“MÉTODOS HEURÍSTICOS PARA EL CÁLCULO DE VOLÚMENES EN EL SIGLO XVII BAJO LA IDEA NACIENTE DE INTEGRAL DEFINIDA: UNA APROXIMACIÓN DESDE ARQUÍMEDES, CAVALIERI Y TORRICELLI”

GERMÁN DARÍO CANIZALES GARZÓN
JOHN FREDY ERAZO CASTRO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2013

“MÉTODOS HEURÍSTICOS PARA EL CÁLCULO DE VOLÚMENES EN EL SIGLO XVII BAJO LA IDEA NACIENTE DE INTEGRAL DEFINIDA: UNA APROXIMACIÓN DESDE ARQUÍMEDES, CAVALIERI Y TORRICELLI”

GERMÁN DARÍO CANIZALES GARZÓN
JOHN FREDY ERAZO CASTRO

Trabajo de grado presentado como requisito
Para optar por el título de
Licenciatura en Matemáticas

Asesor
JOSÉ LEONARDO ÁNGEL BAUTISTA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2013

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional – Biblioteca Central
Título del documento	Métodos heurísticos para el cálculo de volúmenes en el siglo XVII bajo la idea naciente de integral definida: Una aproximación desde Arquímedes, Cavalieri y Torricelli.
Autor(es)	Canizales Garzón, Germán Darío. Erazo castro, John Fredy
Director	Ángel Bautista, José Leonardo
Publicación	Bogotá, D. C. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 123 P.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Métodos de Integración, Indivisibles, Infinitesimales, Arquímedes, Cavalieri, Torricelli, Infinito, descomposición del continuo, Atomismo, divisibilidad infinita, sólidos en revolución.

2. Descripción
El presente trabajo de grado es una investigación histórica que se realiza en torno a los métodos usados por algunos matemáticos para el cálculo de volumen de sólidos en revolución. Durante dicha investigación fue necesario realizar tres análisis claves: una reflexión en torno a la importancia de la historia de las matemáticas en la educación matemática; en segunda instancia un análisis de los trabajos desarrollados por tres matemáticos a saber: Arquímedes de Siracusa, Bonaventura Cavalieri y Evangelista Torricelli los cuales en sus trabajos permiten identificar conceptos relacionados con las bases del cálculo tales como la descomposición de los objetos, los infinitesimales y los indivisibles, tipos de infinito y heurísticas que se han perdido durante la historia para calcular volúmenes, diferentes a los métodos usados en la actualidad como el método de casquetes y el método de cilindros. En tercer lugar una serie de conclusiones de manera transversal a los métodos de cada autor basadas en la clasificación de algunos usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática.

3. Fuentes

Para el desarrollo de la investigación en primer lugar, con el objetivo de identificar aportes históricos se consultaron libros de historia de la matemática de autores como Boyer (1959; 1987), Edwards (1982), Kline (1992). Para estudiar los métodos que los matemáticos escogidos realizaron se consultaron libros como Vera F. (1970), Gonzales P.; (2003), Herrera R. (2012) y Barrios J (2003), entre otros.

Finalmente la reflexión en torno al uso de la historia se realizó con base en artículos de historia como Anacona M. (2003), Martínez G. (2005), Castañeda (2002) y Kline M. (1978)

4. Contenidos

Los contenidos del presente trabajo de grado se dividen en 5 capítulos a saber:
Introducción: Se presenta a manera de síntesis la temática a desarrollar, factores que se tuvieron en cuenta para la elección y desarrollo del tema y una descripción de la organización de los capítulos.

Capítulo 1: En el cual se realiza una reflexión en torno a la importancia de la historia de las matemáticas en la educación matemática, destacando algunas justificaciones que se presentan desde diferentes autores, una clasificación de los usos de la historia en la educación, y finalmente la historia como herramienta en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente se presenta la delimitación del trabajo, la noción de significado y de heurística que se adoptará, los objetivos y la metodología desarrollada en el trabajo.

Capítulo 2: Se analiza la discusión que giraba en torno a la descomposición del continuo en la cual se realiza una comparación entre las dos diferentes posturas, el Atomismo atribuido a Demócrito y la Infinita divisibilidad planteada por Aristóteles. Se inicia el estudio con la postura atomista encontrando el concepto de indivisibles luego se presenta la configuración de la forma de los indivisibles de algunas figuras posteriormente se describe la postura Aristotélica o de infinita divisibilidad dando pie al concepto de infinitesimal, se presenta la forma de infinitesimales de ciertas figuras y luego una comparación entre ambas posturas.
En esta comparación surge la necesidad de estudiar el concepto de infinito, por lo cual se da una descripción global acerca de los tipos de infinito definidos por Aristóteles.

Capítulo 3: Es referido a Arquímedes de Siracusa; inicia con la contextualización de la época helénica en la cual surge Arquímedes luego se da una corta biografía, posteriormente se presenta un cuadro en el cual se consignan algunos de sus trabajos más destacados en relación con los objeto de estudio del presente trabajo, se realiza una breve caracterización del método de exhaución de Eudoxo, relacionándolo con el desarrollo que le da Euclides y algunas de las críticas que se originaron en torno a él. Luego se precisan los métodos que Arquímedes desarrolla para calcular el volumen de ciertos sólidos, el método mecánico y el método demostrativo en el mecánico se presenta su funcionalidad y la forma de aplicarlo para calcular el volumen de la esfera y el volumen de un paraboloide luego se presenta el método demostrativo y su aplicación para calcular el volumen de un paraboloide.

Finalmente se realiza a manera de conclusión un cuadro en el que se comparan los dos métodos usados resaltando los conceptos que son objeto de nuestro estudio, tales como el uso de límites, el trabajo de indivisibles, el uso de infinitesimales, sólidos de revolución, y el uso de infinito además de algunas conclusiones que se condensan en torno a los métodos

Capítulo 4: Hace referencia a los trabajos desarrollados por Bonaventura Cavalieri inicia con una contextualización del siglo XVII, luego se presenta una corta biografía, algunos de sus trabajos que fueron objetos de nuestro estudio por referencias encontradas en algunos artículos, se enuncia el principio de Cavalieri, el concepto de indivisibles que propone y dos métodos básicos para el cálculo de volúmenes, el método colectivo en el cual se precisa la forma de tomar los indivisibles de manera colectiva y el método distributivo en el cual la comparación se realiza mediante indivisibles correspondientes. Finalmente aparece un cuadro igual en estructura al presentado en el capítulo de Arquímedes pero esta vez con base en los trabajos de Cavalieri.

Capítulo 5: Presenta los trabajos desarrollados por Evangelista Torricelli en este capítulo no se presenta la contextualización, puesto que es contemporáneo de Cavalieri por tal razón inicia con una corta biografía, un cuadro en el que se presentan algunos de sus trabajos, presenta también la clasificación de indivisibles curvos, y luego se presenta el trabajo que éste realizo en torno al solido hiperbólico el cual fue la piedra angular de todos sus trabajos se presenta de manera particular su construcción, su relación con la hipérbola equilátera y el cálculo de su volumen mediante el método de indivisibles y luego mediante su método demostrativo. Finalmente aparece un cuadro igual en estructura a los otros dos autores pero referido a los trabajos de Torricelli.

Conclusiones: Este capítulo condensa una serie de conclusiones que son transversales a los trabajos realizados por estos tres matemáticos y están organizadas con base en las categorías de análisis presentadas en el capítulo 1. Adicionalmente se presentan conclusiones con relación al contexto de cada autor y conclusiones a manera de reflexión sobre la utilidad de la historia en la educación matemática y en la formación docente.

5. Metodología

Para la consolidación del presente trabajo fue necesario dividir la investigación en tres momentos

Primero Se realizó una reflexión en torno a la importancia del uso de la historia de las matemáticas en la educación matemática para lo cual se consultaron libros y artículos que justificaran esta importancia luego de esto se efectúo una revisión histórica en torno a los diferentes matemáticos que realizaron aportes al trabajo con volúmenes y formas de calcularlos, se delimitó en dos momentos uno ubicado en la época helénica y otro situado en la primera mitad del siglo XVII. Una vez establecido este contexto particular se rescataron específicamente tres autores: Arquímedes, Cavalieri y Torricelli.

Luego de haber seleccionado dichos autores fue necesario realizar una investigación en torno a la interpretación que se da del infinito y de la composición de las cosas que existen en el universo aterrizado a objetos matemáticos, para lo cual fue necesario estudiar algunos artículos de matemáticas especializados en este campo. Una vez entendida esta relación se avanzó en el estudio de los distintos aportes matemáticos que otorgaron cada uno de los autores seleccionados para lo cual se revisaron libros y artículos que presentaban sus métodos y luego se concluyó que algunos objetos de estudio eran de nuestro especial interés tales como : el uso de límites, el trabajo con indivisibles, el trabajo con infinitesimales, la idea de sólidos de revolución, y el uso de infinito entre otros conceptos que son propios de cada autor.

Una vez estudiados dichos métodos y aportes se dio una mirada transversal que permitiera generar una serie de conclusiones con relación a los objetos de estudio, trabajados desde cada autor y adicionalmente se realizaron conclusiones en torno al uso de la historia en el aporte a nuestra formación como futuros docentes

6. Conclusiones

Este trabajo presenta una revisión histórica de los métodos utilizados por los autores antes mencionados para el cálculo de volúmenes, razón por la cual, basándonos en las diferentes categorías de análisis elegidas se pueden resaltar las siguientes conclusiones :

- Se encuentra que todos ellos proponen un método de descubrimiento más que de demostración, en el que utilizan herramientas, a veces, por fuera de las matemáticas o de la formalidad matemática existente en su época.
- Se puede inferir que los tres autores proponen y utilizan posturas muy próximas sobre la descomposición de los cuerpos en términos de indivisibles, aunque difieren en la forma de establecerlos y compararlos para llegar a sus resultados finales.
- La influencia de Arquímedes, Cavalieri y Torricelli ha sido decisiva en la génesis del Cálculo Infinitesimal. Los problemas de cuadraturas y cubaturas, resueltos mediante sus métodos son los antecedentes directos aunque ocultos de los

indivisibles e infinitesimales de nuestro actual Cálculo Integral.

- En relación con las prácticas sociales y los contextos en que se encuentran los matemáticos se realizan observaciones que influyeron en alguna medida en las practicas que les llevó a desarrollar sus trabajos.
- En las dos épocas existieron múltiples dificultades en los desarrollos planteados por los matemáticos, algunas de las cuales se constituyeron en a los métodos, la falta de herramientas matemáticas, las formas de expresar los resultados, entre otras.

Una vez culmina el trabajo, se presenta una reflexión en torno a ciertos aspectos a título personal:

- El presente estudio nos permitió reconocer la importancia que tiene estudiar la historia de las matemáticas para la educación matemática y la formación docente, pues se evidenció que las matemáticas son ante todo una activad humana forjada a través de la interrelación social y cultural, que nos permite pensar las múltiples posibilidades y usos que otorga la historia de las matemáticas en relación con el proceso educativo.
- Este estudio se constituye en un punto de partida para posteriores trabajos de investigación en los que se aborde el estudio de las propuestas hechas por otros autores del siglo XVII y posterior y que permitieron llegar al concepto de integral definida que hoy conocemos, o se aborde el estudio de la evolución de conceptos como infinitesimal, infinito sólidos en revolución

Elaborado por:	**Canizales Garzón, Germán Darío.** **Erazo Castro, John Fredy**
Revisado por:	Ángel Bautista, José Leonardo

Fecha de elaboración del Resumen:	11	06	2013

Agradecimientos

Siento desde el fondo de mi corazón que hay una fuerza que es ajena a mí y que rige el mundo, Dios. A ti que me permitiste realizar todo lo que me propuse hasta este momento muchas gracias.

Quiero agradecer al profesor Leonardo Ángel, por su colaboración, supervisión y preocupación durante el desarrollo de este trabajo, por sus consejos y su forma de ver el mundo, por los conocimientos aportados a mi formación docente, y por un derrotero a seguir en mi labor mezclando el intelecto y la sagacidad sin él no hubiese podido realizar este trabajo.

A los profesores que en cierto modo aportaron a mi formación, a las secretarias quienes me sacaron de apuros por descuido y en general a la comunidad educativa de la UPN.

A mi compañero Germán, quien en incontables ocasiones fue paciente y logro entender muchas de las circunstancias en las que tuvimos que trabajar y estudiar, a sus aportes como persona y como docente, gracias.

A ustedes, que me dieron la vida, que han logrado establecer un vínculo sagrado conmigo esto es para ustedes; a ti Mamá por tus reconfortantes abrazos que me alejaban de la frustración, a ti Papá por ser un modelo a seguir en la vida como hombre y como persona. A ti, que eres mi razón de vivir y que mientras yo viva no te faltará nada, Hermanita.

A mis amigos y compañeros, quienes compartieron su conocimiento y experiencia conmigo, permitiéndome vivir la mejor época de mi vida y por último a ti que supiste entenderme y alentarme cuando más lo necesitaba, fuiste una voz de aliento en un mar de dudas y miedos, me salvaste de esas turbias aguas.

A todos ustedes infinitas gracias.

JohnFre.

Agradecimientos

Inicialmente deseo dedicarle este trabajo a Dios, por permitirme vivir tan maravillosa experiencia, por brindarme la sabiduría más que el conocimiento pues esté solo consiste en saber algo, mientras que la sabiduría en saber qué hacer con lo que se sabe y por darme las fuerzas para siempre sobreponerme a las adversidades que se me presentaron en el camino.

A mi familia, en especial a mi madre por brindarme su apoyo incondicional y por su infinito amor; a mi padre por su cariño y palabras de aliento; a mi hermanita por su permanente demostración de afecto de apoyo e inspiración.

A los profesores y trabajadores de la Universidad y del Departamento de Matemáticas, por llenarme de todos sus conocimientos, por aportar un sinfín consejos para mi formación personal y profesional.

Quiero además agradecer a nuestro profesor Leonardo Ángel, por su valiosa contribución al inicio y desarrollo de este trabajo, por brindarme múltiples recomendaciones y conocimientos para mi formación, porque supo guiarnos en tan arduo trabajo y en últimas por apoyarnos en múltiples aspectos. Gracias.

A John, compañero incondicional, agradable persona que demuestra la sencillez, y alegría siempre gracias por su amistad y apoyo, y por esos buenos y malos momentos que compartimos en esta gran universidad.

A mis amigos y compañeros con los cuales puede compartir experiencias muy valiosas tanto académicas como personales, además porque constituyen gran parte de mi alegría en toda la carrera puesto que me acompañaron en cada paso que he recorrido hasta aquí.

Por otro lado dedico este trabajo a todas las personas que siempre creyeron en mis capacidades, que me apoyaron incondicionalmente En fin *Gracias totales.*

Germancho

Tabla de Contenido

Introducción 1

Capitulo 1 3

1.1 La importancia del uso de la historia en la educación matemática 3

1.1.1 Historia y epistemología de las matemáticas 4

1.1.2 Historia y enseñanza de las matemáticas 5

1.1.3 Historia social de las matemáticas: 6

1.2 Los usos de la historia de las matemáticas en la formación de un docente de matemáticas .. 7

1.3 Delimitación del trabajo 14

1.3.1 Significado y Heurísticas 15

1.4 Objetivos 17

Objetivo general 17

Objetivos específicos: 17

1.5 METODOLOGÍA 18

Capitulo 2 20

2. Atomismo e infinita divisibilidad 20

2.1. Postura Atomista: Demócrito 20

2.2. Postura infinitesimal: Aristóteles 23

2.3. Nociones de infinito 25

Capitulo 3 29

3. Contextualización de la época helénica 29

3.1. Arquímedes de Siracusa 33

3.2. Métodos de Exhaución 36

3.2.1. Método de Exhaución Eudoxo- Euclides: 37

3.2.2. Críticas al método 38

3.3. Los Métodos de Arquímedes 39
3.3.1 Método Mecánico 39
3.3.1.1 Volumen de la Esfera por el Método mecánico 41
3.3.2 Método Mecánico para calcular el volumen del paraboloide. 47
3.3.3 Método Demostrativo para calcular el volumen de un paraboloide 50
3.4 A modo de conclusión. 55
Capítulo 4 60
4.1 Contextualización del siglo XVII 60
4.2 Bonaventura Cavalieri 64
4.2.1 Principio de Cavalieri: 66
4.2.2 Los indivisibles de Cavalieri: 66
4.3 Los métodos de Cavalieri 67
4.3.1 Método colectivo 67
4.3.1.1 Volumen de la esfera por el método colectivo 70
4.3.1.2 Método Distributivo: 73
4.3.2 A modo de conclusión 79
Capitulo 5 82
5.1 Evangelista Torricelli 82
5.2 Algunos trabajos realizados por Torricelli 82
5.3 Los indivisibles Torricelli 84
5.4 El trabajo con el sólido hiperbólico de Torricelli 84
5.4.1 Construcción del solido Hiperbólico 84
5.4.2 Métodos para calcular el volumen del solido hiperbólico 86
5.4.2.1 Método para calcular el volumen de un sólido hiperbólico agudo por el método de indivisibles curvos 86

5.4.2.2 Método para calcular el volumen de un sólido hiperbólico agudo por el método demostrativo 91

5.5 A modo de conclusión 94

6 Una mirada trasversal 97

6.1 Para rescatar significados y heurísticas 97

6.1.1 Sobre las heurísticas 97

6.1.2 Sobre los conceptos 100

6.2 Para comprender la génesis de un objeto 104

6.2.1 Sobre las prácticas sociales 104

6.2.2. Dificultades 105

6.3. A manera de reflexión sobre el estudio de un objeto matemático en la historia de las matemáticas 107

Bibliografía 109

Introducción

En este trabajo se realiza un estudio de algunas heurísticas desarrolladas por ciertos matemáticos de los siglos III a. C y XVII para calcular el volumen de sólidos de revolución, con el objetivo de identificar significados de conceptos relacionados con la composición del continuo y de establecer elementos fundamentales en la evolución histórica del concepto de integral definida y de los métodos actuales para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Para su desarrollo, se tuvo en cuenta el interés de los autores por la historia de las matemáticas y aun más por tratar de reconocer algunas de las formas en que el estudio de la historia puede contribuir a la educación matemática y complementar la formación de los docentes de matemáticas. Se parte del axioma de que la historia de las matemáticas permite observar que éstas son una construcción humana, permeada por los eventos sociales de la época y que se constituye en una fuente de herramientas didácticas que posiblemente pueden contribuir tanto a la formación como a la práctica docente.

Específicamente, se eligió el tema de heurísticas usadas por algunos matemáticos en el siglo XVII para el cálculo de volúmenes en tanto los autores están interesados en estudiar conceptos y procesos propios del cálculo pero tratando de conocer, además de los fundamentos teóricos, los elementos que fueron importantes en su evolución.

Este trabajo se presenta en seis capítulos, a saber:

En el primero se da una reflexión en torno a la utilidad de estudiar la historia de las matemáticas en educación matemática, destacando las posturas de algunos autores, exponiendo una clasificación de los usos de la historia, y estableciendo a la luz de estos usos una delimitación de los objetivos del trabajo.

En el segundo capítulo se exponen dos posturas sobre la descomposición del continuo, elemento fundamental para poder abordar los métodos de integración propuestos por los autores elegidos, y se identifican algunos conceptos relacionados con el continuo como indivisibles, infinitesimales e infinito.

En los capítulos tercero, cuarto y quinto se presenta una descripción de los métodos utilizados por Arquímedes, Cavalieri y Torricelli, respectivamente, para calcular el volumen de ciertos sólidos en revolución, resaltando las diferencias que existen entre los métodos e identificando significados asociados a los conceptos mencionados en el capítulo dos. En los capítulos tres y cuatro se expone, en primer lugar, una contextualización social y cultural de la época en la que vivieron dichos autores; en todos los capítulos se mencionan algunos hechos biográficos, se da una lista de los trabajos relacionados con el tema de interés, se presentan los elementos que se van a utilizar en los métodos, se exponen los métodos y finalmente se organizan las conclusiones y observaciones en un cuadro en el que se relacionan los métodos y los conceptos de interés.

En el último capítulo se da una mirada trasversal a los trabajos desarrollados por los tres autores tratando de organizar algunas conclusiones en términos de la clasificación de los usos de la historia presentada en el primer capítulo y específicamente tratando de establecer las diferencias o similitudes entre los métodos y entre los significados y usos de ciertos conceptos. Finalmente, se concretan algunas conclusiones sobre la riqueza que brinda el estudio de la historia de las matemáticas en la formación docente.

Es importante resaltar que en el desarrollo de esta investigación se tuvo que ir reformulando en cierta medida los objetivos planteados en el anteproyecto, puesto que nos dimos cuenta que estudiar y analizar todo lo propuesto allí no podría desarrollarse en un sólo trabajo. Es por esto que se incluye en el titulo "Una aproximación desde Arquímedes, Cavalieri y Torricelli" para puntualizar en que estos tres autores fueron los que se estudiaron.

Capitulo 1

"Cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si se quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado"
Kline (1978)

Antes de presentar el estudio desarrollado sobre algunos objetos matemáticos en la historia que son de interés en este trabajo, es necesario realizar una reflexión que permita entender la importancia o utilidad que tiene estudiar o usar la historia de las matemáticas en la educación matemática y establecer una delimitación de los elementos que servirán como categorías para analizar la información recopilada.

1.1 La importancia del uso de la historia en la educación matemática

Entender que las matemáticas son una actividad humana y una construcción social que se edificó mediante procesos de interrelación cultural a través de la historia, permite ligar la importancia de la historia de las matemáticas con las matemáticas mismas, su enseñanza y aprendizaje. Esta relación deja ver, entre otras cosas, el desarrollo conceptual de ciertos objetos matemáticos (conceptos, procesos y procedimientos), las dificultades que se presentaron en su génesis, las heurísticas abordadas, los significados de dichos objetos, las características (sociales, culturales, religiosas, etc.) del contexto en el que se originaron y algunos posibles caminos que pueden tomarse para establecer un proceso de construcción de una teoría.

Anacona M. (2003) presenta dos posturas sobre el uso de la historia de las matemáticas que se diferencian en el objeto de estudio por un lado la postura *internalista* el objeto de estudio de la historia de una ciencia se centra en la ciencia misma, es decir se centra en la estructura lógica de la producción de los conceptos dentro de una teoría, dejando de lado hechos externos (por ejemplo hechos sociales) que pudieron incidir de manera definitiva en la construcción y apropiación del conocimiento. Por otro lado la postura *externalista* es comparada con una sociología de las ciencias puesto que busca explicaciones sobre hechos científicos desde el ámbito social primordialmente; el riesgo de esta postura es dejar de lado la ciencia misma y centrarse en un estudio de las condiciones políticas, sociales, económicas incluso religiosas que influyeron en la construcción de los objetos y de sus significados: "*Sería entonces hacer una historia de las matemáticas por fuera de las matemáticas, lo cual resulta vacío y sin fundamento.*" *(*Anacona M. 2003 pp. 32).

Se considera que es posible unificar ambas posturas en una sola, es decir, por ejemplo, pensar en un trabajo en historia de las matemáticas que permita buscar significados y heurísticas de cierto objeto de estudio, sin olvidar los contextos socioculturales en los que se desarrolla dicho objeto y en particular cómo las prácticas sociales permean las prácticas en matemáticas. En relación con esta postura, según Anacona (2003), aparecen tres líneas básicas de investigación a partir de las cuales puede abordarse la relación entre historia de las matemáticas y educación matemática, a saber, *Historia y epistemología de las matemáticas, Historia y enseñanza de las matemáticas* e *Historia social de las matemáticas.*

1.1.1 Historia y epistemología de las matemáticas

En el estudio de las matemáticas es necesario comprender aspectos que se dieron en la construcción social del conocimiento, aspectos que están relacionados con la naturaleza epistemológica y el aspecto sociocultural de la misma, y la manera como éstos se relacionan. Razón por la cual es necesario tener en cuenta las prácticas que dieron sentido a la matemática en un contexto particular.

Castañeda (2002) entiende por epistemología la disciplina cuyo objetivo es revisar la ciencia para establecer su génesis, identificando que sea consistente, los periodos donde tuvo mayor desarrollo o periodos donde se refinaron sus conceptos. Además permite identificar las justificaciones de procedimientos que permitieron desarrollar ideas matemáticas teniendo en cuenta su contexto y condiciones, la aparición de nuevas concepciones o significados y los momentos históricos donde fueron aceptadas o descartadas dichas ideas.

Una justificación del por qué estudiar la epistemología de las matemáticas en concordancia con Arrieta J (2004) radica en entender las circunstancias que favorecen o posibilitan la construcción del conocimiento y por otro lado que *los argumentos socio epistemológicos junto con los* *componentes de análisis explican la naturaleza de un discurso didáctico y muestran evidencia de cómo se construye el conocimiento (Apolo A. 2004 pp 14).*

Así, en esta línea de investigación se procura recurrir a la historia de las matemáticas y particularmente a su epistemología para tener una idea más completa del discurso matemático, el cual usualmente se presenta como un constructo ya acabado y formalizado, dejando de lado su génesis. Un ejemplo particular se da con objetos como infinito y continuidad, que usualmente se presentan de manera formal bajo definiciones operatorias que no permiten observar las riquezas didácticas que podría brindar el estudio de la historia de dichos objetos, el análisis de las discusiones que se dieron en torno a su desarrollo y la identificación de los conceptos que se relacionan con estos objetos.

1.1.2 Historia y enseñanza de las matemáticas

Bajo esta línea de investigación el interés está en analizar de qué manera el estudio de la historia de las matemáticas permite reflexionar sobre las prácticas de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos, para de esta manera poder modificarlas.

Dentro del proceso de enseñanza de las matemáticas es útil que los docentes recurran a la historia de las matemáticas puesto que ésta le otorga herramientas valiosas para comprender la génesis de un objeto matemático, lo cual le permite tener una visión más amplia sobre las conexiones que este objeto tiene con otros, dotar a los objetos matemáticos de significado para que en este sentido la forma de estudiarlos en clase sea más natural para los estudiantes y entender las discusiones que surgieron en torno a su desarrollo ya que esto genera puntos de referencia para analizar las prácticas de los estudiantes en el ambiente escolar y establecer las formas más adecuadas para hacer una propuesta curricular.

Con base en Gonzales P. (2003) en el pasado, la forma usual de presentar y abordar las matemáticas en el aula estaba influenciada por una tendencia lógico deductiva y la enseñanza matemática se veía relegada a presentar una serie de resultados ya terminados, que se obtenían de forma lógica a partir de una serie de axiomas sin embargo, esta concepción de las matemáticas representaba una amenaza para el proceso de formación de los estudiantes, puesto que implicaba que ellos y cualquier persona en general no se sintiera atraída por las matemáticas, no gozara de contextos adecuados de descubrimiento, creación y la posibilidad de discutir y en si vivir ciertos procesos que realiza un matemático cuando realiza matemáticas, al respecto Gonzales P. (2003 pp. 284) citando a Kline (1987) comenta:

> *"Es intelectualmente deshonesto enseñar la interpretación deductiva como si se llegara a los resultados por pura lógica. Esa interpretación destruye la vida y el espíritu de las matemáticas, no facilita la comprensión y aunque tenga un atractivo estético para el matemático sirve de anestésico para el estudiante"*

De a cuerdo con Gonzales P. (2003) es por esto que surge la preocupación de los docentes por buscar mecanismos para mejorar sus prácticas en el aula y posibilitar la aparición de ambientes más enriquecedores para sus estudiantes. Uno de estos mecanismos consiste en estudiar la relación que puede existir entre las matemáticas su historia y los métodos de estudio que se pueden articular para mejorar los procesos de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas.

1.1.3 Historia social de las matemáticas:

Además de tener en cuenta el desarrollo epistemológico de los objetos o teorías matemáticas Anacona M. (2003) considera que esta línea de investigación debe realizar un estudio de los diferentes factores sociales y culturales de la comunidad de matemáticos (los que hacen matemáticas) para comprender las formas de razonamiento y de construcción que emplearon para desarrollar los objetos y las formas de comunicación y validación de sus ideas y su influencia en la evolución de los objetos en un contexto social determinado. Con este objetivo el investigador puede indagar en o sobre las instituciones educativas, realizar análisis de los textos guía o de enseñanza, estudiar los currículos o políticas educativas, entre otras cosas. En ese sentido, Arboleda (1993 pp. 24) señala que:

> *"Esta clase de estudios hace parte de una concepción más general que ha tomado fuerza en América Latina y que se conoce como Historia Social de las Ciencias"*

Por ejemplo, si se quisiera analizar la inclusión del estudio de geometrías no euclidianas en los currículos colombianos de secundaria, no es necesario conocer si el quinto postulado de Euclides se deduce de los otros o no, ni mucho menos conocer todas las geometrías no euclidianas; el sentido de esta situación radica en comprender y revisar las concepciones filosóficas que predominaban en dicha época, así como estudiar las políticas educativas establecidas y lo viable o no de enseñar esto en nuestro país como lo justifican Arboleda y Anacona (1996 pp. 34).

