificación de las conjeturas: Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se suele distinguir entre justificaciones empíricas y deductivas. Las empíricas usan los ejemplos como elemento de convicción. Se vuelve a comprobar con otros casos particulares.

Generalización: La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados.

Demostración: Proceso de validación formal que no deja lugar a dudas sobre la validez de la conjetura que se trata de probar y que la determina inequívocamente.

4. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

4.1. ASPECTOS GENERALES

Como se mencionó durante la introducción, la actividad puede ser propuesta a estudiantes de muchos niveles, dependiendo del tipo de argumentación que se espere obtener por parte de ellos. En este caso va dirigida o está pensada para estudiantes de grado sexto, los cuales han tenido un pequeño acercamiento a lo que significa una variable, desde la perspectiva de las magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales. En este contexto solamente se maneja la incógnita como un número que es desconocido y que ocupa un papel determinado en una proporción.

La actividad consta de un arreglo de puntos que crece a medida que se mueve un deslizador. El deslizador posee 5 posiciones y cada una está asociada a una figura. Los siguientes gráficos muestran el deslizador en posiciones 1, 3 y 5 respectivamente.



Gráfico 1 - Captura de la figura básica 1

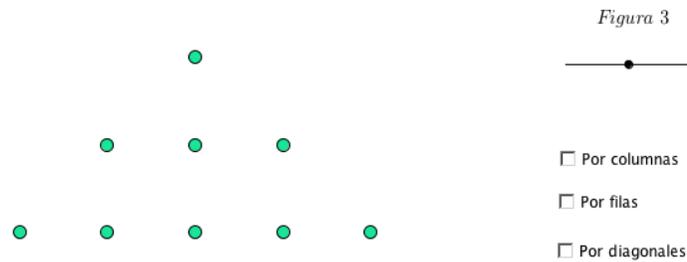


Gráfico 2 – Captura de la figura básica 3

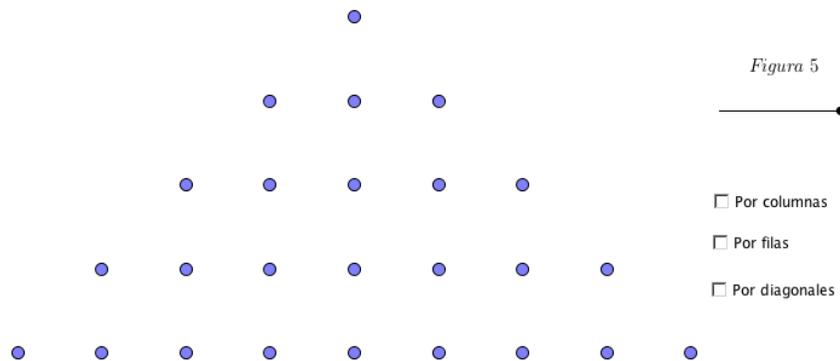


Gráfico 3 – Captura de la figura básica 5

Este arreglo de puntos se puede proponer en situaciones de la vida real, si por ejemplo la idea es realizar una formación de personas o realizar una pirámide de latas que tenga esta misma disposición, puede ayudar al estudiante a manejar la terminología y a su vez a despertar su interés en ella, permitiendo que realice un trabajo con mayor dedicación.

La misma actividad va acompañada de una guía (Anexo A) la cual puede ser modificada de muchas maneras, tomando menos preguntas o cambiando la manera en que se proponen, puesto que en esta ocasión se piensa en grupos de máximo tres personas. Al pensar esta actividad como una propuesta para el aula, se puede considerar el trabajo en grupos y seleccionar las preguntas para luego

realizar una puesta en común frente a toda la clase, es decir que los grupos tengan diferentes preguntas y las expongan al final.

A continuación se describirá la guía punto por punto y el objetivo o la motivación inicial que se tuvo para proponer dicho punto.

4.1.1. Instrucción 1.

1. Explora la aplicación y comenta con tus compañeros lo que encuentras.

Esta instrucción se propone con el fin de que el alumno se familiarice con la actividad, se espera que comenten sobre las características que notan en cuanto al arreglo, a los botones y al deslizador, y que de alguna manera empiece a conocer el ambiente que ofrece geogebra, ya que en este caso con estos estudiantes se realizaron algunas actividades con el programa, como construcciones de polígonos y simetrías, pero no han tenido un trabajo profundo con él.

4.1.2. Instrucción a)

a) ¿Cómo va aumentando la cantidad de puntos a medida que cambia la figura?

La intención de esta instrucción es comenzar a introducir al estudiante a lo que se quiere con la actividad. Ayuda a identificar que son figuras que cambian de acuerdo a un deslizador que tiene determinadas posiciones, a 'ver' las diferentes características de la figura, a 'ver' los cambios o lo que permanece constante a partir del el cambio del deslizador y para que se enfoque la atención en la cantidad de puntos que posee cada figura. Desde este punto, ya se espera que se ejercite la parte visual de los estudiantes al reconocer las diferencias y las características similares entre las figuras.

2.1.3. Instrucción b) Conteo total de puntos.

b) Completa la siguiente tabla

Figura	Número de puntos
1	
2	
3	
5	
6	
9	
25	

Tabla 1 - Conteo de puntos en general

La instrucción hace referencia al número de puntos que tiene cada figura, en este punto no se da ninguna indicación de cómo contar los puntos o en qué forma proceder, se propone la tabla con el fin de que el estudiante organice de alguna manera la información que va recogiendo, a su vez que pueda percibir una regularidad o patrón que se va dando, ya que puede observar fácilmente la relación entre las columnas de la tabla y por último que pueda encontrar de qué depende dicho patrón.

En la tabla también se hace referencia a la cantidad de puntos de figuras que no se encuentran en el applet y figuras que no se pueden realizar tan fácilmente con el programa o con un dibujo en un papel, se espera que esta imposibilidad de tener la figura como tal, lleve al estudiante a encontrar un patrón o una regularidad.

2.1.4. Afirmación

“La cantidad de puntos de cada figura no cambia, pero podemos contarlos de diferentes formas...”

Esta afirmación se propone para motivar las siguientes preguntas y hace referencia al conteo de los puntos, es decir que tal vez la forma de contar que se usó en la instrucción anterior no es única.

2.1.5. Instrucción c)

c) Completa la tabla contando los puntos siguiendo las filas

Figura	Número de puntos contando por filas
1	1
2	1+3
3	1+3+5
5	
6	
9	
14	

Tabla 2 - Conteo de puntos por filas

Se pregunta por el número total de puntos en cada una de las figuras y se dan las tres primeras opciones como ejemplos para que el estudiante sepa que debe hacer, a su vez en el arreglo se tiene una pestaña que dice precisamente "Por filas", la cual al ser activada colorea los puntos del arreglo de tal manera que cada fila es de un color diferente.

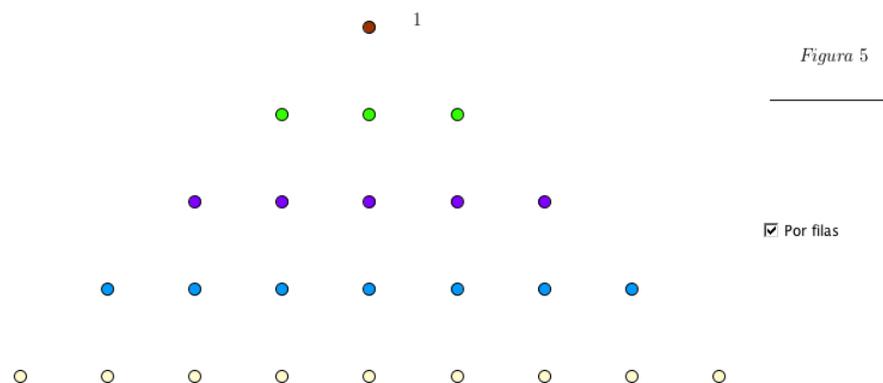


Gráfico 4 - Captura de la figura 5 por filas

Se espera que los ejemplos de las 3 primeras figuras ayuden al estudiante a proponer su respuesta, así como a la 'representación' que debe realizar para encontrar la expresión que se pretende en las figuras de posiciones más avanzadas, que no se encuentran fácilmente usando el programa.

2.1.6. Instrucción d)

d) *Completa la tabla contando los puntos por columnas*

Figura	Número de puntos contando por columnas
1	1
2	$2+(2*1)$
3	$3+(2*2)+(2*1)$
5	
6	
9	
14	

Tabla 3 - Conteo de puntos por columnas

El propósito y la forma de proponer esta instrucción es similar a la anterior, lo único que cambia es la forma de contar los puntos y por tanto la representación cambia en la figura, como se observa en el gráfico 5. Posee

también un botón llamado “Por columnas” que al ser activado colorea la figura, evidenciando las columnas que tienen la misma cantidad de puntos.

