

CONTEO EN LA TEORÍA DE GRAFOS

AUTOR(A):

JENIFER ALEXANDRA FERNÁNDEZ CAICEDO

Código: 2009240019; *Cédula:* 1012375523

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C. 2016

CONTEO EN LA TEORÍA DE GRAFOS

AUTOR(A):

JENIFER ALEXANDRA FERNÁNDEZ CAICEDO

Código: 2009240019; *Cédula:* 1012375523

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciada en
Matemáticas

ASESOR:

JUAN CARLOS ÁVILA MAHECHA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C. 2016

*A mi familia,
Esperanza, Francisco y mis hermanos,
Por su apoyo, paciencia y amor.*

*A Gustavo,
Por su tenacidad y gran amor.*

*A Pilar y Javier,
Por su apoyo, cariño y colaboración.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera especial a mis padres, mis hermanos y mi sobrina, por sus palabras de apoyo y su colaboración.

A Gustavo y su familia por alegrarse de mis triunfos y ser un apoyo con sus actos y palabras, en mis fracasos.

Al profesor Juan Carlos Ávila, pues sus enseñanzas, cariño y su confianza en mí, fueron un componente fundamental para permitirme la realización de este trabajo.

A mis amigos Nathalía, Juli, Mónica y Javier, por sus palabras de apoyo, por cada sonrisa que compartimos y en especial por su amistad.

En general, agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional, a las profesoras y los profesores que con sus enseñanzas y experiencias contribuyeron a mi formación como docente de matemáticas.

RESUMEN ANALÍTICO DE EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Conteo en la teoría de grafos
Autor(es)	Fernández Caicedo, Jenifer Alexandra
Director	Juan Carlos Ávila Mahecha
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 76.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN.
Palabras Claves	TEORÍA DE GRAFOS, CONTEO, VÉRTICES, ARISTAS, COLORACIÓN DEL GRAFO, MATRICES DE ADYACENCIA, PUENTES DE KÖNISGBERG, CAMINOS DE LONGITUD, SECUENCIAS, ARITMÉTICA,
2. Descripción	
<p>Este trabajo, presenta conjeturas de situaciones relacionadas con el conteo, halladas mediante el estudio de algunos conceptos de la teoría de grafos. La intención es mostrar la posibilidad de identificar situaciones de conteo y mediante los argumentos de la teoría de grafos, resolverlas; además contribuir a los maestros de matemáticas para que fomenten un espacio de creatividad con la introducción de problemas que resulten atractivos para sus estudiantes debido a su simplicidad y, al mismo tiempo, posibiliten la búsqueda de estrategias de resolución y argumentación.</p>	

3. Fuentes

- Braicovich, T., & Cognigni, R. (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. *Números*, 76, 135-148.
- Bressan, A., & Gallego, M. F. (Mayo de 2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamieto de patrones. *Correo del maestro* (168), 5-21.
- Combariza, G. (2003). Una introducción a la teoría de Grafos. *XIV Encuentro de geometría y II de aritmética y sus aplicaciones* (págs. 565-591). Bogotá - Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Falero, S., Paroni, A., & Zinga, M. (2013). El misterio del manuscrito. *Revista Premisa*, 15(59), 36-46.
- González, F. (2004). 14. Grafos. En *Apuntes de Matemática Discreta* (págs. 396-462). Cádiz: Univerisdad de Cádiz. Departamento de Matemáticas.
- Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. *Revista Suma*(28), 11-26.
- Niño, H., & Ramírez, J. L. (2008). *Actividades de club de matemáticas para el desarrollo del talento. Modulo teoría de grafos*. Bogotá, D.C- Colombia: Fundación Euler.
- Sobrón, M., & Espinel, M. (1992). Grafos a través de juegos. *Suma*(11-12), 88-94.
- Vanegas, j., Henao, S., & Gustin, J. (2013). La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (págs. 283-290). Bogotá, D.C- Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

4. Contenidos

Este trabajo de grado se realizó en tres etapas: la primera estuvo enfocada al estudio de conceptos básicos de la teoría de grafos; la segunda se basó en la identificación de situaciones de conteo percibidas en la teoría de grafos, a través de tablas, gráficas y estrategias, que permitieron identificar patrones y proponer conjeturas. Por último, la tercera etapa se constituyó en la creación de las propuestas de solución y la justificación

de los argumentos de dichas situaciones encontradas.

En resumen, se muestran los capítulos del presente documento, destacando los elementos fundamentales de cada uno de ellos:

SECCIÓN 1: Consideraciones sobre el inicio de la teoría de grafos y se define qué es un grafo.

SECCIÓN 2: Se define el grado de los vértices del grafo y a partir de este concepto se realizan dos actividades en la cuales se utilizan conceptos de la teoría para dar argumentos de situaciones de conteo, como por ejemplo, la secuencia de los números triangulares.

SECCIÓN 3: Por medio de una actividad se realiza el estudio de grafos para determinar qué condiciones deben cumplir para que estos sean recorribles y así mostrar los teoremas a los que Euler llegó para resolver el problema de los puentes de Königsberg.

SECCIÓN 4: Se utiliza la coloración de grafos como estrategia para buscar formas de contar los vértices y las aristas. Se utilizan dos secuencias de grafos y se muestra algunas conjeturas halladas luego de pintar de diversas formas de los vértices para identificar situaciones de conteo, luego utilizando conceptos de las secciones anteriores se dan argumentos sobre las situaciones encontradas.

SECCIÓN 5: Se estudia la representación matricial del grafo dando ejemplos de cómo establecer estrategias de conteo por medio de esta.

5. Conclusiones

- Las representaciones del grafo fueron fundamentales para identificar las situaciones de conteo. A partir, de las secuencias graficas del grafo y las estrategias que se utilizaron para clasificar los vértices, fue como se reconocieron patrones de secuencias aritméticas conocidas (números triangulares y cuadrados), que llevaron a plantear conjeturas y estas a ser argumentadas con base a conceptos de la teoría de grafos.
- Se encontraron maneras de argumentar algunas secuencias aritméticas como la de los números triangulares haciendo uso de algunas definiciones y técnicas de la teoría de

grafos. Por ejemplo, en la sección 2.1 con los grafos completos y los grafos isomorfos, al igual que en la sección 5.1 con la matriz asociada al grafo completo.

- Siendo *el conteo* el interés principal de este trabajo, además el estudio de una teoría que se destaca porque modela un sin número de situaciones, se hace necesario resaltar que las estrategias utilizadas para contar, propiamente fueron halladas con el estudio de la teoría. Un claro ejemplo de esto son las potencias de la matriz adyacente al grafo, las cuales sirven para contar los caminos de longitud n de cada par de vértices del grafo.
- La idea de sistematizar la experiencia surge a raíz de la escasez de bibliografía referente a los procesos de conteo en dicha teoría. Hay autores que mencionan la importancia de incorporar la teoría de grafos en las actividades que proponen para sus estudiantes, pero no se encuentran escritos que traten propiamente de estrategias para contar en la teoría de grafos. Por ello, se cree que este documento contribuirá a los lectores, en especial a los maestros, para que fomenten un espacio de creatividad con la introducción de problemas que resulten atractivos por su simplicidad y, al mismo tiempo, posibiliten la búsqueda de estrategias de resolución y argumentación.