> *"Un estudio articulado de todos estos aspectos, permite comprender que en ese momento histórico y en las condiciones socioculturales del país, la única geometría viable en los ambientes escolares e intelectuales era la geometría euclidiana"*

Todas estas líneas de investigación apuntan a entender las matemáticas como una construcción humana forjada a través de la interrelación social y cultural, la cual nos lleva ineludiblemente a concluir que la relación historia de las matemáticas y matemática es innegable y casi que evidente a la luz de la formación docente, lograr entender las múltiples posibilidades que otorga la historia de las matemáticas en relación con el proceso educativo nos lleva a establecer una caracterización de los usos que se pueden dar a la historia de las matemáticas.

1.2 Los usos de la historia de las matemáticas en la formación de un docente de matemáticas

Con la idea de fundamentar y justificar los diferentes usos que se pueden otorgar a la historia de las matemáticas en la educación matemática, después de revisar distintas fuentes e indagar en la literatura sobre la relación educación matemática e historia de las matemáticas, se propone una clasificación de estos usos basada en los usos presentados por Urbaneja P (1991) y por Siu Man-Keung (1997). Dicha clasificación se da en términos de las siguientes categorías:

Rescatar significados y heurísticas: usualmente los objetos matemáticos son comunicados a los estudiantes como objetos terminados, concluidos, que no permiten observar los errores, intentos y situaciones que permitieron que dichos objetos fueran validados. Recurrir a la historia para rescatar significados (Godino 1994) o procesos heurísticos es una herramienta poderosa para que los profesores puedan estructurar mejor sus propuestas didácticas y así permitir a los estudiantes comprender mejor los objetos, que éstos fueron construidos socialmente y que en esta construcción se presentaron dificultades que ellos pueden atravesar, lo que los motiva a continuar en el proceso de estudio.

Extraer problemas interesantes: a lo largo de la historia de las matemáticas se han identificado problemas que han sido considerados por la comunidad educativa de gran interés puesto que surge la necesidad de construir un objeto matemático nuevo. Estos problemas pueden eventualmente ser adaptados para ser discutidos en el aula, lo que deja ver una forma de construcción histórica. Estos problemas pueden ser tratados de manera lúdica, estimulando la sana competencia y la necesidad de los estudiantes por generar nuevas maneras de resolución de problemas.

Fuente de información: Recurrir a la historia como fuente de información es un mecanismo natural del estudio de cualquier objeto matemático, pues al recurrir a la historia de un objeto se observa que este objeto hace parte de una red conceptual contextualizada y esto permite establecer formas para su estudio.

Comprender la génesis de un objeto (discusiones y dificultades): se concluye que entender la génesis de un concepto otorga más información que el resultado presentado de manera acabada. Generalmente un estudiante que es adepto a las matemáticas desconoce la manera en que un concepto fue creado, y es el estudio de la génesis de este concepto lo que le permitirá hacer una reflexión en torno a las situaciones que permitieron la evolución de este concepto, su consolidación y formalización.

La historia para nuevas propuestas didácticas y pedagógicas: Esta clasificación es la que mas hace eco en el interior de un docente, refugiarse en la historia para extraer y generar nuevas propuestas didácticas es una herramienta poderosa en el quehacer docente, estimular nuevas acciones pedagógicas basadas en resultados encontrados en la historia implica un gusto y una aceptación mayor en los estudiantes.[1]

A continuación se presenta un cuadro en el que se listan las categorías descritas anteriormente y se clasifican los usos de la historia presentados por Urbaneja P (1991) y por Siu Man-Keung (1997) en sus artículos.

[1] Este interés se vio explicito en una de las asignaturas del programa de la licenciatura, Historia de las matemáticas, despertó nuestro interés y cambio sustancialmente la forma de percibir las matemáticas, tanto así que nos llevo a generar un trabajo de Grado de tal manera que la historia de las matemáticas refleja este cambio.

	Urbaneja P	Siu Man-Keung
Rescatar significados y heurísticas	• La historia de las matemáticas permea la comprensión profunda de los problemas matemáticos, entendiendo el proceso en el que fueron construidos, las ideas que los propiciaron y el contexto en que fueron desarrollados esto permite y facilita la comprensión y consideración de los contenidos que se van a enseñar.	• Para Contenidos: Cuando se indaga en historia de las matemáticas es posible encontrar dos resultados diferentes un resultado que generó un historiador y un resultado que generó un historiador matemático. Lograr reconocer diferencias en torno al objeto de estudio desde ambos casos permite una visión más amplia para el estudio del concepto a tratar e identificar con qué mirada se estudia la historia: a. Para extraer temas. b. Pare encontrar heurísticas c. Para identificar dificultades d. Para estudiar discusiones, que surgieron en torno al objeto matemático. e. Para rescatar los diferentes significados que se han atribuido a dicho concepto y ver de qué manera han cambiado.
Extraer problemas interesantes	• La historia como fuente de problemas que a lo largo de la historia han sido de especial interés para la comunidad educativa como la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, paradojas sobre el infinito, etc.	

La historia como fuentes de información	• La historia de las matemáticas puede servir para contradecir algunas aseveraciones que se tengan en torno a un objeto matemático. • Sirve como puente para vincular la matemática, la filosofía y las ciencias sociales más allá de la ciencia misma, y lograr integrar la matemática con los saberes científicos, literarios y artísticos que constituyen la cultura.	• Para anécdotas: sirven para introducir un nuevo concepto de manera agradable, inspirando a los estudiantes e infundiendo en ellos respeto, admiración para los artífices de los logros matemáticos, y de esta manera forjar una relación con la historia de cada cultura para comprender un concepto o idea. • Para el desarrollo de ideas matemáticas: Toda persona en el estudio de un objeto matemático ha llegado a un punto en el que no sabe como continuar. Ir a la historia para generar nuevos caminos de construcción de conocimiento, o incluso caminos que estaban inconclusos es otro uso de la historia de las matemáticas. Por ejemplo en el estudio de cálculo de volúmenes, ver los métodos que nos presentan nos puede llevar a preguntarnos si fueron los únicos. Con esta idea se revisa la historia de las matemáticas para desarrollar ideas matemáticas. • Es necesario no limitar los aprendizajes de los estudiantes a un currículo específico. Si bien es cierto que el profesor es quien debe guiar el aprendizaje de los estudiantes desarrollando y estructurando un plan

		de trabajo es necesario ser flexibles para que los estudiantes sean participes de su aprendizaje, por ejemplo si el interés es abordar el cálculo de volúmenes en un sólido de revolución lo usual es enseñar los métodos básicos conocidos sin embargo si un estudiante quisiera investigar en torno a los antecedentes o a los orígenes de estos métodos puede ser deber del profesor conocer estos apartes y otorgar a su estudiante bibliografía necesaria para suplir este deseo de aprender.
La historia para comprender la génesis de un objeto (discusiones y dificultades)	• La perspectiva histórica permite tener una visión panorámica más amplia de los problemas, destacando la importancia y sutilezas de diversos temas, articulando mejor el contexto en la asignatura.	• En líneas generales: Es importante y de gran ayuda antes de estudiar un concepto, recurrir a la historia para ver cuál fue el génesis de su aparición, de qué manera surgió la necesidad de estudiar este concepto, esta reflexión permite un punto de partida para el historiador o para el aprendiz de matemáticas en el cual iniciar su proceso formativo. Así, es posible usar la historia para evitar caminos que puedan presentar dificultades o por otra parte usar estas dificultades como foco de discusiones para enriquecer el estudio de un concepto.

La historia para nuevas propuestas didácticas y pedagógicas	• La historia de las matemáticas genera una propuesta de aprendizaje activo, en donde los estudiantes logran redescubrir a través de la actividad de investigación, conocimientos que fueron aprendidos de forma tradicional, generando nuevas teorías en torno a teorías ya establecidas, uno de los fines de enseñar cualquier ciencia. • La historia nos muestra cómo se ha llegado a los mismos resultados mediante caminos diferentes lo que genera herramientas para que el profesor pueda presentar por	

	múltiples vías un mismo concepto logrando que los estudiantes acepten que las matemáticas no se generaron de manera lineal y formal sino a través de muchas formas de creación e innovación. • Mostrar a los estudiantes la manera en que un concepto tomó forma, permite que ellos interactúen y establezcan nuevos mecanismos y caminos para crear conocimiento lo que motiva el desarrollo de su actividad creativa. • La historia de las matemáticas permite que el docente reflexione respecto a las dificultades que tienen sus estudiantes, entendiendo que estas fueron las mismas que tuvieron los matemáticos en el tratamiento del concepto en su génesis y que, por lo tanto, ningún concepto es trivial ni puede darse por "fácil".	

El uso de la historia de las matemáticas en la educación matemática, otorga innumerables fuentes de información, de problemas interesantes, de material didáctico, de mecanismos de autodefinición como profesores, de anécdotas, de contenidos, de significados perdidos durante la historia y de múltiples caminos para presentar un concepto, es necesario reflexionar en torno a esto y ver que las matemáticas no son un producto terminado sino que fueron generadas por un proceso que alberga los métodos, los interrogantes y en general todas las situaciones que se plantearon para abordar la consideración de un determinado problema.

Entender que el objetivo de estudiar la historia no radica en realizar una réplica de la forma como apareció en la historia en el aula de clase sino en realizar una reflexión que permita presentar el objeto de estudio de mejor forma (reconociendo el contexto educativo y las posibilidades del docente) genera un ambiente en el que el docente puede mejorar su práctica y de esta manera poder ejercer exitosamente su labor. Debe aclararse, que los autores de este trabajo no son historiadores, pero se valen de la historia para resaltar la importancia de ésta en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1.3 Delimitación del trabajo

Teniendo en cuenta que el interés que motivo el desarrollo de este trabajo radica en estudiar algunos métodos en la historia para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución[2] y que ya se esbozó una categorización de los usos de la historia en la educación matemática, a continuación se explicita la forma en que este estudio se presentará, particularizando en: los autores seleccionados, la época elegida, el contexto apropiado, los conceptos de interés inmersos en el desarrollo de cada autor y las categorías que se utilizarán para organizar las observaciones o conclusiones.

Dado que el cálculo de sólidos de revolución está ligado a los problemas de cuadraturas y cubaturas, al hacer una revisión en textos de historia se evidenció que entre los siglos VI a III a. C y en la primera mitad del siglo XVII d. C aparece como una práctica social[3] entre los matemáticos la búsqueda de soluciones a estos problemas. En este sentido se eligieron como

[2] Para un estudio detallado sobre el uso de métodos formales para el cálculo de sólidos de revolución puede consultar Apóstol, T. (1972). *Calculus* (F. Vélez, Trans. Vol. 1). Barcelona: Reverté.

[3] Se entiende por Practica Social lo que indica Ricardo Cantoral Uriza (2002) en: *la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente Ricardo*

representantes de estas épocas a los matemáticos Arquímedes, Cavalieri y Torricelli, ya que el primero fue un precursor de los trabajos en cálculo, presenta trabajos en los que se evidencian sus métodos y algunos significados de conceptos de interés, y los otros retoman ideas propuestas por Arquímedes y generan nuevos métodos para solucionar problemas similares dejando entrever nuevos significados de los conceptos de interés.

Desde el punto de vista matemático en el estudio de los métodos actuales para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución es importante cuestionarse sobre conceptos como el infinito, el límite, los infinitesimales y el continuo para poder tener una idea completa de todos los elementos que juegan parte de esta construcción teórica. Sin embargo, algunos de estos conceptos tuvieron durante la historia significados diferentes a los que hoy en día se tienen, o inclusive, a la luz de los métodos que se dieron en la historia aparecieron otros conceptos que los substituyeron; es así que en este trabajo, particularmente, aparece el interés por caracterizar algunos significados de conceptos como infinito, infinitesimal, indivisible y sólido de revolución, los cuales están directamente relacionados con la noción de descomposición del continuo, razón por la cual todo el estudio se basará en una discusión inicial sobre composición y descomposición del continuo en matemáticas y su manejo para el cálculo de cantidades de magnitud (ver cap. 2)

A partir de la categorización presentada respecto a los usos de la historia matemática en la educación matemática es necesario aclarar que el presente trabajo desarrolla únicamente dos categorías, a saber, R*escatar significados y heurísticas* y *Comprender la génesis de un objeto (discusiones y dificultades)*. Dichas categorías determinarán ejes de clasificación para las conclusiones al final del documento. Desarrollar las categorías restantes implica un estudio diferente que hubiese tomado más tiempo y puede ser tema de interés para una posible continuación de este trabajo.

Ahora es necesario explicitar de qué manera se considera la definición de significado y de heurística en el desarrollo del trabajo.

1.3.1 Significado y Heurísticas

La noción de significado en matemáticas suele tener un carácter relevante para la didáctica de la Matemática. Sin embargo como aclara Godino (2003 pp. 3):

> *"No se encuentra en la literatura de la especialidad un análisis explícito de qué sea el significado de las nociones matemáticas. Los investigadores en esta disciplina utilizan el término "significado" de un modo que podemos calificar de lenguaje ordinario, o sea, con un sentido intuitivo o pre-teórico."*

Es por esto que preguntarse por el significado de los términos o conceptos en matemáticas implica indagar en la naturaleza de los objetos matemáticos, realizando una reflexión epistemológica y una reflexión en torno al desarrollo cultural del conocimiento matemático, generando una teoría del significado relacionada con la manera en que se da el aprendizaje de algunos supuestos epistemológicos sobre la naturaleza de los conceptos. Luego es necesario entender cómo se da este proceso de significación.

Como cita Godino (2003 pp. 3) a Lyon (1980) esta relación se presenta como una relación ternaria entre "signo", "concepto" (Referencia) y "significatum" (referente), en la cual, la relación entre un signo y su referente está mediada por un concepto. La problemática del significado conduce a indagar cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos. Es por esto que los objetos matemáticos como puntualiza D' Amore B. (2006 pp. 6)

"*… deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo y el* ***significado*** *de estos objetos está ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática."*

Uno de los objetivos del presente trabajo es identificar heurísticas utilizadas para el cálculo de volúmenes, razón por la cual es necesario aclarar qué se entiende por heurística; Se entenderá por **heurística** la definición que presenta Marino T., Rodríguez M. (2008 pp 215) de Polya (1965) que entiende como heurística *a las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas; conforman un conjunto de reglas, sugerencias y modos de proceder que ayudan a encarar la resolución de un problema*. Éste mismo autor logra generar una clasificación de algunos pasos a seguir en la resolución de problemas, encontrada en su libro "How to solve it" (1945), dichos pasos o fases son *Comprender el problema, Concebir un plan, Ejecutar el plan y Examinar la respuesta obtenida.* Bajo esta idea se estudiara si algunos de los métodos propuestos por los autores permiten vislumbrar las heurísticas usadas.[4]

Adicional a esto es importante destacar su relación con la resolución de problemas, bajo la cual

> *"…un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se lo plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata"*. Parra (1990 pp. 14)

1.4 Objetivos

Objetivo general

Identificar los métodos heurísticos que usaron algunos matemáticos para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución vía la noción naciente de integral definida y los objetos matemáticos que están inmersos en ellos.

Objetivos específicos:

Para identificar y organizar el estudio de los métodos heurísticos que serán abordados en el presente trabajo y los objetos matemáticos inmersos en el desarrollo de las teorías en las que se fundamentan, se tendrá en cuenta las categorías *Rescatar significados y heurísticas* y *Comprender la génesis de un objeto (discusiones y dificultades)* sobre el uso de la historia.

Específicamente los objetivos de este trabajo son:

1. Realizar una revisión de algunos artículos que permitan el estudio de las heurísticas usadas por algunos matemáticos para el cálculo de volúmenes antes de la fundamentación formal del cálculo.

[4] Al respecto Marino T (2008) comenta que muchos investigadores tales como Schoenfeld, Kilpatrick, Lester, Guzmán, Fridman, Jungk y otros, retomaron las ideas de Polya y siguieron trabajando en esta línea.

2. Comprender cómo estaban constituidos los objetos matemáticos desde el punto de vista filosófico griego y cómo estas posturas se reflejan en los métodos que serán objeto de estudio en este trabajo.
3. Reconocer qué objetos matemáticos estaban inmersos en los métodos estudiados y destacar algunos significados de estos objetos.
4. Estudiar los métodos de algunos matemáticos para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, a la luz de los objetos y significados identificados anteriormente, y presentar una descripción en la que se expliciten los principales argumentos dados por estos matemáticos.

1.5 METODOLOGÍA

La consolidación del presente trabajo se desarrolló en tres momentos.
Primero se realizo una reflexión en torno a la importancia del uso de la historia de las matemáticas en la educación matemática para lo cual se consultaron libros y artículos que muestran esta importancia como Katz V. (2000 p. p 3-11), Anacona (2003) y Urbaneja P. (1991). Dicha reflexión permitió orientar, categorizar y organizar el esquema general de trabajo a partir de usos particulares que se dan a la historia en la educación matemática. Luego de esto se efectúo una revisión histórica en torno a los diferentes matemáticos que realizaron aportes al trabajo con volúmenes de sólidos de revolución y propusieron formas de calcularlos; esta revisión se limitó a reconocer estos avances en dos momentos históricos diferentes, un primer momento ubicado en la época helénica y un segundo momento situado en la primera mitad del siglo XVII. Una vez establecidas estas épocas particulares se rescataron específicamente tres autores: Arquímedes de Siracusa, Bonaventura Cavalieri y Evangelista Torricelli.

Luego de haber seleccionado dichos autores fue necesario realizar una consulta en torno a la interpretación que se da del infinito y de la composición de las cosas que existen en el universo, aterrizado a objetos matemáticos, para lo cual fue necesario estudiar algunos artículos de matemáticas especializados en este campo como Coronado L. (1988); Ortiz J (1994); Martínez G (2005); Castro I. y Pérez J (2008). Una vez entendida esta relación, se avanzó en el estudio de los distintos aportes matemáticos que otorgaron cada uno de los autores seleccionados para lo cual se revisaron libros y artículos como Edwards (2004), Cantoral (2004), Vera F. (1970), Gonzales P. (2003), Herrera R. (2012) y Barrios J (1993); luego de revisar los métodos que allí se condensaban se identificaron algunos objetos matemáticos que eran de especial interés para este trabajo tales como: el uso de límites, el trabajo con indivisibles, el trabajo con infinitesimales, la idea de sólidos de revolución, y el uso de infinito entre otros, sin olvidar el contexto social y matemático bajo el cual se desarrollaron dichos métodos, puesto que se parte de la consigna que la comunidad matemática de cada época influye en cierta medida en la manera de presentar los resultados.

Durante el estudio de estos métodos se evidenciaron diferencias y similitudes desde la postura de cada autor respecto a la composición de los objetos matemáticos y en general respecto a los objetos de interés antes descritos. Para cada autor se genera a manera de conclusión un cuadro en el que se exaltan y se organizan estas observaciones. Dichas observaciones son analizadas de manera transversal de acuerdo a las categorías de análisis y se presentan a manera de conclusión al final del trabajo. Adicionalmente se realizan conclusiones en relación con el contexto y la época en el que dichos trabajos fueron realizados y en torno al uso de la historia como aporte a nuestra formación como futuros docentes.

El presente estudio radica en una revisión de textos y artículos matemáticos, razón por la cual el desarrollo de las demostraciones no es nuestro sino que en su lugar se presenta de manera más especifica (completando los pasos intermedios), reescrita en notación moderna a partir de la información de las fuentes que permita a los lectores una mayor comprensión de los métodos desarrollados. Adicional a esto se usan citas a pie de página cuando una aclaración tiene lugar, interpretaciones propias y comentarios aclaratorios en forma de cuadros cuando un concepto o idea matemática importante tiene cabida. Todas las figuras (excepto la figura 4.1) usadas en las demostraciones fueron rediseñadas a partir del uso de software matemáticos como MAPLE12 y GeoGebra.

Capitulo 2

"Si una cantidad no negativa fuera tan pequeña como para ser menor que cualquier otra ciertamente no podría ser otra cosa sino cero"
Leonhard Euler (1707-1783)

2. Atomismo e infinita divisibilidad

Los resultados que se muestran a continuación están basados en los documentos de Coronado L. (1988), Castro I.; Pérez J.; (2008), Ortiz, J.; (1994), Costa, E.; Otto, B. (2005) entre otros. A lo largo de la historia de la humanidad han surgido diferentes tipos de preguntas en relación con la composición de los objetos del universo, particularmente de los objetos matemáticos. En Grecia entre los siglos V-III a. C. surgieron dos corrientes de pensamiento o posturas sobre la composición de los objetos *el atomismo* cuyo principal representante es Demócrito de Abdera (460-360 a. C.) quien establece que los cuerpos están constituidos por unidades mínimas a las que llamamos átomos o ***indivisibles***. Por otro lado la infinita divisibilidad de Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.) en la que un cuerpo o magnitud puede ser dividida infinitamente y su magnitud se va a mantener sin importar el numero de divisiones que se haga. A continuación se describen estas dos posturas.

2.1. Postura Atomista: Demócrito

El atomismo de Leucipo[5] y Demócrito es una doctrina filosófica que se desarrolló durante los siglos V y IV a. C, con el objetivo de crear un sistema lógico, bien estructurado y consistente, para analizar cómo está constituido cada objeto del universo; esta postura contempla que los objetos están constituidos por pequeñas partes que no pueden ser divididas, denominadas átomos o ***indivisibles,*** los cuales carecen de vacío y viajan chocando unos con otros formando estructuras compuestas. Esta corriente se considera presocrática porque buscaba el principio generador de todas las cosas, así como cita Coronado L. (1988 pp. 8) a Aristóteles:

[5] Hoy no está del todo claro quién era Leucipo, e incluso se duda si vivió o no. Aparentemente esto fue así también en la antigüedad; sea como fuere, Epicuro negó su existencia*, así lo establece Cartledge P., (1999) en su libro "Demócrito" pagina* 30.

“*todas las cosas están constituidas por cuerpos invisibles que son infinitos en números y en forma, distinguiéndose unas de otras por los elementos que las componen, así como por su disposición y orden*”

Ahora, para que los átomos puedan componer un cuerpo, deben tener ciertas propiedades, por ejemplo Coronado L. (1988 pp. 11) cita a Simplicio de Caelo:

“*Los principios llamados también átomos e indivisibles son infinitos e invulnerables por ser compactos y carecer de vacíos porque afirman que la división se produce a causa del vacío que se encuentra en los cuerpos, pero que los átomos están separados unos de otros en el vacío infinito en el cual se mueven, siendo diferentes por la forma, el tamaño, la posición y el orden. Al encontrarse bruscamente entran en colisión y, como consecuencia, unos rebotan al azar y otros se entrelazan con arreglo a su forma, posición y orden y permanencia unidos. Tal es el modo de producirse los compuestos.”*

Adicionalmente, esta corriente de pensamiento se ve influenciada por algunas posturas filosóficas, como la de Heráclito de Efesio (544-484 a.C.) quien se fundamenta en la noción de cambio, en el flujo constante de las cosas y la de Parmenides (540 -470 a.C.) quien se basa en la noción de permanencia y por lo tanto la negación de toda movilidad. Estas ideas las retoma Demócrito y Leucipo, quienes exponen que los indivisibles cuando se mantienen estáticos son simples, elementales, sin movimiento pero cuando se unen y chocan con otros empiezan a interactuar y moverse.

Adaptando esta postura a las matemáticas se encuentra la existencia de una relación o jerarquía entre algunos objetos geométricos, por ejemplo, un sólido está compuesto de regiones determinadas por los cortes que hacen planos paralelos a uno dado llamado regula[6], estas regiones se constituyen en los indivisibles del sólido; estas regiones se componen de segmentos de recta paralelos a una recta dada, y tales segmentos son los indivisibles de la región; dichos

[6] Entenderemos regula como un plano que sirve para determinar la orientación del movimiento de una recta o un plano, adaptándolo a términos actuales si tomamos el eje x como regula, será desplazar una recta o un plano a lo largo del eje x de forma perpendicular.

segmentos se componen a su vez de puntos, pero estos puntos son la unidad indivisible de un segmento[7].

Figura 2.1. *Descomposición de un segmento de recta*

En la figura 2.1 se presenta una interpretación gráfica de la forma en que se podría descomponer el segmento de recta determinado por los puntos A y B. Bajo una primera división del segmento se pueden determinar los segmentos CK, KF, FJ, JE, EH, HG, GI, ID y todos estos segmentos, se pueden continuar dividiendo hasta obtener, bajo la idea atomista, puntos que se constituyen en los indivisibles. Cabe resaltar que bajo esta interpretación no se está afirmando que los puntos puedan disponerse en una sucesión para formar la recta

Ahora bien, ya que el interés de este trabajo se centra en el cálculo de volúmenes se mostrará una posible configuración de los indivisibles de un sólido en particular: sea el cono ABC, si se toma el plano base como la regula y se trazan todos los planos paralelos a él, entonces todos los círculos que se generen por el corte de los planos con el cono serán los indivisibles del cono. En la figura 2.2 se presentan algunos de tales indivisibles

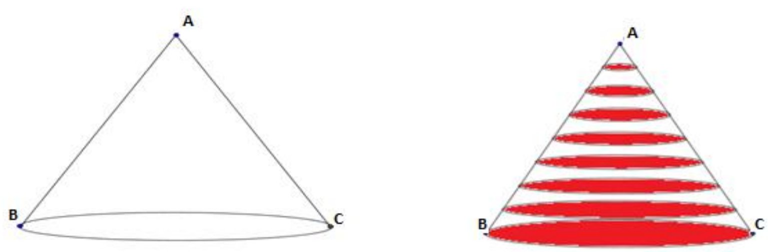

Figura 2.2. *Indivisibles de un cono.*

[7] En los trabajos de Euclides puede observarse que él no cuestiona la composición de la recta en términos de puntos sino que solamente acepta que hay puntos en la recta.

Es necesario resaltar que los indivisibles carecen de grosor, puesto que si lo tuvieran al unirlos podríamos obtener una especie de pirámide escalonada pero no un cono (figura 2.3)

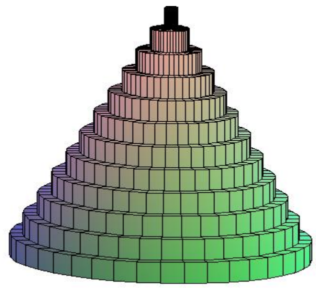

Figura 2.3 *Pirámide escalonada si los planos tuvieran grosor*

Por otro lado, si se toma otro plano como regula, la descomposición del cono cambia así como la forma y posición de los indivisibles, pero se mantiene la idea de que los indivisibles de un sólido son regiones.

El desarrollo de los conceptos matemáticos se ve afectado por esta postura sobre descomposición del espacio, ya que el espacio se concibe como ese gran vacío infinito en tamaño donde los átomos se mueven, y la divisibilidad de los átomos no es posible, es decir a partir de algunas divisiones llegaremos a los indivisibles.

2.2. Postura infinitesimal: Aristóteles

La infinita divisibilidad propuesta por Aristóteles implica que a pesar de que nuestros sentidos no perciban que una magnitud o un objeto puedan ser divididos infinitamente esto no pueda ocurrir, y que al hacer dicha división además se obtengan partes con la misma magnitud del objeto; por ejemplo, al dividir un sólido dicha división genera otros sólidos más pequeños[8], al dividir una superficie se obtienen superficies más pequeñas y al dividir un segmento de recta se obtienen segmentos de recta más pequeños. De esta manera todos los objetos son divisibles infinitamente en partes infinitamente pequeñas denominadas ***infinitesimales*** y dicho proceso de división puede hacerse conservando la magnitud y la naturaleza del objeto.

[8] El adjetivo pequeño en este caso hace referencia a menor cantidad de magnitud.