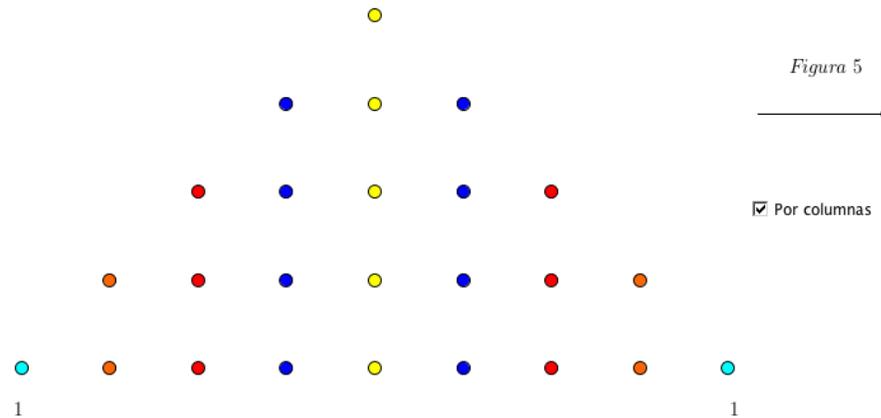


Gráfico 5 - Captura de la figura 5 por columnas

2.1.7. Instrucción e)

e) *Completa la tabla contando los puntos por diagonales*

Figura	Número de puntos contando por diagonales
1	
2	
3	
5	
6	
9	
14	

Tabla 4 - Conteo de puntos por diagonales

En esta instrucción las cosas varían un poco ya que esta vez se propone el conteo por diagonales. Dado que previamente se ha trabajado con las filas y las columnas, se espera que el estudiante proponga una forma de contar la cual esta basada en la siguiente figura.

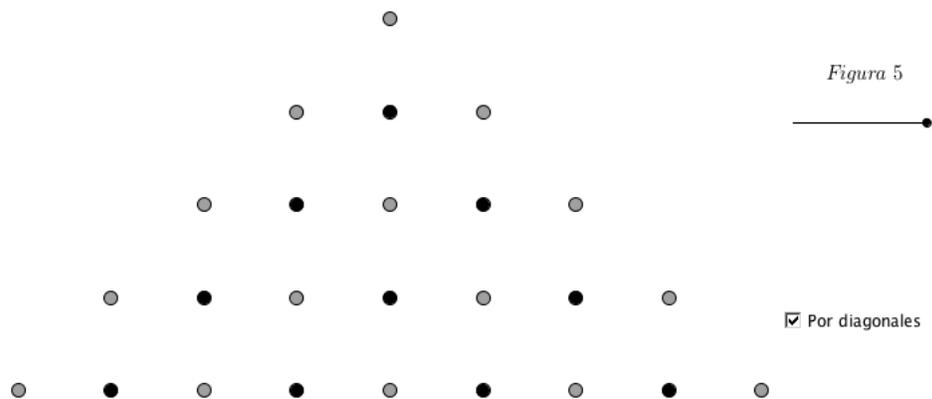


Gráfico 6 – Captura de la figura 5 por diagonales

Visualmente, por medio de los colores, se da una indicación de cómo se pueden contar los puntos, pero de todas maneras no se brinda una guía clara a la respuesta mediante los colores. Es decir que se deja espacio a la interpretación de la figura y de los colores por parte del estudiante.

2.1.8. Instrucción f)

f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera, en qué forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.

Aquí se da un espacio para dejar que el alumno ‘diga’ lo que ha entendido del trabajo que ha realizado hasta el momento.

2.1.9. Instrucción g)

g) ¿Qué diferencias hay en las formas de contar?

Se realiza esta pregunta con el ánimo de que el estudiante identifique y ‘expresé’ características particulares que tiene cada una de las formas de contar y que a su vez las compare entre ellas. Por otro lado, al ser abierta la

forma de contar por diagonales, puede que el estudiante durante este punto relacione esta forma de contar con alguna de las anteriores.

2.1.10. Instrucción h)

h) ¿Qué otra forma o formas de contar los puntos se te ocurre?

Esta pregunta está relacionada con todo el proceso que ha realizado el estudiante y pretende desarrollar el proceso de 'ver', 'registrar' y 'decir' ya que debe explicar una nueva forma que encuentre para contar los puntos y al mismo tiempo justificar la conjetura que propone.

2.1.11. Instrucción i)

i) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ con una sola operación?

La pregunta es diferente a las demás, ya que el estudiante ha realizado un trabajo con el applet, se le propone una situación en la cual puede aplicar lo que 'vio' en los puntos anteriores. También se busca que justifique su respuesta donde asocie las filas número 4 de las tablas 1 y 2, o de cualquier otra manera pero que al final le permita justificar su respuesta.

2.1.12. Instrucción j)

j) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $2+4+6+8+10+12+14+8$ con una sola operación?

Esta pregunta es similar a la anterior, pero se diferencia ya que hace referencia a la forma de contar por columnas, al no estar esta operación en ninguna de las tablas anteriores se espera que el estudiante reconozca las características de los números que intervienen en la suma y pueda expresar estas sumas con una sola operación.

3. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS

3.1. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

La actividad se aplicó a estudiantes del curso sexto del colegio Alessandro Volta de la ciudad de Bogotá. El curso es de 21 estudiantes y para realizar estas pruebas se piden los permisos respectivos a los padres de familia, puesto que durante el desarrollo de las actividades se graba la voz de los estudiantes. El colegio es trilingüe y fue fundado en el año 2006, cuenta en total con 3 promociones las cuales han ocupado lugares destacados en los resultados de las pruebas SABER a nivel nacional.

En total se desarrolló la actividad con 7 grupos, los cuales corresponden a los estudiantes que de manera voluntaria entregaron el permiso antes de realizar la prueba. La prueba se aplica en parejas, de a una pareja por prueba, fuera de clase, bajo mi supervisión, guiando a los estudiantes solo cuando sea necesario, respondiendo a las preguntas de tal manera que los estudiantes lleguen solos hasta donde más puedan, pidiendo explicaciones de los procesos que realizan, para que esto les permita no caer en errores simples que hagan que la prueba no sea fructífera debido a errores de atención.

Se tienen tres tipos de recolección de información: información recolectada de manera escrita en la guía, información grabada en la pantalla del computador o durante la conversación entre los estudiantes e información que surge, cuando es necesario, a partir de un diálogo con el profesor para aclarar algunos puntos o para ayudar a la discusión. Las primeras tres pruebas realizadas se hicieron de tal manera que cada alumno tenía su propio computador, luego por problemas técnicos se prescindió de uno de ellos pero a su vez se evidenció una mejora ya que se presentaba más diálogo entre los estudiantes al tener que trabajar en parejas. También se presentaron algunos errores durante la grabación y por esta razón solo se tienen las evidencias escritas de las *estudiantes 7, 8, 9 y 10*. En cuanto a las guías, en 4 pruebas cada uno presentaba un trabajo propio y en las otras pruebas la guía la compartían con la pareja. Esta forma de entregar las guías no fue premeditada y las variaciones fueron debidas a inconvenientes de tiempo con los alumnos. Por esta razón a veces se presentan resultados conjuntos y en

otras ocasiones de manera individual, pero no fue un inconveniente durante el desarrollo del trabajo.

3.2. PROCESOS EVIDENCIADOS

A continuación se presentará los resultados siguiendo el orden en el cual se propusieron los puntos de la guía.

3.2.1. Instrucción 1.

1. *Explora con tus compañeros la aplicación y comenta con tus compañeros lo que encuentras*

En este punto los estudiantes exploraron un poco el applet y se familiarizaron con él. Como se dijo anteriormente, es una instrucción que le da la libertad al estudiante para explorar lo que se está trabajando. Se pudieron evidenciar diálogos en los cuales se presentaba un poco de distracción, juego entre ellos y hasta comentaban la manera en que se sienten al realizar la prueba. Dado que no pretendemos ahondar sobre este tipo de temas, y nos centramos en el proceso de generalización, no se realiza un reporte amplio sobre esto.

3.2.2. Instrucción a)

- a) *¿Cómo va aumentando la cantidad de puntos a medida que cambia la figura?*

En esta instrucción se comienzan a introducir diferentes términos que hacen referencia a ciertas características del arreglo que se presenta, por ejemplo que quiere decir el aumento de puntos, diferencian entre la última fila del arreglo y el total de puntos del arreglo, identifican los puntos que permanecen constantes, cuáles cambian y cuál es el número que identifica cada figura.

La siguiente es una imagen del trabajo desarrollado por la *estudiante 9* y la *estudiante 10*.

1. Explora la aplicación y comenta con tus compañeros lo que encuentras.
2. Responde las siguientes preguntas
 - a) ¿Cómo van aumentando la cantidad de puntos a medida que cambia la figura?
 - b) Completa la siguiente tabla

Van aumentando
de a número
impares

Gráfico 7 - Solución dada por las *estudiantes 9* y *10* en la pregunta a)

En esta respuesta las *estudiantes* ‘reconocen’ una regularidad muy importante y la ‘expresan’, asocian a la cantidad de puntos de la última fila un número impar. Este es un ejemplo importante ya que las *estudiantes* realizan los 3 pasos del proceso de generalización. ‘Ven’ un patrón que se repite en las diferentes figuras, luego ‘representan’ dicho patrón con números, que a su vez tienen una característica muy particular que es la de ser impares y todo esto lo ‘dicen’ usando términos adecuados y acordes al contexto que están trabajando. En cuanto al razonamiento inductivo, podemos catalogar esta respuesta en el trabajo de los *estudiantes* con los casos particulares, ya que solo se fijan en los ejemplos dados y por otra parte se identifican patrones en estos casos particulares.

Esta regularidad fue observada por varios *estudiantes* durante las pruebas.

Estudiante 3: ¿Cómo va aumentando la cantidad de puntos a medida que cambia la figura?... entonces cambia, cambia, cambia y cambia otra vez y cambia otra vez.

Estudiante 4: ¿Cómo así?... No entendí... se agrega dos puntos a cada extremo.

Estudiante 3: pues si.

Estudiante 4: es lo único que pasa.