Elaborado por:	Fernández Caicedo, Jenifer Alexandra
Revisado por:	Juan Carlos Ávila Mahecha

Fecha de elaboración del Resumen:	20	01	2016
--	----	----	------

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	1
OBJETIVOS.....	2
Objetivo General:.....	2
Objetivos Específicos:	2
JUSTIFICACIÓN.....	3
SECCIÓN 1	5
INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS.....	5
SECCIÓN 2	7
EL GRADO DE LOS GRAFOS	7
2.1 GRAFOS COMPLETOS	11
SECCIÓN 3	16
GRAFOS RECORRIBLES	16
SECCIÓN 4	21
COLORACIÓN DE GRAFOS.....	21
4.1 COLORACIÓN DE GRAFOS $G_{3,n}$	22
4.1.1 GRAFOS $G_{3,n}$	22
4.1.1.1 CONTEO DE VÉRTICES	23
4.1.1.2 CONTEO DE ARISTAS.....	24
4.1.2 GRAFOS $G_{3,n}^*$	26
4.1.2.1 CONTEO DE VÉRTICES	27
• Primera forma.....	27
• Segunda forma.....	29
• Tercera forma	30
• Cuarta forma.....	31
4.1.2.2 CONTEO DE LAS ARISTAS	32

• Primera forma.....	32
• Segunda forma.....	34
4.2 COLORACIÓN DE GRAFOS $G_{4,n}$	35
4.2.1 GRAFOS $G_{4,n}$	35
4.2.1.1 CONTEO DE VÉRTICES	36
4.2.2 GRAFOS $G_{4,n}^*$	36
4.2.2.1 CONTEO DE VÉRTICES	37
• Primera forma.....	37
• Segunda forma.....	38
• Cuarta forma.....	40
• Quinta forma	41
4.2.2.2 CONTEO DE ARISTAS.....	42
• Primer forma	42
SECCIÓN 5	44
MATRICES ASOCIADAS AL GRAFO	44
5.1 MATRICES DE ADYACENCIA	45
5.2 CAMINOS DE LONGITUD n EN UN GRAFO G	47
CONCLUSIONES.....	61
Bibliografía.....	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. 1. Representación de los puentes de Königsberg	5
Figura 1. 2. Grafo realizado por Euler para resolver el problema de los puentes de Königsberg	6
Figura 1. 3. Grafo G	7
Figura 2. 1. Grafo 4 y grafo 5	10
Figura 2. 2. Representación del problema del apretón de manos	11
Figura 2. 3. Otra representación del problema del apretón de manos	13
Figura 2. 4. Grafos isomorfos	14
Figura 3. 1. Grafo utilizado para representar la situación de los puentes de Königsberg...	17
Figura 3. 2. ¿Serán Grafos recorribles?	18
Figura 3. 3. Grafo realizado por Euler para resolver el problema de los puentes de Königsberg	21
Figura 4. 1. Coloración de los Grafos $G_{3,n}$	23
Figura 4. 2. Triángulo con la punta hacia arriba y Triángulo con la punta hacia abajo respectivamente	24
Figura 4. 3. Grafos $G_{3,n}^*$	25
Figura 4. 4. Coloración Grafos $G_{3,n}^*$	27
Figura 4. 5. Primera estrategia de contar vértices en los grafos $G_{3,n}^*$	27
Figura 4. 6. Segunda estrategia para contar los vértices	29
Figura 4. 7. Tríos de triangulares en los $G_{3,n}^*$	30
Figura 4. 8. Secuencia $3n$ en los vértices en $G_{3,n}^*$	31
Figura 4. 9. Triángulo con la punta hacia arriba y Triángulo con la punta hacia abajo respectivamente	32
Figura 4. 10. Grafos $G_{3,n}^*$	33
Figura 4. 11. Grado de los vértices en los grafos $G_{3,n}^*$	34
Figura 4. 12. Grafos $G_{4,n}$	35
Figura 4. 13. Grafos $G_{4,n}^*$	37
Figura 4. 14. Grafos $G_{4,n}^*$ con vértices verdes y negros	37

Figura 4. 15. Cuádruples de números triangulares en $G_{4,n}^*$	38
Figura 4. 16. Secuencias de triangulares en los $G_{4,n}^*$	39
Figura 4. 17. Dos números cuadrados consecutivos + $4n$	40
Figura 4. 18. Secuencia $4n$ en los vértices en $G_{4,n}^*$	41
Figura 4. 19. Grado de los vértices en los $G_{4,n}^*$	42
Figura 5. 1. Grafo G1	45
Figura 5. 2. Grafo G2	46
Figura 5. 3. Caminos del grafo H	48
Figura 5. 4. Grafo <i>F</i>	50
Figura 5. 5. Fila v2 caminos de longitud 2 y columna v3 caminos de longitud 1	53
Figura 5. 6. Caminos de longitud 1 (tabla 5.2), resaltando la fila v1 y la columna v1	55
Figura 5. 7. Caminos de longitud 1 (tabla 5.2), resaltando la fila v2 y la columna v2	55
Figura 5. 8. Fila v2 caminos de longitud 2 (tabla 5.3) y columna v3 caminos de longitud 1 (tabla 5.2).....	56

LISTA DE TABLAS

Tabla 2. 1. Grado de los vertices de cada grafo.....	9
Tabla 2. 2. Número de vertices impares de cada grafo.....	11
Tabla 2. 3. Número de aristas de cada grafo	12
Tabla 2. 4. Relación entre la representación de los grafos y los números triangulares	15
Tabla 3. 1. Grafos que son recorribles con sus respectivas condiciones	19
Tabla 4. 1. Conteo de vértices por color.....	23
Tabla 4. 2. Conteo de triángulos de los Grafos $G_{3,n}$	25
Tabla 4. 3. Número de aristas de los Grafos $G_{3,n}$	26
Tabla 4. 4. Secuencia números cuadrados y números triangulares	28
Tabla 4. 5. Secuencia de triangulares consecutivos.....	29
Tabla 4. 6. Conteo general de aristas de $G_{3,n}^*$	33
Tabla 4. 7. Conteo general de vértices con grado 3,3,7 y 12.....	34
Tabla 4. 8. Conteo de vértices por color de $G_{4,n}$	36
Tabla 4. 9. Conteo de vértices verdes y negros de $G_{4,n}^*$	38
Tabla 4. 10. Conteo general de vértices con grado 3, 4, 5 y 8 en $G_{4,n}^*$	43
Tabla 5. 1. Conteo de aristas del grafo completo K_n por medio de la matriz asociada.....	47
Tabla 5. 2. Caminos de longitud 1 del grafo F	50
Tabla 5. 3. Caminos de longitud 2 para el grafo F	52
Tabla 5. 4. Caminos de longitud 3 del grafo F	54

INTRODUCCIÓN

Este trabajo, presenta conjeturas de situaciones relacionadas con el conteo, las cuales fueron halladas mediante el estudio de algunos conceptos de la teoría de grafos; la intención es mostrar la posibilidad de identificar situaciones de conteo y mediante los argumentos de la teoría resolverlas. Así mismo, se pueden tomar como actividades para propiciar en los estudiantes actitudes del quehacer matemático.

Resaltando que el estudio de la teoría de grafos puede ser propuesta por los docentes, debido a que es pertinente y útil para la comunidad de estudiantes, pues por medio de esta teoría, que no es usual en los contenidos curriculares de la escuela y de las carreras afines a la educación matemática (Braicovich & Cognigni, 2011); se puede facilitar la introducción de problemas que resultan atractivos a los estudiantes por su simplicidad y, al mismo tiempo, posibilitar la búsqueda de estrategias de resolución y argumentación. (Falero, Paroni, & Zinga, 2013)

En el presente escrito, inicialmente se aborda de forma breve el surgimiento de la teoría de grafos. Posteriormente se estudian conceptos elementales de la teoría, utilizados en dos actividades con las que se busca dar argumentos de situaciones de conteo, como lo es la secuencia de los números triangulares.

A continuación, se utiliza la coloración de grafos como estrategia para buscar formas de contar los vértices y las aristas. Utilizando secuencias de grafos que permitieron plantear conjeturas de situaciones en las que se identifican cuestiones de conteo, luego utilizando conceptos de las secciones anteriores se dan argumentos sobre las situaciones encontradas. No se incluye las demostraciones de las conjeturas establecidas, pues no es el interés del trabajo.

Finalmente, se muestra un resultado encontrado con el estudio la representación matricial del grafo, dando ejemplos de cómo establecer estrategias de conteo por medio de esta.

OBJETIVOS

Objetivo General:

Utilizar conceptos de la teoría de grafos para argumentar situaciones de conteo que se hallen al estudiar algunas situaciones que involucran grafos.

Objetivos Específicos:

- Identificar algunas situaciones de conteo en la teoría de grafos.
- Resolver problemas de conteo a partir de procedimientos-algoritmos sugeridos al estudiar la teoría de grafos.
- Clasificar los problemas de conteo encontrados.
- Contribuir con un elemento bibliográfico a la comunidad educativa del DMA y a otros para que sirva de apoyo en el estudio de situaciones relacionados con la aritmética.