Aristóteles estaba convencido de la infinita divisibilidad de los cuerpos a diferencia de Demócrito quien concebía que un cuerpo puede descomponerse en unidades que no son divisibles llegando a una contradicción por reducción al absurdo, lo que *Cartledge P. (1999 pp. 17)* describe de la siguiente manera:

> *Si el cuerpo es, pues, totalmente divisible, supongamos que se lo divida. ¿Qué será entonces lo que queda? ¿Una magnitud? No, no es posible, porque habrá algo que no ha sido dividido y, según se acordó, es totalmente divisible. Pero, admitido que no queda ningún cuerpo ni ninguna magnitud, y se prosigue, sin embargo, la división, resultara o bien que el cuerpo estará formado de puntos y sus constituyentes carecerán de magnitud, o bien lo que reste no será absolutamente nada. Si se diese esta segunda alternativa, el cuerpo provendría de nada y estaría formado por nada, y el todo, en consecuencia no sería sino una apariencia. ... la consecuencia absurda que resulta es que una magnitud estaría constituida por cosas que no son magnitudes.*

A pesar de que las ideas de Aristóteles defendían la infinita divisibilidad, esta corriente de pensamiento no fue aceptada en esa época y sus ideas fueron retomadas posteriormente por otros autores como Arquímedes (287-212 a. C.) el cual logro hacer una extensión del pensamiento Aristotélico encontrando que para una magnitud es posible encontrar una magnitud más pequeña del mismo orden.

En la figura 2.4 se muestra una división de un cuadrado en rectángulos más pequeños y si ahora se dividen estos nuevos rectángulos se obtienen rectángulos más pequeños. Este proceso de división se podría efectuar infinitamente y en cada paso se obtendrían rectángulos más pequeños que los anteriores, dando la idea de poder encontrar rectángulos infinitesimales o infinitamente pequeños.

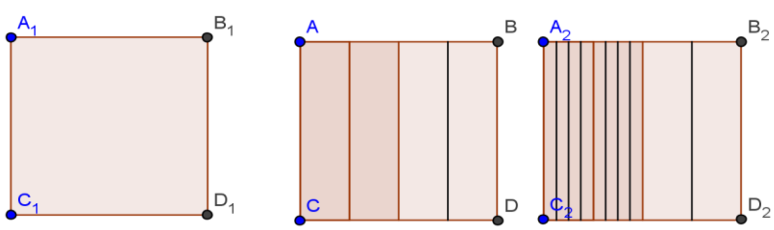

Figura 2.4 *infinitesimales rectángulos de un cuadrado*

De manera análoga, bajo esta postura filosófica, se puede realizar una división de un sólido para obtener sólidos semejantes infinitamente pequeños por ejemplo en la figura 2.5 se observa la clásica división de un cilindro en cilindros con altura menor a la del sólido original:

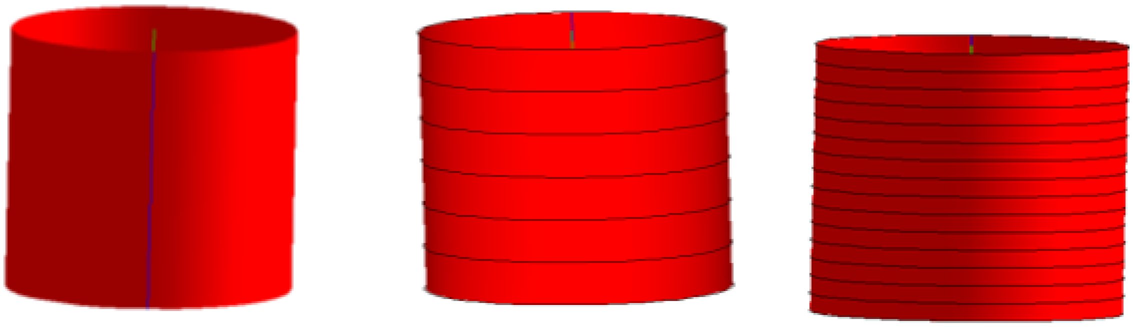

Figura 2.5 *infinitesimales cilindros pequeños de un cilindro*

La idea de poder dividir un objeto infinitamente manteniendo la homogeneidad de magnitud entre él y sus partes y la de obtener objetos infinitesimales, se constituyen en elementos esenciales del cálculo actual, como por ejemplo en la definición de integral de Riemann (Gonzales P. 2003), aunque para la época de Aristóteles no eran del todo admisibles en las matemáticas hasta ahora desarrolladas.

A modo de comparación: La principal diferencia entre las dos posturas sobre la descomposición radica en el resultado de la división de una magnitud u objeto, ya que en el atomismo un cuerpo se divide en objetos de una naturaleza diferente (Ej. sólidos en regiones) mientras que en la infinita divisibilidad un cuerpo se divide en cuerpos de la misma naturaleza (Sólidos en sólidos). En otras palabras después de la división el atomismo genera heterogeneidad entre magnitudes y la infinita divisibilidad homogeneidad entre magnitudes.

2.3. Nociones de infinito

Como se pudo observar en las posturas sobre la descomposición de un objeto se presenta el concepto de infinito como un elemento esencial para el desarrollo de las matemáticas.

Particularmente, se evidencia que este concepto se presenta de dos formas diferentes, como proceso y como propiedad.

Según Costa E. y Otto B. (2005) los primeros en interesarse por discutir sobre el concepto de infinito fueron los griegos. En primer lugar se debe hablar de Platón (a.C. 427-347) y Pitágoras (a.C. 580-495) para los cuales el infinito o *"apeiron"* representaba lo descomunal, lo enormemente grande y lo asociaban con el caos o imperfecto, puesto que esté no poseía una medida, en palabras de Anaximandro (a.C. 610-546) significa "*sin fin o sin límite",* y suele expresarse como lo infinito indefinido o ilimitado.

Por su parte, Aristóteles estudia este concepto estableciendo dos tipos de infinito. Uno como el proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el otro como una característica de un objeto de ser infinito (Costa, E. Otto B. 2005). El primero es denominado infinito *potencial* (proceso acumulativo) y el segundo como el infinito *actual* (totalidad).

En la Grecia clásica se distinguen dos usos del infinito, el infinito potencial y el infinito actual a continuación se presenta una distinción entre ellos.

La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterada e ilimitada, es decir un proceso acumulativo, en el cual hay una recursividad interminable, en donde a pesar de tener una cantidad o número muy grande siempre es posible concebir uno mayor a uno dado, y así sucesivamente cuantas veces se desee es decir "infinitamente". Por ejemplo al hablar de dividir un segmento a la mitad, y esta mitad a la mitad y así sucesivamente; o cuando se quiere mostrar que existen infinitos números naturales, pues se da uno pero siempre se puede encontrar el siguiente y el siguiente a éste.

La noción de infinito actual se considera como propia del objeto a estudiar, es decir, un objeto es infinito porque se compone de un sin número de partes, lo que se entiende como la totalidad del objeto. Un objeto puede ser infinitamente grande algunos ejemplos son el tamaño del conjunto de los números naturales, de los números pares, de los números perfectos, entre otros, en donde no se toman algunos de esos números, sino la totalidad de ellos. Esta noción de infinito puede verse en el uso de indivisibles en la geometría, al descomponer un objeto en indivisibles.

Además, durante varios siglos se consideró que si dos conjuntos tenían infinitos elementos, su infinito era igual. Por ejemplo, Galileo (1564-1642) en el Renacimiento mostró que el conjunto de los números naturales que son cuadrados perfectos y el de los naturales tienen el mismo tipo de infinito, pues aunque en principio se observa que el primero puede sumergirse en el segundo, para cada número natural se puede encontrar un número natural que es su cuadrado, de lo se puede concluir que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos. Estas ideas se formalizan al definir el cardinal de un conjunto, y para este caso el cardinal de ambos conjuntos es el mismo como lo demostró más tarde Cantor (1845-1918). Este ejemplo permite desmentir una famosa afirmación dada en *los elementos* de Euclides (325-265 a. C.), a saber *"el todo es mayor que la parte".*

En el siglo XVII hubo un cambio paradigmático que permitió abordar explícitamente la noción de infinito y notar que los conjuntos finitos y los infinitos se rigen por leyes y preceptos diferentes. Entre tanto el matemático inglés John Wallis (1616-1703) le asocia el símbolo de la lemniscata ($\propto$) al infinito. Después de este siglo fueron bastantes los avances en cuanto al concepto de infinito, pues múltiples matemáticos y pensadores aprobaron, desaprobaron y generaron teorías en relación con este objeto, entré ellos está Kant (1727-1804) quien coincidía con las ideas de Aristóteles en que el limite absoluto es imposible en la existencia, el gran matemático Gauss (1777-1855) enfatiza en contra del uso del infinito como algo consumado mientras que Cauchy (1760-1848) no rechaza la idea de una colección infinita (infinito actual) por otra parte Bernhard Bolzano (1781-1848) fue el primero en tratar de fundamentar la noción de infinito actual en su obra *paradojas del infinito de 1851,* Bolzano acepto como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos esta definición luego es retomada por Cantor y Dedekind (1831-1916) quienes desarrollan la teoría formal sobre el infinito.

Actualmente se aceptan diferentes definiciones respecto al concepto de infinito incluso hay diferencias entre infinitos. Una comparación común es el cardinal de un conjunto infinito con el cardinal de otro, ¿si ambos son infinitos implica que ambos tienen igual cantidad de objetos? por ejemplo se sabe que el conjunto de números reales no es numerable mientras que el conjunto de los racionales si lo es por tanto el cardinal de ambos conjuntos es diferente. A partir de todo lo anterior se logra establecer una definición universalmente aceptada sobre el infinito en matemáticas: *un conjunto es infinito cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre él y una parte propia de él*. (Costa E. 2005 pp. 5)

Esta descripción global que se desarrolló sobre el concepto de infinito está lejos de ser precisa y completa, aunque se puntualizaron algunos elementos necesarios para abordar las discusiones y desarrollos que se presentan en los capítulos posteriores.

Capitulo 3

"Este método no falla jamás y admitiría extensión a muchos problemas de gran belleza; con su ayuda hemos hallado los centros de gravedad de figuras acotadas por rectas y curvas, así como de sólidos"
Pierre de Fermat (1601-1665)

Antes de comenzar el estudio de los trabajos de Arquímedes se presentara una breve descripción de la época en donde vivió este matemático.

3. Contextualización de la época helénica

La reflexión histórica que se va a realizar induce a estudiar la época en la cual la matemática tuvo cambios significativos, razón por la cual se debe contemplar la civilización griega la cual se sitúa en los albores del siglo VI a. C y culmina aproximadamente en el siglo VI d. C. Esta época en términos generales se divide en dos grandes épocas según Kline, M. (1992 b), *la helénica* o clásica y *el periodo alejandrino* o *helenístico.* Separadas por la muerte de Alejandro (323 a. C) y la de Aristóteles (322 a. C).

- *Época helénica*: esta época se desarrolla entre el siglo VI a. C y el siglo III a. C, se ubica en las costas de Asia menor, en Grecia, y en la magna Grecia (colonias al sur de Italia y silicia).
- *Época Helenístico o alejandrino: Todos* los desarrollos culturales se centran en el Alejandría tras la conquista de Alejandro.

Durante el desarrollo de estos periodos surgen diferentes escuelas cuyo fin principal es el de avanzar en el conocimiento matemático, cada una dirigida por un "sabio". A continuación se presenta una clasificación en torno a cada escuela concretada a partir de las ideas de Urbaneja (2001 pág. 25):

Escuela Jónica
Sabios: Tales de Mileto
Matemáticos que pertenecieron :Anaximandro, Anaxímenes y Anaxágoras

Logros: Se les puede atribuir proposiciones relacionadas con la geometría de los ángulos, las rectas, y las superficies que las determinan. Transforman la geometría al cambiar el enfoque de la misma desde un punto de vista empírico a un punto de vista deductivo Sánchez J(2011)
Escuela Pitagórica Sabio: Pitágoras (Fundada en Crotona, al sur de Italia) Matemáticos que pertenecieron: Hipasos, Teodoro, Hipócrates de Quíos, Arquitas. Logros: Probablemente la característica más notable de la orden pitagórica era su enorme dedicación al estudio de la filosofía y las matemáticas, hasta el punto de asumir a estas como base moral para la dirección de su vida. Parece ser que las propias palabras "filosofía" (o "amor a la sabiduría") y "matemáticas" (o "aquello que se aprende") fueron términos acuñados por el propio Pitágoras para describir actividades intelectuales. Sánchez J. (2011)
Escuela "Jenofanica" Sabio: Jenófanes, fundada en silicia Matemáticos que pertenecieron: Parmenides, Zenón Logros: Jenófanes de Colofón (- 570 a -475), precursor del pensamiento de Parmenides, es considerado como el fundador de la teología filosófica y de la teoría del conocimiento, la reflexión sobre la fundamentación y límites del mismo. En la primera criticó el antropomorfismo de los dioses homéricos así como su inmoralidad y la uso como modelo educativo postulando la existencia de un Dios único y, en la segunda, consideró una concepción objetiva de la verdad como algo independiente del sujeto. Asimismo, investigó acerca de cuestiones relativas a la naturaleza y a la cosmología. Sánchez J. (2003)
Escuela de Elea Sabio: Parmenides[9] considerado el padre de la metafísica Matemáticos que pertenecieron: Zenón (considerado el padre de la dialéctica) Logros: Los planteamientos de la escuela eleática iniciaron la metafísica occidental. La tesis fundamental de esta escuela es la afirmación, hecha por Parmenides, de la unidad

[9] Después de recibir conocimientos de Jenófanes se traslada a Elea para fundar junto a Zenón la escuela de Elea.

y la inmutabilidad del ser, a partir de los siguientes supuestos: • “el ser es, y el no ser no es”, • “no puede decirse ni pensarse que el no ser es” Esta escuela ejerció una gran influencia sobre el atomismo, sobre la sofística, sobre la lógica megárica y estoica, y sobre Platón quien, en el Parmenides, desarrolla su tesis sobre lo mismo y lo otro; tesis que representa una autocrítica a su teoría de las ideas, aunque desarrolla también una concepción del no-ser opuesta a la de Parmenides. Varo A. (2008)
Sofistas Matemáticos que pertenecieron: Hipias, Brisson, Antifón Logros: Se denomina "sofistas" a un conjunto de pensadores griegos que florecen en la segunda mitad del siglo V a. de C. y que tienen en común, al menos, dos rasgos sobresalientes: entre sus enseñanzas incluyen un conjunto de disciplinas humanísticas (retórica, política, derecho, moral, etc.) y son los primeros profesionales de la enseñanza (organizan cursos completos y cobran sumas considerables por enseñar). Ambos rasgos -carácter humanístico de sus enseñanzas e institucionalización de la enseñanza misma- muestran claramente que los sofistas tenían un proyecto bien definido de educación que venía a romper con la enseñanza tradicional que resultaba ya inadecuada para las exigencias de la época. Cordón J (2004)

“No todos los grandes matemáticos griegos pueden identificarse con una determinada escuela, hay muy honrosas excepciones como Demócrito, Apolonio y Arquímedes, que por sí mismos constituyen poderosas individualistas científicas” (Urbaneja 2001 pág. 28):

En la figura 3.0 se presenta un mapa de la antigua Grecia en donde se ubican las escuelas lideradas por algunos sabios.

Según Urbaneja P (2001) En cuanto a las matemáticas Griegas se distinguen cuatro aspectos fundamentales que las estructuran, a saber:

1. *La organización deductiva:* que es el canon paradigmático de exposición de la matemática griega, donde se persigue un rigor impecable e implacable. 2. *La orientación Geométrica:* fue una de las consecuencias más notables de la crisis producida por magnitudes inconmensurables.

3. *La consideración de ciencia liberal y desinteresada:* los griegos independizaron las matemáticas del pragmatismo empírico 4. *La vinculación estrecha de la matemática con la filosofía*

Figura 3.0 Mapa de la Grecia antigua: Las ciudades y sus filósofos: 1. *Elea: Parmenides, 2. Crotona: Escuela pitagórica, 3. Agrigento: Empédocles, 4. Leontino: Gorgias, 5. Siracusa: Arquímedes, 6. Estagira: Aristóteles, 7. Abdera: Demócrito; Protágoras, 8. Atenas: Sócrates; Platón, 9. Clazomene: Anaxágoras, 10. Colofón: Jenófanes, 11. Éfeso: Heráclito, 12. Mileto: Tales; Anaximandro; Anaxímenes*

Algunas observaciones finales[10]:

Los griegos insistieron en las demostraciones deductivas. Este fue sin duda un avance extraordinario. De los cientos de civilizaciones que habían existido, algunas habían desarrollado algún tipo rudimentario de aritmética y de geometría. Sin embargo, ninguna civilización, aparte de los griegos concibió la idea de establecer conclusiones exclusivamente a través del razonamiento deductivo.

La contribución griega al contenido de la matemática – geometría plana y del espacio, trigonometría plana y esférica, los comienzos de la teoría de números, la ampliación de la aritmética y el álgebra de Egipto y Babilonia- es enorme, especialmente si se tiene en cuenta el reducido número de personas dedicada a ellas y los escasos siglos a los que se extendió su actividad.

[10] Las ideas en este apartado están basadas en las ideas de Gil A (2010).

Algunas de las limitaciones de los griegos fueron la incapacidad para admitir el concepto de número irracional; el rigor en los métodos geométricos condujo a demostraciones cada vez mas engorrosas Además los griegos no sólo restringieron las matemáticas en gran medida a la geometría, sino que incluso limitaron esta disciplina a las figuras que se podían obtener a partir de la línea recta y el círculo.

Ahora bien ya habiendo presentado algunos elementos sobre el contextos social, cultural de la época helénica, en donde se desarrollaron los trabajos de Arquímedes, se procederá a ver la gran influencia que tuvieron los trabajos de esté matemático en la evolución los diversos conceptos y técnicas del cálculo, que son retomados siglos después por los matemáticos del siglo XVII.

3.1. Arquímedes de Siracusa

Arquímedes de Siracusa (287 a. C -212 a. C) fue un matemático, ingeniero, físico y astrónomo, que se inició en el estudio de las ciencias exactas en Alejandría (en Egipto) con la primera o segunda generación de discípulos de Euclides. Cuando regresó a Grecia entablo amistad con los geómetras más reconocidos; retomó trabajos que sus predecesores Eudoxo y Aquitas (430 – 360 a.C.) dejaron inconclusos, en parte por la influencia que ejercía Platón quien como explica Castro I., Pérez, J. (1983 pp. 163):

> *"se indispuso e indigno contra ellos porque degradaban y echaban a perder lo más excelente de la Geometría con trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo sensible y emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales".*

Entre sus principales aportes encontramos el principio de la palanca a partir del cual, todo peso se puede mover usando una palanca y aplicando una fuerza dada, principio del cual Arquímedes es famoso por su frase "*dame una palanca y moveré el mundo*". Trabajó desarrollando inventos que ayudaron a su patria a ganar guerras, razón por la cual se cree que su muerte fue a manos de un soldado romano quien le quitó la vida en una invasión a su país.

Vera F. (1970 pp. 13) reconociendo su ingenio escribe sobre Arquímedes:

> *El gran siracusano hecho los cimientos del cálculo integral; determinó el centro de gravedad del segmento parabólico; estableció el concepto riguroso de momento estático; calculó las áreas y volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas, y, en su trabajo* el método *, analizó las diferencias entre el descubrimiento y la demostración de las verdades matemáticas, dejando la más amplia libertad para aquel y exigiendo el rigor lógico para esta, que ilustra con ejemplos propios extraídos de la Mecánica y de la Geometría del mundo sensible, en el que no hay puntos sin extensión, líneas sin anchura ni superficies sin espesor, sino que todo es corpóreo y todos los cuerpos son irregulares, cuyo conocimiento previo, contando, midiendo y pesando –y no metafisicalizando a la manera de platón- es indispensable para el conocimiento lógico abstracto."*

A partir de los trabajos de Vera F. (1970) se observa que la presentación de los resultados encontrados por Arquímedes se hace de una forma similar a la utilizada por Euclides y Apolonio en sus tratados, pues se presentan bajo una elegante estructura lógica formada por una serie de proposiciones las cuales son necesarias y suficientes para dar validez al marco teórico. Sin embargo una de las características propias del trabajo de Arquímedes radica en la manera en que muestra cómo obtiene algunos resultados utilizando, por ejemplo, métodos mecánicos. En este sentido para algunos de sus resultados aparecen dos métodos asociados, uno heurístico que permite llegar al resultado usando mecanismos no matemáticos del todo, que trascienden la influencia lógico deductivo de Platón, y otro riguroso que le permitía demostrar dentro de un sistema teórico dichos resultados a la manera de Euclides (González P. 2003).

A continuación se presentan algunos de los resultados alcanzados por Arquímedes en cada uno de sus libros, exceptuando *El Stomachion* y *El Libro de los Lemas y El Problema de los bueyes* de los cuales se conoce que presentan problemas aritméticos y geométricos que no son objeto de interés en este estudio. El resto de sus obras representan un gran reto a la hora de clasificarlas, por lo que se presenta una clasificación basada en las ideas de J.L. Heiberg (1791-1860) cuando visitó Constantinopla y halló un palimpsesto[11] en 1906, en “*La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática*”.

Libro	**Resultados**
Sobre la Esfera y el Cilindro	En este libro Arquímedes presenta algunos resultados sobre el área superficial y el volumen de la esfera el cono y el cilindro. De manera particular se destaca la proposición 37 del libro I: *Todo cilindro cuya base sea igual al círculo máximo de una esfera y altura igual al diámetro de esta, es el triple de la misma esfera y el área del cilindro, incluyendo las bases, también es el triple de la mitad del área de la esfera.* En otras palabras puede escribirse como lo presenta Gonzales P. (2003) *La esfera y el cilindro circunscrito a ella están en la relación de 2 a 3, tanto en volumen como en superficie total.»*
Sobre la Medida del Círculo	Presenta resultados sobre la equivalencia entre el círculo y el triángulo de base la circunferencia del círculo y altura el radio (es decir, reducción de la cuadratura del círculo a la rectificación de la circunferencia), y de un cálculo aproximado de la razón entre la circunferencia y el diámetro (valor aproximado del número π).
Sobre Conoides y Esferoides	Resultados sobre la razón entre segmentos de elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolución y los conos de igual base y eje.
Sobre las Espirales	Resultados sobre el área encerrada por «La Espiral de Arquímedes» y rectificación de un arco de la circunferencia mediante esta curva.
Sobre el Equilibrio de los Planos	Resultados sobre el centro de gravedad de figuras poligonales, del segmento de parábola y del trapecio parabólico. Aunque es un tratado de Estática, formalmente sigue la línea euclídea con definiciones, postulados y demostraciones en los que, además de conceptos geométricos, se utilizan el peso y el centro de gravedad de figuras. En este escrito Arquímedes formula la famosa «Ley de la palanca». Correspondiente al postulado I del libro I: *“Pesos iguales a distancias iguales (el punto de apoyo de una balanza de*

[11] Se llama palimpsesto (del griego antiguo "παλίμψηστον", que significa "grabado nuevamente") al manuscrito que todavía conserva huellas de otra escritura anterior en la misma superficie, pero borrada expresamente para dar lugar a la que ahora existe.

	brazos iguales) se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio y hay inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia"
Sobre la Cuadratura de la Parábola	Resultados sobre la cuadratura de un segmento de parábola, primero mediante recursos de estática extraídos de Sobre el Equilibrio de los Planos y después mediante consideraciones geométricas.
Sobre los Cuerpos Flotantes	Resultados sobre la posición de equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución parcialmente sumergido en un fluido. En este tratado, elaborado también a la manera euclídea, aparece el famoso «Principio de Arquímedes» de la Hidrostática.
Sobre los teoremas mecánicos	Pone de manifiesto el procedimiento heurístico seguido en el descubrimiento de sus resultados.

Teniendo en cuenta que los resultados que se van a estudiar en este documento se relacionan con el trabajo de curvas, es necesario abordar el método utilizado por los matemáticos de esta época para validar sus resultados, a saber el método de exhaución.

3.2. Métodos de Exhaución

Los griegos, en su deseo de dar explicación a los objetos y figuras que los rodean, se encuentran con diferentes dificultades particularmente cuando trabajan con figuras no rectilíneas según Yuste, P (2009 pp. 67) "*evidencian que las superficies y los volúmenes de figuras limitadas por curvas contienen un elemento de irracionalidad que dificulta su medida*". Esta dificultad se enmarca específicamente en la llamada crisis de los inconmensurables, que tuvo su aparición en la escuela pitagórica y que marcó el rumbo de la evolución del concepto de número y de conceptos basados en éste como el de continuidad.

Nace pues la necesidad de dar respuesta a este tipo de problemas, razón por la cual se genera la *Teoría de las proporciones* desarrollada por Eudoxo quien otorga las bases necesarias para interpretar de manera geométrica este tipo de problemas según González P. (2003); como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones que aparece en la Definición V. 5 de *Los Elementos* de Euclides[12]. Por otra parte, desarrolla el **método de Exhaución**, con el cual se busca demostrar que la diferencia entre dos magnitudes es cero, tomando una variable con la cual se busca agotar la dada inicialmente.

Según P. Tannery [*La Géométrie grecque*. Gauthier-Villars, 1887, pp., 96]:

> *"Se debe considerar a Eudoxo como el verdadero artífice de los principios que durante toda la antigüedad han tenido el papel que juega en la actualidad el recurso de los límites. Eudoxo ha mostrado la fecundidad de las aplicaciones de estos principios y ha sido el auténtico antecedente de Arquímedes en el cálculo de cuadraturas y cubaturas. […] Despojado de su indumentaria geométrica la teoría de Eudoxo mantiene sin ninguna desventaja la comparación con las exposiciones modernas, a menudo tan defectuosas".*

Cabe resaltar que este método no es un método de descubrimiento sino de demostración, es decir, se parte de algo ya conocido y se presenta una manera rigurosa de demostrar el resultado.

En el desarrollo de este método surge ahora la confrontación de dos ideas basadas en la concepción del infinito. Si bien es cierto que Eudoxo desarrollo su teoría evitando usar números inconmensurables, se debe analizar qué concepción tenía Arquímedes del infinito. A continuación presentaremos el método de Exhaución de Eudoxo-Euclides y posteriormente las criticas que hace Arquímedes al respecto:

3.2.1. Método de Exhaución Eudoxo- Euclides:

Este método consiste en inscribir en las figuras curvas desconocidas, figuras de las cuales si se tiene información por ejemplo para hallar el área de un circulo el procedimiento consiste en inscribir en él un cuadrado y se comparan las áreas, luego se cambia este cuadrado por un polígono del doble de lados del anterior y se vuelve a comparar con el circulo, siguiendo este

[12] Definición V. 5 de *Los Elementos* "Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en
el orden correspondiente"

proceso de tal forma que la diferencia del área entre la figura inscrita y el circulo se haga tan pequeña como cualquier número dado[13]. Una vez se evidencia este resultado, se procede a realizar una doble reducción al absurdo en la cual se comparan ambas magnitudes, mostrando que una no puede ser ni más grande, ni más pequeña que la otra sino que son de igual tamaño.

Arquímedes usa el método para calcular la cubatura de objetos, dicha demostración se mostrará más adelante cuando se presenten los métodos propios de Arquímedes.

3.2.2. Críticas al método

Arquímedes se da cuenta de la necesidad de considerar algunos puntos que son inconclusos en el método de exhaución por ejemplo, no es válido pensar que al inscribir un polígono de tantos lados como se quiera, este polígono podrá recubrir la totalidad del círculo, ya que siempre existirá una diferencia tan pequeña como se quiera entre sus áreas y por otra parte considerar la postura atomista, cada uno de los vértices del polígono inscrito, acaban superponiéndose al círculo luego las áreas llegaran a ser iguales (Castro I., Pérez J. 2008).