En este caso los *estudiantes* también ‘ven’ una regularidad en cuanto a la posición de los puntos que se agregan y a la cantidad de ellos, cuando el *estudiante 4* dice que “se agrega dos puntos a cada extremo” se piensa en los extremos de cada fila. En este caso el *estudiante 4* solamente comunica a su compañero la cantidad de puntos que se están agregando y la posición

en que se encuentran, a diferencia del anterior ejemplo en el cual no solo se determina la posición en que aparecen los puntos, sino que se identifica una característica del número de puntos que se agregan y es el de ser un número impar de puntos. En las siguientes figura se observa los puntos a los que los estudiantes hacen referencia y su posición al analizar el paso de la figura 3 a la figura 4.

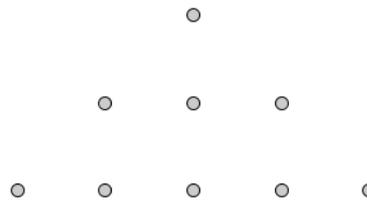


Gráfico 8 - Captura de la figura 3

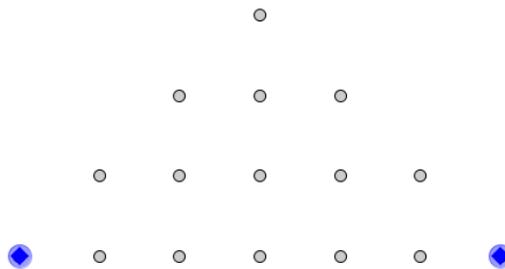


Gráfico 9 - Patrón observado por los *estudiantes 3 y 4* en la figura 4

En cuanto al razonamiento de tipo inductivo, también se evidencia el trabajo con casos particulares y la identificación de patrones ya que los estudiantes analizan varias figuras que son dadas en el applet y al final identifican que los puntos que se agregan son 2, uno a cada extremo en la nueva fila.

3.2.3. Instrucción b) Conteo total de puntos

b) Completa la siguiente tabla

En este punto los estudiantes tienen la plena libertad de realizar el proceso que consideren más adecuado. En general la mayoría logró desarrollar este

punto, obteniendo resultados similares a la respuesta dada por el *estudiante 1*.

Figura	Numero de puntos
1	1
2	4
3	9
5	25
6	36
9	81
25	625 625

Gráfico 10 - Solución dada por el *estudiante 1* en la instrucción b)

A continuación se da un ejemplo en el cual se perciben dos tipos de regularidades, las cuales se utilizan para llegar a las respuestas y a su vez se presenta una pequeña discusión entre los estudiantes.

El *estudiante 1* hace uso de la calculadora para encontrar el número de puntos que tendría la figura 6, hace la siguiente operación $25+9+2= 36$ lo cual es grabado durante en el registro de la pantalla. El estudiante 've' el arreglo de la siguiente forma

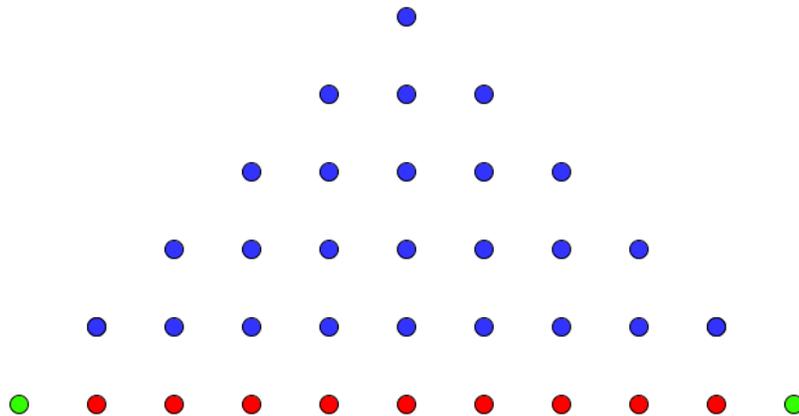


Gráfico 11 - Interpretación de la figura 6 por parte del *estudiante 1*

Donde toma los 25 puntos (azules) de la figura 5, agrega 9 (en rojo) de la fila nueva que tendría la figura 6 y dos mas (de verde) que aparecen a los lados. Luego se presenta la siguiente discusión entre los estudiantes.

Estudiante 1: tu hiciste trampa... me ayudas... no, no da 81.

Estudiante 2: aquí.

Estudiante 1: no da 81.

Estudiante 2: 9 por 9.

Estudiante 1: si pero eso no tiene nada que ver.

Estudiante 2: si tiene que ver... ¿quieres saber por qué?

Estudiante 1: ¿por qué?.

Estudiante 2: ... 1 por 1, 2 por 2.

Estudiante 1: no, eso no tiene nada que ver, mira... 36 va hasta la figura 6

Estudiante 2: ¿ves algún otro tipo de patrón?.

Estudiante 1: No, espera.

En este momento los estudiantes continúan cada uno en su proceso, el *estudiante 1* realiza las siguientes operaciones $1+3$, $4+5$, $9+7$, $16+9$, $25+11$, $36+13=49$, es decir que para encontrar el número total de puntos de una figura realiza la suma del número de puntos de la figura anterior con un número impar y al final termina aceptando la validez de la afirmación de su compañero. Claramente durante este proceso entre los dos realizan un razonamiento de tipo inductivo, puesto que trabajan con los casos particulares que se encuentran en el applet. Luego 'observan' un patrón a raíz de ese trabajo, que sería la dependencia entre el número que identifica una figura con el número de puntos total de la figura. Elaboran una conjetura ya que el *estudiante 2* intenta mostrar a su compañero la manera en que encontró el número de puntos de cada figura, la cual es el número que identifica la figura multiplicado por si mismo. Se justifica esta conjetura por parte del *estudiante 1* ya que la verifica con casos no mostrados en el applet y por último logran generalizar, ya que más adelante se desprenden de los casos particulares y dicen que la manera para encontrar el número total de puntos es tomar el número de la figura y multiplicarlo por si mismo. Es muy interesante la dinámica que se da entre ellos, ya que entre los dos construyen el conocimiento y existe una preocupación por entender y probar los resultados del otro. De manera reciproca no solo se da una

respuesta sino que existe la intención de aclarar el camino que condujo a la misma.

Así como existen diferentes maneras de realizar las operaciones o de expresar la cantidad de puntos de una figura, se pudo observar otra forma de organizar el arreglo con el fin de encontrar la cantidad de puntos que tendría la figura de determinada posición.

Durante la actividad realizada con los *estudiantes 13 y 14*, estos presentan muchas dificultades para entenderse el uno al otro y a su vez el profesor encuentra extraño el razonamiento que hace el *estudiante 13* ya que anteriormente habla de multiplicar por nueve y sumar de a dos. Estas cosas motivan al profesor a intervenir.

Profesor: estudiante 13, ¿tu cómo entiendes eso?.

Estudiante 13: Pues la verdad yo lo veo de otra forma.

Profesor: hazlo, hazlo, explícame a mi.

Estudiante 13: para llegar a la figura 9, tenemos que hacer 9 igualitas a esta y luego podemos sumarles a todos... no espera me confundí.

Estudiante 14: ¿Sumarle nueve?

Estudiante 13: si.

Estudiante 14: sería sumarle... porque acá ya hay 5 filas.

Profesor: si.

Estudiante 13: sumarle 4 filas y a todas ponerle 2, luego 4 luego 8 y así, porque si les agregamos 2 todas quedan del mismo...

Profesor: a ver sí entendí lo que dijo ella, es como completar un rectángulo de puntos y después le pongo como dos triangulitos a los lados... entonces el primero sería 2, después cuatro...

Estudiante 13: si.

Estudiante 14: si, así fue como yo entendí.

Luego la representación sería la siguiente

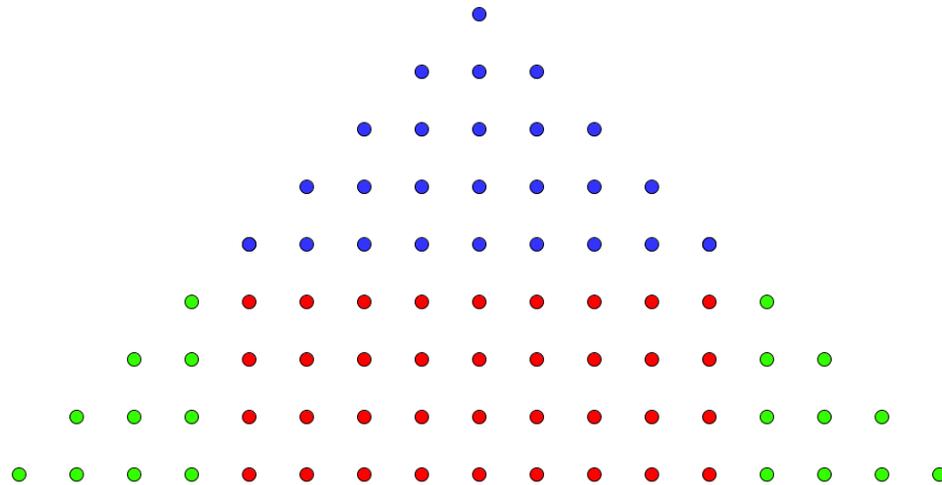


Gráfico 12 - Interpretación de la figura 9 por parte de la *estudiante 13*

Claramente es una forma de ‘ver’ el arreglo de manera diferente, se interpreta de una manera geométrica, pero a su vez no deja de ser clara la parte numérica, es decir que la forma geométrica en que se organiza todo permite no solo visualizar la figura 9 sino que también proporciona una herramienta de conteo. A su vez se hace clara la importancia de la labor del profesor para poder mediar y buscar el entendimiento entre los estudiantes, para construir el conocimiento de manera conjunta y entender lo que la otra persona piensa.