JUSTIFICACIÓN

En el Curso del programa “MEDIA FORTALECIDA” para estudiantes de colegios distritales que se realizó en la Universidad Sergio Arboleda, por el convenio con la secretaría de educación de Bogotá, durante el año 2014, se llevó a cabo una serie de actividades basadas en la cartilla titulada “*Actividades de club de matemáticas para el desarrollo de talento matemático: módulo teoría de grafos*” de (Niño & Ramírez, 2008). La temática utilizada para las actividades fue la teoría de grafos “*dado lo elemental de esta teoría, es decir, que para iniciarse en ella basta con saber sumar, restar, multiplicar y dividir, nos pareció apropiada para trabajar en el club... necesitábamos diseñar actividades que no fueran excluyentes desde el punto de vista de los conocimientos que cada uno de ellos tenía*” (Niño & Ramírez, 2008, pág. 7). En el proceso, se modificaron y ampliaron estas actividades, requiriendo la sistematización a partir de la experiencia. Teniendo en cuenta que estas iban encaminadas al desarrollo de procesos matemáticos en los y las estudiantes que participaron de este espacio, de esta manera, se buscó estimular procesos que contribuyen a la abstracción de ideas matemáticas, pues por medio de la observación de patrones, la comprobación de conjeturas, la estimación de resultados, además de otros procesos, es como se hacen las matemáticas. (Bressan & Gallego, 2010)

A partir del trabajo desarrollado por el docente Juan Carlos Ávila en este curso, se pensó en la pertinencia de la sistematización de las actividades desarrolladas, aportando material bibliográfico para los cursos de aritmética y a los docentes interesados en este tema, contribuyendo así al fortalecimiento de estos espacios, por medio de la utilización de esta teoría.

Por otra parte, al buscar referentes bibliográficos, no se encontró autores que hablarán sobre los propósitos definidos específicamente de este trabajo, pero sí a la autora Teresa Braicovich, quien ve la importancia de incorporar este contenido en los currículos escolares educativos, por su simplicidad y el aprovechamiento que se le puede dar a las actividades modeladas por medio de los grafos; además resalta que los docentes de educación primaria y secundaria no tienen conocimiento en esta teoría porque a nuestro pensamiento le cuesta

acomodarse a propiedades y conceptos, con una mirada diferente, con una mirada “no euclidiana” y captar la riqueza de estos temas que pueden ser tan formadores de conocimiento matemático, como los de los currículos oficiales. (Braicovich & Cognigni, 2011). Con base en esto se refleja la importancia de realizar material de apoyo para los docentes que quieran estimular en sus estudiantes procesos del quehacer matemático.

SECCIÓN 1

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

La teoría de grafos puede decirse como muchos autores afirman, que nació en 1736 con la publicación del artículo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (solución de un problema referente a la geometría de posición) por el matemático suizo Leonard Euler (1707 – 1783), donde muestra la ingeniosa solución al problema de los puentes de Königsberg, un puerto de la antigua Alemania, situado en la costa del mar Báltico, cerca de la desembocadura del río Pregel. El río dividía a la ciudad en cuatro partes de tierra separadas y había siete puentes que permitían a los habitantes cruzar el río para desplazarse de un lado a otro como se muestra en la figura 1.1

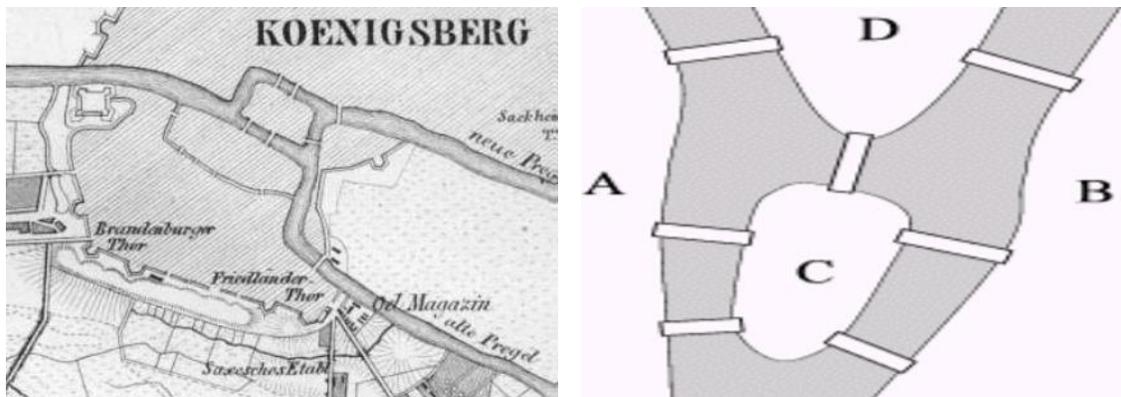


Figura 1. 1¹. Representación de los puentes de Königsberg

El problema se enuncia de la siguiente manera: ¿es posible, comenzando en cualquier parte de la ciudad de Königsberg (figura 1.1), elegir un camino que permita pasar, en cualquier orden, una vez y sólo una por los siete puentes sobre el río Pregel y volver al mismo sitio?

Euler sin necesidad de ir allí realizó un proceso de modelización para resolver la situación concreta, utilizando un diagrama (figura 1.2), donde los puntos representan las regiones

¹ Imágenes izquierda tomada de (Valdés, Pérez, Díanez, & otros, 2004), imagen derecha tomada de (Combariza G. , 2003)

que unían los puentes y las aristas los siete puentes. Luego este diagrama constituyó el origen de lo que se conoce como **grafo**. Cabe resaltar que este modelo creado por Euler se despoja de toda información irrelevante, es decir prescinden de la geometría euclidiana.

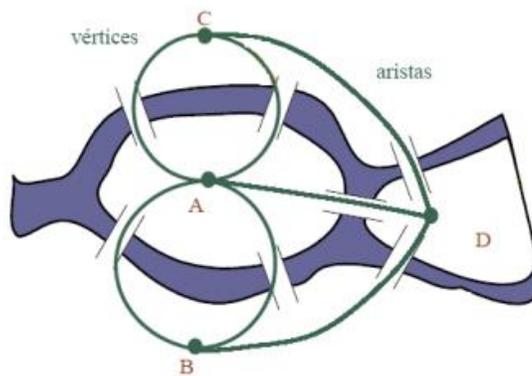


Figura 1. 2². Grafo realizado por Euler para resolver el problema de los puentes de Königsberg

Más adelante se mostrará la solución que dio Euler a este problema, además de otros problemas más generales, centrandó siempre la atención en actividades de la teoría de grafos con las cuales se puedan argumentar cuestiones de conteo.

Definición. Un grafo G es un conjunto finito V no vacío junto con una relación R sobre V irreflexiva y simétrica, esto es, para todo u de V , $(u, u) \notin R$; y si $(u, v) \in R$, entonces (v, u) también pertenece a R . Se denota con E el conjunto de pares simétricos en R . (Chartrand, 1977)

Por ejemplo, al definir el grafo G por el conjunto V

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

Junto con la relación simétrica

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$$

Pero antes se hace necesario definir que es un grafo.

² Imagen tomada de (Niño & Ramírez, 2008)

Se obtiene el grafo G de la figura 1.3. En el grafo G , el conjunto V se denomina el conjunto de *vértices* de G . El número de vértices en G se conoce como el *orden* de G . Cada elemento de E , se llama arista, por lo que E es el conjunto de aristas de G .