Para considerar	Acerca del infinito: Es necesario reconocer que en el uso del método de exhaución se presentan dos tipos de infinitos: el infinito actual, al considerar que el circulo es un polígono de infinitos lados, en tanto el infinito potencial se evidencia cuando se parte de un polígono para construir otro duplicando el número de sus lados y repitiendo este procedimiento tantas veces como se quiera para que, al comparar las figuras, dicha diferencia sea menor que una cantidad prefijada.
	El Método de exhaución es un instrumento fundamental de la geometría griega para la resolución rigurosa de los problemas infinitesimales de cuadraturas y cubaturas, que al emplear una forma indirecta de prueba, evita el cálculo explícito de un límite. Así lo

[13] Según Gonzales P (2008) Pg. 113

Eudoxo introdujo la idea de "tan pequeño como se quiera", antecedente de nuestro proceso de "paso al límite", y encuentra una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios:

1. *Una definición: igualdad de razones, Euclides, Definición V. 5.*
2. *Un axioma: axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad, Euclides, Definición V .4.*
1. *Un método: el Método de Exhaución, Euclides, Proposición X. 1*

	hicieron, tanto Euclides como Arquímedes, para alcanzar, con todo rigor, resultados equivalentes a los obtenidos con las modernas técnicas infinitesimales.

3.3. Los Métodos de Arquímedes

Arquímedes se vale de dos métodos para desarrollar y presentar sus resultados, el método mecánico y el método demostrativo. Se tomará como ejemplo el cálculo del volumen de la esfera y del cilindro además del paraboloide para mostrar una descripción de cada método, completando los pasos faltantes en las demostraciones que aparecen en los documentos revisados.

Los desarrollos que se muestran a continuación están basados en las traducción e interpretaciones del libro *El método* que aparecen en Vera F.; (1970), Edwards, C. H. (1982), Castro I.; Pérez J.; (2008), Gonzales P.; (2003) aunque se presentan utilizando un lenguaje moderno (usando recursos algebraicos y analíticos). De manera general se ha mantenido la esencia de las demostraciones y construcciones, ya que el interés de este trabajo radica en analizar las ideas fundamentales de las mismas, y se ha intentado proveer una explicación más clara de las principales herramientas usadas en los argumentos dados por Arquímedes.

Para contrastar ambos métodos primero se presentará el método mecánico y luego el demostrativo, aunque en la historia primero se divulga el método demostrativo y posteriormente aparece el método mecánico.

3.3.1 Método Mecánico

Arquímedes se vale de este método para descubrir los resultados que posteriormente demostrará con el otro método, en este sentido el método mecánico se constituye en un mecanismo para inventar, descubrir, crear más que para demostrar formalmente. Arquímedes en el preámbulo de su libro *El Método* como lo resalta Castro, I. Pérez, J.H., (1983 pp. 215):

> « [...] *Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente* [...] *pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto*

de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo [...].»

La idea principal de este método radica en el uso de recursos externos a las matemáticas mismas, por ejemplo de la física; así, particularmente fundamenta el método mecánico para el cálculo de áreas y volúmenes en el principio de la palanca. El cual cita Vera F. (1970 pp. 183)

Postulado I del libro I Sobre el Equilibrio de los Planos: *"Pesos iguales a distancias iguales (el punto de apoyo de una balanza de brazos iguales) se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio y hay inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia"*

Mediante el cual, a partir de un fulcro o punto de balance dos magnitudes de diferentes pesos (medida) pueden equilibrarse si se sitúan sobre los brazos de la palanca a distancias apropiadas. Por ejemplo, si se tienen dos masas $m_1\ y\ m_2$ a distancias $d_1 y\ d_2$ respectivamente, se logra equilibrar el sistema si $m_1 d_1 = m_2 d_2$.

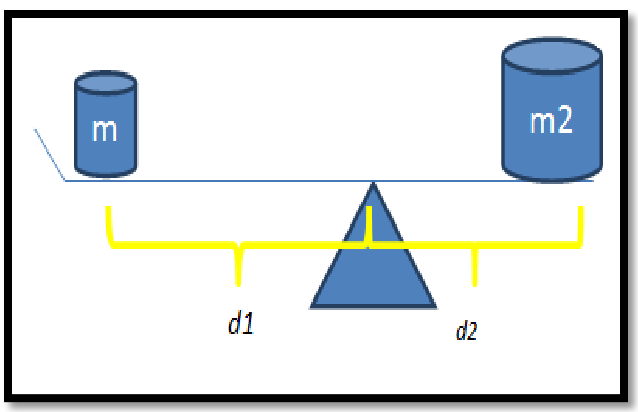

Figura 3.1 *principio de la palanca*

Esta fórmula permite establecer el trabajo elaborado en el sistema[14], permite a partir de ciertos valores conocidos encontrar el valor faltante. Arquímedes se vale de este principio para equilibrar un volumen desconocido a partir de otros volúmenes conocidos, en el caso del paraboloide equilibra su volumen con el de una esfera y de un cilindro. Para evidenciar el uso del método

[14] La fuerza aplicada a cada uno de los brazos de la palanca para desplazar los pesos.

mecánico se presenta a continuación el cálculo del volumen de una esfera y posteriormente el de un paraboloide.

3.3.1.1 Volumen de la Esfera por el Método mecánico

Para demostrar esta relación, Arquímedes realiza una construcción de la cual puede deducir y comparar el volumen de un cilindro con el volumen de una esfera y un cono. Empieza realizando divisiones de estas figuras en indivisibles (capitulo 2) y después usa el principio de la palanca para comparar los indivisibles de las figuras en el centro de gravedad[15], para obtener que el volumen del cono mas el volumen de la esfera esta a razón de 1:2 con respecto al volumen del cilindro. Finalmente concluir que la relación que guarda el volumen de la esfera y el cilindro que la circunscribe es de 2:3. Hay que tener en cuenta que algunos de los resultados[16] empleados por Arquímedes en sus cálculos del volumen, aparecen en los libros *sobre la esfera y el cilindro* o *sobre la medida del círculo*[17]

A continuación se presenta el método mecánico que utilizó Arquímedes para demostrar la proposición 37 del libro I sobre la esfera y el cilindro. Esta presentación está basada en las ideas de Vera F. (1970 pp. 65-66) y de Castro I., Pérez J. (2008 pp. 248-251).

***Proposición 37 del libro I sobre La Esfera y el Cilindro**:*
El volumen de una esfera circunscrita en un cilindro de altura igual al diámetro de la circunferencia mayor de la esfera y radio igual al de la esfera es 2:3 *(González P. 2003).*

Construcción: *Sea una esfera cuyo círculo máximo sea $ABCD$, siendo ACy BD dos diámetros perpendiculares. Sea también en la esfera un círculo de diámetro BD, perpendicular al círculo*

[15]El centro de gravedad es un punto tal que si un cuerpo puede suspenderse desde ese punto, el peso del mismo permanece en equilibrio y el cuerpo preserva su posición original. También se puede concebir como la intersección de todos los ejes alrededor del cual un cuerpo en caída libre rotará no importa cuál sea la dirección de la rotación (Aguilar. A. 2007).

[16] Algunos de los resultados que tiene como herramientas Arquímedes en esta demostración son:
El área de un círculo de radio r es πr^2, Aunque *en este tiempo no se conocían los números reales, ni la expresión para* $\boldsymbol{\pi}$*, se sabía que* $\boldsymbol{\pi}$ *representaba la razón constante entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia.*
También contaba con que el volumen del cono es un tercio del volumen de un cilindro cuya base y altura fueran iguales a la base y altura del cono.

[17] Estos libros fueron estudiados en Vera F.; (1970) *"Científicos Griegos".*

$ABCD$; y a partir de ese círculo constrúyase un cono que tenga por vértice el punto A. Prolongada la superficie del cono, córtese éste por un plano que pase por C y sea paralelo a la base, que dará un círculo perpendicular a AC, cuyo diámetro será la recta EZ. Constrúyase después a partir de este círculo un cilindro de eje igual a AC y sean EL y ZH generatrices del mismo. Prolónguese CA y tómese en su prolongación una recta AT igual a ella, y considérese CT como una palanca cuyo punto medio sea A. Trácese una paralela cualquiera MN a BD, que corte al círculo $ABCD$ en Q y O, al diámetro AC en S, a la recta AE en P y a la recta AZ en R. Levántese sobre la recta MN un plano perpendicular a AC, que cortará al cilindro según el círculo de diámetro MN, a la esfera ABCD según el círculo de diámetro QO y al cono AEZ según el círculo de diámetro PR (Vera F. 1970).[18]

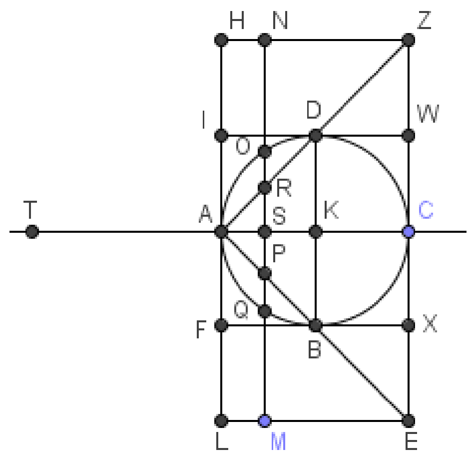

Figura 3.2 *figura para la demostración de la proposición 37*

Demostración: El objetivo en utilizar el principio de la palanca, para equilibrar el peso[19](volumen) del cilindro que se genera por la rotación del cuadrado AHZC de lado R (2r), con la suma del peso (volumen) de la esfera que se genera por la rotación de la semicircunferencia ABC y del cono que se genera por la rotación del triangulo AZC alrededor de la recta TC.

Para ello en primer lugar se establecerá la relación que existe entre el peso (área) del indivisible del cilindro y la suma del peso del indivisible de la esfera con el peso del indivisible del cono que

[18] El método sobre los teoremas mecánicos de Arquímedes.

[19] El termino **peso** se utiliza en este caso porque se está trabajando de pesos de cuerpos físicos en una palanca.

se generan al cortar la figura solida de revolución por un plano perpendicular al plano β[20] y darle movimiento a través del segmento AK.

En este paso se deja ver claramente que Arquímedes parte de una figura dada y hace una división de ella, obteniendo una figura de un "peso" menor, lo que conocemos como indivisible, ya que el indivisible de un sólido es una superficie.

Para encontrar el área o peso de los indivisibles descritos anteriormente se utiliza la construcción antes descrita la cual permite deducir las siguientes relaciones

$$AC \perp BD,$$
$$EZ \perp VW, EZ \perp AC, EZ \perp VX \quad y \quad LH \perp VW, LH \perp AC, LH \perp VX$$
$$AC = 2r, AH = 2r, AK = r, KC = r$$

Además,

$$SR = AS \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras[21] a los triángulos rectángulos ASR y ASO formados en la figura, se puede establecer que

$$AS^2 + SR^2 = AR^2$$

y

$$AS^2 + SO^2 = AO^2.$$

Sumando estas dos ecuaciones se obtiene

$$AS^2 + SR^2 + AS^2 + SO^2 = AR^2 + AO^2.$$

Por (1)

$$SO^2 + SR^2 = AO^2. \quad (2)$$

Como él, ΔAOC está inscrito en media circunferencia, aplicando el teorema de Euclides sobre media proporcional[22] se sabe que

---

[20] Sea β el Plano en donde se encuentra la figura 3.2

[21] El teorema de Pitágoras es usado como un recurso para construir un cuadrado cuya área sea la suma del área de dos cuadrados dados. En ese sentido al hablar, por ejemplo, de SO^2 no se piensa en la medida de un segmento (número) sino en un cuadrado construido sobre el segmento SO

[22] Las Proposiciones 8, 9 10 del Libro VI de Los Elementos de Euclides en la edición de R.Çamorano. La Proposición 8 establece el Teorema del Cateto: «En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre

$$\frac{AS}{SO} = \frac{SO}{SC},$$

es decir

$$SO^2 = AS \times SC,$$

y conociendo que $AO^2 = SO^2 + AS^2$ se concluye

$$AO^2 = \ AS \times SC \ + AS^2$$

luego

$$AO^2 = AS \ SC + AS \ .$$

Pero como $AS + SC = AC$ se obtiene

$$AO^2 = SR \times AC.$$

Como AC resulta ser diámetro de la circunferencia e igual a dos veces el radio se tiene

$$AO^2 = SR \times 2r \quad (3)$$

e igualando (2) y (3)

$$SO^2 + SR^2 = SR \times 2r.$$

Ahora, dividiendo la expresión anterior entre $(2r)^2\pi$ se llega a

$$\frac{SO^2 + SR^2}{(2r)^2\pi} = \frac{SR \times 2r}{(2r)^2\pi},$$

$$\frac{SO^2 + SR^2}{(2r)^2\pi} = \frac{SR}{2r\pi} \quad (4)$$

y multiplicando por π se concluye

$$\frac{\pi SO^2 + \pi SR^2}{(2r)^2\pi} = \frac{SR}{2r} \ . \qquad (5)$$

De (4) y (5) se puede interpretar que πSO^2 es el área de la circunferencia (indivisible) determinada por la esfera, πSR^2 es el área de la circunferencia (indivisible) determinada por el cono y $(2r)^2\pi$ es el área de la circunferencia (indivisible) determinada por el cilindro, lo que en términos de indivisibles se puede expresar como

$$\frac{AI_{esfera} + AI_{cono}}{AI_{cilindro}} = \frac{SR}{2r}$$

o lo que es igual que

ella» y el Teorema de la Altura: «En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta»

$$\frac{AI_{esfera} + AI_{cono}}{AI_{cilindro}} = \frac{AK}{2r}$$

donde AI_{esfera} ,$AI_{cilindro}$, AI_{cono} representan el peso del indivisible de la de la esfera el cilindro y el cono respectivamente. Ahora bien se debe tener encuentra que MN es una recta cualquiera perpendicular a AC que varía entre A y C[23]. Para Arquímedes la unión de todas las posibles circunferencias de radio SO llenan la esfera, la unión de las circunferencias de radio SR llenan el cono y la unión de todas las circunferencias de radio SN llenan el cilindro.

La idea que planteaba Arquímedes era que la unión de todos los indivisibles que determinan el sólido permite recomponer el sólido, además de concebir que los infinitos indivisibles tienen un orden de magnitud inferior al del sólido del cual se quiere calcular el volumen, lo cual genera una contradicción en el sentido de que una figura sólida pueda componerse a partir de la colección de superficies.

En segundo lugar, el objetivo será establecer la relación que existe entre los sólidos. Para ello se debe interpretar la proposición anterior la cual permite conocer la relación que existe entre los pesos (área) de los indivisibles de cada uno de los sólidos a comparar y usando el principio de la palanca se tiene que al tomar la recta TK como palanca, y A como pivote y se traslada el peso (AI_{esfera} , AI_{cono}) en el punto T, de tal forma que $TA = 2r$, el sistema estará en equilibrio si se coloca el peso del ($AI_{cilindro}$), en el punto S de tal forma que $AS = SR$, figura 3.3.

[23] Se utilizan ideas físicas, por lo que se debe entender que al decir que la recta MN se mueve de AB generando cortes al rectángulo o cilindro LHZE.

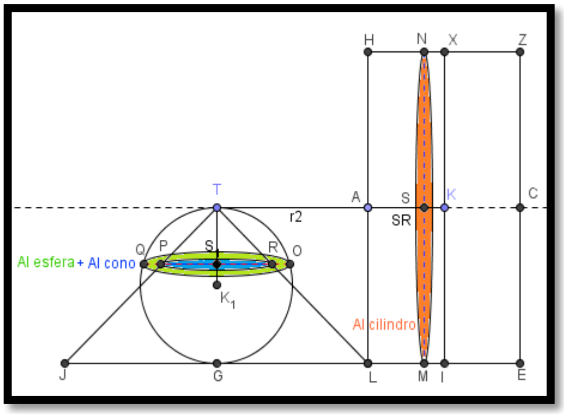

Figura 3.3 *donde los pesos de los indivisibles de las figuras están en la palanca (AI = área de los indivisibles de las figuras)*

Ahora bien conociendo que el punto de equilibrio esta en el centro de masa del cilindro que es K (por ser K punto medio de AC y además AC es eje de rotación) entonces utilizando el principio de Arquímedes, cuando SR=AK se va a tener que el $Volumen_{esfera} + Volumen_{cono}$ ubicado en el punto T de la palanca, equilibra el $Volumen_{cilindro}$ en S=K, figura 3.4. Es decir.

$$\frac{V_{esfera} + V_{cono}}{V_{cilindro}} = \frac{AK}{2r}$$

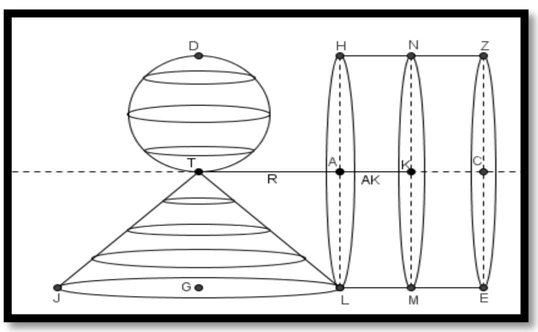

Figura 3.4 *donde los pesos de los indivisibles de las figuras están en equilibrio*

Y como AK = r (K es punto medio de AC) entonces se concluye que

$$\frac{V_{esfera} + V_{cono}}{V_{cilindro}} = \frac{1}{2}.$$

Despejando el volumen de la esfera de la expresión anterior

$$V_{esfera} + V_{cono} = \frac{V_{cilindro}}{2}$$

$$V_{esfera} = \frac{V_{cilindro}}{2} - V_{cono}$$

$$V_{esfera} = \frac{V_{cilindro} - 2V_{cono}}{2}$$

$$V_{esfera} = \frac{\pi R^2 h - 2\ \frac{1}{3}\pi R^2 h}{2}$$

y sabiendo que $R^2 = 2r$ se obtiene que

$$V_{esfera} = \frac{\frac{3\pi 4r^2 h - 2\ \pi 4r^2 h}{3}}{2}$$

$$V_{esfera} = \frac{3\pi 4r^2 h - 2\ \pi 4r^2 h}{6}$$

$$V_{esfera} = \frac{4\pi r^2 h}{6}$$

$$V_{esfera} = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

Donde $\pi r^2 h$ representa el volumen del cilindro que se genera por la rotación del rectángulo AVWC alrededor de TC. (Cilindro que circunscribe a la esfera ABCD), así queda demostrado que la razón del volumen de una esfera circunscrita en un cilindro de altura igual al diámetro de la circunferencia mayor de la esfera y radio igual al de la esfera es 2:3.

3.3.2 Método Mecánico para calcular el volumen del paraboloide.

Arquímedes encuentra mecánicamente que el volumen de un paraboloide de rotación equivale una vez y media el volumen de un cono de la misma base y de la misma altura. Arquímedes usa el principio de la palanca para mostrar que una sección[24] del paraboloide se equilibra con una sección de un cilindro circunscrito a él, y demuestra usando la definición de centro de gravedad[25] que el volumen del paraboloide se equilibra completamente con la mitad del volumen del cilindro

---

[24] Cuando nos referimos a una sección del paraboloide, estamos hablando de la región que resulta de cortar el paraboloide por un plano perpendicular al eje.

[25] El centro de gravedad es un punto tal que si un cuerpo puede suspenderse desde ese punto, el peso del mismo permanece en equilibrio y el cuerpo preserva su posición original. También se puede concebir como la intersección de todos los ejes alrededor del cual un cuerpo en caída libre rotará no importa cuál sea la dirección de la rotación (Aguilar. A. 2007).

y finalmente mediante la relación ya conocida de que el volumen de un cono con igual base y altura de un cilindro es un tercio de su volumen logra calcular el volumen de un paraboloide de rotación. Específicamente se tiene:

Proposición 4 del libro *El método:*

> *"El segmento de paraboloide producido por un plano perpendicular al eje equivale a una vez y media el cono de la misma base y el mismo eje."*[26]

Demostración La demostración está basada en las ideas de Vera F. (1970 pp. 277-278).

Sea el paraboloide generado por la rotación del segmento de parábola BAG alrededor de la recta TD, la palanca DT con fulcro A y tal que $AT = DA$ y BG perpendicular a TD. Además, sea el cono generado por la rotación del triángulo ABG alrededor de TD, con base BG y el cilindro generado por la rotación del rectángulo AZGD alrededor de TD.

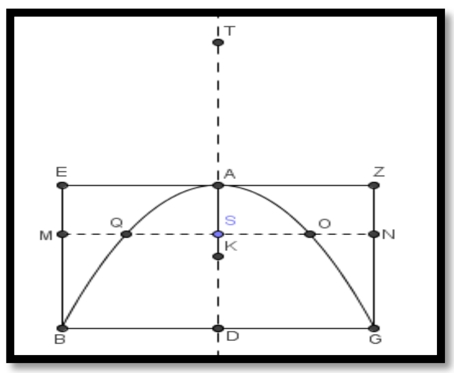

Figura 3.5 *figura para la demostración de la proposición 4.*

El objetivo en este caso consiste en utilizar el principio de la palanca para equilibrar el paraboloide con el cilindro, y al igual que se hizo en el ejemplo anterior, el primer paso para lograrlo consiste en encontrar la relación que hay entre los respectivos indivisibles.

En primer lugar, tómese $MN // BG // EZ$, además existe un plano perpendicular a ABD que pasa por DA, el cual corta al cilindro en un círculo de diámetro MN y a su vez corta al segmento del paraboloide en un círculo de diámetro QO, con lo que se obtiene un indivisible por cada sólido.

[26] La demostración geométrica está en *Sobre Conoides y Esferoides,* Proposición 23.

Puesto que ABG es una parábola de diámetro[27] DA los QS y BD cumplen[28]

$$\frac{BD^2}{QS^2} = \frac{DA}{AS}.$$

Sabiendo que $AT = DA$ podemos establecer que:

$$\frac{MS^2}{QS^2} = \frac{TA}{AS} \quad (1)$$

El peso del indivisible (área del circulo) del paraboloide determinado por MN es πMS^2 y el peso del indivisible del cilindro determinado por QO es $QS^2\pi$ luego si establecemos una razón entre estos pesos se tiene

$$\frac{AI_{MN}}{AI_{QO}} = \frac{MS^2\pi}{QS^2\pi}$$

Pero se sabe que MN es el doble de MS así como QO es el doble de QS luego

$$\frac{A_{MN}}{A_{QO}} = \frac{MS^2\pi}{QS^2\pi} = \frac{(2MS)^2}{(2QS)^2} = \frac{MS^2}{QS^2} \quad (2)$$

De 1 y 2 tendremos:

$$\frac{A_{MN}}{A_{QO}} = \frac{TA}{AS}$$

Luego

$$A_{MN} \times AS = A_{QO} \times TA$$

Esta expresión algebraica deja ver el principio de la palanca aplicado a los indivisibles de los sólidos. En particular se tiene que el peso del indivisible (el área circulo) del cilindro colocado en S equilibra al peso del indivisible del paraboloide colocado en *T* cuando *A* es el fulcro y *TA=2AS.* Por tanto conociendo que el cilindro tiene su centro de masa en K (K es punto medio de *AD* y *AD* es el eje del cilindro), entonces al tomar *S=K* se tiene que el peso del paraboloide (volumen del paraboloide) colocado en *T* se equilibra con el peso del cilindro colocado en *K*, es decir

$$V_{Cilindro} \times AK = V_{Paraboloide} \times TA.$$

Luego por ser TA doble de AK se concluye que el volumen del paraboloide a una distancia $\frac{TA}{2}$ de *A* se equilibra con el volumen del cilindro a una distancia *AK*, es decir

---

[27] Para Arquímedes el diámetro de una parábola es el mismo eje.

[28] $f(x) = Px^2$, Para cualquier P constante luego: $y = Px^2$

$$P = \frac{y}{x^2}$$

$$V_{paraboloide} \times \frac{TA}{2} = \frac{1}{2} V_{cilindro} \times AK.$$

Luego

$$V_{paraboloide} \times TA = V_{cilindro} \times AK$$

$$V_{paraboloide} \times TA = V_{cilindro} \times \frac{TA}{2}$$

$$V_{paraboloide} = \frac{V_{cilindro} \times TA}{2\,TA}$$

y en últimas

$$V_{paraboloide} = \frac{1}{2} V_{cilindro}$$

Sabiendo que el volumen del cilindro es el triple del volumen del cono, se tiene que el volumen del segmento parabólico será una vez y medio el volumen del cono.

Al igual que en la demostración anterior, en ésta Arquímedes empieza por comparar los pesos de los indivisibles de los cuerpos a estudiar para posteriormente, al utilizar el principio de la palanca y los centros de masa de los cuerpos, poder establecer la relación entre los pesos de los cuerpos.
Es importante resaltar que la relación entre los pesos de los indivisibles que es copiada a los pesos de los cuerpos se da exactamente cuando se analizan los indivisibles que se definen en el centro de masa del cuerpo conocido.

3.3.3 Método Demostrativo para calcular el volumen de un paraboloide

En este método Arquímedes parte del paraboloide en revolución e inscribe y circunscribe cilindros de igual altura pero de diferentes radios. A partir del principio de Exhaución de Eudoxo comparara el volumen del paraboloide con el volumen del sólido formado por la unión de estos cilindros (inscritos ó circunscritos), de manera que la diferencia entre estos "se agote" o se haga cada vez más pequeña. Se demuestra que deben ser iguales mediante una doble reducción al absurdo, suponiendo que algún volumen sea mayor o menor que el otro y encontrando la respectiva contradicción. Debe resaltarse que él evita usar ideas como la de sumar infinitos elementos ya que en su época no se aceptaba que algo infinito genere algo finito. La demostración está basada en las ideas de Edwards C. (1982 pp. 62-65).

Proposición 23 del libro *Sobre Conoides y Esferoides*: El volumen de un paraboloide P inscrito en un cilindro C con radio R y altura H es la mitad del volumen del cilindro

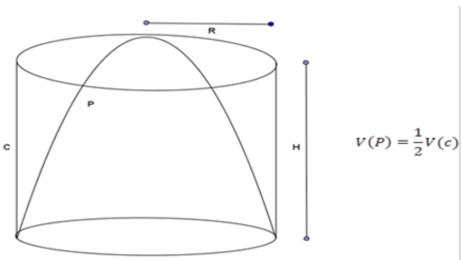

Figura 3.6 *paraboloide inscrito en un cilindro de igual radio y altura*

Demostración: *La demostración está basada en las ideas de* Edwards C. (1982). Sea I el sólido de revolución que resulta de la unión de todos los cilindros inscritos en el paraboloide y sea J el sólido de revolución que resulta de la unión de todos los cilindros circunscritos al paraboloide.

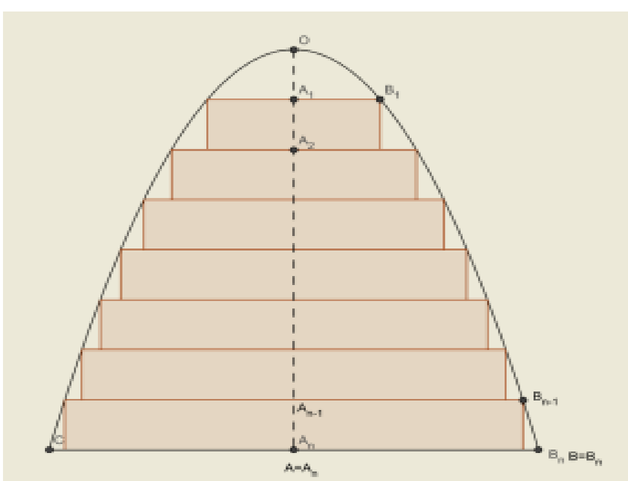

Figura 3.7 *cilindros internos*

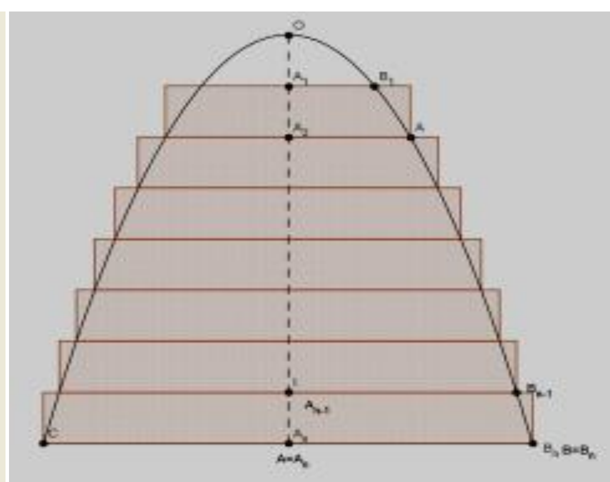

Figura 3.8 *cilindros externos*

Sean $A_1, A_2, A_3 \dots, A_n$ puntos que determinan las alturas de los cilindros (Figura 3.7, 3.8) y $B_1,\ B_2, B_3 \dots, B_n$ puntos de intersección entre los cilindros y el paraboloide.