Por otra parte, el applet con el que se trabaja ofrece facilidades ya que los estudiantes pueden trabajar en él y construir figuras de tal manera que esto les ayuda a encontrar un patrón o una regularidad. A continuación se presenta la captura de pantalla del trabajo realizado por el *estudiante 3* y por el *estudiante 4*.

Figura 5

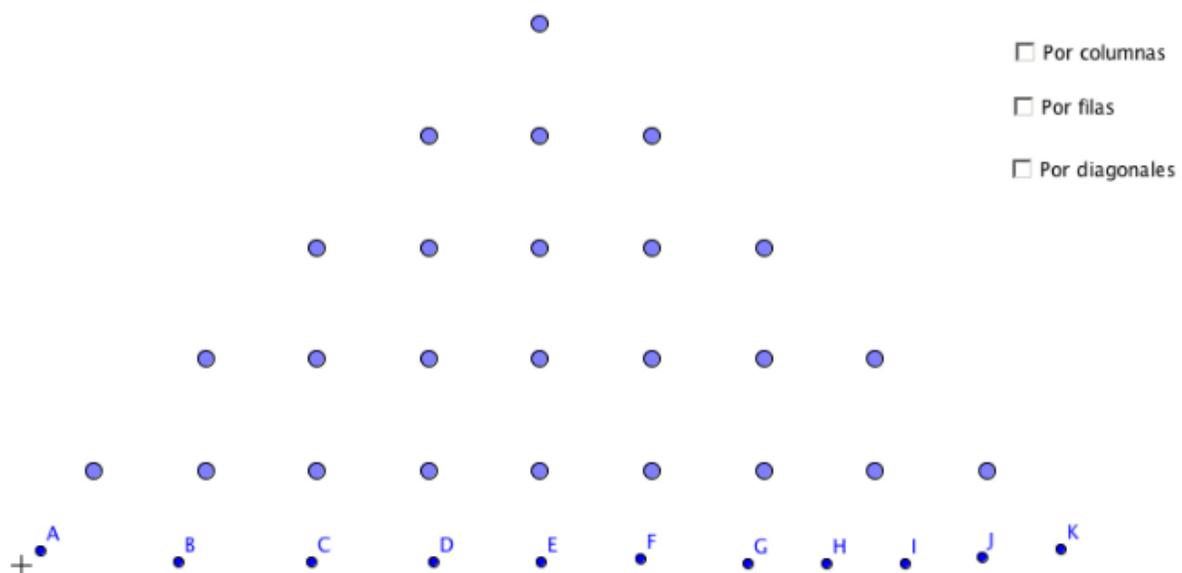


Gráfico 13 - Trabajo realizado con el applet para obtener la figura 6

Estudiante 3: ahora la 9.

Estudiante 4: hay que agregar un jurgo.

Profesor: pero fíjense que después piden la 9 y después la 25, ¿toca hacer toda la figura para poder saber cuántos?

Estudiante 4: Bueno, pues no necesariamente.

Es así como se muestra que los estudiantes también pueden caer en solo dibujar puntos, este es un procedimiento valido, pero no es el objetivo que tiene la actividad y es por esto que se vuelve primordial el papel del profesor como punto de referencia, ya que de continuar con este razonamiento los estudiantes habrían dedicado el tiempo a poner puntos y a contarlos sin hacer nada de lo que se quiere con el trabajo, es decir sin 'registrar' de una manera matemática el patrón que observan.

3.2.4. Instrucción c)

c) *Completa la tabla contando los puntos siguiendo las filas*

Todos los estudiantes asocian rápidamente los ejemplos que se dan en la tabla con los colores de las figuras que se presentan cuando en el applet se señala la casilla que dice por filas, es decir que asocian cada número con una fila de la figura. A continuación se muestran las respuestas dadas por el *estudiante 11* y la *estudiante 13* respectivamente

c) Completa la tabla contando los puntos siguiendo las filas

Figura	Numero de puntos contando por filas
1	1
2	1+3
3	1+3+5
5	1+3+5+7+9
6	1+3+5+7+9+11
9	1+3+5+7+9+11+13+15+17
14	1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27

Gráfico 14 - Solución dada por el *estudiante 11* en la instrucción c)

c) Completa la tabla contando los puntos siguiendo las filas

Figura	Numero de puntos contando por filas
1	1
2	1+3
3	1+3+5
5	1+3+5+7+9
6	1+3+5+7+9+11
9	1+3+5+7+9+11+13+15+17
14	1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27

d) Completa la tabla contando los puntos por columnas

Gráfico 15 - Solución dada por la *estudiante 13* en la instrucción c)

Los errores se encuentran en los números que se usan en las sumas, que evidencian algún tipo de distracción, como lo muestran las tablas. En general la mayoría de los estudiantes llegan a encontrar, de manera rápida,

una expresión aritmética que represente el conteo de puntos por filas para una figura en particular.

Estudiante 14: ¿la 6 cómo es?

Estudiante 13: $1+3+5+7+9+\dots$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

Estudiante 14: solo súmele 2, 11.

Estudiante 13: 11. $1+3+5+7+9+13$.

Estudiante 14: mas 11 mas 13 y la 14.

Estudiante 13: no espera, esa es la 9.

Estudiante 14: ¡oh!

Estudiante 13: espera, mas 13 y luego 6 7 8 9 entonces mas $13 + 15 + 18$.

Estudiante 14: y ahora la 14.

El error se presenta en un conteo errado, pero se evidencia que los estudiantes tienen clara la regularidad que se está presentando y el proceso que deben seguir para encontrar la expresión que se utiliza para contar los puntos de una figura dada, siguiendo las filas. Posteriormente, durante el desarrollo de otra pregunta se dan cuenta del error que cometieron.

En cuanto al modelo de razonamiento inductivo, se ve que los estudiantes trabajan con casos particulares e identifican el patrón que les permite encontrar los sumandos correspondientes ya que saben que deben sumar dos para obtener el número de puntos que se presenta en la siguiente fila.

En el ejemplo anterior los estudiantes todavía no reconocen las características de los números que deben ir sumando y por esto tampoco se dan cuenta de los errores que están cometiendo. Durante la tercera prueba realizada se evidencia que se entiende que son números impares y además de eso se relaciona con la tabla anterior. El *estudiante 5* está distraído, no parece colaborar con su compañero y entonces el profesor interviene

Profesor: a ver estudiante 5,...

Estudiante 5: yo ya le dije como hacerlo... tiene que dar 36, tienes que sumarle un número impar que con ese de 36. Si daba 25...
¿Dónde tendrá la calculadora esto?

Profesor: (el profesor se acerca para ayudar y se da cuenta de algo más) y ¿por qué no utilizaron el botón de las filas?

Estudiante 6: porque todavía no llegamos ahí... a no si... pero igual da lo mismo.

En primer lugar se evidencia que los estudiantes tienen claro que los números que se suman corresponden a números impares y a su vez relacionan la tabla del conteo por filas llenando con la tabla anterior donde se registra el conteo total de puntos de cada figura, es decir que las filas correspondientes de las dos tablas deben dar un resultado igual ya que representarían exactamente la misma figura, luego desde el punto de vista del razonamiento de tipo inductivo los estudiantes están justificando su procedimiento con uno realizado anteriormente. Por otra parte se evidencia que puede que no sea necesario el uso de los colores y que los estudiantes pueden llegar de todas formas a la expresión de la generalización a partir de los ejemplos que se dan en la tabla, ya que estos estudiantes no utilizaron la herramienta de los colores.

En cuanto al proceso de inducción, al igual que en las instrucciones anteriores, también se evidencia el trabajo con casos particulares y de identificación de patrones ya que el ejercicio solo propone llenar la tabla, los cuales serían de todas maneras casos particulares.

3.2.5. Instrucción d)

d) Completa la tabla contando los puntos por columnas

En general, los estudiantes asocian fácilmente los ejemplos que se dan en la tabla con los puntos de colores que aparecen en el applet y comienzan a escribir las expresiones aritméticas que representarían de manera adecuada el conteo de los puntos por columnas de una figura dada. Presento un ejemplo de una discusión que se genera al tratar de entender los ejemplos dados en la tabla.

d) Completa la tabla contando los puntos por columnas

Figura	Numero de puntos contando por columnas
1	1
2	$2+(2*1)$
3	$3+(2*2)+(2*1)$
5	$5+(2*4)+(2*3)+(2*2)+(2*1)$
6	$6+(2*5)+(2*4)+(2*3)+(2*2)+(2*1)$
9	$9+(2*8)+(2*7)+(2*6)+(2*5)+(2*4)+(2*3)+(2*2)+(2*1)$
14	$14+(2*13)+(2*12)+(2*11)+(2*10)+(2*9)+(2*8)+(2*7)+(2*6)+(2*5)+(2*4)+(2*3)+(2*2)+(2*1)$

Gráfico 16 - Solución dada por la estudiante 12 en la instrucción d)

Estudiante 11: y qué significa el asterisco.

Estudiante 12: el asterisco es por.

Estudiante 11: entonces veamos la figura 2 para hacer el ejemplo que está ahí para entender.

Estudiante 12: entonces qué, dice que 1.

Estudiante 11: es este 1 mas, 2 por 1.

Estudiante 12: ¿será que si es así? Probemos con la figura 3.

Estudiante 11: acá dice 1 mas, 2 por 1.

Estudiante 12: no ahí dice 2 mas, 2 por 2... mira 2 mas, 2 por 2.

Estudiante 11: ¿qué? 3 acá dice 3.

Estudiante 12: entonces qué 3 es...

Estudiante 11: 3 porque son 3 columnas, mas 2 no se por qué mas 2 por 1.

Estudiante 12: no es que esos son los puntos, tienes que contarlos como puntos... mira 3, creo que comienza desde el centro, 3 mas 2 por 2 mas 2 por uno ¡ajá!