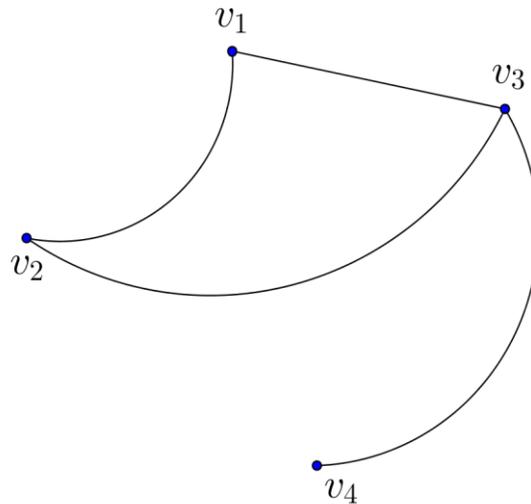
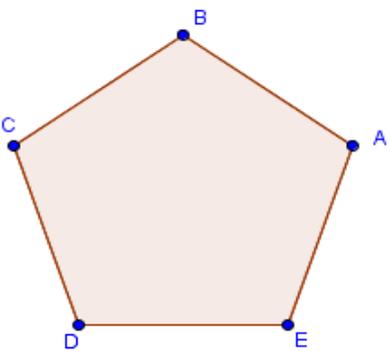
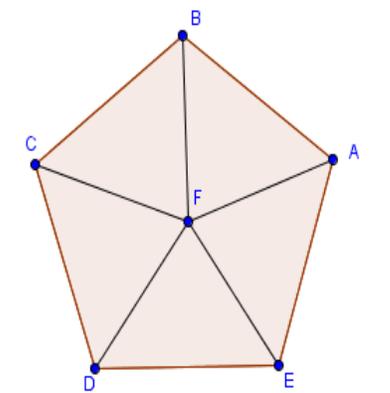
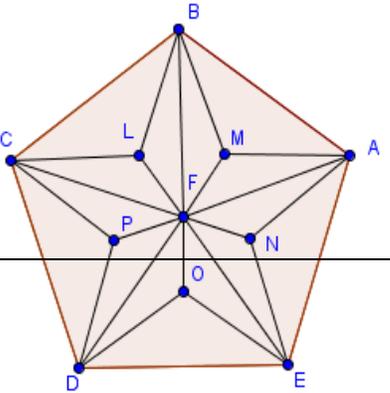


Figura 1. 3. Grafo G

SECCIÓN 2

EL GRADO DE LOS GRAFOS El **Grado de un vértice A** de un grafo es el número de aristas que se conectan con él, se denotará con $g(A)$. Además, se dice que un **vértice es par** si su grado es un número par (ej. 0, 2, 4, 6, 8, ...) y un vértice es impar si su grado es un número impar (ej. 1, 3, 5, 7, 9, ...).

En la siguiente actividad se mostrará algunas cuestiones encontradas al estudiar la secuencia de grafos. Para ello observemos la tabla 2.1:

Grafo 1	Vértice (v)	Grado del vértice (g(v))	Total de aristas
	A	2	5
	B	2	
	C	2	
	D	2	
	E	2	
	Suma de los g(v)	10	
Grafo 2	Vértice (v)	Grado del vértice (g(v))	Total de aristas
	A	3	10
	B	3	
	C	3	
	D	3	
	E	3	
	F	5	
	Suma de los g(v)	20	
Grafo 3	Vértice (v)	Grado del vértice (g(v))	Total de aristas
	A	5	25
	B	5	
	C	5	
	D	5	
	E	5	
	F	5	

	F	10	
	L	3	
	M	3	
	N	3	
	P	3	
	O	3	
	Suma de los g(v)	50	

Tabla 2. 1. Grado de los vertices de cada grafo

Ahora, veamos que en el grafo 1, la suma de los grados de cada vértice, es decir la $\sum_{i=1}^5 g(v_n) = 10$ y el número de aristas es 5, en el grafo 2, la $\sum_{i=1}^6 g(v_n) = 20$ y el número de aristas es 10 y en el grafo 3, la $\sum_{i=1}^{11} g(v_n) = 50$ y el número de aristas es 25, entonces se obtiene una relación entre la suma de los grados de los vértices y el número total de aristas del grafo.

Es decir; Si $g(v)$ es el grado del vértice de un grafo y la suma de estos la representamos como $\sum_{i=1}^n g(v_n) = m$, donde n es el número de vértices, por tanto el número de aristas a del grafo se determina por medio de la expresión $a = \frac{m}{2}$, luego $\sum_{i=1}^n g(v_n) = 2a$. Esto ocurre porque al realizar el conteo del grado de cada vértice se cuenta dos veces cada arista, por eso es necesario dividir en dos la suma de los grados del grafo para obtener el número de aristas.

Con lo que se obtiene que la suma de los grados de los vértices del grafo es dos veces el número de aristas del grafo.

Ahora veamos que sucede si contamos el número de vértices impares que hay en la secuencia de grafos anterior. Pues para el grafo 1 hay 0 vértices impares, para el grafo 2 los vértices A, B, C, D, E, F son impares, luego hay 6 vértices impares y para el grafo 3 los vértices A, B, C, D, E, G, H, I, J, K, L, M, N, O son impares, luego hay 16 vértices impares.

Hasta el momento el total ,; ha sido un número par el total de vértices impares. ¿Será que con los demás vértices impares para los siguientes grafos de la secuencia, pasará lo mismo? Veamos que sucede para los grafos 4 y 5 si continuamos con la secuencia de grafos de la tabla 2.1

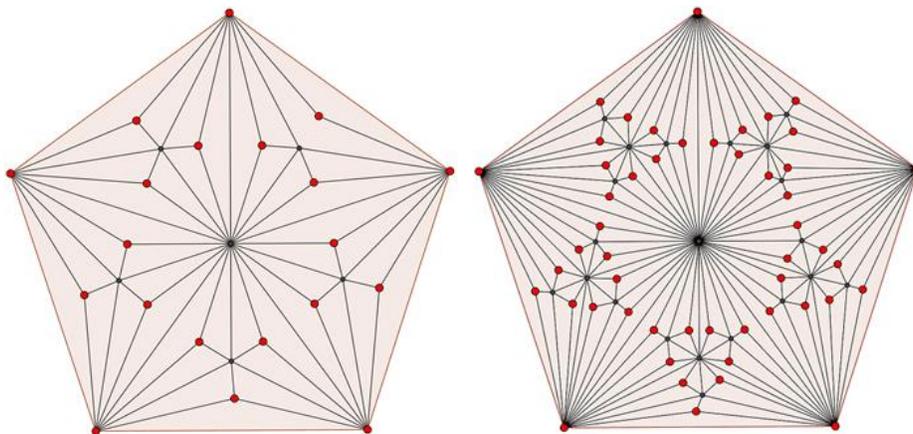


Figura 2. 1..Grafo 4 y grafo 5

Si pintamos los vértices impares de rojo (figura2.1) entonces, notamos que el grafo 4 tiene 20 vértices impares y que el grafo 5 tiene 50 vértices impares. se confirma que: Luego se sigue cumpliendo que, es un número par el total de vértices impares. Pero además revisemos en la tabla 2.2 los grados impares que hay en el grafo y la cantidad de vértices que hay para cada grado impar:

Grafo	Grados impares	Número de vértices por grado impar respectivamente	Total de vértices impares del grafo
1	0	0	0

2	3, 5	$5 + 1$	6
3	3, 5	$5 + 5$	10
4	3, 9	$15 + 5$	20
5	3, 17	$45 + 5$	50

Tabla 2. 2. Número de vértices impares de cada grafo

Notemos entonces que para la secuencia de grafos que hemos venido estudiando el total de vértices con grado impar es impar, luego la suma de $2n$ números impares, es un número par. Por ello qué, es un número par el total de vértices impares en la secuencia de grafos.

Pero de manera general recordemos que la $\sum g(v_n)$ es el doble de las aristas, siendo es decir que de esta suma resulta un número par. Por ende, la suma de los grados de vértices pares y la suma de los grados de vértices impares, es un número par. Pero además la suma de los grados de los vértices pares es siempre un número par, porque la suma de números pares es par, con lo que se concluye que, la suma de los grados de vértices impares debe de ser un número par

2.1

Un problema clásico en el conteo es el “*apretón de manos*”. Este consiste en ser que cada una saluda a otra con un apretón de manos,

Llamaremos grafos K_n a aquellos grafos que utilizamos para esta situación figura 2.2 D

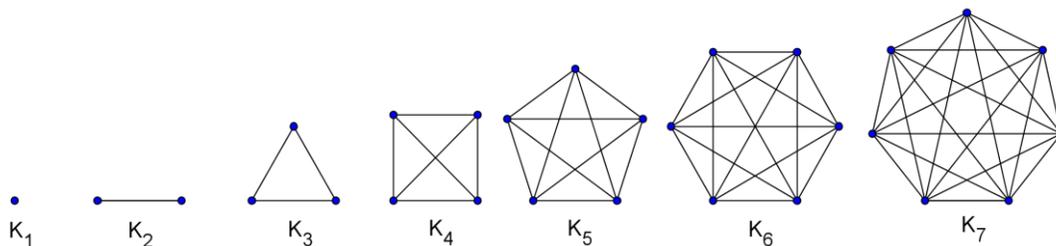


Figura 2. 2. Representación del problema del apretón de manos

Como persona saluda con exactamente un apretón de mano, a cada una de las otras personas que asistieron a la fiesta, se puede observar en la figura 2.2 que cada constrictamente.