La forma en que Arquímedes toma estos sólidos puede compararse en la actualidad con las sumas superiores e inferiores de una integral de Riemann o por medio del método de cilindros del cálculo de volúmenes de sólidos den revolución

Arquímedes calcula el volumen del sólido I (inscritos) y el volumen del sólido J (circunscritos) como

$$V(I) = \pi \sum_{i=1}^{n-1} \left({A_iB_i}^2\right) h$$

$$V(J) = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(A_iB_i^2\right) h.$$

Ya que el cilindro en el que está inscrito el paraboloide tiene por volumen:

$$V(c) = \pi R^2 H$$

usando una propiedad de la parábola [29] se obtiene que

$$x_2^2 = A_iB_i^2, x_1^2 = R^2, y_2 = OA_i, y_1 = OA_n$$

se tiene

$$\frac{A_iB_i^2}{R^2} = \frac{OA_i}{OA_n}$$

Pero además, si se corta el ΔOAB por rectas perpendiculares a su base a alturas iguales $A_1, A_2, \ldots, A_i$ se encuentran n_i triángulos semejantes, de lo cual

$$\frac{OA_i}{OA_n} = \frac{ih}{nh} = \frac{i}{n}$$

y con esto

$$\frac{A_iB_i^2}{R^2} = \frac{i}{n}$$

Luego se compara el volumen de los cilindros inscritos con el volumen del cilindro base:

$$\frac{V(I)}{V(C)} = \frac{\pi \sum_{i=1}^{n-1} \left(A_iB_i^2\right) h}{n\pi R^2 h} = \frac{1 + \cdots + (n-1)}{n^2} < \frac{1}{2}$$

Sabiendo que ${A_\iota B_\iota}^2 = i$ y $R^2 = n$ tenemos[30]:

[29] $f(x) = Px^2$ para cualquier P constante luego: $y = Px^2$,$P = \frac{y}{x^2}$

[30] Desde Pitágoras se conocía una fórmula para calcular la suma de los n primeros números naturales , igualdad que usa Arquímedes en este paso.

$$\sum_{i=1}^{n-1} A_iB_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Luego

$$\frac{\pi \sum_{i=1}^{n-1} A_iB_i^2\ h}{n\pi R^2 h} = \frac{\pi h \frac{n\ n-1}{2}}{n^2\pi h}$$

$$= \frac{n\ n-1}{2n^2}$$

$$= \frac{n-1}{2n} = \frac{n}{2n} - \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Pero sabemos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$ puesto que $n > 0$.

Por otro lado se compara el volumen los cilindros circunscritos con el volumen del cilindro base.

$$\frac{V(J)}{V(C)} = \frac{\pi \sum_{i=1}^{n} A_iB_i^2\ h}{n\pi R^2 h} = \frac{1 + \cdots + n}{n^2} > \frac{1}{2}.$$

Sabiendo que $A_iB_i^2 = i\ y\ R^2 = n$ tendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} A_iB_i^2 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Luego

$$\frac{\pi \sum_{i=1}^{n-1} A_iB_i^2\ h}{n\pi R^2 h} = \frac{\pi h \frac{n\ n+1}{2}}{n^2\pi h}$$

$$= \frac{n\ n+1}{2n^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Pero sabemos que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ puesto que $n > 0$

Finalmente para demostrar la relación entre el volumen del paraboloide con respecto al del cilindro Arquímedes usa el método de Eudoxo de una doble reducción al absurdo negando la hipótesis es decir negando que:

$$V(P) = \frac{1}{2}\pi R^2 H\,.$$

Si esto ocurre pueden suceder dos casos

$$V(P) > \frac{1}{2}\pi R^2 H = \frac{1}{2}V(c)$$

o

$$V(P) < \frac{1}{2}\pi R^2 H = \frac{1}{2}V(c)$$

Arquímedes reescribe estas desigualdades, eligiendo un n suficientemente grande de lo cual se tiene que $V(P) = V(I) = V(J)$ para establecer estas desigualdades de la siguiente manera:

$$V(I) > \frac{1}{2}\pi R^2 H = \frac{1}{2}V(c)$$

o

$$V(J) < \frac{1}{2}\pi R^2 H = \frac{1}{2}V(c)\,.$$

Estas sustituciones se hacen con el fin de poder encontrar la contradicción o *el absurdo.*

Si ocurre que

$$V(I) > \frac{1}{2}\pi R^2 H = \frac{1}{2}V(c)\,.$$

Entonces se tiene que:

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i^2\right) h > \frac{1}{2}\pi R^2 H$$

$$\pi h\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) > \frac{1}{2}\pi n^2 h$$

$$\frac{n(n-1)}{2} > \frac{1}{2}n^2$$

$$n^2 - n > n^2$$

lo cual es una contradicción puesto que $n > 0$.

Si ocurre la segunda premisa

$$V(J) < \frac{1}{2}\pi R^2 H = \frac{1}{2}V(c)\,.$$

Entonces se tiene que:

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{n} A_i B_i^2\right) h < \frac{1}{2}\pi R^2 H$$

$$\pi h\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) < \frac{1}{2}\pi n^2 h$$

$$\frac{n(n+1)}{2} < \frac{1}{2}n^2$$

$$n^2 + n < n^2$$

lo cual es una contradicción puesto que $n > 0$.

Se Concluye que:

$$V(P) = \frac{1}{2}\pi R^2 H$$

En este caso se deja ver que Arquímedes una vez más usa el método de exhaución como un mecanismo para evitar el uso de la noción de límite.[31]

Además en esta demostración se observa el uso de cilindros inscritos y circunscritos de una altura que podría ser un número infinitesimal, en particular cuando en la prueba se enuncia la necesidad de tomar un número de cilindros lo suficientemente grande para superar la mitad del volumen del cilindro dentro de la reducción al absurdo

3.4 A modo de conclusión.

Para finalizar el estudio que se ha venido realizando en torno a los trabajos de Arquímedes a continuación se presenta un cuadro en el cual se comparan los dos métodos usados resaltando los conceptos que son objeto de estudio en este trabajo, tales como el uso de límites, el trabajo de indivisibles, la comparación de infinitesimales y algunas conclusiones que se condensan en torno a los métodos.

Objeto matemático	Método mecánico	Método demostrativo

[31] Véase Medina A. (2001). "*Concepciones del concepto de limite en estudiantes universitarios*", Universidad pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Bogotá.

sólidos de revolución	Arquímedes en sus dos métodos usa su definición de solido de revolución partiendo de una construcción de figuras geométricas planas y haciéndolas girar sobre una recta, por lo que se puede apreciar una definición intuitiva de este concepto, que quizá es muy parecida a la que se usa actualmente.	
Infinito	Arquímedes deja ver la idea de un infinito actual al considerar que un cuerpo se descompone en infinitos indivisibles.	Arquímedes en este caso considera un infinito potencial al querer generar un número muy grande de cilindros con una altura muy pequeña para recubrir en su totalidad la figura a analizar, hecho que es trabajado a través del método de exhaución. Así este método está más próximo al método que se usa actualmente pero bajo la idea de límite.
Indivisibles	Mediante el principio de la palanca Arquímedes compara los indivisibles de dos sólidos, a saber regiones o planos paralelos a uno dado, para conocer el volumen de un sólido desconocido a partir de uno conocido. Particularmente la relación que se obtiene entre los volúmenes de los sólidos es la misma que se obtiene bajo el método de la palanca en el punto de equilibrio (centro de masa) del solido conocido.	En su método demostrativo no se evidencia el uso de indivisibles ya que en este método descompone un sólido en sólidos.
Infinitesimal	Arquímedes no considera el concepto de infinitesimal, ya que por el contrario su construcción radica en el trabajo de indivisibles que se obtienen al cortar el cilindro con	Puesto que Arquímedes genera una división del paraboloide en tantos cilindros inscritos o circunscritos como se quiera, se da a entender que la altura de tales cilindros debe ser infinitamente

	planos paralelos a la base.	pequeña para ir agotando la diferencia entre el volumen del sólido generado por los cilindros inscritos (circunscritos) y el volumen del paraboloide.
Métodos de integración	En una primera instancia no se observa relación con alguno de los métodos clásicos utilizados hoy en día para calcular el volumen de un sólido de revolución, pero se evidencia el uso de centros de masa para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución utilizando el teorema de Papús, que establece Morales J. (2012) y Swokowski E. (1989 pp. 906) de la siguiente manera "Sea R una región del plano y sea L una recta de ese plano que no corta el interior de R. si r denota la distancia del centroide de R a la recta L, el volumen del solido de revolución generado al hacer girar la región R en torno a la recta L es $V = 2\pi r A$ Donde A es el área de R. ($2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide al girar la región en torno a la recta)	En este método se ve explícitamente el uso de cilindros para encontrar el volumen de un sólido en revolución así como actualmente se hace bajo el método de cilindros. [32]
Limite	Partiendo de que realiza una comparación entre cuerpos utilizando	En concordancia con Medina A (2001) el uso de límite se evidencia cuando

[32] Para más información de este método ver Apóstol, T. (1972). *Calculus* (F. Vélez, Trans. Vol. 1). Barcelona: Reverté.

	la noción de centro de masa y la noción de trabajo, con el recurso de la palanca no se ve explicito el uso de límites.	Arquímedes usa el método de exhaución para generar una diferencia cada vez más pequeña (un Δv muy pequeño o casi cero) entre el volumen de dos sólidos.
Otros conceptos	En este método Arquímedes usa principalmente conceptos como el de centro de masa, principio de la palanca y proporciones, de los cuales los primeros dos son tomados de la física más que de las matemáticas.	El uso de algunas propiedades de la parábola, el uso de proporciones, sumatorias finitas y la reducción al absurdo se evidencia explícitamente en este método.
Conclusión de los métodos	En este método se observa una relación entre la física y las matemáticas en la que se utiliza la física para resolver un problema en matemáticas, a diferencia de lo que usualmente se hace al utilizar las matemáticas para modelar el comportamiento de ciertas variables físicas. El método mecánico se convirtió en ***un método de descubrimiento*** más que en un método de demostración y dio importantes resultados a través de deducciones informales, dejando ver así el genio creativo de Arquímedes y tal vez una ***intención didáctica*** al tratar de generar una explicación sobre la forma de encontrar los resultados que	A diferencia del método mecánico, que fue conocido siglos posteriores cuando se redescubrió el libro *el método*, en éste se observa una demostración matemática validada por la comunidad de su época en la que no se descubre un nuevo resultado sino que se demuestra un resultado ya conocido utilizando herramientas matemáticas como la exhaución y la doble reducción al absurdo bajo un sistema lógico-deductivo y a la manera de Euclides.

	posteriormente demuestra por doble reducción al absurdo.

Dado que para la época los únicos números reales aceptados como números eran los naturales y las fracciones, en ambos métodos Arquímedes expresa el resultado del cálculo del volumen del paraboloide a través de una razón que permite comparar el volumen del cilindro con el del paraboloide.

Fernando Vera (1970) refiriéndose al libro "Sobre Conoides Y Esferoides" de Arquímedes dice:

> ***Este libro puede considerarse como la continuación del dedicado a la esfera y el cilindro, pues contiene propiedades de las cónicas y cuadricas que no pueden demostrarse con los recursos de la geometría elemental, propiedades a las que llego Arquímedes con una técnica no superada hasta el siglo XVII, en que nació el cálculo integral; por lo que se nota la importancia de sus resultados y por otro lado lo difícil de su lectura.***

Por su parte E.Rufini (1926, p. p 187) dice:

> ***«Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en la seguridad de los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII.»***

Capítulo 4

"El método de determinar áreas es sólo un caso especial, y de hecho un caso muy sencillo hay problemas mucho más ambiciosos"
Gottfried Leibniz (1646-1716)

Antes de comenzar el estudio de los trabajos de Cavalieri y Torricelli se presentara una breve descripción de la época en donde vivieron estos matemáticos.

4.1 . Contextualización del siglo XVII

Para la elaboración del presente apartado nos basamos en Eiras (1992), Merton (1984) y Rei (1978) y otros. Para mostrar algunas de las características generales de la sociedad del siglo XVII como lo son la sociedad, el gobierno, las guerras, los paradigmas del pensamiento, la influencia de las matemáticas, la comunicación o difusión del nuevo conocimiento científico que por aquella época se presentó y así identificar algunos aspectos que ayudaron a establecer el origen de los trabajos de Cavalieri y Torricelli, para posteriormente abordar los trabajos de Cavalieri, ya que sus ideas son de suma importancia en el desarrollo del cálculo de áreas y volúmenes.

Carácter social, crisis del siglo y cambio cultural e intelectual

Este siglo se caracterizó por las crisis sociales y ámbitos económicos y políticos además de las guerras y las pestes y el cambio cultural e intelectual de la revolución científica del siglo. La sociedad europea paso del régimen feudal a una sociedad dominada por tres grupos (Ministros de Dios, Nobleza antigua y resto de la población). Además la adquisición de conocimientos les permitía a los individuos ascender de rango.

Los aspectos que dieron origen a la crisis del siglo se originaron en los ambientes económico y político. Del primero se tiene la sobreproducción industrial, la aparición del nuevo sistema económico, conocido como mercantilismo y las dificultades agrícolas. En cuanto al segundo está relacionado con el inconformismo por parte de diferentes grupos sociales hacia el estado por el abuso de éste en los altos costos del manejo burocrático; además los altos costos que generaba la guerra debían ser pagados por la sociedad en altos impuestos y los recursos del estado. Por otro lado se encuentran las pestes y guerras que se presentaron en la época. Pues en el periodo de 1603 a 1666 la sociedad europea sufre cuatro grandes epidemias, en cuanto a las guerras se pueden mencionar la Guerra de Flandes (entre España y Australia), la de los 30 años(1568-1648) llevada a cabo por católicos y protestantes de varios países de Europa, la Guerra civil inglesa (1642-1649) entre religiosos. Estos hechos al igual que los aspectos económicos y políticos antes mencionados provocaron un efecto devastador en el desarrollo de la sociedad europea.

A pesar de la crisis social del siglo XVII, la cultura se consolida en una revolución intelectual y científica, que implica la manera de pensar acerca del hombre y del universo. Esta revolución se enmarca bajo la corriente cultural denominada Barroco (final XVI- inicios XVIII), y ésta se caracteriza por cambios en la literatura, aparición de estilos y géneros, utilizando lenguaje exagerado, con tendencias al culteranismo (aboga por la belleza) y el conceptismo (decir mucho con pocas palabras) además en la arquitectura (uso de formas complicadas) la pintura (exploración de la luz efectos de profundidad y expresividad) la música (aparición de géneros como la opera la sonata) por otro lado se encuentra el avance preponderante en el pensamiento y la ciencia el racionalismo a partir del método deductivo-analítico de Descartes (1596-1650), el empirismo a partir del método experimental de Bacón (1561-1626), el desarrollo de la ciencia moderna por Galileo (1564-1642) y sus leyes del movimiento, además de establecer nuevas ideas sobre el infinito cuando hablaba de la limitación del universo.

La Revolución Científica

Los viajes que determinaron las conquistas mediante guerras de varios países a otros, o el intercambio comercial que se fortalecía, hicieron que los científicos de la época aprendieran a observar, medir, fortalecer o crear técnicas de cálculos, etc., pero también que los artesanos aprendieran a leer, escribir y a aprender tales técnicas gracias a la difusión cultural. Uno de los caminos que permitió establecer y fortalecer contactos entre los artesanos y los eruditos, como se evidencia de lo anterior, fue que las matemáticas se convirtieron en un lenguaje común.

Inmediato a lo anterior nace también la necesidad de refutar los conocimientos de ciencia antigua (la de los griegos), que tenían los eruditos lo que nace como una nueva ciencia, la cual genero en dicha época una revolución científica que afecto a varias áreas del conocimiento. Por otro lado se sabe que los trabajos de investigación dejan de ser exclusivos de la nobleza y son llevados a cabo por distintos personajes en paralelo a sus profesiones por lo cual sus desarrollos no son considerados de carácter profesional.

La revolución científica inicia en Italia y Francia con los aportes de Galileo y Descartes quienes tenían un inconformismo con la ciencia oficial hasta el momento difundida, éstos realizaron las publicaciones de sus conocimientos en sus respectivas lenguas, provocando así una mayor difusión del conocimiento ya que de esta forma estaba dirigido a una población más general, y no necesariamente en latín, que era considerada la lengua oficial de los documentos científicos. Además de esto se crearon academias en la cuales se pretendía difundir tanto el antiguo como el nuevo conocimiento y publicaciones que se convirtieron en medios de correspondencia, para el intercambio de ideas entre aquellos que se interesaron por difundir e informarse de los nuevos hallazgos. Posteriormente aparecieron los aportes en Holanda de la universidad de Leiden, en Inglaterra de los científicos ingleses John Wallis, Isaac Newton (1643-1727), y en Alemania Gottfried Leibniz (1646 -1716) estos últimos estuvieron bajo la influencia del método propuesto por Bacón.

Las escuelas, academias y universidades estuvieron influenciadas por el espíritu del Barroco y las comunidades religiosas, por ejemplo los *jesuitas* quienes tuvieron la labor de educar a la aristocracia[33] y el clero, la educación aun estaba atada a la física[34] planteada por Aristóteles, y algunas ideas de las nuevas ciencias, las que no iban en contra de las creencias religiosas. Por otro lado existían las escuelas *Jansenistas* muy parecidas a las de los jesuitas, debido a las persecuciones por parte de la religión a los pensamientos que iban en contra de sus doctrinas, ocasionando la creación de algunas academias en casas de personajes aristócratas, con el objetivo de poder difundir dichas ideas; en Italia surgieron academias como *Dei Lincei (1603)* a la cual perteneció Galileo, *Cimento(1657)* de Florencia a la cual perteneció Torricelli, en Francia se fundó la *Collage Royal (1530)*, la *Academia Parisienses(1635)* y la *Academia des Sciences 1666*, donde tuvieron influencia Descartes, Roberval (1602-1675) y Pascal (1623-1662) por su lado en

[33] Es un concepto social cuya acepción más inmediata se refiere a aquellas personas que en un estado o nación ocupan y ejercen el poder político y económico por derecho hereditario las clases son Nobles y militares,

[34] Concebía a la naturaleza como una organización de sustancias, formas y cualidades, a la astronomía de Tolomeo, y por ende, a la creencia del geocentrismo (la tierra es el centro del universo); en general esta educación, estaba atada a la enseñanza de la filosofía y ciencias clásicas.

Inglaterra se fundó la *Royal Society* (1660) que fue influyente en varios países de Europa, además tuvo como presidente a Isaac Newton entre tanto en Alemania se creó la *Academia de Berlín* gracias a Leibniz.

El papel de las matemáticas en esta revolución científica se evidencia en que el lenguaje matemático facilito el tratamiento y exposición de algunos resultados de la matemática como de otras ciencias, en especial la física por ejemplo las leyes de movimiento de galileo y las leyes de Johannes Kepler (1571-1630), por otro lado cabe destacar el interés que nace por estudiar las matemáticas mismas, esto se evidencia en los desarrollos de la geometría analítica de Descartes y Fermat (1601-1665), la creación de la teoría de números por este último, la geometría proyectiva por Desargues (1591-1661) y los aportes de Pascal, además de la creación del cálculo infinitesimal (indivisibles infinitesimales, cuadraturas, problemas de tangentes, máximos y mínimos), por parte de Newton Leibniz, Cavalieri, Torricelli entre otros, y el desarrollo de funciones logarítmicas de Neper (1550-1617).

Los trabajos matemáticos de Kepler marcan el inicio de la revolución en el cálculo de áreas y volúmenes del siglo XVII

En el siglo XVII se preocupaban por los problemas del movimiento, además este periodo estaba dominado por el estudio de formas para *obtener longitudes de curvas; las áreas acotadas por curvas; los volúmenes acotados por superficies, o el volumen acotado por la rotación de superficies; los centros de gravedad, la atracción gravitacional*. Estos problemas como ya lo vimos en el capitulo anterior fueron tratados por Arquímedes con su sorprendente Método, pero a pesar de que su método era ingenioso, Arquímedes no logro muchas generalidades.

Los desarrollos sobre cuadraturas y cubaturas, comienzan con los trabajos realizados por el astrónomo, físico y matemático Kepler quien se dice que se intereso por el problema de los volúmenes debido a una experiencia personal que le ocurrió con un vendedor de vinos. Él cuenta en su obra *Nova Stereometria* que el vendedor media todos los barriles de vino, sin distinción, sin poner atención a la forma y sin hacer ningún cálculo de estas mediciones, Kepler entonces decidió investigar el problema y analizar las ideas geométricas que estaban inmersas en esta medición casera.

En su obra *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, Kepler determina la relación entre el volumen de una esfera y su área superficial. Él pensaba que una esfera estaba compuesta de un número infinito de pirámides o conos, tan pequeños como se quiera (infinitesimales), los cuales tienen su vértice en el centro de la esfera y cuyas bases están formadas por la superficie de la esfera, obteniendo así el volumen de la esfera como 1/3 del producto de su radio por el área de su superficie esférica, el teorema es: ***Teorema VI:*** *El área de la superficie de una esfera es cuatro veces el área de un círculo máximo de la esfera* (Núñez J. y Portero J. 2010).

Kepler además desarrollo métodos para trabajar con sólidos en revolución y sólidos no tratados por los antiguos, por lo cual Boyer (1993, pp. 108) afirma que *"Algunos de sus métodos para calcular los volúmenes de sólidos de revolución son una contribución notable al desarrollo del cálculo integra".* Lo anteriormente permite afirmar que Kepler sin ninguna duda fue un precursor del cálculo del siglo XVII, pero debido a que la fama de este científico está más relacionada con aportes en física sus trabajos sobre calculo son muy poco difundidos.

Ahora bien ya habiendo realizado una breve descripción sobre el contextos social, cultural y científico del siglo XVII, en donde se desarrollaron los trabajos Cavalieri y Torricelli los siguientes matemático a estudiar, se procederá a ver la influencia que tubo los trabajos de Cavalieri en la elaboración de los diversos conceptos y técnicas del Cálculo del siglo, durante el cual es el autor más citado después de Arquímedes (Gonzales P. 2003). Uno de sus resultados que consiguió Cavalieri fue la cuadratura de las parábolas generales $y = x^n$ que constituye el primer teorema general del Cálculo.

4.2 Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri fue un matemático jesuita discípulo de Galileo Galilei que nació en Italia 1589 y murió en 1647. Cavalieri fue profesor de matemáticas de Bolonia, y sus trabajos estuvieron influenciados por Kepler y Galileo, en especial por este último. Particularmente en relación con el cálculo de cuadraturas y cubaturas desarrolló un método geométrico conocido como la teoría de indivisibles en su libro *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota.*

Según Castro, I. Pérez, J.H., (1983) las ideas de Cavalieri sobre indivisibles al igual que los trabajos de Arquímedes sobre cuadraturas y cubaturas inspiraron a varios matemáticos a desarrollar ideas sobre el cálculo integral. A continuación se listan las obras sobre indivisibles publicadas por Cavalieri entre 1635 y 1647. Esta organización está basada en las ideas de Andersen (1985) citadas por Barrios J. (1993) en su documento *"La geometría de los indivisibles"*.

Año	**Libro**	**Descripción**
1635	Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota	Este trabajo se compone de siete libros: En el primero libro expone cuestiones previas referentes a figuras planas y solidas. En el segundo presenta una primera versión del método de indivisibles, y prueba algunos teoremas generales sobre colecciones de indivisibles. En el tercero aplica los teoremas del libro II a la cuadratura y cubatura de figuras. En el quinto y sexto se trabajan secciones cónicas. El libro IV lo dedica a la cuadratura de la espiral y otros resultados sobre cilindros, esferas, paraboloides y esferoides y en el último libro presenta una segunda versión del método de indivisibles (método distributivo)
1647	Exercitationes geometricae sex.	Este trabajo se compone de seis libros: En el primer libro presenta una versión revisada del método colectivo. En el segundo desarrolla una nueva presentación del método distributivo. En el tercero define su método frente a las acerbas críticas del suizo Paul Guldin en el cuarto presenta una generalización del método colectivo que le permite trabajar con curvas algebraicas de grado mayor de dos. En su quinto libro determina centros de gravedad basándose parcialmente en el método de los indivisibles y en el ultimo presenta material misceláneo

En este documento el interés por los trabajos de Cavalieri está enfocado a estudiar el principio de Cavalieri y los métodos de indivisibles desarrollados por él para determinar volúmenes de sólidos. Para esto se hablará en primer lugar de su principio, ya que éste es utilizado en sus métodos, y luego de los dos métodos, el colectivo y el distributivo, que utiliza para tal fin.

4.2.1 Principio de Cavalieri:

El principio de Cavalieri es la base para poder comparar los indivisibles (áreas o volúmenes) de las figuras dadas. Específicamente éste establece que:

> ***Teorema II. 4 de Geometria indivisibilibus**: Si dos figuras planas (o solidas) tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una misma razón, entonces las figuras planas (o solidas) están también en esa misma razón.*

El principio de Cavalieri se ve reflejado en la siguiente situación donde se muestra que el volumen de tres figuras está en la misma razón, si tienen la misma altura y sus secciones paralelas a las bases guardan dicha razón.

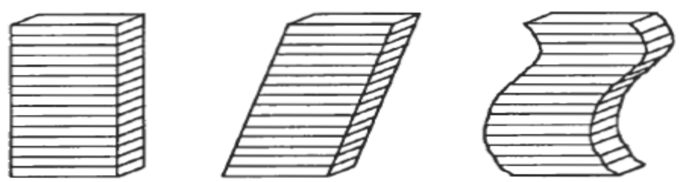

Figura 4.1. *(Tomado de La geometría de los indivisibles de Cavalieri. Barrios J. (2003))*

En Barrios J (2003) se comenta que Cavalieri intenta argumentar este principio, pero que debido a las propiedades que asume de los indivisibles esta prueba presenta falencias.

4.2.2 Los indivisibles de Cavalieri:

Para Cavalieri, al igual que para Arquímedes, un indivisible de una región plana es un segmento de recta que se obtiene al cortar la región con una recta paralela a una dada inicialmente. De manera similar un indivisible de un sólido es una región plana que se obtiene de cortar el sólido con un plano paralelo a uno dado. En este sentido un cuerpo se descompone en infinitos indivisibles manteniendo la idea propuesta por Demócrito en el atomismo (capítulo 2.). Por ejemplo en la figura 4.2 se observan algunos indivisibles de un sólido y los de un segmento de parábola.

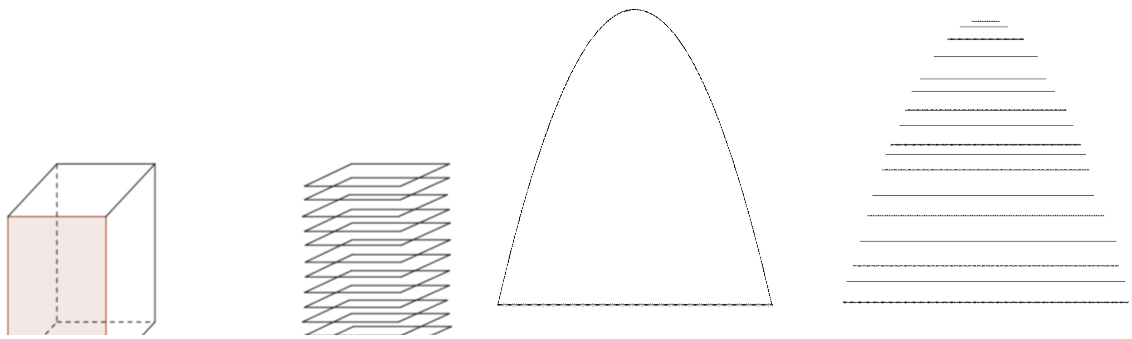

Figura 4.2. *Indivisibles de dos figuras*

4.3 Los métodos de Cavalieri

Partiendo del principio de Cavalieri se puede realizar una comparación entre dos figuras, de las cuales se conoce la magnitud[35] de una y se desconoce la magnitud de la otra, en términos de la comparación de los indivisibles respectivos.

Esta comparación puede darse de dos formas diferentes: a través del *método colectivo* en el cual se relacionan las colecciones de los indivisibles de las figuras y a través del *método distributivo* en el que la relación de las figuras se fundamenta en la relación que existe entre dos indivisibles particulares.