Estudiante 11: ¿Cómo?.

Estudiante 12: mira 3 mas, 2 por 2 mas, 2 por 1.

Estudiante 11: ¿por qué 2 por 1?, ¿acá no debería ser 1 por 1?

Estudiante 12: no 2 por 1... 1, 2. 2 por 1 da 2.

Estudiante 11: si pero ¿por qué tiene que ser 2 por 1? porque 3 mas 2 por 2 y solamente sería 1 por 1.

Estudiante 12: Ah! si, no se... ah! tal vez ese dos no sea 2 por éste sino 2 puntos por la cantidad de columnas, 2 puntos por la cantidad de columnas en que se repite... ¿sí?... Mira acá en vez de decir 2 por 2 porque es esta por esta, sino porque hay 2

columnas con 2 puntos entonces 2 por 2, hay 2 columnas con 1 punto

Estudiante 11: bueno

Estudiante 12: a ver, tratemos de hacerlo así.

Es muy interesante lo que sucede en esta prueba, se ve plenamente como entre los dos construyen su conocimiento, los dos intervienen y van dando sus opiniones, el otro las valora y se colaboran entre ellos. Se evidencian también los esfuerzos por generar una ‘representación’, es decir asociar cada número y cada operación entre ellos a algo particular en la figura, que tenga sentido y sea válida para los dos. El *estudiante 11* ve una regularidad sumar “2 por 2” y luego sumar “1 por 1”, tal vez producto de la regularidad vista al desarrollar la instrucción propuesta para completar la tabla 1, le propone esto a su compañera, sin embargo la compañera permanece crítica e intenta justificar el ejemplo de otra manera hasta que los dos reconocen la validez de la expresión que desarrollan para el conteo por columnas de los puntos de la figura.

En cuanto al razonamiento inductivo se observa el trabajo con casos particulares hasta llegar a una conjetura, la cual es aplicada a los casos particulares que se piden en la tabla, conjetura que es justificada mediante la discusión durante la construcción de la expresión para el caso 3 más no es justificada con la verificación del resultado de cada expresión, todavía no se evidencia la extensión más allá de los casos particulares.

En el siguiente ejemplo se muestra una distracción por parte de los estudiantes a la hora de escribir la expresión que representa la figura 5.

d) Completa la tabla contando los puntos por columnas

Figura	Numero de puntos contando por columnas
1	1
2	$2+(2*1)$
3	$3+(2*2)+(2*1)$
5	$5+(4*4)+(3*3)+(2*2)+(2*1)$
6	$6+(5*5)+\cancel{7(4*4)}+(3*3)+\cancel{(2*2)}+(2*1)$
9	$9+(8*8)+\cancel{(7*7)}+\cancel{(6*6)}+(5*5)+(4*4)+(3*3)+(2*2)+(2*1)$

Gráfico 17 - Solución dada por las *estudiantes 9 y 10* en la instrucción d)

Estudiante 3: figura 2... ¿qué? 2 mas, 2 por 1. Está loco.

Estudiante 4: por eso, 2 mas, 2 por 1.

Estudiante 3: noooo.

Estudiante 4: si 2 mas, 2 por 1.

Estudiante 3: ¿seguro? Porque mire dos mas dos por uno, pero ¿este dos otra vez?.

Estudiante 4: mire 2... 2 por 1, los dos azules.

Estudiante 3: por eso pero eso serían 2 no, 2 por 1.

Estudiante 4: por eso, es lo mismo.

Estudiante 3: ya bueno. Entonces figura 3... 3 mas 2 por 2 mas 2 por 1.

Estudiante 4: listo ahora la siguiente.

Estudiante 3: esta ya es la 5, entonces sería 5 mas.

Estudiante 4: abrimos paréntesis.

Estudiante 3: 2.

Estudiante 4: no, 4.

Estudiante 3: no... a no si.

Estudiante 4: 4 por 4, cerramos paréntesis mas.

Estudiante 3: no espere aguante, aguante. 3 por 3.

Estudiante 4: ya.

Estudiante 3: y luego 2 por 2.

Estudiante 4: mas 2 por 1.

Estudiante 3: exacto.

Al principio parece que logran entender lo que quieren decir los ejemplos, identifican el papel de la columna central, pero durante la escritura de la expresión para la figura 3 y la 5 cometen un error al multiplicar el número de la columna por él mismo y no por dos ya que son dos columnas a cada lado de la columna central. Por otra parte siempre terminan sumando el término $2*1$ que no concuerda con lo que hacen en el resto de la expresión y es por esto que se piensa que es más bien un error de distracción.

El profesor participa, les pregunta por el proceso que siguieron para encontrar la expresión que representa el conteo por columnas de la figura 6

Profesor: ¿Por qué 5 por 5?.

Estudiante 3: cual 5 por 5. A porque se le agrega.

Estudiante 4: Si se le agrega este a este.
Profesor: ¿Cuántas de 5 hay? ¿5?
Estudiante 4: ay! Es 5 por 2.
Estudiante 3: claro 5 acá y 5 acá, por eso 5 por 5.
Profesor: ¿Por qué 5 por 5?
Estudiante 3: porque acá hay 5 y acá hay 5.
Profesor: por eso y si yo hago 5 mas 5 ¿cuánto da?
Estudiante 3 y 4: 10.
Profesor: ¿y si yo hago 5 por 5?
Estudiante 3 y 4: 25.
Profesor: y dónde están los 25.
Estudiante 3: entonces 5 por 2.
Estudiante 4: es por 2.

Los estudiantes tienen claro la manera como desean contar los puntos y el problema radica en una mala interpretación de la multiplicación o en dejarse llevar por una aparente regularidad, que sería multiplicar el número de la columna por si mismo. El *estudiante 14* entiende el error desde antes pero no expresa nada y el profesor intenta hacer caer en cuenta al *estudiante 13* del error, haciendo por un lado la interpretación gráfica y por el otro lado el resultado de las operaciones que se proponen.

En cuanto al proceso inductivo, es evidente que hace falta trabajar con ellos en la justificación de las conjeturas y hacer énfasis en la necesidad de justificar ya sea una justificación empírica o deductiva, a las cuales se hace referencia en el marco teórico.

3.2.6. Instrucción e)

e) Completa la tabla contando los puntos por diagonales

Al resolver esta parte de la guía, los estudiantes presentaron varios problemas ya que no se da ningún ejemplo, no es clara la forma de diferenciar las diagonales. Desde el principio no sabían qué tipo de respuesta debían dar y también se confundían al contar las diagonales en vez de contar los puntos siguiendo un patrón diagonal. En la siguiente tabla

la estudiante 9 y la estudiante 10 contaron la cantidad de diagonales y no la cantidad de puntos.

e) Completa la tabla contando los puntos por diagonales

Figura	Numero de puntos contando por diagonales
1	1
2	3
3	5
5	9
6	11
9	17
25	47

Gráfico 18 - Solución dada por las estudiantes 9 y 10 en la instrucción e)

Por lo tanto muchos no resolvieron este punto y se les propuso continuar con las siguientes instrucciones debido más que todo a cuestiones de tiempo, ya que solos se disponía de aproximadamente 50 minutos en cada prueba y no se les podía dar el tiempo para que analizaran más profundamente la instrucción. Presentamos un par de soluciones que surgieron

e) Completa la tabla contando los puntos por diagonales

Figura	Numero de puntos contando por diagonales
1	1
2	$2 + (2 \times 1)$
3	$3 + (2 \times 2) + (2 \times 1)$
5	$5 + (4 \times 2) + (3 \times 2) + \cancel{(4 \times 2)} + \cancel{(3 \times 2)} + (2 \times 2) + (2 \times 1)$
6	$6 + (5 \times 2) + (4 \times 2) + (3 \times 2) + (2 \times 2) + (1 \times 2)$
9	$9 + (8 \times 2) + (7 \times 2) + (6 \times 2) + (5 \times 2) + (4 \times 2) + (3 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 1)$
14	$14 + (13 \times 2) + (12 \times 2) + (11 \times 2) + (10 \times 2) + (9 \times 2) + (8 \times 2) + (7 \times 2) + (6 \times 2) + (5 \times 2) + (4 \times 2) + (3 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 1)$

Gráfico 19 - Solución dada por la estudiante 12 en la instrucción e)

El estudiante 11 y la estudiante 12 'ven' la figura 5 de la siguiente manera

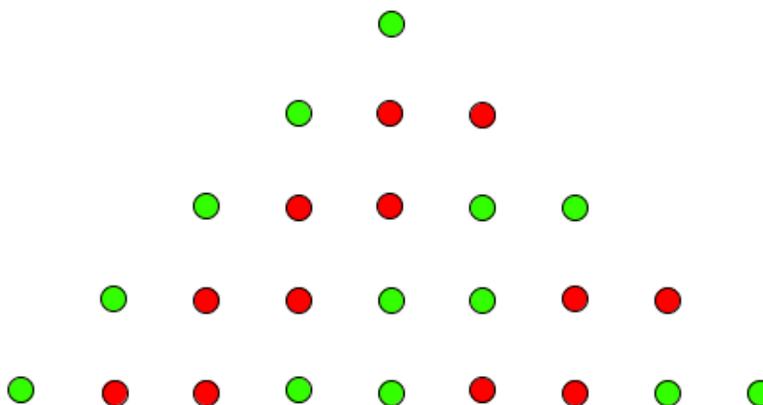


Gráfico 20 - Interpretación de la figura 5 por parte de los *estudiantes 11 y 12*

En el siguiente pasaje de su trabajo se evidencia como realizan todo el razonamiento inductivo y llegan a generalizarlo con una expresión similar igual a la del conteo por columnas.