Una forma de resolver la situación consiste en realizar e lasección ara esto se halla el grado de cada vértice, perodel grafo K_n , bunode del grafo K_n se ue

			$\sum g(v_n)$	
K_1			$1 \cdot 0 = 0$	
K_2			$2 \cdot 1 = 2$	
K_3			$3 \cdot 2 = 6$	
K_4			$4 \cdot 3 = 12$	
K_5			$5 \cdot 4 = 20$	
K_6			$6 \cdot 5 = 30$	
K_7			$7 \cdot 6 = 42$	

Tabla 2. 3. Número de aristas de cada grafo

S el número de aristas que salen de cada vértice es (ya que una persona no se saluda a ella misma)o que representa el número de apretones de mano que cada persona da, en total, $n(n - 1)$, lo cual representa la suma de los grados de los vértices del grafo. Según hemos visto en la sección anterior, este número debe ser dividido entre dos para así obtener el número total de aristas, en nuestro ejemplo, el número total de apretones de mano, por tanto,

$$a = \frac{n(n - 1)}{2} \quad [T 2. 1]$$

Es el total de apretones de mano o el número de aristas del grafo considerado. Esta secuencia de grafos utilizada en esta situación se conoce como *grafos completos*. Son aquellos en los que cada vértice se conecta con cada uno de los demás vértices, por medio de exactamente una arista. Si el grafo tiene n vértices se denota con K_n .

Otra forma de visualizar esta situación por medio de grafos se muestra en la figura 2.3 donde las personas se representan con puntos organizados de manera lineal y los arcos representan los apretones de mano que cada persona da a los demás. Por ejemplo, en el grafo A_4 para saber cuántos apretones de mano se dan 4 personas, la primera persona da tres apretones de mano, que son las aristas de color morado, la segunda persona como ya se saludó con la primera, saluda a las otras dos, que son las aristas de color azul y finalmente la tercera persona solo le falta saludar a la cuarta persona, que es la arista de color rojo.

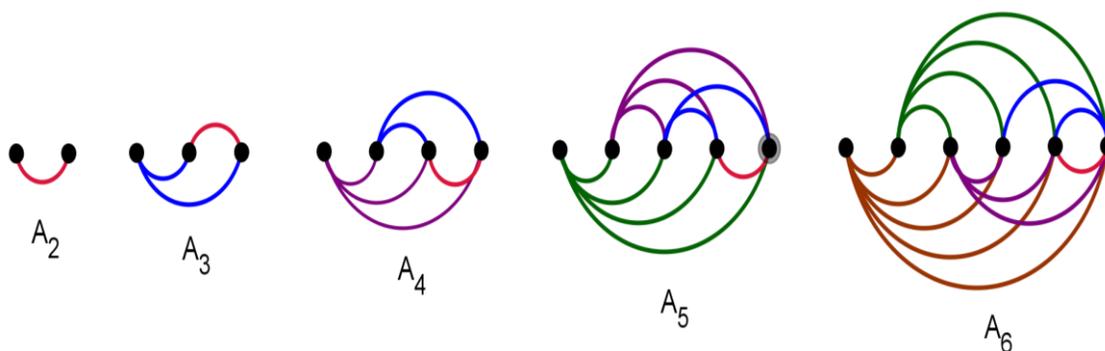


Figura 2. 3. Otra representación del problema del apretón de manos

Notemos que esta representación a simple vista no se parece a la mostrada en la figura 2.2 pero ellas dos representan lo mismo. Precisamente estas dos secuencias de grafos son denominados *grafos isomorfos*, porque si se toma un grafo con el mismo número de vértices de cada secuencia, deben de tener el mismo número de aristas y las mismas conexiones entre los vértices a pesar de que en apariencia no se vean similares. Precizando, los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son *isomorfos* si hay una función biyectiva f desde V_1 a V_2 con la propiedad que a y b son adyacentes en G_1 si y solo si $f(a)$ y $f(b)$ son adyacentes en G_2 , para todo a y b en V_1 .

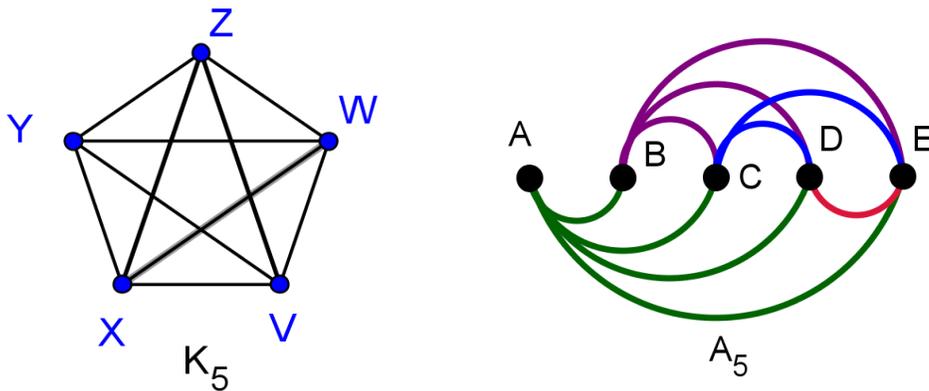


Figura 2. 4. Grafos isomorfos

Así por ejemplo, los grafos $K_5 = (V_1, E_1)$ y $A_5 = (V_2, E_2)$ (figura 2.4) son isomorfos pues existe una función biyectiva $f: V_1 \rightarrow V_2$, tal que $f(V) = A, f(X) = B, f(Y) = C, f(Z) = D$ y $f(W) = E$. Con la que se conserva la adyacencia entre los vértices.

Como los grafos K_n y A_n son isomorfos, entonces utilizando los grafos A_n se deduce otra forma de solucionar la situación que se ha venido estudiando. Notemos que en la tabla 2.4 las aristas de dichos grafos se juntaron por colores, precisamente para mostrar que las aristas se pueden agrupar de forma similar a la representación de los números triangulares, por tanto utilizando una expresión similar a la de los números triangulares se puede determinar el número de apretones de mano para n personas que asistan a la reunión.

Recordemos que los números triangulares son el resultado de sumar los primeros n números naturales, se simbolizan con T_n y cuya expresión es

$$T_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{[T 2.2]}$$

Número de personas	Representación de la situación con un grafo	Número de apretón de manos (aristas)	Número triangular
2		$1 = T_1$	 T_1

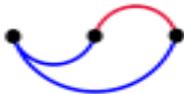
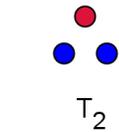
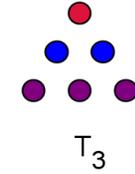
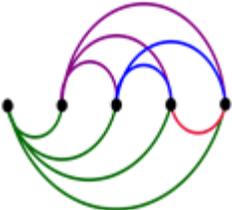
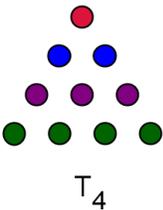
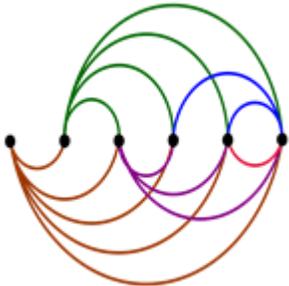
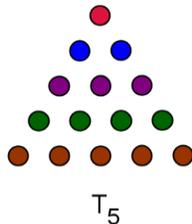
3		$3 = 1 + 2 = T_2$	 T_2
4		$6 = 1 + 2 + 3 = T_3$	 T_3
5		$10 = 1 + 2 + 3 + 4 = T_4$	 T_4
6		$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = T_5$	 T_5

Tabla 2. 4. Relación entre la representación de los grafos y los números triangulares

Ahora como se quiere comprobar que con los grafos que se muestran en la tabla se llega a la expresión [T 2.1], notemos que si :para $n = 2$ el triangular que le corresponde es $T_1 = 1$, para $n = 3$ es $T_2 = 3$, para $n = 4$ es $T_3 = 6$, luego para n vértices el triangular correspondiente será T_{n-1} . Por tanto utilizando [T 2.2]

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)(n+1-1)}{2}$$

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Entonces como a representa el número de aristas del grafo, con lo que se comprueba la ecuación [T 2.1]

$$a = \frac{(n-1)n}{2}$$

SECCIÓN 3

GRAFOS RECORRIBLES

Recordemos que en capítulos atrás había mencionado el problema de los puentes de Königsberg, que consistía en darle respuesta a la siguiente pregunta:

¿Es posible, comenzando en cualquier parte de la ciudad de Königsberg elegir un camino que permita pasar, en cualquier orden, una vez por los siete puentes sobre el río Pregel y volver al mismo sitio?