4.3.1 Método colectivo

Compara la colección de indivisibles de ambas figuras que resultan de secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y a igual distancia dicha forma de tomar los indivisibles puede variar de acuerdo a la forma de hacer las divisiones lo que permite obtener diferentes tipos de indivisibles (diferente forma).

Ahora bien, observando algunas de las cuadraturas y cubaturas desarrolladas por Cavalieri se logran distinguir los siguientes tipos de colecciones de indivisibles según Barrios J. (1993):

1. Todas las líneas de la figura plana(TL(F))[36]:

[35] Hacemos referencia a magnitudes como el área, o el volumen de dicha figura
[36] Adoptaremos la nomenclatura de Andersen III-IV 1985

Dada una figura plana y una recta, los segmentos que se generan al intersecar la figura con rectas paralelas a la dada (llamada regula) se constituyen en los indivisibles de la figura. Particularmente si la figura tiene una base recta y se toman rectas paralelas a ésta la colección de los segmentos generados por la intersección entre la figura y estas rectas son la colección de las líneas, es decir TL (F) a continuación se presentan algunas de estas líneas o indivisibles en la figura 4.3.

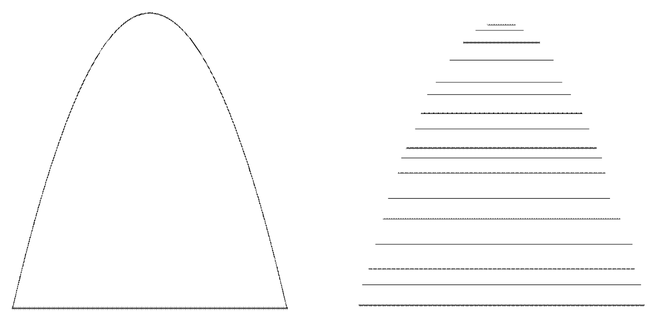

Figura 4. 3 *Todas las líneas de la figura.*

2. Todos los planos de un sólido (TP (S)): De manera similar Cavalieri extiende su definición a sólidos al tomar como indivisibles a todas las regiones que se generan por la intersección del sólido con planos paralelos a uno dado inicialmente. Particularmente si el sólido tiene como base una región plana (como se muestra en la figura 4.4) a la colección de todas las regiones que se obtienen al cortar un sólido por planos paralelos a ésta se le denomina la colección de todos los planos.

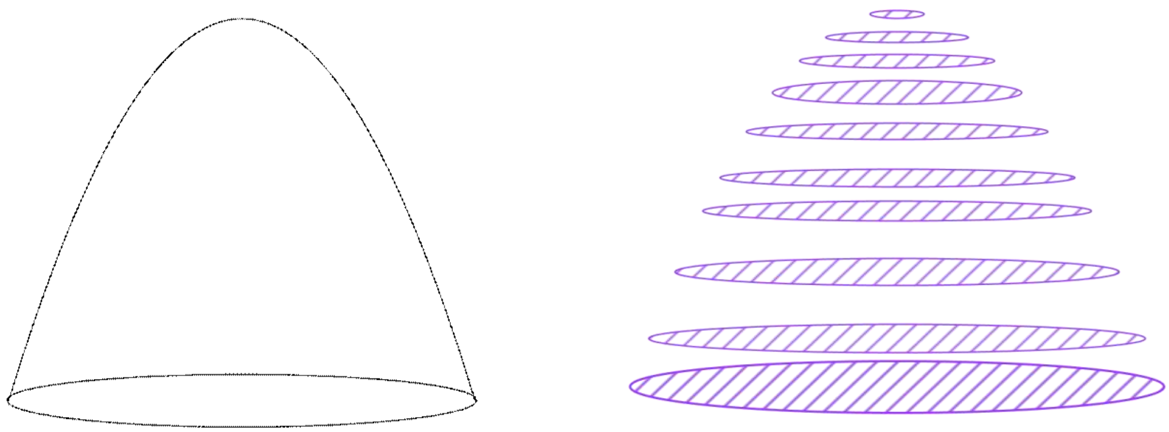

Figura 4.4 *Todos los planos de la figura*

3. Todos los cuadrados de una figura plana F (TC (F)): Cavalieri considera colecciones de figuras planas, paralelas y semejantes entre sí, construidas sobre la colección de líneas de F. Por ejemplo dado el rectángulo F de la figura 4.5 se construye la colección de todos los cuadrados que tienen por lado un indivisible de F paralelo a uno de los lados de F.

4. Todas las potencias n-ésimas $TL^n(F)$: en este caso se hace una extensión de la definición anterior para encontrar colecciones de superficies, sólidos o potencias n-ésimas (aunque algunas de estas no tengan una representación geométrica) a partir de los indivisibles de figuras planas, solidas o de mayor dimensión
Por ejemplo si $n = 1$ se tienen todas las líneas de F, y si $n = 2$, se tienen todos los cuadrados de F, es decir
$TL^1\ F\ = \mathrm{TL}\ F\ , TL^2\ F\ = \mathrm{TC}\ F$ Se asume que para una potencia $n = 3$, serán todos los cubos construidos sobre la colección de indivisibles de la figura.

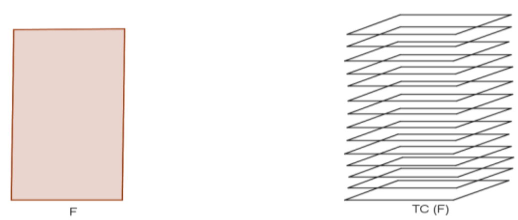

Figura 4. 5 *Todos los cuadrados de la Figura*

5. Todos los rectángulos TR (F, G): Dadas dos figuras planas F y G con una misma altura y regula común, *todos los rectángulos* de las dos figuras son todos los rectángulos con lados f y g formados a partir de todos los pares de líneas correspondientes f y g, de las dos figuras.

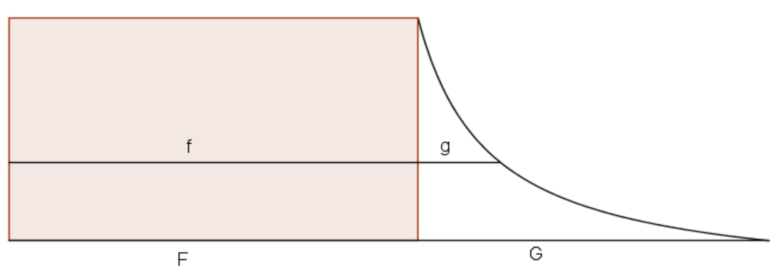

Figura 4. 6 *Todos los rectángulos de la figura*

En concordancia con Barrios J (1993) La intención de Cavalieri era demostrar que las colecciones de indivisibles son magnitudes en el sentido de *Los elementos* de Euclides por lo que podemos compararlas y operarlas. Sin embargo surge un cuestionamiento en torno a la forma de tratar con ellas por ejemplo la comparación de infinitos indivisibles de una figura con los infinitos indivisibles de otra, asumir que son iguales en cantidad entre otras cosas. A continuación se presenta un ejemplo en el que se usa el método colectivo de Cavalieri para hallar el volumen de una esfera

4.3.1.1 Volumen de la esfera por el método colectivo

De manera particular, se presenta la forma de calcular el volumen de la esfera por este principio intentando desglosar los pasos intermedios más importantes. La demostración parte de considerar una semiesfera de radio r y un cilindro de radio r y una altura r, al que se le sustrae el cono que tiene por base la tapa superior del cilindro y por vértice el centro de la base inferior del cilindro como se observa en la figura 4.7. Dado que las secciones de las dos figuras (un círculo y una corona circular, es decir *los indivisibles*) tienen la misma cantidad de área para cualquier altura h, las dos colecciones de planos son iguales luego el principio de Cavalieri permite concluir que:

$$Volumen\ de\ la\ semiesfera = \ volumen\ del\ cilindro - \ volumen\ del\ cono$$

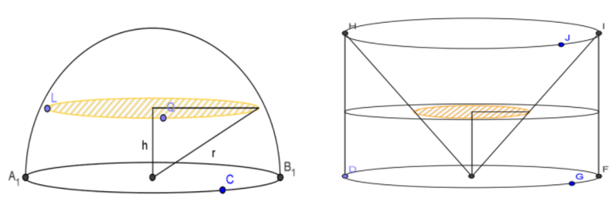

Figura 4.7 *Construcción para la demostración*

La demostración está basada en las ideas de Barrios J. (1993).

Proposición: *Dada una esfera de radio r y un cilindro de radio r y una altura r, el volumen de la esfera será dos veces la diferencia entre el volumen del cilindro y el cono inscrito en él.*

Demostración: Partiendo de una semiesfera de radio r y un cilindro de radio r y una altura r, y de la relación que existe entre el volumen del cono y del cilindro conocida desde Arquímedes

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} V_{Cilindro} \, ,$$

al sustraer el cono del cilindro se genera un sólido cuyo volumen es $\frac{2}{3} V_{cilindro}$.

Para mostrar que el volumen de este solido es igual al volumen de la esfera lo esencial radica en demostrar que para cualquier altura *h* los indivisibles (figura 4.7) de ambos sólidos son iguales. Para ello en la figura 4.8 se muestra la intersección de los sólidos con un plano perpendicular a la base que pasa por el centro.

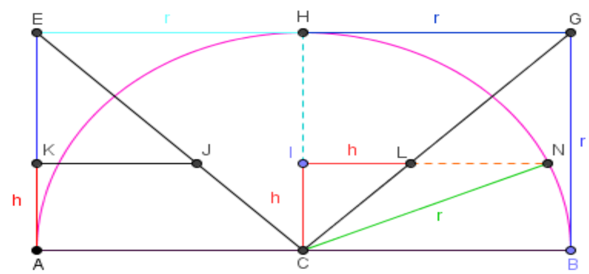

Figura 4.8 *corte transversal del cono el cilindro y la semiesfera.*

A partir de la figura y teniendo en cuenta las condiciones del teorema se establece que la longitud de los segmentos KA e IC son iguales a h, además que HG, GB, CB, CN y EH tienen la medida igual a *r*. Por otro lado, el cuadrilátero $CHGB$ es un cuadrado de lado r, lo cual permite afirmar que los segmentos IL e IC formados desde la diagonal CG son congruentes y por tanto tienen la misma medida.

$R_{cilindro}$, es el radio del cilindro $ABGE$ y r_{cono}, es radio del cono ECG.

Como el área de la sección circular A_{sc} es

$$A_{sc} = \pi \ \ R_{cilindro}{}^{2} - r_{cono}{}^{2}$$

$$A_{sc} = \pi \ CB^2 - IC^2 \qquad (1)$$

y el área del círculo A_c es

$$A_c = \pi \ \ IN \ ^2 \qquad (2)$$

donde IN por teorema de Pitágoras es

$$IN = \sqrt{CB^2 - IC^2}\,.$$

Entonces remplazando IN en (2) se obtiene

$$A_c = \pi\left(\sqrt{CB^2 - IC^2}\right)^2$$

$$A_c = \pi\left(CB^2 - IC^2\right).$$

Queda demostrado que el área de la sección circular y el área del círculo son iguales para cualquier altura.

Como se puede asegurar que las colecciones de todos los indivisibles correspondientes de ambas figuras (en este caso planos) tienen la misma cantidad de magnitud, se puede aplicar el principio de Cavalieri a la colección de ambas figuras para así obtener que como:

$$Volumen\ de\ la\ semiesfera = \ volumen\ del\ cilindro - \ volumen\ del\ cono$$

y

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}V_{Cilindro}$$

entonces

$$Volumen\ de\ la\ semiesfera = V_{cilindro} - \frac{1}{3}V_{cilindro}\,.$$

Es decir,

$$Volumen\ de\ la\ semiesfera = \frac{2}{3}V_{cilindro}$$

Finalmente como el volumen de la esfera es el doble de la semiesfera se tiene que

$$Volumen\ de\ la\ esfera = \frac{4}{3}V_{cilindro}$$

Puede observarse con este ejemplo que la forma en que Cavalieri utiliza los indivisibles para comparar el volumen de dos sólidos se distingue de la usada por Arquímedes, en tanto que Cavalieri buscaba con el método colectivo que todos los indivisibles estuvieran en la misma razón, mientras que Arquímedes extrapolaba la razón encontrada entre los indivisibles que yacían en los puntos de equilibrio a los volúmenes de los sólidos.

4.3.1.2 Método Distributivo:

Con este método Cavalieri encuentra la relación entre las colecciones de indivisibles de dos figuras, no directamente como en el caso anterior, sino haciendo una partición de cada indivisible, analizando las colecciones de los elementos de esta partición y encontrando el resultado final al unir estas colecciones.

Para ejemplificar este método, se presentan a continuación algunos resultados obtenidos por Cavalieri basados en las interpretaciones elaboradas por Cantoral (2004 pp. 63) y Edwards (2004). Específicamente se quiere observar el siguiente resultado

> *Cavalieri, en su Geometría de los indivisibles, ideó un método para calcular el volumen de un único solido en términos de sus secciones denominado "Suma de potencias". Su forma equivalente seria la expresión.*

$$\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

A continuación se presenta la prueba para $\mathrm{p} = 1$, y $\mathrm{p} = 2$, ya que en esta prueba utiliza los indivisibles para determinar áreas y volúmenes.

Ejemplo 1: Se parte de un paralelogramo $ABDC$.

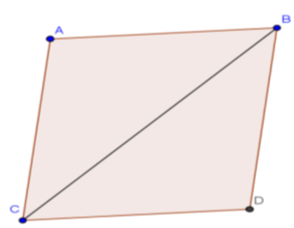

Figura 4.9 *Paralelogramo* $ABDC$

Se traza la diagonal CB, que determina dos triángulos que tendrán cada uno la mitad del área del paralelogramo, y se trazan los segmentos FG e IJ paralelos a AB, de tal forma que $FG \cap BC = H$, $IJ \cap BC = K$, y $IK = HG, KJ = FH$.

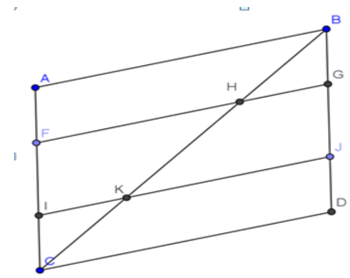

Figura 4. 10 *Construcción sobre el paralelogramo*

Sea $FH = x, HG = y, AB = a$, para facilitar la escritura.

Al tomar TL (*ABDC*) con regula *AB* que se denotará como μ, se sabe que

$$\mu x + \mu y = \mu a \quad (1)$$

Puesto que los triángulos son congruentes se establece que tienen los mismos segmentos o indivisibles lo cual permite afirmar que

$$\mu x = \mu y \ .$$

Luego de la ecuación (1) queda

$$2\mu x = \mu a \, .$$

Despejando μx queda que

$$\mu x = \frac{1}{2} \mu \mathrm{a} \, .$$

Si se toma la colección[37] de todos los segmentos $HF = x$ y $FG = a$ desde C a D, se tendrá que ${}_C^D\, x$ representa el área del triángulo y ${}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}\, a$ representa el área del paralelogramo.

Es importante reconocer que concebir la suma (colección) de todas las líneas como un área (cantidad de superficie), fue uno de los hechos más criticados de este método, ya que todo su análisis lo fundamentaba en la descomposición de figuras en figuras de un orden menor llevando a la idea de heterogeneidad entre magnitudes y aunque sus resultados fueron acertados nunca se pudo justificar completamente estos métodos.

Ejemplo 2: Sea una pirámide P con vértice E y su base un cuadrado de lado BC. Entonces la sección a una distancia x desde el vértice tiene área x^2 . Si se toma la colección de todos los

[37] Se utilizará el símbolo ∑ para indicar la colección de indivisibles de una figura

cuadrados formados a partir de todos los segmentos trazados sobre el triángulo se tendrá una pirámide y por tanto su volumen (Edwards C. 1982). Es decir

$$V\ P = \int_{E}^{D} x^2$$

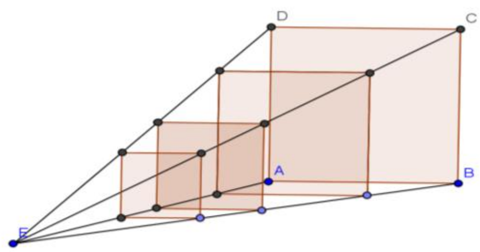

Figura 4.11 *Pirámide P con vértice E y su base cuadrada* $DCBA$

Este resultado representa el área bajo la parábola $y = x^2$ ya que su sección vertical típica tiene longitud x^2.

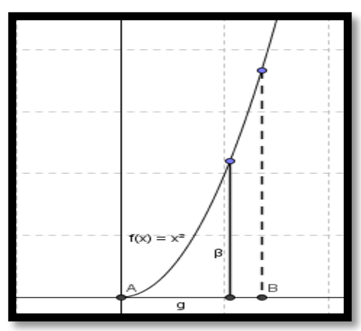

Figura 4. 12 *Sección vertical de la parábola* x^2 *donde g es la longitud x y* β *es* x^2.

Ahora bien si se piensa en un sólido en revolución generado por el segmento de parábola determinado por el eje *x* y la abscisa *p* alrededor de su base *AB*, entonces la sección a una distancia *x* desde el vértice *A* tiene área πx^4 Edwards (2004 pp. 110) y por tanto el volumen quedara determinado por

$$V\ Q = \int_{A}^{B} \pi x^4 = \pi \int_{A}^{B} x^4$$

Para describir el método utilizado por Cavalieri para calcular estas cantidades formalmente, se parte de un cuadrado $ABCD$ con lados a, dividido por dos triángulos a partir de su diagonal AC.

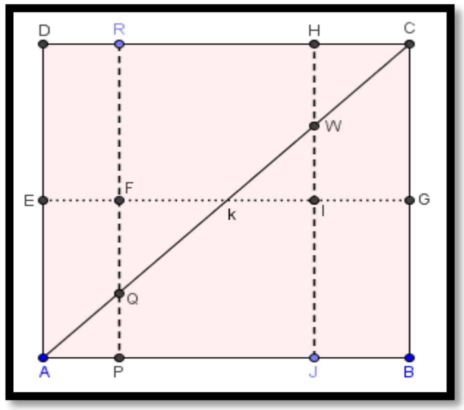

Figura 4.13 *Cuadrado $ABCD$ dividido por dos triángulos a partir de su diagonal AC* (figura para la demostración del teorema)

De aquí se tiene que

$$RQ = y, FQ = z, PQ = x, x + y = a$$

Si se elevan planos perpendiculares (cuadrados, figura 4.14) en cada línea del triángulo, se genera una pirámide cuyo volumen se obtiene al sumar (coleccionar) los cuadrados formados sobre los indivisibles RP (o sea $x + y$) de longitud *a* desde A hasta B, en otras palabras

$$V(P) = \mathop{}\limits_{A}^{B} a^2$$

Lo cual resulta ser el volumen a^3 de un cubo de arista a.

Para demostrar que el volumen de la pirámide corresponde a a^3 se parte de que

$$\mathop{}\limits_{A}^{B} a^2 = \mathop{}\limits_{A}^{B} x + y\ ^2$$

lo que es equivalente a

$$\int_A^B a^2 = \int_A^B x^2 + 2\int_A^B xy + \int_A^B y^2 \quad (2)$$

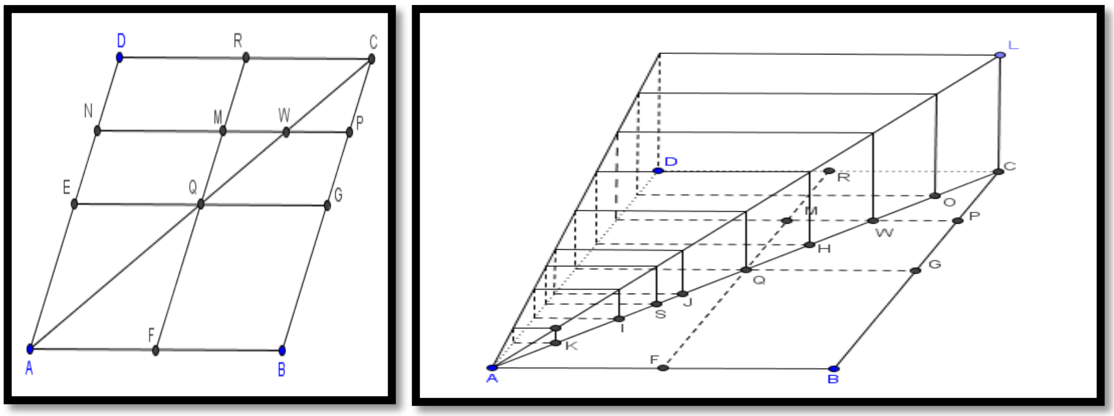

Figura 4.14 *Todos los cuadrados de un triángulo formado en la diagonal del paralelogramo. Lado derecho: el diagrama original (Cavalieri 1635, Libro II, p. 79). A continuación: se ha deformado el esquema original en una perspectiva en 3D para visualizar mejor todos los cuadrados del triángulo.*

y ya que los dos triángulos generados en el paralelogramos son congruentes (figura 4.13) se concluye que

$$\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 + 2\int_A^B xy \quad (3)$$

En este paso se evidencia la forma en que un indivisible básico es partido para poder analizar la colección de indivisibles básicos a partir de la unión (suma) de las colecciones de las partes.

Ahora bien como para cada indivisible RQ del triangulo ADC existe un indivisible congruente JW en el triangulo ABC se tiene que

$$x = \frac{a}{2} - z \, , y = \frac{a}{2} + z$$

al sustituir en (3)

$$\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 + 2\int_A^B \frac{a}{2} - z \quad \frac{a}{2} + z$$

resolviendo

$$\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 + 2\int_A^B \frac{a^2}{4} + \frac{az}{2} - \frac{az}{2} - z^2$$

$$\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 + 2\int_A^B \frac{a^2}{4} - z^2$$

donde

$$\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 + 2\int_A^B \frac{a^2}{4} \; - 2\int_A^B z^2$$

de tal manera que

$$\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 + \frac{1}{2}\int_A^B a^2 - 2\int_A^B z^2 \quad 4$$

luego

$$\int_A^B a^2 - \frac{1}{2}\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 - 2\int_A^B z^2$$

$$\frac{1}{2}\int_A^B a^2 = 2\int_A^B x^2 - 2\int_A^B z^2$$

multiplicando queda

$$\int_A^B a^2 = 4\int_A^B x^2 - 4\int_A^B z^2 \quad (5)$$

Además como $\int_A^B z^2$ representa la suma de A hasta B de los cuadrados que se forman en las líneas que conforman los triángulos AEK y CGK, y $\int_A^B z^2$ representa el volumen de una pirámide con base AEK , $\int_A^B x^2$ representa el volumen de una pirámide con base ADC, AE un medio de AD y EK es un medio de DC se puede decir

$$\int_A^B z^2 = 2 \; \frac{1}{8}\int_A^B x^2 \; = \frac{1}{4}\int_A^B x^2$$

sustituyendo en (5) se obtiene

$$\int_A^B a^2 = 4\int_A^B x^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)\int_A^B x^2$$

$$\int_A^B a^2 = 3\int_A^B x^2$$

lo cual permite concluir que

$$V(P) = \frac{1}{3}\int_A^B x^2 = \frac{1}{3}a^3.$$

4.3.2 A modo de conclusión

Para finalizar el estudio que se ha venido realizando en torno a los trabajos de Bonaventura Cavalieri, a continuación se presenta un cuadro en el cual se comparan los dos métodos abordados resaltando los conceptos que son objeto de estudio en este trabajo, tales como el uso de límites, el trabajo con indivisibles, la comparación de infinitesimales y algunas conclusiones que se condensan en torno a los métodos:

Objeto matemático	Método colectivo	Método distributivo
Solido de revolución	En sus trabajos se plasma la idea de solido de revolución de manera análoga a la concepción de Arquímedes de girar una figura en torno a un eje.	
Infinito	Se observa que en ambos métodos aparecen los dos tipos de infinito, el potencial cuando establece la relación que existe entre dos indivisibles de dos objetos dados y extiende tal relación a las colecciones de indivisibles, y el actual cuando considera que un cuerpo puede representarse por una colección de infinitos indivisibles y compara dos de tales colecciones.	
Indivisibles	Esta idea es la base de la teoría de Cavalieri, pues sus métodos se basan en comparar los indivisibles de dos objetos de la misma magnitud, para extender tal relación a los objetos mismos (la colección de los indivisibles). Sin embargo, debe mencionarse que aún persiste el problema de heterogeneidad entre	

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">magnitudes, ya que los indivisibles de un objeto y el objeto tienen diferente orden de magnitud.</td></tr>
<tr><td></td><td>De manera particular, en el método colectivo su idea fundamental consiste en mostrar que los indivisibles correspondientes de dos figuras están en una razón determinada, para luego establecer que las colecciones de indivisibles estarán en la misma razón, es decir las magnitudes de los objetos estudiados.</td><td>En este método, para establecer la razón en la que se encuentran las colecciones de indivisibles de dos objetos, Cavalieri decide partir cada indivisible en partes más fáciles de comparar (sin perder su orden de magnitud), en armar las subcolecciones de las partes correspondientes y en establecer relaciones entre las subcolecciones de los dos objetos para finalmente conseguir, al unir las subcolecciones y manipular las relaciones, una relación entre los objetos iniciales.</td></tr>
<tr><td>Infinitesimales</td><td colspan="2">Esta idea no está presente en alguno de los dos métodos puesto que, se evidencia que un sólido está compuesto de indivisibles o regiones que se obtienen al cortar al sólido con planos paralelos a uno dado, y no de partes infinitamente pequeñas o infinitesimales</td></tr>
<tr><td>Métodos de integración</td><td colspan="2">Como se mostro Cavalieri desarrolla una estrategia denominada “Suma de potencias de las líneas del triangulo” para determinar integrales definidas de la forma
$$\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$$
Para p de 1 hasta 9. Sin embargo, debe exaltarse que aún persiste la idea de expresar el área de una región o el volumen de un sólido en términos de una razón con el área o volumen de un objeto inicial.</td></tr>
<tr><td>Limite</td><td>En este método no se observa el uso de la idea de límite, en tanto su objetivo es encontrar la relación entre los indivisibles respectivos para luego extender tal relación a los objetos.</td><td>En su método distributivo se puede evidenciar que después de aplicar el método (partir la región para aplicar el método colectivo a cada una de ellas), parece utilizar la idea de que la suma de</td></tr>
</table>

	infinitas cantidades es finita, es decir que una suma infinita tiene límite.
Diferencia entre los trabajos de Arquímedes y los de Cavalieri	Observando los trabajos de los dos autores, se puede identificar que aunque ambos utilizan indivisibles para calcular la cantidad de magnitud de un cuerpo (área o volumen), la forma en que los usan difiere. Por un lado Arquímedes compara cuerpos cuyos indivisibles correspondientes no están en una misma razón, y emplea el recurso de la palanca para copiar la razón en la que se encuentran los indivisibles que se ubican en los puntos de equilibro de las figuras, a las magnitudes de los cuerpos. Cavalieri, por su parte, está interesado en comparar cuerpos cuyos indivisibles correspondientes siempre están en la misma razón para así extrapolar esa razón a las colecciones de indivisibles y en sí a las magnitudes de los cuerpos. Así, se evidencian dos usos históricos diferentes para el objeto matemático *indivisible*. Ahora bien, aunque en ambos casos un indivisible se considera como la partícula mínima en la que se descompone un cuerpo, que además tiene un orden de magnitud inferior a la de del cuerpo, en los trabajos de Arquímedes no se vislumbra que se intenten sumar, por ejemplo, longitudes para obtener áreas o áreas para obtener volúmenes, como sí sucede en los trabajos de Cavalieri, particularmente en el método distributivo. Finalmente, se aprecia que a diferencia de los métodos propuestos por Arquímedes, los métodos trabajados por Cavalieri tienen el objetivo de permitir descubrir las relaciones entre las cantidades de magnitud de los dos cuerpos más que de demostrar alguna relación ya conocida. Esta intención tal vez esté directamente relacionada por los aspectos sociales que diferencian los dos contextos, pues mientras que en la época de Arquímedes se abogaba por una presentación y uso formal de los objetos matemáticos (a la manera de los Elementos y bajo las doctrinas Platónica y Aristotélica), en le época de Cavalieri existía en el ambiente una necesidad de creación, descubrimiento y renovación (debido entre otras cosas al nuevo método científico) más que de Demostración.