Estudiante 12: no es tan fácil... yo creo si los contamos así.

Estudiante 11: cállate.

Estudiante 12: si, es más fácil, es muy fácil mira 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1.

Estudiante 11: 5 ¿qué?

Estudiante 12: 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1.

Estudiante 11: entonces es 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1.

Estudiante 12: tal vez si es así, pues veámoslas por figuras, veamos la figura 2.

Estudiante 11: pero también toca hacer la figura 1.

Estudiante 12: Acá es 2, 1, 1... y acá es 3, 2, 2, 1, 1 y acá es 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1 y si sería 6 sería 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1.

Estudiante 11: 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1 si.

Se evidencian varios pasos en cuanto a el razonamiento inductivo. Trabajan con los casos particulares e Identifican varios patrones como por ejemplo: contar los puntos siguiendo un patrón diagonal, ‘ven’ que en cada figura se repiten dos diagonales y lo ‘representan’ en la expresión que dan como respuesta mediante una multiplicación por dos, ‘ven’ que se tiene una diagonal no se repite. Esto a su vez se puede ver como una conjetura ya que no se da una indicación y ellos mismos crean la expresión que les permite contar por diagonales. En este caso se evidencia una justificación entre ellos mismos mediante la explicación de la forma en que surge la expresión y se verifica para las figuras dos, tres, cuatro y cinco.

La siguiente, es una manera diferente de ‘ver’ el conteo por diagonales ya que consiste en contar los puntos de la figura siguiendo los colores de los puntos que aparecen al activar el botón “por diagonales”. No se presenta mucha discusión puesto que los estudiantes se ponen a hacer comentarios sobre otras cosas y el *estudiante 6* prácticamente realiza solo todo el trabajo. La expresión que resulta en este caso es la misma que se obtiene al contar los puntos por filas.

e) Completa la tabla contando los puntos por diagonales

Figura	Numero de puntos contando por diagonales
1	1
2	1+3
3	1+3+5
5	1+3+5+7+9
6	1+3+5+7+9+11
9	1+3+5+7+9+11+13+15+17
25 14	1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27

Gráfico 21 - Solución dadapor el *estudiante 5* y *6* en la instrucción e)

a continuación se muestra el ejemplo para la figura número 5.

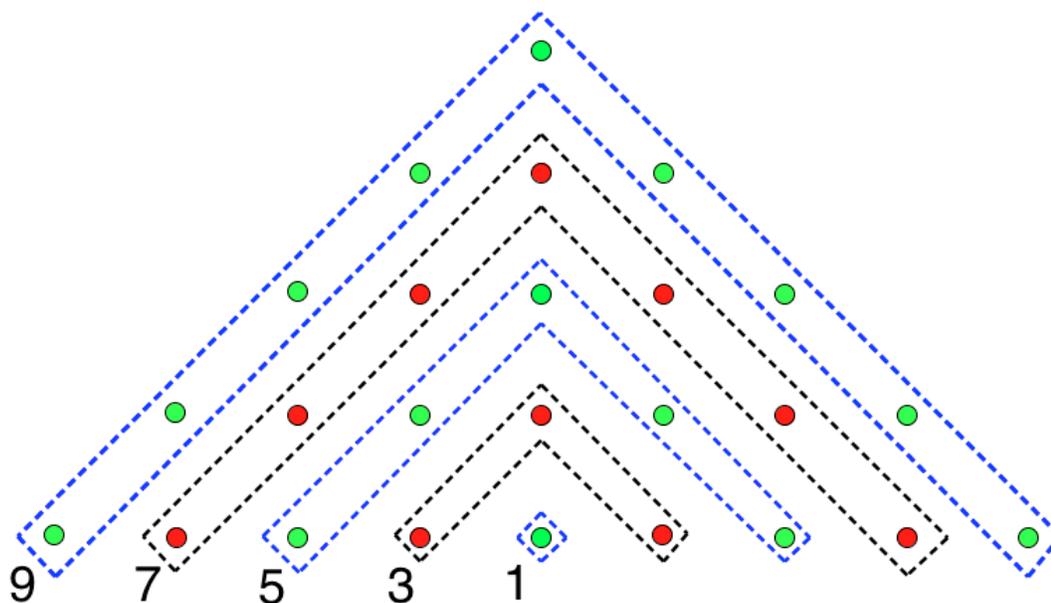


Gráfico 22 - Interpretación de la figura 5 por parte de los *estudiantes 5 y 6*

3.2.7. Instrucción f)

f) *Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera en qué forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.*

En esta pregunta se presentó un poco de dificultad en algunos, y a su vez los que respondieron, lo hicieron de manera muy variada. Por ejemplo el *estudiante 4* para responder a una figura de una posición cualquiera, toma en particular la figura 100. Al analizar esta respuesta bajo el punto de vista del modelo inductivo que se propuso, el estudiante no logra la generalización ya que no expresa una conjetura más allá de los casos particulares.

- f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera en que forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.

Figura 100 10.000 puntos

Gráfico 23 - Solución dada por el *estudiante 4* en la instrucción f)

A su vez la respuesta puede ser tan simple como decir que contando, y se evidencia que no se asocia la pregunta con el trabajo realizado hasta ahora, es decir que el trabajo no se está aplicando ya que estas estudiantes respondieron adecuadamente la primera tabla, por lo tanto si tienen conocimiento de otra forma de encontrar la cantidad de puntos de una figura.

- f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera en que forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.

Contando

Gráfico 24 - - Solución dada por las *estudiantes 9 y 10* en la instrucción f)

Otras respuestas claramente tienen en cuenta su trabajo realizado en los puntos anteriores. La primera respuesta, gráfico 25, lo hace con los términos que se le dan, usa el término “cualquiera” para dar su respuesta, pero no usa por ejemplo la potenciación. La segunda, gráfico 26, muestra el manejo de los números naturales y el significado de ellos mismos. A la luz del marco teórico se tienen dos análisis. Por un lado cada estudiante usa su propio lenguaje para ‘expresar’ la generalidad que encuentra y por el otro las dos respuestas muestran como, sin haber trabajado algebra todavía ya que son estudiantes de 6 grado, se da una expresión de la generalidad que va más allá de los casos particulares estudiados, es decir que este tipo de razonamiento no exige el conocimiento previo de el significado de variable y por lo tanto se pueden realizar este tipo de actividades en cursos en los cuales no se ha trabajado este tema de manera que permitan desarrollar el razonamiento inductivo y a su vez el proceso de generalización.

- f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera en que forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.

El número cualquiera multiplicado por el mismo.

Gráfico 25 - Solución dada por la estudiante 13 en la instrucción f)

- f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera en que forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.

un número Natural multiplicado por el mismo.
 ej:
 $91 \cdot 91 = 8281$ Puntos

Gráfico 26 - Solución dada por el estudiante 14 en la instrucción f)

La última respuesta que se analiza, es mucho más completa ya que intenta dar una generalización de todos los procesos realizados en las preguntas anteriores. No solo se evidencia la noción de la generalización al desprenderse de los casos particulares, usa términos bastante adecuados y además también presenta una parte algorítmica.

- f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera en que forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.

Depende
 Sumando el total de números impares hasta alcanzar el número de figuras.
 Filas números impares hasta alcanzar el número de figuras es equivalente al número de figuras.
 Se suma el número inicial al 2 x el anterior.
 Si en un lado ha 1 se multiplica por 2.
 Si el otro tiene dos es 2×2 , 3×3 , 4×4 .
 Diagonales
 Mismo procedimiento que el de las filas a partir del número inicial.

Gráfico 27 - Solución dada por los estudiante 5 y 6 en la pregunta f)

Los estudiantes dan la explicación de tres formas de contar, donde consideran la igualdad entre el proceso de contar por filas y contar por diagonales. Por filas: “se debe sumar números impares hasta alcanzar, la cantidad de números es equivalente al número de figura”, Por columnas: “Se suma el numero inicial al, 2 por el anterior, si en un lado a uno se multiplica por dos, si el otro tiene dos es 2 X

2, 3 X 2, 4 X 2 ...” la forma de ‘decir’ lo que ‘observan’ en este caso es diferente a los anteriores ejemplos, ya que considera prácticamente todos los pasos que siguieron para llenar cada una de las tablas y claramente lo hacen con un lenguaje que les permite identificar el proceso que se usaría en el caso de querer contar una figura de una posición cualquiera, es decir que van más allá de los casos particulares.

3.2.8. Instrucción g)

g) ¿Qué diferencias hay en las formas de contar?

La pregunta incentiva mucho el desarrollo del ‘decir’ con respecto a la representación del arreglo que cada uno hizo. Algunos se centran en la parte geométrica, es decir la manera en como se recorría el arreglo cuando se contaba y otros analizan la parte de la expresión numérica a la que llegaron. Pero cada uno intenta expresar las diferencias que ‘ve’. Esta pregunta es importante ya que se ejercitan dos pasos en el proceso de generalización; se ‘observan’ características propias de las formas de contar que se usaron, se distinguen sobre cuales son distintas y se procede a ‘expresar’ dichas diferencias.

g) ¿Qué diferencias hay en las formas de contar?

Se puede contar según las filas, las columnas o diagonales

Gráfico 28 – Solución dada por la estudiante 12 en la instrucción g)

g) ¿Qué diferencias hay en las formas de contar?

Cuanto contabamos por filas siempre salían números impares.

Gráfico 29 – Solución dada por la estudiante 13 en la instrucción g)

g) ¿Qué diferencias hay en las formas de contar?