Euler hizo un modelo matemático del problema, el cual despojó de hechos como la longitud de los puentes, o el área de cada región y se concentró solo en la información más relevante. Es decir en la relación entre las ciudades y los puentes, nombrando a cada ciudad como un punto y a cada puente simplemente como una línea que une dos ciudades, como observamos en la figura 3.1.

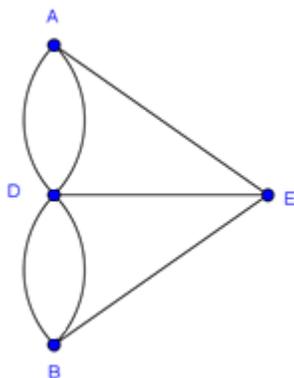


Figura 3. 1. Grafo utilizado para representar la situación de los puentes de Königsberg. Para el caso de los puentes de Königsberg el grafo despoja de toda información irrelevante al problema y por ende se puede cambiar la pregunta por la siguiente:

¿Es posible trazar el grafo sin despegar el lápiz del papel y sin volver a trazar alguna arista?

Para conocer la solución propuesta por Euler a este problema, antes se estudian los siguientes grafos para dar respuesta a las siguientes preguntas.

¿Será posible trazar los siguientes grafos sin levantar el lápiz del papel y sin volver a trazar ninguna arista? De ser así, ¿Cuáles terminan en el punto de inicio? ¿Cuáles en un punto distinto al de inicio?

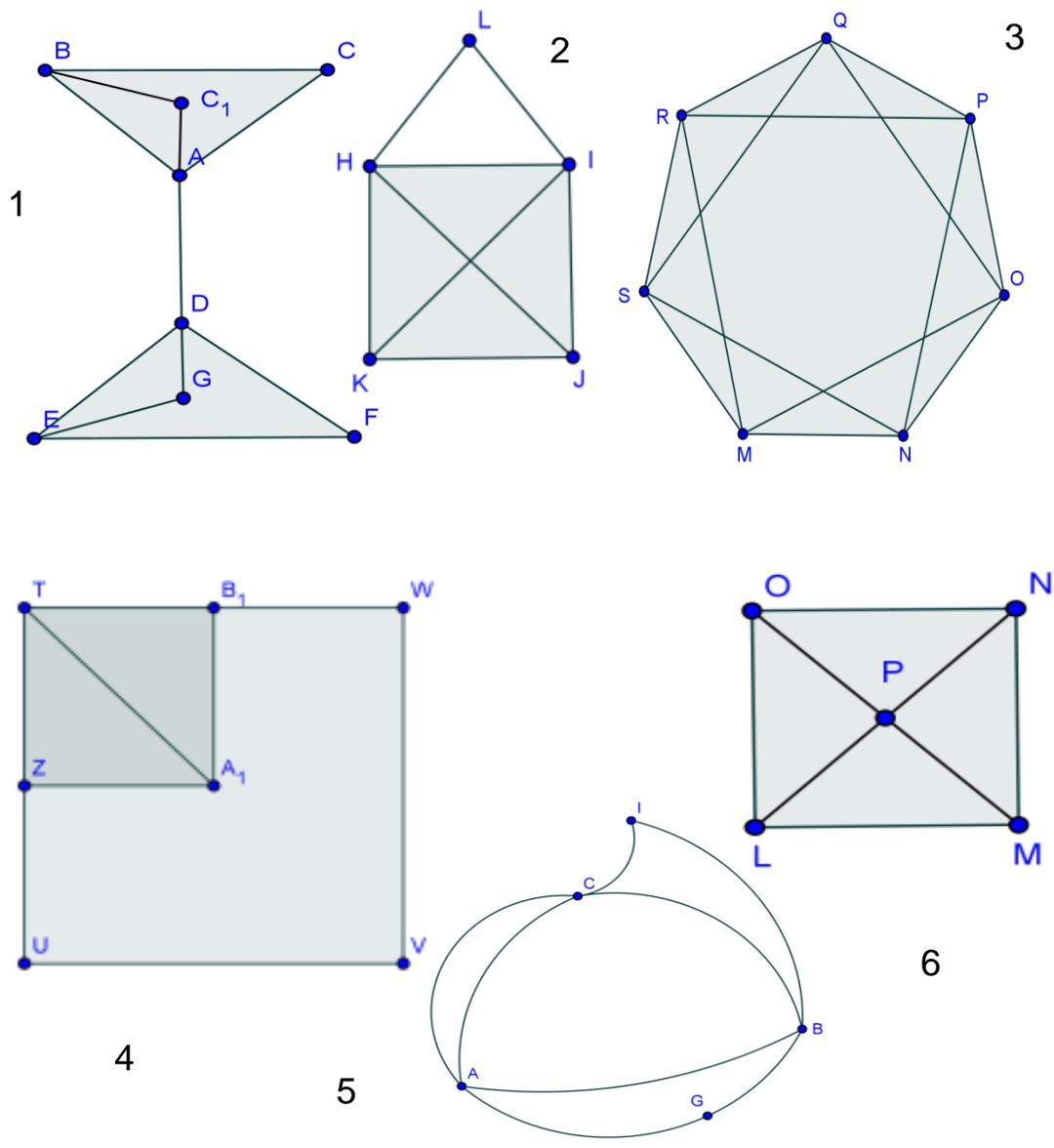


Figura 3. 2. ¿Serán Grafos recorribles?

Para intentar dar respuesta a estas preguntas, observemos la siguiente tabla:

Grafo	Vértices	Total	Vértices	Total	Grafo	Termina	Termina en
-------	----------	-------	----------	-------	-------	---------	------------

	grado par	vértices pares	grado impar	vértices impares	recorrible	en el punto de inicio	un punto distinto al de inicio
1	C, C ₁ , A, D, G, F	6	B, E	2	SI	NO	SI
2	L, H, I	3	K, J	2	SI	NO	SI
3	M, N, O, P, Q, R, S	7	NINGU NO	0	SI	SI	NO
4	W, V, U, T,	5	A ₁ , Z, B ₁	3	NO	NO	NO
5	A, B, C, G, I	5	NINGU NO	0	SI	SI	NO
6	P	1	O, M, L, N	4	NO	NO	NO

Tabla 3. 1. Grafos que son recorribles con sus respectivas condiciones

Veamos que los grafos de la tabla 3.1 se pueden clasificar en tres casos:

1. Los grafos 3 y 5 pueden trazar un camino pasando por todos los vértices, sin pasar dos veces por una misma arista, en los que coincide el punto inicial y el final del recorrido, Además observamos que el grado de todos los vértices de estos grafos es par. Por lo cual se puede pensar que para que un grafo sea recorrible y coincida el punto inicial y el final, debe tener exactamente todos los vértices con grado par.
2. Los grafos 1 y 2 pueden trazar un camino pasando por todos los vértices, sin pasar dos veces por una misma arista, en los que el punto final del recorrido es distinto del punto inicial. Además se observa que tiene exactamente dos vértices con grado impar. Por lo cual se puede pensar que para que un grafo sea recorrible y el punto inicial sea distinto al final, debe de tener exactamente dos vértices de grado impar; además los puntos donde inicia y termina el recorrido deben de ser los dos vértices impares.