Capitulo 5

"Sólo hay dos cosas infinitas: el universo y la estupidez humana.
y respecto de la primera, no estoy muy seguro".
Albert Einstein

5.1 Evangelista Torricelli

Evangelista Torricelli nació el 15 de octubre de 1608 y murió en 1647, nació en Faenza- Italia inicio sus estudios en humanidades aunque en 1624 ingreso a un colegio de jesuitas para estudiar matemáticas y filosofía, fue discípulo de Benedicto Castelli (un discípulo de Galileo Galilei) y por esta razón se vuelve también discípulo de Galileo, paso tres años aprendiendo de éste hasta su muerte en 1642, y un año después descubre "el principio del barómetro" y demostrando así la existencia de la presión atmosférica hecho por el cual es reconocido en la actualidad. Por otro lado tuvo diferentes trabajos propios de las matemáticas y del cálculo en especial, que lo llevaron a ser considerado como uno de los precursores del cálculo (Gutiérrez S. 2009).

Según Mancosu P. (1991) y Gutiérrez S. (2009) Torricelli al igual que Cavalieri, trabaja con los indivisibles para determinar áreas de regiones y volúmenes de sólidos, pero consciente de las múltiples críticas de los matemáticos de la época; realizadas a los métodos de Cavalieri, decide realizar pruebas a sus descubrimientos por el método de exhaución, para dotar de formalidad a sus resultados.

5.2 Algunos trabajos realizados por Torricelli

A continuación se presentan algunos de los trabajos realizados por Torricelli, ahondando específicamente en el campo del Cálculo. En la tabla adjunta se consigna en una primera columna el tema general, en la siguiente el titulo de la obra y en la última una descripción de los conceptos abordados en tales obras, la tabla se fundamenta en las ideas presentadas por Gutiérrez S. (2009) en la revista Suma+ edición 60.

TEMA GENERAL	***OBRA***	
Cálculo integral	*Opera geométrica (1644)*	
	De dimencione parabolae	*Se presentan demostraciones de resultados sobre cuadraturas por el método de exhaución*
	De solid hiperbolico acuto	*Se demuestra que la rotación de curvas de longitud infinita puede producir sólidos de volumen finito*
	De infinitis hyperbolois	*Se encuentra uno de los primeros teoremas generales del calculo* $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ *para n racional*
	Correspondencia enviada a Mersenne[38] *en 1643*	*Se aborda la cuadratura de la cicloide: el área encerrada por un arco de la curva es tres veces el área del círculo que la engendra.*
Matemáticas Cálculo Diferencial	*De infinitis spirabilus*	*Se trabajan las propiedades fundamentales de la espiral logarítmica*
	Opera Geometrica	*Se muestra cómo determinar una tangente en un punto de la curva "cicloide"*
Física	*Otros trabajos*	*Concibió las curvas geométricas como representación de movimientos físicos reales.* *El principio del barómetro.* *La presión atmosférica.* *Trabajos en mecánica de fluidos.* *El problema del vacío.*

Ya que el interés de este trabajo está enfocado en estudiar los resultados sobre el cálculo de volúmenes de sólidos en revolución, a continuación se presentan algunos de los aportes más

[38] Marín Mersenne (1588-1648) clérigo y matemático francés

significativos que Torricelli hizo en este sentido, claro está, teniendo en cuenta los antecedentes matemáticos con los que contaba para obtener sus descubrimientos, en particular la teoría de indivisibles de *Cavalieri*.

5.3 Los indivisibles Torricelli

Torricelli estudio los indivisibles al igual que su amigo Cavalieri, pero fue más allá que éste, debido a que extendió los indivisibles de Cavalieri al formar ***indivisibles curvos*** que no tenían relación con alguna regula como en los de su contemporáneo, lo que implicaba un método de comparación diferente entre los indivisibles de las figuras, la existencia de estos indivisibles fue aprobada una vez demostró que funcionaban y aunque no los definió formalmente incrementó la gama de colecciones de indivisibles que había definido Cavalieri.

Por ejemplo si se tiene un sólido hiperbólico[39], para Torricelli un indivisible puede constituirse en la superficie de un cilindro inscrito, es decir un indivisible curvo, a diferencia de Cavalieri para quien los indivisibles de un sólido son figuras planas o *Todas las potencias n-ésimas* $TL^n(F)$ de la figura[40].

5.4 El trabajo con el sólido hiperbólico de Torricelli

Para Herrera R. (2012) el trabajo que posicionó y dio reconocimiento a Torricelli dentro de la comunidad de matemáticos fue el resultado de su trabajo con el *sólido hiperbólico agudo* ya que ningún matemático anterior había formulado algo referente a un sólido que no estuviera acotado, y por lo tanto su análisis implica un tratamiento con el infinito, aunque Torricelli con su trabajo demuestra que este solido supone un volumen finito.

5.4.1 Construcción del solido Hiperbólico

Para construir el sólido hiperbólico Torricelli hizo girar una hipérbola equilátera[41] h sobre la asíntota vertical o eje y (figura 5.1). Dicho solido se apoya sobre un cilindro de base AC y

[39] Un sólido hiperbólico es un sólido en revolución que resulta de hacer girar una hipérbola equilátera alrededor de un eje.
[40] Ver capitulo 3 referente a los indivisibles de Cavalieri
[41] Las hipérbolas en las que los semiejes son iguales se llaman equiláteras, por tanto a=b. y su ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ las asíntotas tienen por ecuación $y = x, y = -x$

diámetro AO, donde el radio del cilindro es igual al semieje de hipérbola AH (figura 5.3). Torricelli pensó el sólido como "*una secuencia de hojas cilíndricas contenidas unas en el interior de otras paralelamente*" (Herrera 2012), donde precisamente estas hojas cilíndricas son los indivisibles curvos del sólido.

Antes de abordar la demostración de que el volumen del solido hiperbólico es finito, es pertinente conocer algunas propiedades que tienen las hipérbolas equiláteras. De la figura 5.2 se puede *afirmar que* $AI \times LI = AT \times TS$ *, en el punto* S *cumple que* $US = ST$ *, además en cada punto* L *de la hipérbola se tiene que* $AI \times IL = TS^2$*, por último se sabe que* AS *es el semieje de la hipérbola y diagonal del cuadrado ATSU.*

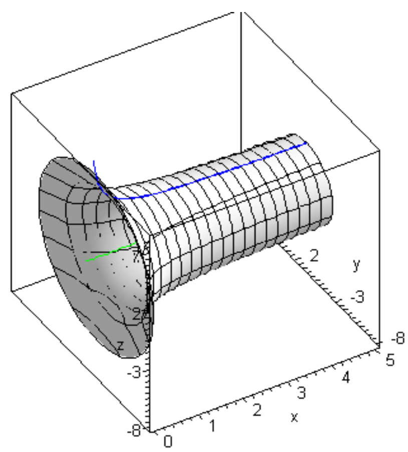

Figura 5.1 *referente a un sólido hiperbólico agudo.*

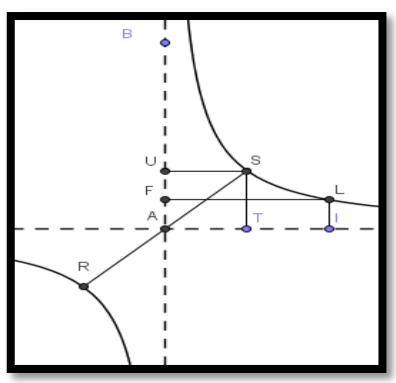

Figura 5.2. *Una hipérbola equilátera*

5.4.2 Métodos para calcular el volumen del solido hiperbólico

Torricelli aborda este problema desde dos métodos diferentes. En el primero utiliza explícitamente la idea de indivisibles para calcular el volumen y en el otro emplea el método de exhaución para demostrar la relación encontrada, a saber:

Teorema del solido hiperbólico agudo: El volumen de un sólido hiperbólico agudo, infinitamente largo, cortado por un plano perpendicular al eje, junto con el volumen de un cilindro de la misma base, es igual al volumen del cilindro de base transversal a la hipérbola, (es decir, el diámetro de la hipérbola), y de altura igual al radio de la base de está.[42]

Lo que establece el teorema es la equivalencia entre el volumen de un sólido de longitud infinita engendrado por una hipérbola h que gira en torno a su propio eje (y) y el volumen de un cilindro de altura finita AC y de radio igual al semieje de la hipérbola AH. Figura 5.2

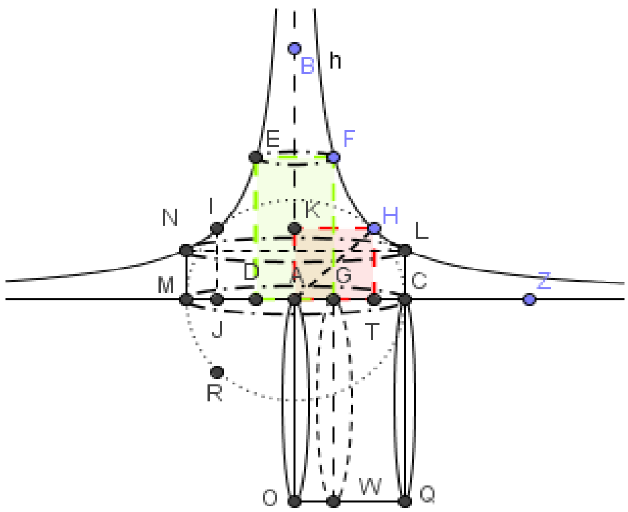

Figura 5.3. *(Solido hiperbólico agudo)*

5.4.2.1 Método para calcular el volumen de un sólido hiperbólico agudo por el método de indivisibles curvos

Para abordar el cálculo del volumen del sólido hiperbólico por el método de indivisibles primero se mostrarán los cinco lemas usados por Torricelli que permiten describir de mejor forma el

[42] El teorema original escrito en ingles versa: "**THEOREM. An acute hyperbolic solid, infinitely long [infinite longum], cut by a plane [perpendicular] to the axis, together with a cylinder of the same base, is equal to that right cylinder of which the base is the latus transversum of the hyperbola (that is, the diameter of the hyperbola), and of which the altitude is equal to the radius of the base of this acute body." Torricelli, De solido, in Opere, Vol. I, pp. 190 (definition), 193 (theorem).**

proceso a seguir. Estos lemas e ideas para sus demostraciones fueron tomados de Herrera R. (2012) y se basan en la figura 5.4.

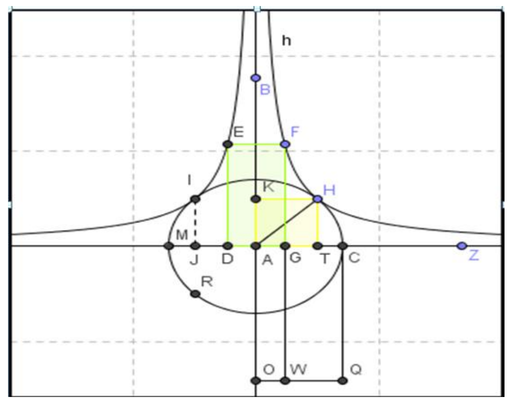

Figura 5.4 *(construcción para los lemas)*

Lema 1. *El área del cuadrado construido sobre el segmento AH es igual al área de cualquier rectángulo DEFG que gira alrededor de la asíntota AB.*

Demostración del lema 1. Sea *h* la hipérbola equilátera, *AB* y *AZ* asíntotas, □DEFG rectángulo inscrito, AH el semieje de la hipérbola.

Por las propiedades de hipérbola equilátera se tiene que $AT \times TH = AG \times GF$

El área del cuadrado C_{AH} y del rectángulo R_{AF} son:

$$A\ C_{AH} \ = A\ R_{AF} \quad 1$$

Lo mismo ocurrirá si se toma el rectángulo □ AE pues se cumple la misma propiedad de la hipérbola equilátera, por tanto para tener el área de todo el rectángulo bastaría con multiplicar por 2 a las áreas antes determinadas en la expresión 1.

Lema 2. *Todos los cilindros inscritos en el sólido hiperbólico agudo en torno al eje común AB son isoperimétricos (sus superficies laterales son iguales).*

Demostración del lema 2

Se usara la siguiente notación para simplificar la escritura.

$$A_l\ C \ = \text{á}rea\ del\ cilindro\ ACQO$$

$$A_l\ C_{AH} \ = \text{á}rea\ lateral\ del\ cilindro\ ATHK$$

$$A_l\ C_{AF} = \acute{a}rea\ lateral\ del\ cilindro\ AF$$

$$A_l\ c_{AH} = Area\ del\ cuadrado\ \ ATHK$$

$$A_l\ R_{AF} = \acute{a}rea\ del\ rect\acute{a}gulo\ AF$$

El área lateral de un cilindro es igual a

$$A_l\ C = 2\pi \times r \times h$$

De acuerdo a lo anterior se puede hallar el área del cilindro AF y AH como

$$A_l\ C_{AH} = 2\pi \times AT \times TH$$

$$A_l\ C_{AF} = 2\pi \times AG \times GF$$

Reescribiendo en términos del área de los rectángulos

$$A_l\ C_{AH} = 2\pi \times A\ \square\square c_{AH}$$

$$A_l\ C_{AF} = 2\pi \times\ A\ R_{AF}$$

Por el lema 1, se puede afirmar que

$$A_l\ C_{AH} = A_l\ C_{AF}$$

Lema 3. *Los volúmenes de todos los cilindros isoperimétricos descritos antes se relacionan entre sí como los diámetros de sus bases.*

La demostración de este lema queda inmersa en la demostración del lema 4.

Lema 4. *La superficie lateral del cilindro DGFE es ¼ de la superficie de la esfera MIHC. Recordemos que la circunferencia que genera la esfera solo la corta en dos puntos H y I respectivamente*

Demostración del lema 4

Sea el cilindro *DGFE*. El área superficial del cilindro es

$$A_l\ C_{DGFE} = 2\pi rh$$

$$A\ E_{MIHC} = 4\pi r^2$$

Remplazando se tiene

$$A_l\ C_{DGFE} = 2\pi\ AG \times GF \qquad (1)$$

$$A\ E_{MIHC} = 4\pi(AH)^2 \qquad (2)$$

De acuerdo a la construcción de la circunferencia, tangente a la hipérbola, los puntos de intersección de la hipérbola y de la circunferencia pertenecen al semieje de la hipérbola, luego aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$(AH)^2 = HT^2 + HK^2$$

Sustituyendo *HT* por *HK* por ser lados de un cuadrado

$$AH^2 = HT^2 + HT^2$$

$$(AH)^2 = 2\, HT^2$$

Si se sustituye el valor de *AH* en (2) se logra que

$$A\ E_{MIHC} = 4\pi \times 2\, HT^2$$

$$A\ E_{MIHC} = 8\pi\, HT^2 \quad (3)$$

Por otro lado y de la propiedad de la hipérbola equilátera se puede decir

$$HT^2 = AG \times GF$$

Ahora remplazando *HT* en (3) se tiene

$$A\ E_{MIHC} = 8\pi \times AG \times GF$$

$$A_l\ C_{DGFE} = 2\pi \times AG \times GF$$

De donde comparando se puede concluir que

$$A_l\ C_{DGFE} = \frac{1}{4} A\ E_{MIHC}$$

Así quedan demostradas las ideas que se plantean en los lemas *3* y *4,* ahora bien se procederá a demostrar el 5 lema el cual acumula las ideas de los cuatro anteriores y es la idea fundamental en la demostración del volumen del solido hiperbólico.

Lema 5. *La superficie de cada cilindro DGFE inscrito en el sólido agudo como en la figura 5.4, es equivalente al círculo de radio AH.*

Demostración del lema 5

El área del circulo *MIHC* es

$$A\ c_{MIHC} = AH^2 \pi$$

El área superficial del cilindro *DF* es

$$A_l\ C_{DF}\ = 2\pi\ AG \times GF$$

Del *lema 4* se puede deducir que el área del cilindro está relacionada de la siguiente manera

$$4A\ C_{DF}\ = A\ E$$

El radio de la esfera o de la circunferencia es *AH* por tanto sustituyendo en la fórmula del área de la esfera se tiene que:

$$4A\ C_{DF}\ = 4\pi\ AH\ ^2$$

Pero además se puede sustituir el área del circulo *MIHC* en la ecuación anterior

$$4A\ C_{DF}\ = 4A(c_{MIHC})$$

Por tanto se puede afirmar que

$$A\ C_{DF}\ = A(c_{MIHC})$$

A partir de los cinco lemas precedentes ahora sí se presentará la demostración del teorema principal; particularmente se mostrará que las curvas indivisibles del solido infinitamente largo, descritas en el enunciado del teorema, son iguales para el lado curvo del cilindro *ACQO*.

Demostración del teorema del solido hiperbólico agudo

En primer lugar es pertinente recordar que para Torricelli el sólido ínfimamente largo está compuesto de su lado cilíndrico, es decir todas las superficies laterales del tipo *DEFG*. (Figura 5.2.)

La construcción del cilindro *ACQO* el cual va a ser comparado con el sólido hiperbólico agudo tiene las siguientes condiciones de construcción:

a. El cilindro ACQO tiene como base el círculo de diámetro AO que es igual al eje de la hipérbola RS (Figura. 5.3) o lo que es igual al MC en la (figura 5.4)
b. El cilindro tiene de altura el AC

Para Torricelli el cilindro *ACQO* se compone de todas las secciones circulares cuyo diámetro es AO, y un indivisible curvo es cualquiera de las superficies de los cilindros del solido hiperbólico agudo formado al tomar un punto cualquiera *G* de AC, por ejemplo el cilindro *DGFE* (Figura 5.3)

El método de Torricelli consiste en tomar arbitrariamente un punto n en AC, el cual determina un indivisible del solido infinitamente largo y un indivisible en el cilindro $ACQO$.

Cada indivisible en el sólido infinitamente largo es igual a una sección circular de diámetro AO, por el *lema 5*, que es un indivisible del cilindro $ACQO$.

Por otro lado se tiene que

Las superficies laterales o indivisibles del solido hiperbólico se construyen sobre el AC y Las secciones circulares o indivisibles del cilindro se construyen sobre el mismo segmento, lo cual permite decir que el lado de las dos figuras es igual

Utilizando el principio de Cavalieri de la teoría de indivisibles, los volúmenes de las dos figuras serán iguales.

De lo anterior se puede afirmar que el volumen del sólido en revolución infinitamente largo es igual al del cilindro finito cuya base es el círculo con diámetro AO y cuya altura es AC que era lo que se quería demostrar. □

5.4.2.2 Método para calcular el volumen de un sólido hiperbólico agudo por el método demostrativo

En la prueba por exhaución basada en Mancosu P. Vailati E. (1991) y la figura 5.3; El volumen del solido debe calcularse con figuras de la misma dimensión, es decir con sólidos finitos. Los lemas principales que utiliza Torricelli para demostrar el teorema por el método de exhaución son los siguientes.

Lema 6: *Considerar el sólido que se describe por la rotación de la figura (Mixtilínea) FGCL alrededor de AB. El sólido hueco descrito es igual en volumen que el cilindro cuya altura es GC y cuya base es el círculo con diámetro GW. Esto es cierto para cualquier punto GW. Es decir para cualquier punto G arbitrariamente eligiendo el CA diferente desde A.*

Demostración del lema 6: En este documento no sé demostrara este lema debido a que no se encontró como fue realizada esta demostración, y como no se conocen otros medios se debe recurrir a determinar el volumen del sólido que genera la hipérbola haciendo uso de los métodos actuales de integración y así poderlo comparar con al volumen del cilindro, lo cual no es el objetivo de este trabajo.

Lema 7: *Considerar el cilindro generado por la rotación del rectángulo AF alrededor de AB. El volumen de este cilindro es la mitad del volumen del cilindro cuya altura es GC y cuya base es el círculo con diámetro GW. Esto es cierto para cualquier punto n arbitrario del segmento AC diferente de A.*

Demostración del lema 7: *H* es el sólido generado por la hipérbola equilátera al girarla al rededor del eje AB. *RH*=*AO* por la construcción del sólido, *RH* es el eje de la hipérbola, $AH = \frac{1}{2}RH = AO$ y además *AT*=*TH* por pertenecer al semieje de la hipérbola.

Puesto que es una hipérbola equilátera tenemos que

$$AG \times GF = AT \times TH$$

Además se puede decir por el teorema de Pitágoras que

$$AT^{2} + TH^{2} = AH^{2}$$

sustituyendo se tiene que

$$2\,AT^{2} = AH^{2}$$

Como el volumen del cilindro AW es

$$V_{Aw} = \left(\frac{AO}{2}\right)^{2} AG\ \pi$$

al sustituir y operar se tiene que

$$V_{Aw} = AH^{2}\ AG\ \pi$$

$$V_{Aw} = 2(AT)^{2}\ AG\ \pi$$

$$V_{Aw} = 2\ AT\ (AT)\ AG\ \pi$$

$$V_{Aw} = 2\ AT\ (TH)\ AG\ \pi$$

$$V_{Aw} = 2\ AG\ \ FG\ \ AG\ \pi$$

$$V_{Aw} = 2\ AG^{2}\ FG\ \pi$$

Ahora, se tiene que el volumen del cilindro formado por la rotación del rectángulo *AF* es

$$V_{AF} = \; AG^{\;2} \; FG \quad \pi$$

$$V_{AF} = \; AG^{\;2} \; FG \quad \pi$$

Ahora, se puede afirmar de lo anterior que

$$V_{AF} = \frac{1}{2} V_{Aw}$$

Ya teniendo los resultados de los dos lemas anteriores se puede utilizar el método de exhaución. Sea *c* el cilindro *OACQ* y *V(h)* al volumen de *h*. Como se quiere demostrar que $V\ (h)\ =\ V(c)$ se utilizará una doble reducción al absurdo. Al negar la conclusión del teorema se tienen dos casos

$$V \;\; c \;\; < V \;\; H$$

o

$$V \;\; c \;\; > V \;\; H$$

Partiendo del primer caso, es decir

$$V \;\; c \;\; < V \;\; h$$

dado que el valor de $V(c)$ es finito será igual a algún segmento finito de *h*, *MNEFLC* por tanto

$$V \;\; h \;\; = V(w)$$

luego

$$V \;\; w \;\; = V \;\; t \;\; + V(z)$$

donde $V(t)$ es el volumen del solido hueco, generado por la rotación de la figura de $GFLC$ y $V(z)$ el volumen del cilindro obtenido de la rotación del rectángulo AF.

Del lema 7 se puede decir que

$$2\,V \;\; z \;\; = V(AW)$$

donde $V(AW)$ es el volumen del cilindro $AGWO$. Por el lema 7 se puede decir que

$$V \;\; w \;\; = V \;\; t \;\; + \frac{1}{2} V(AW)$$

y por el lema 6 se puede afirmar que

$$V \;\; w \;\; = V \;\; GQ \;\; + \tfrac{1}{2} V(AW),$$

con lo que se obtiene

$$V \;\; c \;\; = V \;\; GQ \;\; + \frac{1}{2} V \;\; AW$$

y

$$V \;\; c \;\; = V \;\; w \;\; y \; V \;\; c \;\; < V \;\; w$$

una contradicción.
Ahora, sea

$$V(c) > V(H)$$

Debido a que el volumen del cilindro *V(c)* es finito y el volumen del solido hiperbólico *V (H)* es menor que el volumen del cilindro, el volumen del solido hiperbólico también es finito.
Ahora bien como se tiene que *V (H) < V(c)*, el volumen de *H* será igual a un pedazo del volumen del cilindro *c*, donde se puede asumir que el cilindro GCQW debe tener un diámetro más pequeño (sea GW') el cual satisface la igualdad en el volumen del solido generado por la rotación del segmento de hipérbola *FGCL* alrededor del eje *y*

$$V(FGCL) = V(GCQW') \quad (1)$$

con lo anterior se puede afirmar que

$$V(GCQW) > V(GCQW')$$

y por lema 6 se puede afirmar que

$$V(FGCL) = V(GCQW) \quad (2)$$

y esto se cumple para cualquier punto *N* en el segmento *CA*. De 1 y 2 se tiene la contradicción.
Como se llego a la contradicción en los dos casos, se puede afirmar que

$$V(H) = V(C).$$

5.5 A modo de conclusión

Para finalizar el estudio que se ha venido realizando en torno a los trabajos de Torricelli, a continuación se presenta un cuadro en el cual se comparan los dos métodos usados resaltando los conceptos que son objeto de interés en este trabajo, tales como el uso de límites, el trabajo de indivisibles o infinitesimales y algunas conclusiones que se condensan en torno a los métodos.

Objeto matemático	Método de demostración	Método de indivisibles
Solido de revolución	Este concepto se ve explicito en ambos métodos puesto que al hacer girar una hipérbola equilátera alrededor del eje y se obtiene el sólido hiperbólico, cabe resaltar que la forma de generar este solido es muy diferente a Cavalieri y Arquímedes puesto que estos dos generan un sólido en revolución al rotar una figura geométrica, mientras que Torricelli al hacer rotar una curva sobre su eje el sólido en revolución queda generado por el sólido encerrado por la superficie de revolución.	
Infinito	No se evidencia el uso explicito de infinito puesto que realiza una comparación entre sólidos apropiados.	En este método se hace evidente que Torricelli hace uso de un infinito actual, pues al sumar áreas de infinitos cilindros estos conformaran el volumen del solido hiperbólico
	Es importante reconocer que el volumen del solido hiperbólico agudo es finito en volumen sin embargo realmente es infinito en longitud.	
Indivisibles	En este método en ningún momento se evidencia la comparación de indivisibles, pues en este caso se comparan sólidos con sólidos.	En este método mediante su teoría de indivisibles curvos, compara los indivisibles de dos sólidos, uno de volumen desconocido y otro con volumen conocido. Por ejemplo en la demostración presentada se comparan superficies de cilindros con círculos para determinar una razón entre ellos y luego el volumen buscado.
Infinitesimal	En este método a pesar de que se comparan sólidos con sólidos no se hace una sub división del sólido en sólidos infinitesimales.	En este método no se hace uso de infinitesimales y se evidencia en la idea de que un sólido está compuesto de indivisibles.
Métodos de integración	En este método se evidencia un método de integración por	Es posible considerar este método como un método de integración usual, puesto que

	cascarones, al calcular el volumen del solido hueco generado por la sección de una hipérbola apropiada.	para calcular el volumen se utiliza la suma de áreas superficiales de los todos los cilindros inscritos en el sólido. El método de integración de casquetes cilíndricos.
Limite	Este método no constituye el uso del método de exhaución usado de la forma en que los hace Arquímedes (comentado en el capítulo 3) pues el uso del método de exhaución para generar una diferencia cada vez más pequeña (un Δv muy pequeño o casi cero) entre el volumen de dos sólidos uno conocido y uno que se agota. En este caso solo se hace una doble reducción al absurdo para demostrar el resultado.	En este método no se hace uso de la noción de límite puesto que a partir de los cilindros no se quiere generar una diferencia infinitamente pequeña en las divisiones, sino se está tomando el área superficial de los cilindros, además nada indica que el volumen del solido hiperbólico sea considerado como el límite de una sucesión de volúmenes convergiendo a la del cilindro formado.
Otros conceptos	Propiedades de la hipérbola equilátera. Áreas superficiales de sólidos conocidos, construcción de un sólido finito apartar de una longitud infinita.	
Conclusión general del trabajo de Torricelli	Finalmente, se aprecia que Torricelli desarrolla básicamente dos métodos para calcular el volumen de un sólido hiperbólico, uno demostrativo y otro mediante el uso de indivisibles. Es necesario reconocer que los indivisibles de Torricelli se diferencian de los indivisibles de Cavalieri y de los de Arquímedes, puesto que Torricelli genera un nuevo mecanismo para obtener los indivisibles, que en este caso se corresponden a regiones superficiales llamadas indivisibles curvos; sin embargo, Torricelli utiliza el principio de Cavalieri adaptado a sus indivisibles. Es necesario comentar que el sólido hiperbólico genera un conflicto puesto que su extensión es infinita pero su volumen resulta ser finito.	

6 Una mirada trasversal

"Puesto que el cálculo proporciona métodos seguros, simples y exactos, no se puede evitar llegar a la conclusión de que los principios en los que descansan han de ser también ciertos y simples"
Jean D'alembert (1717-1783)

A partir de la clasificación de los usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática expuesta en el primer capítulo, a continuación se presentan algunas observaciones que recogen una mirada transversal sobre los trabajos elaborados por los tres matemáticos elegidos. Específicamente, estas conclusiones se desarrollan teniendo en cuenta dos de las categorías presentadas en el primer capítulo, a saber, *rescatar significados y heurísticas* y *comprender la génesis de un objeto*.