Por filas se cuentan números impares y en columnas pares y impares

Gráfico 30 - Solución dada por el *estudiante 4* en la instrucción g)

g) ¿Qué diferencias hay en las formas de contar?

La diferencia en las formas de contar es que en una hay que multiplicar y en la otra no.

Gráfico 31 - Solución dada por el *estudiante 1* en la instrucción g)

3.2.9. Instrucción h)

h) ¿Qué otra forma o formas de contar los puntos se te ocurre?

La pregunta la respondieron pocos estudiantes, ya sea porque era difícil, porque no se entiende o por falta de tiempo. A continuación se da la respuesta más completa y de la cual se tiene registro. Se puede apreciar que en esta se da un proceso de generalización completo ya que se 've' el arreglo de una manera particular como se muestra en el gráfico 33 ya que el *estudiante 11* recorre el arreglo por diagonales pero se da cuenta que al recorrer 2 diagonales repite un punto, Se 'representa' numéricamente mediante una expresión que cuenta las dos diagonales pero quitando el punto que repite al contar las dos diagonales y al final se 'dice' o 'expresa' con las propias palabras y con una expresión sus resultados aplicándolos a la figura 5. En cuanto al razonamiento inductivo, se evidencia el trabajo con casos particulares, la identificación de un patrón y la formulación de una conjetura la cual solo se aplica para un caso particular, por lo tanto no se llega a la justificación ni a la generalización.

h) ¿Qué otra forma de contar los puntos se te ocurre?

contando punto por punto. también según las diagonales, un ejemplo sería para la figura 5:

$$1 + (2 \cdot 2 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) + (4 \cdot 2 - 1) + (5 \cdot 2 - 1)$$

Gráfico 32 - Solución dada por el estudiante 11 en la instrucción h)

Estudiante 11: Entonces veamos con las diagonales... mira, mira, mira siempre va a ser así, 5 por 2 menos 1, 4 por 2 menos 1, 3 por 2 menos 1, 2 por 2 menos 1, 1 por 1 menos 1.

Estudiante 12: jajajajaja.

Profesor: ¿cómo?

Estudiante 11: 5 que hay acá por 5 menos 1, porque este se usa dos veces, 4 por 2 menos 1, 3 por 2 menos 1, 2 por 2 menos 1.

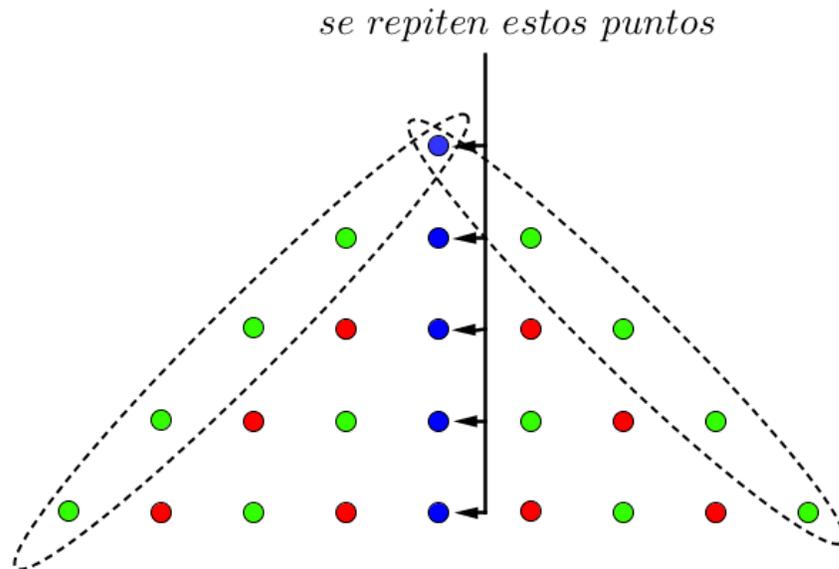


Gráfico 33 - Interpretación de la figura 5 por parte de los estudiantes 11 y 12

3.2.10. Instrucción i)

i) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ con una sola operación?

Esta operación ya había sido trabajada por los estudiantes al completar la tabla en el punto c y por lo tanto es también un momento en el cual el estudiante puede revisar el trabajo desarrollado anteriormente. Algunos estudiantes tienen problemas desde el inicio ya que no entienden que quiere decir una sola operación.

Otros estudiantes responden la operación correcta, pero el interés no se centra en la justificación de esta afirmación, es decir que comienzan por realizar y ver cual es el resultado para posteriormente dar la respuesta sin profundizar en ella. En el siguiente ejemplo el *estudiante 14* realiza la suma que da 81, da una respuesta que es 9 por 9 sin pensar en la cantidad de puntos que tiene la figura 9.

i) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ con una sola operación?

A handwritten solution in black ink that reads "9x9".

Gráfico 34 - Solución dada por el *estudiante 14* en la instrucción i)

Durante el trabajo que realizado por la *estudiante 15* para responder a esta pregunta se encuentra la revisión de las tablas de la instrucción c), se da cuenta de un error y lo corrige como se muestra en el gráfico 15, donde se observan algunos tachones y escrituras dobles. En cuanto al razonamiento inductivo este punto permite también justificar o no, las expresiones anteriormente encontradas ya que puede proporcionar un ejemplo en donde no se encuentra validez a lo que previamente se ha desarrollado.

A continuación se muestra un ejemplo en el cual se da un análisis más profundo

i) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ con una sola operación?

Se cuentan el # de sumandos y ese # se multiplica
x si mismo es por el # de filas

Gráfico 35 - Solución dada por la estudiante 12 en la instrucción i)

Estudiante 11: Espérate.

Estudiante 12: Huy no... mira la siguiente pregunta.

Estudiante 11: como encontrarías el resultado de la siguiente suma con una sola operación.

Estudiante 12: 1 mas 3 mas 5 mas 7 mas 9 mas 11 mas 13 mas 15 mas 17.

Estudiante 11: mas 17, entonces ese del 17 es la figura número 9, entonces la figura numero 9.

Estudiante 12: 9 por 9 y ya.

Estudiante 11: 81.

Estudiante 12: eso es lo que da... a ver contemos 1,2,3,4,5,6,7,8,9 entonces simplemente se cuentan el número de...

Estudiante 11: si, si es nueve por nueve... como es que se llaman... factores.

Profesor: sumandos.

Estudiante 11: jajajaja... casito le atino profesor.

Estudiante 12: y ese número se multiplica por si mismo o se eleva a la dos o se eleva al cuadrado.

Los estudiantes entonces asocian la expresión que determina el número de puntos contando por filas para la figura 9 con la que encontraron al completar la tabla de la instrucción b) y a su vez es esta resulta ser la forma de justificar los procesos realizados. Al 'decir' las cosas encuentran un termino que saben que existe pero que no recuerdan con exactitud y al mismo tiempo se evidencia que manejan la potenciación por otra parte.

3.2.11. Instrucción j)

j) ¿cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $2+4+6+8+10+12+14+8$ con una sola operación?

Los estudiantes del ejemplo anterior asocian la pregunta con el ejemplo anterior y por otra parte se dan cuenta que el cambio se da en el reemplazo de filas por columnas.

j) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $2+4+6+8+10+12+14+8$ con una sola operación?

Lo mismo de la pregunta i. porq es el #
d col.

Gráfico 36- Solución dada por la *estudiante 12* en la instrucción j)

En el resto de las respuestas que dan los otros estudiantes, todo se reduce a realizar la operación y ver que el resultado es 64 que a su vez se puede expresar como 8 por 8. Las dos últimas preguntas fueron desarrolladas por pocos estudiantes ya que el tiempo era escaso y además la actividad era bastante larga y compleja para desarrollarla de 40 a 50 minutos, tiempo del cual se disponía para realizar las actividades.

4. CONCLUSIONES

De acuerdo con el marco teórico que se tomó, se puede concluir que esta actividad genera discusiones ricas en cuanto a todo el proceso de generalización ya que en todas las pruebas se obtuvieron resultados donde se evidenciaban las 3 etapas de dicho proceso, todos los estudiantes lograron 'ver', 'registrar' y 'contar' algún aspecto particular de la actividad propuesta, generando a su vez discusión entre ellos. De acuerdo con la manera en que se organizó el trabajo, se pueden evidenciar que en las instrucciones b) y e) y en las preguntas g) y h) se obtuvo un desarrollo mayor en cuanto a la actividad de 'ver' y 'registrar', ya que por ejemplo en la instrucción b) no se daba ninguna sugerencia y resultaron dos formas diferentes de 'ver' el arreglo, en la instrucción e) se proponía una forma de 'ver' el arreglo que no era muy clara y generó también dos formas diferentes de resolver dicha forma de contar los puntos. Además, en la pregunta e) se dieron varios tipos de respuestas que evidencian alguna característica particular de cada forma de contar y en la pregunta h), a pesar que solo un grupo la contestó, resultó una forma muy particular de ver el arreglo, la cual ni siquiera se pensaba cuando originalmente se propuso la actividad. En cuanto a la 'representación' en estos puntos, se utiliza un lenguaje muy variado, como por ejemplo términos matemáticos como número, número impar, elevar al cuadrado y multiplicar por el mismo número, los cuales hacen parte del conocimiento que han adquirido los estudiantes y por tanto los utilizan. También se utilizan términos propios de la actividad, como fila, columna, diagonales y posición de los puntos los cuales también son muy importantes cuando los estudiantes intentaban entender los ejemplos que se daban en las instrucciones c), d) y f). Se debe resaltar que este trabajo fue solo en parejas y no se pudo dar el tiempo suficiente para que todos los estudiantes realmente analizaran el ejercicio con adecuada profundidad, según sus capacidades.