3. Los grafos 4 y 6 no son recorribles y no cumplen algunas de las cualidades descritas en los apartados anteriores.

Antes de explicar los casos encontrados con la anterior actividad se definen los siguientes términos, pues serán utilizados en adelante: Una **Trayectoria de Euler** es un camino que pasa por todos los vértices y recorre todas las aristas de un grafo, sin cruzar dos veces por una misma arista. Análogamente, un **Circuito de Euler** es un camino que pasa por todos los vértices y recorre todas las aristas de un grafo, sin cruzar dos veces por una misma arista, además, el punto de partida y el de llegada; son el mismo (Niño & Ramírez, 2008).

Ahora bien, los casos descritos en los literales anteriores fueron los resultados descubiertos por Euler al realizar el estudio del problema de los puentes Königsberg. Así, en términos de la teoría de grafos, estos resultados dicen lo siguiente:

1. Si todos los vértices de un grafo tienen grado par, entonces hay por lo menos un circuito de Euler.

Es decir, para recorrer un grafo de manera que el camino que se lleve cruce una sola vez cada arista es necesario que cada vez que el recorrido tome una arista para ir a un vértice haya otra arista distinta que permita salir y así continuar con el recorrido. De esta forma, si un vértice tiene grado par entonces el número de aristas que salen es igual al número de aristas que entran, por lo tanto ese vértice será un punto inicial y a la vez final, luego el recorrido será un circuito de Euler.

2. Si un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces tiene por lo menos una trayectoria de Euler. Cualquier trayectoria de Euler debe iniciar en uno de los vértices de grado impar y terminar en el otro.

Análogamente al primer caso, para el segundo, si se recorre un grafo de manera que el camino que se lleve cruce una sola vez cada arista es necesario que cada vez que el recorrido tome una arista para ir a un vértice haya otra arista distinta que permita salir y así

continuar con el recorrido. Pero, si un vértice tiene grado impar entonces hay una arista de más que sale del vértice que las que entran a él, o viceversa, convirtiendo al vértice en un punto final o inicial. Por lo que, se necesitan a lo más dos vértices impares para que se realice una trayectoria de Euler.

Finalmente, utilizando los aspectos explicados anteriormente se mostrará la solución al problema de los puentes de Königsberg

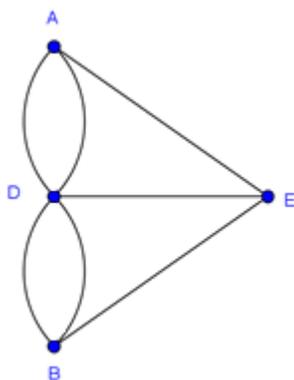


Figura 3. 3. Grafo realizado por Euler para resolver el problema de los puentes de Königsberg

Veamos, el grafo asociado a esta situación tiene en total cuatro vértices, el vértice A tiene grado 3, el B grado 3, el D grado 5 y el E grado 3, es decir, que todos los vértices son de grado impar por lo cual es imposible visitar las cuatro ciudades cruzando cada puente una sola vez.

SECCIÓN 4

COLORACIÓN DE GRAFOS

Un aspecto interesante en el estudio de los grafos, es conocer cuál es el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de un grafo de manera que dos vértices adyacentes no queden con el mismo color y se utilice el mínimo número de colores. Este

proceso se llama coloración del grafo y tal número se conoce como *número cromático* de un grafo G , se simboliza como $\chi(G)$.

En esta sección se utiliza la coloración para estudiar grafos que particularmente tienen forma de polígono, por ello se utilizará la notación $G_{l,n}$ para referirnos al n -ésimo grafo de forma l -poligonal. Por ejemplo $G_{3,5}$ es el quinto grafo de forma triangular (forma de polígono de tres lados). Inicialmente se identifica el número cromático de los grafos a estudiar como estrategia para hacer el conteo de las aristas y los vértices. Por lo que, se utilizará la notación $V_{l,n}$ para referirnos al número total de vértices del n -ésimo grafo de forma l -poligonal y $a_{l,n}$ para referirnos al número total de aristas del n -ésimo grafo de forma l -poligonal. Pero además se utilizan otras formas de colorear los vértices, como estrategia, para determinar distintas maneras de hacer conteo.

4.1 COLORACIÓN DE GRAFOS $G_{3,n}$

4.1.1 GRAFOS $G_{3,n}$

Los grafos $G_{3,n}$ tienen forma triangular, por ejemplo el grafo $G_{3,1}$ tiene tres vértices que al trazar las aristas entre estos forman un triángulo. El grafo $G_{3,2}$ tiene igualmente tres vértices en forma triangular, pero a diferencia del primero, los puntos medios de los lados del triángulo son otros vértices, al trazar las aristas entre estos se forman cuatro triángulos. El grafo $G_{3,3}$ tiene igualmente tres vértices en forma triangular que a diferencia del segundo, cada uno de los lados se divide en tres partes iguales, ubicando en las divisiones otros vértices al trazar las aristas se forman nueve triángulos. Si se continúa con este patrón se genera la secuencia de grafos de la Figura 4.1. Notemos que $\chi(G_{3,n}) = 3$, por tanto se utilizan tres colores para colorear los vértices.

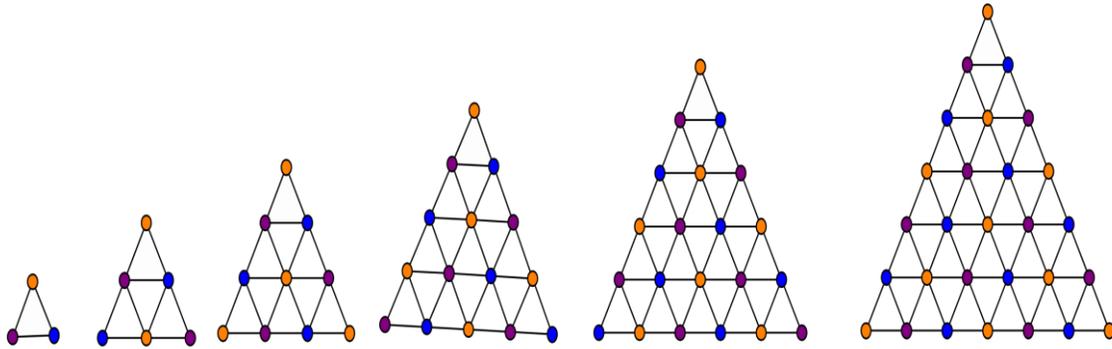


Figura 4. 1. Coloración de los Grafos $G_{3,n}$

4.1.1.1 CONTEO DE VÉRTICES

Como estrategia para realizar el conteo de vértices de cada grafo $G_{3,n}$, en la tabla 4.1 se clasifican los vértices por color de acuerdo a la figura 4.1.

Colores de los vértices	$G_{3,1}$	$G_{3,2}$	$G_{3,3}$	$G_{3,4}$	$G_{3,5}$	$G_{3,6}$	$G_{3,7}$	$G_{3,8}$
Naranja	1	2	4	5	7	10	12	15
Azul	1	2	3	5	7	9	12	15
Morado	1	2	3	5	7	9	12	15
Total vértices	3	6	10	15	21	28	36	45

Tabla 4. 1. Conteo de vértices por color

Observemos que de la suma de los vértices naranja, azul y morado se obtiene la secuencia de los números triangulares T_n , a partir de T_2 . Pues:

$$V_{3,1} = T_2 = 3$$

$$V_{3,2} = T_3 = 6$$

$$V_{3,3} = T_4 = 10$$

$$V_{3,4} = T_5 = 16$$

$$V_{3,5} = T_6 = 21$$

⋮

$$V_{3,n} = T_{n+1}$$

Por ello el total de vértices $V_{3,n}$ de cada $G_{3,n}$ es:

$$V_{3,n} = T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad [T \ 4.1]$$

Al observar los vértices en los grafos de manera horizontal, se percibe que se encuentran organizados como los primeros números naturales, esto es 1, 2, 3, 4, 5, ..., n , cuya suma origina los números triangulares.