6.1 Para rescatar significados y heurísticas

6.1.1 Sobre las heurísticas

En relación con el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, en esta categoría es importante resaltar que después de estudiar los métodos desarrollados por los autores se encuentra que todos ellos proponen un método de descubrimiento más que de demostración, en el que utilizan herramientas, a veces, por fuera de las matemáticas o de la formalidad matemática existente en su época. Particularmente, se encuentra lo siguiente

	Método de descubrimiento	*Método de demostración*
Arquímedes	<u>Método mecánico:</u> en este método los sólidos se descomponen en superficies (indivisibles) generadas al cortar el sólido con un plano que se mueve continuamente y de forma paralela a uno dado, y consiste en utilizar recursos de la física, como el movimiento, centros de masa y el método de la palanca para establecer las relaciones entre los indivisibles y luego entre los	<u>Método demostrativo:</u> en este método los sólidos están compuestos de sólidos más pequeños o infinitesimales, se hace uso de una rigurosa axiomática lógico deductiva, se hace uso del método de exhaución y de una doble reducción al absurdo para establecer los volúmenes de los

	sólidos.	sólidos.
Cavalieri	<u>Método colectivo:</u> en este método los sólidos se descomponen en superficies (indivisibles) generadas al cortar el sólido con planos paralelos a uno dado, se establecen razones entre cualquier par de indivisibles correspondientes (entre los dos sólidos), se comparan las colecciones de indivisibles de los dos sólidos y se aplica el principio de Cavalieri para establecer la relación que existe entre los sólidos. <u>Método distributivo:</u> en este método se utilizan todos los elementos anteriores con la diferencia que en este no se comparan directamente las colecciones de indivisibles de los sólidos dados, sino que se arman subcolecciones de las partes correspondientes y se establecen relaciones entre las subcolecciones de los dos objetos.	
Torricelli	<u>Método de indivisibles curvos:</u> en este método se descompone un sólido en superficies curvas (indivisibles-cascarones sin grosor) y en superficies planas para componer los sólidos, se comparan indivisibles correspondientes en las dos figuras y se utiliza el principio de Cavalieri para encontrar la relación que guardan los sólidos comparados	<u>Método demostrativo:</u> en este método se comparan secciones de los sólidos conocidas para establecer mediante una doble reducción al absurdo el volumen del sólido.

En este cuadro, y particularmente en la descripción de los métodos, se puede evidenciar que los métodos de descubrimiento se constituyen en heurísticas propias de la época en las que se busca la forma de acudir a otras ramas del conocimiento para encontrar resultados validos en

matemáticas o de separarse de los dogmas establecidos en matemáticas por sus antecesores y así tener la posibilidad de crear, en otras palabras:
Las matemáticas acuden, por ejemplo, a la física para resolver algunos problemas, y para descubrir o crear en matemáticas es conveniente desafiar las reglas establecidas.

Por otro lado, se observa que a pesar de que en todos los métodos de descubrimiento, los sólidos están compuestos por indivisibles la forma de compararlos difiere de autor a autor, pues Arquímedes compara un indivisible en especial "el de centro de masa" (del solido al cual se le conoce el volumen) y el indivisible correspondiente a este en el otro solido, estableciendo la relación que se encuentra entre ellos para copiarla (transferirla) a los sólidos y esto lo establece mediante el principio de la palanca, mientras que Cavalieri y Torricelli comparan un indivisible cualquiera pero correspondiente en las dos figuras, estableciendo una relación entre los dos indivisibles, la cuál será la misma relación que guardan los sólidos y esto lo establecen mediante el principio de Cavalieri.

De manera particular Cavalieri compara el volumen de dos figuras, por ejemplo el volumen de un cono con el de media esfera de la misma base y la misma altura, a partir de comparar los correspondientes colecciones de indivisibles (todas las líneas, todos los cuadrados, etc.) y de utilizar su principio, reduciendo el problema de obtener la razón entre dos volúmenes a hallar la razón entre sus colecciones de líneas y específicamente la razón entre dos indivisibles.
Los métodos de demostración, por su parte, no constituyen una heurística propia de su época puesto que éstos no permitían descubrir e inventar nuevos resultados sino probarlos a partir de herramientas lógico-deductivas establecidas a partir de las ideas de Platón y Aristóteles y ejemplificadas en el libro Elementos de Euclides.

De acuerdo al cuadro anterior se puede afirmar que tan solo dos de los autores proponen un método demostrativo, el cual difiere en ciertos aspectos, ya que Arquímedes en su método hace una sub división del sólido en sólidos más pequeños de altura infinitamente pequeña, generando así un agotamiento por encima y por debajo del sólido, para luego generar una doble reducción al absurdo que lo lleve a establecer el resultado ya conocido, mientras que Torricelli en su método de demostración no utiliza sólidos infinitamente pequeños para realizar un agotamiento sino simplemente realiza comparaciones entre secciones particulares de los sólidos con volúmenes conocidos, todo con el fin de llegar a contradicciones que lo lleven a demostrar que el resultado que había conseguido por su método de descubrimiento era verdadero. A partir de los documentos estudiados, se sabe que Cavalieri en su contexto social y bajo la naciente revolución científica no está interesado en demostrar, algo que puede hacer quien conozca la filosofía expuesta en los Elementos de Euclides, sino en descubrir.

Una reflexión final En conclusión, se puede inferir que los tres autores proponen y utilizan posturas muy próximas sobre la descomposición de los cuerpos en términos de indivisibles, aunque difieren en la forma de establecerlos y compararlos para llegar a sus resultados finales.

6.1.2 Sobre los conceptos

Al observar los trabajos de los tres autores se evidencia que existieron algunos conceptos comunes en sus trabajos aunque con significados diferentes, específicamente, en este trabajo la atención se centro en los siguientes conceptos que de manera particular se articulan para dar una idea de descomposición del continuo: *sólidos de revolución, indivisibles, infinitesimales, infinito*.
En relación con **el concepto de sólidos de revolución** se identifican dos significados uno dado en términos de la definición dada por Euclides, utilizada por Arquímedes y Cavalieri, en donde un sólido en revolución se genera al hacer girar una figura geométrica alrededor de una recta o eje y otro dado en términos de la definición dada por Apolonio, utilizada por Torricelli, en donde un sólido en revolución se describe como el sólido encerrado por la superficie en rotación generada al rotar una sección acotada de una curva.

Los conceptos de indivisibles e infinitesimales surgen como posturas sobre la descomposición de los cuerpos y se presentan en los trabajos de los autores de la siguiente forma:

	Método de descubrimiento	**Método de demostración**
Arquímedes	Método mecánico: En este método se observa el uso de indivisibles puesto que el sólido se descompone en superficies generadas al cortar el sólido con un plano que se mueve continuamente y paralelo a	Método demostrativo: En este método se evidencia de manera implícita el uso de infinitesimales, puesto que los sólidos están compuestos de sólidos

	uno dado. Además, en el método se explicita la necesidad de establecer relaciones entre indivisibles correspondientes a partir de sus pesos (cantidad de magnitud) para luego, utilizando un indivisible particular, extrapolar la relación que se debe tener entre el peso de los sólidos.	más pequeños de alturas o bases que pueden ser tan pequeñas como se quiera (infinitamente pequeñas)
Cavalieri	<u>Método colectivo y el Método distributivo:</u> En estos métodos se evidencia el uso de indivisibles puesto que los sólidos se componen de indivisibles formados partir de una regula. En este caso, el principio de Cavalieri exige establecer la relación entre los volúmenes de los sólidos a partir de la relación que se tenga entre las colecciones de indivisibles.	
Torricelli	<u>Método de indivisibles curvos:</u> En este método se evidencia el uso de indivisibles, pero en este caso, los indivisibles de sólidos en revolución son de dos tipos, por un lado planas, al igual que en los métodos de Arquímedes y Cavalieri, y curvas, vistas estas últimas como superficies en revolución.	<u>Método demostrativo:</u> En este método no se evidencia el uso de ningún tipo de infinitesimal o indivisible.

De lo anterior se puede inferir que los indivisibles fueron utilizados por los tres autores y particularmente en sus métodos de descubrimiento, pues los tres introducen la idea de indivisible, pues al partir de una figura dada hacen una división de ella en figuras cuyo orden de magnitud es menor que la de la figura inicial (una dimensión menos) siguiendo una idea atomista, lo que trajo problemas para algunos de ellos en términos de la heterogeneidad entre magnitudes a comparar y de la valides de los principios utilizados (principio de la palanca y principio de Cavalieri). Sin embargo cabe la pena mencionar que aunque todos emplearon indivisibles los significados que de ellos tenían eran diferentes, pues:

- Arquímedes generaba indivisibles a partir de una superficie que se movía a través del sólido.

- Cavalieri generaba los indivisibles del sólido al cortarlo con planos paralelos a uno dado (regula).

- Torricelli, de manera específica, incluyó los llamados indivisibles curvos para un sólido en revolución, que actualmente son superficies en revolución.

Por otro lado, se considera que los infinitesimales no se explicitaron en sus trabajos, en tanto no existía una idea de infinitamente pequeño (o límite o número real), pero se identifica una aproximación a su uso cuando se utilizan herramientas como la exhaución y la doble reducción al absurdo y sobre todo expresiones como tan pequeño como se quiera. En los trabajos de Arquímedes, particularmente en su método demostrativo, se puede identificar este uso de infinitesimales cuando trata de agotar una figura con figuras de igual dimensión (y magnitud) pero tan pequeñas como se quiera (bajo un sistema de referencia) por exceso y por defecto, lo que se asemeja a la idea actual de límite.

Finalmente, **el concepto de infinito** es abordado de dos formas diferentes por los tres autores, y según la clasificación dada por Aristóteles de infinito actual e infinito potencial, pues Arquímedes en su método de demostración maneja un infinito potencial al tratar con magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas mientras que deja ver la idea de infinito actual al considerar que un cuerpo se descompone en infinitos indivisibles; por su parte Cavalieri también hace uso de los dos tipos de infinito puesto que por un lado el infinito potencial aparece al establecer la relación que existe entre dos indivisibles de dos objetos dados y extiende esta relación a las colecciones de indivisibles, y por otro lado el actual aparece cuando considera que un cuerpo puede representarse por una colección de infinitos indivisibles y además cuando compara dos colecciones. Entre tanto, Torricelli hace únicamente uso de un infinito actual al considerar que al sumar áreas de infinitos cilindros estos conforman el volumen del solido hiperbólico, cabe decir que ellos no hacían explicitas estas ideas, sino que trataban de ocultarlas con otros mecanismos puesto que tales ideas no estaban validadas por la sociedad matemática de la época.

Por último en cuanto a la idea de límite, esta aparece inmersa en algunos de los métodos desarrollados por estos matemáticos pero no se explicita y por el contrario aparece encubierta por otros mecanismos como el método de exhaución, y en ideas como la suma de infinitas cantidades es finita; particularmente, Cavalieri y Torricelli introducen para cada figura el indivisible de una dimensión menor, que excluye lo infinitamente pequeño y permite soslayar las dificultades lógicas del paso al límite. Por tanto en un sentido estricto no se debiera afirmar categóricamente que los procedimientos geométricos de Arquímedes y de Cavalieri constituyen un paso al límite, pues no existe un cuerpo teórico que en su momento lo fundamente.

Una reflexión final En conclusión, la influencia de Arquímedes, Cavalieri y Torricelli ha sido decisiva en la génesis del Cálculo Infinitesimal. Los problemas de cuadraturas y cubaturas, resueltos mediante sus métodos son los antecedentes directos aunque ocultos de los indivisibles e infinitesimales de nuestro actual Cálculo Integral.

Se puede decir que Arquímedes puso los cimientos del sólido edificio que hoy constituye el Cálculo Integral y lo hizo con una conjunción de la técnica del descubrimiento y la demostración, que siglos posteriores fue retomada por otros matemáticos, los cuales generaron toda una gama de técnicas y métodos que usaban infinitesimales o indivisibles. Estos matemáticos, recorrieron nuevamente los caminos abiertos por Arquímedes y no sólo en cuanto a los objetos utilizados, sino también en cuanto a los procedimientos inventivos, así, por ejemplo Cavalieri deja de lado los métodos rigurosos y se centra en métodos de descubrimiento que lo llevan a encontrar nuevos conocimientos del cálculo, y Torricelli se deja llevar por la intuición geométrica y descubre un hecho nunca antes observado, como lo es el que volumen de un sólido infinito es finito.

6.2 Para comprender la génesis de un objeto

6.2.1 Sobre las prácticas sociales

En relación con las prácticas sociales y los contextos en que se encuentran los matemáticos se pueden hacer algunas observaciones que influyeron en alguna medida las practicas que les llevó a desarrollar sus trabajos, de manera particular se presentaran algunos de los más relevantes en el siguiente cuadro.

	Época helénica Siglo VI a.C. – III a.C.	**El siglo XVII**
Comunicación	Se hace por y a través de las escuelas de la época, los avances se realizaban en cartas y libros los cuales estaban únicamente dirigidos a los pertenecientes de las escuelas y no al público en general; su validación estaba dada por los representantes de las mismas escuelas siguiendo los paradigmas de los pensadores de las escuelas.	En principio se hace mediante las escuelas y academias, en cartas y libros, pero debido a que los avances eran más asequibles a las personas comunes, esto condujo al desarrollo de matemáticas por personas ajenas (no dedicadas solamente) a las matemáticas que ayudaron a difundir con mayor facilidad y rapidez los trabajos, la validación y criticas estaba dada por las academias que validaban total o parcialmente las teorías.
Validación	Bajo la doctrina platónica-aristotélica y los trabajos de Euclides la validación debía ser hecha bajo una organización lógico deductiva	Aunque se usa en algunos casos, pues no es el paradigma de la época, se hace uso de los métodos deductivos aprendidos desde Euclides. Sin embargo, el axioma es descubrir y no tanto demostrar.
Escuelas	Eran creadas a partir de las ideas de un sabio o filosofo de la época, el enfoque de las escuelas estaba marcado de	Estas estuvieron influencias por el espíritu del barroco y las comunidades religiosas. El enfoque estaba dirigido a la creación de un nuevo conocimiento hecho que hizo que

	acuerdo a los pensamientos y saberes del máximo representante.	se generaran escuelas y academias que defendían ideas que iban en contra de la religión (católica, en su mayoría)
Rigor-Descubrimiento	Argumentar mediante un rigor lógico deductivo de axiomas, definiciones, teoremas en los cuales sus elementos carecían de una consistencia en el mundo sensible.	Buscaban encontrar nuevos conocimientos, descubrir nuevas técnicas crear y esto se hizo siguiendo las ideas del método científico.
Contribuciones en el contenido matemático	La matemática, valida en la época, estaba basada en una geometría sintética. Los avances estaban relacionados con la geometría plana y del espacio (euclidiana), trigonometría plana y esférica, y la teoría de números y la aritmética.	Los avances en el algebra, la geometría analítica, en la teoría de las probabilidades permitieron el desprendimiento de la geometría sintéticas de los griegos que aun tenia influencia en los matemáticos de la época, a finales del siglo se sientan las bases del cálculo.

6.2.2. Dificultades

En las dos épocas existieron múltiples dificultades en los desarrollos planteados por los matemáticos, algunas de las cuales se constituyeron en los métodos, la falta de herramientas matemáticas, las formas de expresar los resultados, entre otras. En el siguiente cuadro se trata de resumir algunas de estas dificultades.

	Época helénica Siglo VI a.C. – III a.C.	**El siglo XVII**
Críticas a los métodos	El método de exhaución carecía de generalidad puesto que para cada resultado se debía hacer la	Se criticaban los métodos de indivisibles y se ponía en evidencia el problema de heterogeneidad entre

	demostración respectiva por este método.	magnitudes.
Falta de herramientas	La imposibilidad de admitir, bajo el cuerpo teórico, el concepto de numero irracional o de números reales, figuras geométricas que no se pudieran obtener a partir de la recta y el circulo (regla y compas), y la falta de un desarrollo en el algebra y una fuerte teoría de números estanco el desarrollo posterior de las matemáticas en general.	A pesar que se comenzaron a hacer desarrollos en geometría analítica, y en algebra éstos no fueron tan utilizados por la aun aceptada filosofía griega. Por otro lado aun no se concebía los números reales y mucho menos la idea de limite, es decir de continuidad.
Formas de expresar los resultados	La forma de expresar sus resultados estaba basada en el uso de razones y proporciones entre magnitudes.	La forma de expresar sus resultados está basada aún en razones y proporciones, aunque comienza a conjugarse con el lenguaje algebraico recientemente desarrollado.
Limitaciones, problemas o avances a posteridad	Los irracionales dejaron problemas por resolver, los engorrosos métodos para demostrar no permitieron encontrar nuevos resultados. No se veía explicita la relación de las matemáticas con las demás ciencias y no interesaba explicitarla. Las restricciones geométricas de los griegos dejaron tareas a las matemáticas posteriores, por ejemplo probar la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo con regla y compas, por otro lado está el tratar de	Al no desligarse totalmente de la geometría sintética de los griegos y del lenguaje de razones y proporciones se condujo a un retraso en los avances del cálculo infinitesimal. Con el desarrollo del algebra se logra una mayor generalidad de los resultados obtenidos. El papel de las matemáticas en la revolución científica se evidenció en el lenguaje y facilitó el tratamiento de algunos resultados de la matemática y de las otras ciencias

	probar el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro, entre otros, cuestiones que fueron resultas en el siglo XIX, pero aun son de gran interés para muchas personas.	por ejemplo en la física, las leyes del movimiento de los planetas de Kepler. A pesar de que Galileo intento establecer los fundamentos de la continuidad, este concepto es formalizado en los siglos posteriores.

6.3. A manera de reflexión sobre el estudio de un objeto matemático en la historia de las matemáticas

A través de este estudio nosotros nos dimos cuenta de la complejidad que existe al tratar de estudiar un objeto abordado por un matemático en la historia puesto que no es posible aislar el estudio de un objeto de otros que aparecen en la teoría y tampoco de los contextos sociales que dotan de significado a dichos objetos, en síntesis concebimos que las matemáticas son ante todo una activad humana forjada a través de la interrelación social y cultural, que nos permite pensar las múltiples posibilidades y usos que otorga la historia de las matemáticas en relación con el proceso educativo.

De manera particular se identificó la influencia y relación que tienen las heurísticas desarrollas y los conceptos abordados con algunos métodos y nociones del cálculo integral, puesto que el uso de los métodos para el cálculo de cubaturas en primera instancia surgió de las ideas de descomposición del continuo, las suma de infinitas cosas, principios que permitan realizar comparaciones entre sólidos, entre otras.

En este sentido sugerimos que a la hora de estudiar en el aula el cálculo de volúmenes de un sólido o un sólido en revolución se pueda recurrir al estudio de ciertas heurísticas que permitan observar formas diferentes a la usual para abordar dicho problema; además, se reconoce la potencia del estudio de la historia de las matemáticas en tanto brinda significados tanto de los conceptos inmersos como de otros que tuvieron un papel protagónico en la consolidación de las técnicas de cálculo actuales y que muchas veces permanecen ocultos y no son problematizados, lo que conduce a que éstos no adquieran un significado para el estudiante.

Ahora bien, este estudio se constituye en un punto de partida para posteriores trabajos de investigación en los que se aborde el estudio de las propuestas hechas por otros autores del siglo XVII y posterior y que permitieron llegar al concepto de integral definida que hoy conocemos, o se aborde el estudio de la evolución de conceptos como infinitesimal, infinito sólidos de revolución. Sin embargo, consideramos que todos estos estudios pueden ser aprovechados de mejor forma si se utilizan como marco de referencia para elaborar propuestas didácticas en torno a las temáticas en juego, puesto que como se evidenció este estudio permite desentrañar riquezas conceptuales de significados relacionados con el cálculo.

Finalmente, es importante decir que en el desarrollo de esta investigación se tuvo que ir reformulando en cierta medida la pregunta de investigación y los objetivos planteados en el anteproyecto, puesto que nos dimos cuenta que estudiar y analizar todo lo propuesto allí no podría desarrollarse en un solo trabajo. Por otro lado el propósito también se fue modificando con el fin de perfilar de mejor manera el análisis que se fue desarrollando, en el sentido de lograr una delimitación más pertinente que nos permitiera alcanzar el objetivo general.

Bibliografía

Anacona M. (2003); *"La historia de las matemática en la educación matemática",* Revista EMA, Vol. 8 No. 1, pp. 30-46.

Apolo A. (2004); *"Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión"*. México, D.F.

Apóstol, T. (1972); "*Calculus",* (F. Vélez, Trans. Vol. 1). Icaria Editorial S.A. Barcelona.

Arrieta J., Buendía G., Ferrari M., Martínez G., Suarez L. (2004); "*Prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático"*, Acta latinoamericana de Matemática educativa. Vol. 17.

Barrios J. (1993); *"La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri"*, Seminario Orotava de Historia de la ciencia, Departamento de análisis matemático, Universidad de la laguna.

Boyer C. (1993); "*The History of the Calculus and its Conceptual Development",* Dover Publications, New York, 1959, reprint of 1949 edition of Boyer's *The Concepts of the Calculus: A Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral*, Hafner Publishing, originally published in.

Boyer C; (1993 b), *"Tópicos de historia da Matemática para Uso en sala de Aula"*, traducción de Domínguez H. Ed. Atual editora Ltda. Sao Pablo, pp. 33-34, 51-54.

Cardil R. (2010); *"Kepler: The Volume of a Wine Barrel"*; Math Dl, The Mathematical Association of America MAA publicada en el URL: http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=3499&bodyId=3855 extraída el 15 de marzo de 2013.

Cartledge P. (1999); *"Demócrito",* Grupo Editorial norma, pp. 32-33.

Castro I., Pérez J. (2008); *"Didáctica Arquimediana",* memorias XV encuentro de geometría y sus aplicaciones y III encuentro de Aritmética, Universidad Pedagógica Nacional y Universidad Sergio Arboleda. Bogotá D.C.

Castro I., Pérez, J. (1983); "*Un paseo finito por lo infinito el infinito en matemáticas",* "*El método de Arquímedes"*. Boletín de Matemáticas. Vol. XVII No 1-2-3, Bogotá pp. 20-32.

Coronado L. (1988); "*El atomismo de Leucipo y Demócrito como intento de solución a la crisis eleática*", revista comunicación I.T.C.R. vol. 3. Numero.

Costa E., Otto B. (2005); *"Ideología y Matemáticas: El infinito",* Universidad de Oviedo. pp. 1-6.

D' Amore B. (2006 pp. 6); *"Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido"*. Facultad de Ciencia de la Formación, Universidad de Bolzano, Italia

Edwards C. (1982); "*The Historical Development of the Calculus"*, (2 Ed.). New York: Springer-Verlag.

Eiras A. (1992a); “*Historia Universal”,* (Vol. 12). Barcelona: Instituto Gallach de Librerías.

Eirás, A. (1992 b); “*Historia Universal”* (Vol. 11). Barcelona: Instituto Gallach de Librerías.

Gil A. (2010); “*El ocaso de la matemática helénica y la matemática en roma”* publicado en la url: http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/3/3_ocaso_matematica_helena.pdf extraído el 4 de abril de 2013.

Godino J. (2003); “*Teoría de las Funciones Semióticas- Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática”.* Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino J., Vicente F. (1994); “*Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistemáticos”.*

Godino, J., Batanero C. (1994); ¨*Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*¨. Recherches en Didactique des Mathématiques.

Gonzales P. (2003); *“La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática”*, Historia de la matemática para la enseñanza secundaria estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática, *los elementos de Euclides, el método de Arquímedes, la geometría de Descartes.* Preface to Method T. L Heath, *The Works of Archimedes.* Cambridge University Press, 1897.

Gonzales P. (2008); *“La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: la teoría de la proporción y el método de exhaución”*

Gonzales U. (1991); “*Historia y epistemología de las ciencias, Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza*” Seminario Permanente de Historia de las Matemáticas. ICE de la Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona.

Gonzales U. (1995); *“Las Técnicas del Cálculo: Fermat, Wallis y Roberval”*. In Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Actas, año II Gobierno de Canarias - Consejería de Educación.

Gutiérrez S. (2009); *“Evangelista Torricelli: un precursor del cálculo”* revista Suma+ edición No. 60. Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnouvo, pp 117-121.

Herrera R. (2012); *“Historias de matemáticas - El sólido hiperbólico agudo”*, revista de investigación G.I.E. pensamiento matemático.

Katz V., Siu M. (2000); *“Úsing History to teach methematics, an international perspective: The ABCD of Using History of mathematics in the (Undergraduate) classroom”*.

Kline, M. (1992b); *“El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días”,* M. Martínez, J. Tarrés & A. Casal, Trans. Vol. II. Madrir: Editorial Alianza.

López M. (2000); *“La estructura racional del pensamiento matemático. El infinito matemático”,* Real academia de ciencias. pp. 36-41.

Mancosu P., Vailati E. (1991); *"Torricelli's Infinitely Long Solid and Its Philosophical Reception in the Seventeenth Century";* The University of Chicago Press on behalf of The History of Science Society, Vol. 82 No. 1.

Marino T., Rodríguez M. (2008); "*Heurísticas en la resolución de problemas matemáticas: Análisis de un caso"*. Universidad Nacional de General Sarmiento. La pampa, Argentina.

Martínez G. (2005); "*Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento".* Revista Latinoamericana de Investigación matemática Educativa.

Martínez M. (2010); *"Arquímedes el precursor del cálculo infinitesimal",* Universidad complutense.

Medina A. (2001); "*Concepciones del concepto de limite en estudiantes universitarios",* Universidad pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Bogotá.

Merton, R. (1984); *Ciencia, Tecnología y Sociedad en la Inglaterra del Siglo XVII* (N. Miguez,

Montoro V., Scheuer N. (2008); "*Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios",* Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Universidad Nacional del Comahue. República Argentina, pp. 1-4.

Morales J., Oller A. (2012); "*Volumes of solids of revolution. A unified Approach",* centro universitario de la defensa- IUMA. Academia general militar, Zaragoza Spain.

Navarro J., Martínez T. (2004); "Historia de la Filosofía". Ed. Anaya publicado en la url: http://www.iescasasviejas.net/1.web/filo/filo2/1_presocraticos.html extraído el 4 de abril de 2013.

Núñez J., Portero J. (2010); *"Kepler nos enseña a medir el vino que se bebe",* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XVII, No. 1, pp. 49-57.

Ortiz, J. (1994); "*El concepto de infinito",* Asociación Matemática Venezolana, Boletín Vol. I, Nº 2. pp. 59-65.

Palmieri P. (2008); *"Superposition: on Cavalieri's practice of mathematics",* Department of History and Philosophy of Science, HPS Department, University of Pittsburgh.

Parra (1990); *"La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria"*. Lecturas de Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente fue elaborado en la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, de la Secretaría de Educación Pública.

Rei D. (1978); "*La Revolución Científica. Ciencia y Sociedad en Europa entre los Siglos XV y XVII.*

Rufini E. (1926); "*Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*. Feltrinelli." Milán, Pp. 187.

Sánchez J. (2011); *"Historias de Matemáticas - Las Escuelas Jónica y Pitagórica" ISSN 2174-0410*

Sánchez J. (2003); "*La filosofía en el bachillerato*", Publicada en la url: webdianoia.com, extraído el 4 de abril de 2013.

Swokowski E. (1989); "*Cálculo con Geometría analítica"*, 2 ed, Grupo editorial Iberoamérica S.A. Trans.). España: Alianza Universidad Editorial S. A.

Urbaneja P. (2001); *"Pitágoras, el filósofo del número"*, Ediciones Nivola Libros.

Varó A. (2008); *"Filosofía II 2º Bachillerato"*

Vera F. (1970); *"Científicos Griegos".* Tomo 1. Aguilar S.A., Ediciones, Juan Bravo, 38, Madrid (España).

Yuste P. (2009); *"Reflexiones sobre la Geometría griega-thoughts on the greek geometry"*. Departamento de Filosofía. UNED

Zubieta G. (1997); *"Los indivisibles de Cavalieri: una perspectiva plausible para el aprendizaje del cálculo de volúmenes",* Educación matemática, Vol. 9 No. I.