En cuanto al los razonamientos inductivos, también se obtuvo resultados satisfactorios ya que no se esperaba que los estudiantes completaran todo el proceso, pero varios llegaron a expresar la generalización inclusive con términos adecuados y saliéndose de los ejemplos numéricos concretos. Se presentaron ejemplos sobre la mayoría de los pasos que se definieron al caracterizar el razonamiento inductivo. Las instrucciones b), c), d) y e) proponen una serie de

tablas donde los estudiantes trabajan con casos particulares y ordenan su información, obteniendo así patrones que les permiten llenar filas de las tablas que corresponden a figuras que no se dan en el applet. Luego, la pregunta f), en la mayoría de los casos, hace que el estudiante piense en figuras y en las formas de contar que ya tiene, pero además que de una solución para una figura que no se sabe cual es y lo empuja a dejar los casos particulares con que ha trabajado. Las preguntas h), i) y j) fueron resueltas por pocos estudiantes y no con los resultados esperados, solo dos estudiantes lograron realizar una conjetura y justificarla, justificada no con la prueba de casos particulares sino basada en el proceso que realizaban.

Por estas razones se puede decir que la actividad propuesta permite el desarrollo de dicho tipo de razonamiento y se debe buscar la manera en que los estudiantes logren conjeturar y justificar durante las preguntas h), i) y j) ya que fueron pocas las evidencias encontradas en estas tres preguntas.

La actividad fue un espacio que propició momentos de repaso de conceptos como por ejemplo la potenciación, los números naturales, los números impares y también la propiedad conmutativa de la adición y de la multiplicación. Esto sucedió ya que al tener que 'decir' al compañero lo que se 'observaba', se debía recurrir a términos conocidos por los dos y a tener claros dichos términos. Pero no solo basta repasar las definiciones de los objetos matemáticos que se utilizan, también se deben 'ver' en un contexto dado, para luego poder incorporar estos significados al lenguaje que se usa cuando se 'expresa' algo a un compañero. Este proceso se evidenció de manera clara durante el trabajo de los estudiantes con el applet ya que entre ellos mismos recordaban o aclaraban los significados de potenciación, conteo de puntos o inclusive los significados que surgían debido a la actividad (Diagonales, columnas, filas, número de puntos, número de diagonales, posición de una figura, etcétera) y a su vez discutían la manera de interpretarlos. Es muy importante este punto ya que el trabajo en grupo aporta en gran medida al conocimiento matemático de los estudiantes puesto que se aprende a analizar el conocimiento propio y en relación con el del otro, para poderlo reestructurar y enriquecer.

Es importante resaltar que la prueba se aplicó a una población pequeña de estudiantes, los cuales no tenían un trabajo previo con base a estas actividades y tampoco habían tenido conocimientos previos sobre las variables, por lo tanto podemos afirmar que es viable proponer este tipo de actividades en cursos que no necesariamente manejen variables, teniendo como objetivo el desarrollo de la generalización. Claramente la actividad se puede proponer a una población diferente, de un nivel más avanzado, en la cual el objetivo pueda ser llegar hasta la demostración de dichas generalizaciones.

Una parte importante de la actividad es la forma de estructurar la guía que debían completar los estudiantes. La organización de la información en tablas resultó muy útil, ya que los estudiantes podían trabajar con sus datos de una manera fácil y ordenada, permitiendo reconocer los patrones numéricos que se presentaban en las diferentes tablas. Las preguntas f), g) y h) se pueden catalogar como preguntas que resumen el trabajo, estas preguntas son de mucha importancia ya que exigen una respuesta verdaderamente estructurada puesto que entre ellos hablan de sus resultados con un lenguaje que no tan riguroso, y a la hora de presentar la solución de una pregunta ante alguien, como el profesor, se esmeran en ser claros, coherentes y ordenados, cosa que de todas maneras los estudiantes deben ejercitar. Por último las preguntas j) e i), permiten aplicar el conocimiento que se generó a partir de los ejercicios anteriores, estos puntos generaron algunos argumentos pero no se puede dar una conclusión clara sobre ellos ya que no todos dedicaron el tiempo suficiente al análisis, la guía era bastante extensa y por lo tanto en esos puntos los estudiantes ya no se interesaron tanto por su desarrollo.

Estas pruebas también dan indicios de la forma en la cual resulta más favorable proponer la actividad. En principio, se recomienda que a la hora de aplicar esta actividad se organizaran los estudiantes en parejas, ya que esto permite que se presenten las discusiones anteriormente mencionadas. A su vez es mejor pensar en dividir la actividad en dos sesiones, ya que la población para la cual se pensó esta actividad no está acostumbrada a este tipo de trabajo y por tanto resulta ser bastante exigente para ellos. Se recomienda también complementar la actividad con una puesta en común de los resultados, ya que de una parte se ve valorado el trabajo que realiza cada pareja y por otra parte se puede llegar a otras maneras de 'ver' y 'representar' el arreglo.

El desarrollo del applet en el programa de geometría dinámica fue algo fundamental, puesto que proporcionó diferentes ayudas, tanto para el estudiante como para el profesor, a la hora de proponer y desarrollar la actividad. En primer lugar, al proponer la actividad de esta manera, ella resulta ser llamativa a los estudiantes ya que se puede mover un deslizador y tiene botones que se pueden seleccionar, cosa que no sucede si se propone en un tablero o en una hoja de papel. Otro punto es el entorno de geogebra, ya que ofrece ventajas como la posibilidad de colorear los puntos, que no solo aporta al aspecto gráfico del applet sino que también ayuda a los estudiantes en cuanto a la manera de interpretar los ejemplos que se daban a lo largo de la guía, es por esto que el trabajo del profesor se facilita ya que la forma de explicar resulta ser mucho más cómoda e inclusive los estudiantes por si mismos dan significados a dichos colores con respecto a las expresiones que se presentan. También es claro que no es indispensable tener estas ayudas visuales ya que, como se evidenció en una de las pruebas, los estudiantes pueden llegar a relacionar el ejemplo de la guía sin tener la necesidad de usar la ayuda que se daba en base a los colores. En otros momentos los colores mostraban la ayuda para el desarrollo del ejercicio pero no sugerían un camino tan claro a la respuesta, como en el caso de las diagonales en el cual no se daba un ejemplo y el patrón de colores no era lo suficientemente evidente como para llegar inmediatamente a una expresión que representara el conteo por diagonales, esto le permite al profesor proponer diferentes niveles de dificultad en los ejercicios.

La manera en la cual se realizó la recolección de datos dio buenos resultados, ya que por una parte entre la mayoría de los estudiantes se dieron discusiones en las cuales se podía evidenciar los procesos que estaban siguiendo y sus respectivas dificultades, lo cual también ayuda al profesor para saber cuándo intervenir y poder encaminar a los estudiantes ayudándolos con preguntas o aclarando las diferentes interpretaciones que se pueden dar. La captura de la pantalla también fue muy importante ya que por un lado se visualiza de mejor manera lo que el estudiante está expresando, se visualiza en algunas ocasiones específicamente de que puntos habla, se observan las herramientas utilizadas por los estudiantes porque por ejemplo permite evidenciar las operaciones que realizaban en la calculadora o las construcciones alternas, como el gráfico 13, que se hacen por parte de los estudiantes.

Por último se rescata el potencial que tiene esta actividad, es decir que se invita a ver la actividad como un punto de partida para el desarrollo de una serie de actividades que permitan el desarrollo de este tipo de razonamientos. Después del desarrollo de esta actividad se pueden proponer cambios en el arreglo de tal manera que se genera un análisis similar al que se realizó pero en un contexto nuevo, por ejemplo se puede suponer que el arreglo crezca en 2 sentidos, también se puede iniciar el arreglo con 2 puntos en vez de 1 o también ver el arreglo como un cuadrado.

BIBLIOGRAFÍA

Casto E., Cañandas M. y Molina M.. (2010) El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO* 54 (10) 55-67

Manara R. (2002). *La matematica e la realtà*, linee di metodo. Génova, Italia: Marietti.

Mason J., Graham A., Pimm D. y Gower N., (1985) *Routs to/ Roots of Algebra*. Inglaterra: The open University press.

ANEXOS

Anexo A. Guía entregada a los estudiantes.

GINNASIO ALESSANDRO VOLTA.

ACTIVIDAD PARA EL DESARROLLO DE PROCESOS DE GENERALIZACIÓN

Profesor: Andrés Felipe Suárez Fuentes

Fecha: _____

Alumno: _____

Desarrollo de la actividad

1. Explora la aplicación y comenta con tus compañeros lo que encuentras.
2. Responde las siguientes preguntas
 - a) ¿Cómo van aumentando la cantidad de puntos a medida que cambia la figura?
 - b) Completa la siguiente tabla

Figura	Número de puntos
1	
2	
3	
5	
6	
9	
25	

La cantidad de puntos de cada figura no cambia, pero podemos contarlos de diferentes formas...

c) Completa la tabla, contando los puntos siguiendo las filas

Figura	Número de puntos contando por filas
1	1
2	1+3
3	1+3+5
5	
6	
9	
14	

d) Completa la tabla, contando los puntos por columnas

Figura	Número de puntos contando por columnas
1	1
2	$2+(2*1)$
3	$3+(2*2)+(2*1)$
5	
6	
9	
14	

e) Completa la tabla, contando los puntos por diagonales

Figura	Número de puntos contando por diagonales
1	
2	
3	
5	
6	
9	
14	

f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera en, qué forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura.

g) ¿Qué diferencias hay en las formas de contar?

h) ¿Qué otra forma o formas de contar los puntos se te ocurre?

i) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ con una sola operación?

j) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma $2+4+6+8+10+12+14+8$ con una sola operación?