4.1.1.2 CONTEO DE ARISTAS

En la secuencia de grafos G_n se observa que los triángulos que se forman con los vértices se pueden clasificar en dos tipos: los triángulos con la punta hacia arriba y los triángulos con la punta hacia abajo, según como se muestra en la Figura 4.2:

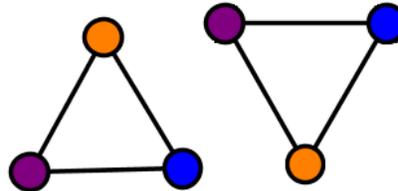


Figura 4. 2. Triángulo con la punta hacia arriba y Triángulo con la punta hacia abajo respectivamente

Así, en la tabla 4.2 se muestra el número de estos triángulos para cada grafo de la secuencia (Figura 4.3)

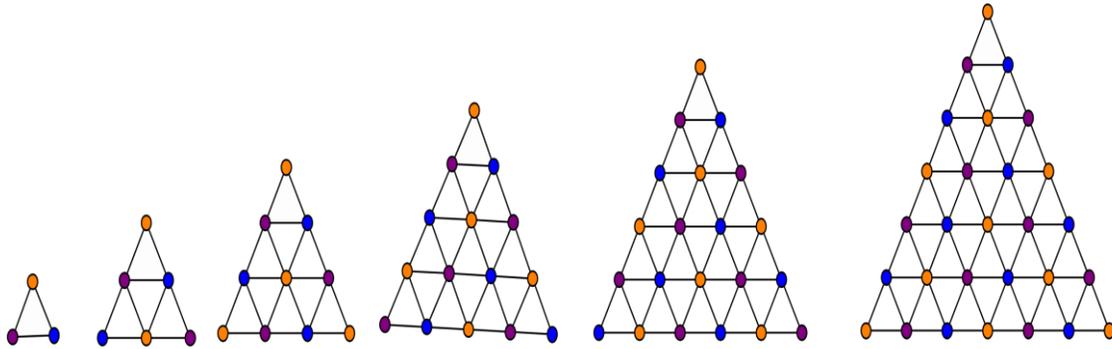


Figura 4. 3. Grafos $G_{3,n}$

Grafo	# triángulos punta hacia arriba	# triángulos punta hacia abajo	Total de triángulos
$G_{3,1}$	1	0	1
$G_{3,2}$	3	1	4
$G_{3,3}$	6	3	9
$G_{3,4}$	10	6	16
$G_{3,5}$	15	10	25
$G_{3,6}$	21	15	36
⋮	⋮	⋮	⋮
$G_{3,n}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n-1)n}{2}$	n^2

Tabla 4. 2. Conteo de triángulos de los Grafos $G_{3,n}$

De la tabla 4.2 se concluye que en la posición n , el número de triángulos que se forman en cada grafo con la punta hacia arriba es el triangular n -ésimo y el número de triángulos con la punta hacia abajo son el $(n - 1)$ -ésimo triangular. Además el número total de estos triángulos es el número cuadrado C_n . Por tanto se concluye que la suma de dos números triangulares sucesivos es un número cuadrado.

Para hacer el conteo de aristas, solo utilizamos los grafos de forma triangular con la punta hacia arriba que tienen **3** aristas. Utilizando los resultados de la tabla 4.2 en la tabla 4.3 para hallar el total de aristas para cada grafo $G_{3,n}$ así:

Grafo	# aristas en triángulos punta hacia arriba	Total de aristas
$G_{3,1}$	$1 \cdot (6) = 6$	6
$G_{3,2}$	$3 \cdot (6) = 18$	18
$G_{3,3}$	$6 \cdot (6) = 36$	36
$G_{3,4}$	$10 \cdot (6) = 60$	60
$G_{3,5}$	$15 \cdot (6) = 90$	90
$G_{3,6}$	$21 \cdot (6) = 126$	126
⋮	⋮	⋮
$G_{3,n}$	$6 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$	$3[n(n+1)]$

Tabla 4. 3.Número de aristas de los Grafos $G_{3,n}$

Finalmente para el grafo $G_{3,n}$ el número de aristas $a_{3,n}$ se encuentra con la expresión

$$a_{3,n} = 6 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = 3[n(n+1)] \quad [T 4. 2]$$

4.1.2 GRAFOS $G_{3,n}^*$

La secuencia de Grafos $G_{3,n}^*$ es análoga a la del apartado anterior, con la diferencia que, en el interior de cada triángulo se ubica un vértice y se trazan las aristas desde los vértices del triángulo al nuevo vértice, tal como se muestra en la Figura 4.4.

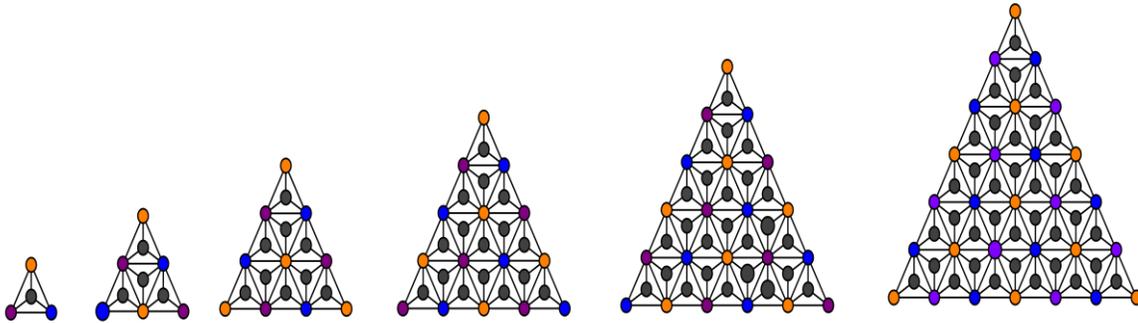


Figura 4. 4. Coloración Grafos $G_{3,n}^*$

Notemos que $\chi(G_{3,n}^*) = 4$, por lo cual para colorear los vértices se utilizarán cuatro colores, pero con la condición, de que el vértice que se encuentra en el interior de cada triángulo se pinta del mismo color, para este caso negro. Luego con esta secuencia de grafos continuamos el conteo de vértices y aristas.

4.1.2.1 CONTEO DE VÉRTICES

- **Primera forma**

En analogía con la forma de contar los vértices de los grafos $G_{3,n}$, para este caso se pintaran los vértices que no son negros de color verde, como se muestra en la Figura 4.5 y en la Tabla 4.4 se hace el conteo de los vértices para cada color.

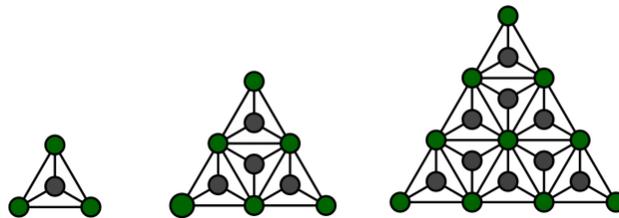


Figura 4. 5. Primera estrategia de contar vértices en los grafos $G_{3,n}^*$

Colores de los vértices	$G_{3,1}$	$G_{3,2}$	$G_{3,3}$	$G_{3,4}$	$G_{3,5}$
Negro	1	4	9	16	25
Naranja + Azul + Morado	3	6	10	15	21

Tabla 4. 4. Secuencia números cuadrados y números triangulares

De la fila de vértices de color negro se obtiene la secuencia 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2 que es la secuencia de números cuadrados C_n y como ya se había mostrado, en la fila de vértices de color verde se obtienen los números triangulares T_n , a partir de T_2 . Si se observa los vértices negros de forma horizontal, notamos que se encuentran organizados como los primeros números impares, esto es 1,3,5,7,9,..., $2n + 1$, por ello se genera la secuencia de los números cuadrados. Además, los vértices de otros colores (en este caso verdes) se encuentran organizados como los primeros números naturales, esto es 1, 2, 3, 4, 5, ... , n , los que originan los números triangulares.

De manera general para $G_{3,n}^*$ el total de vértices $V_{3,n}^*$ esta dado por la siguiente expresión.

$$V_{3,n}^* = C_n + T_{n+1}$$

Utilizando las expresiones para C_n y T_{n+1}

$$V_{3,n}^* = n^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad [T 4. 3]$$

Finalmente simplificando, se obtiene

$$V_{3,n}^* = \frac{3n^2 + 3n}{2} + 1$$

- **Segunda forma**

Otra estrategia que se utilizó para contar los vértices de $G_{3,n}^*$, fue pintar los vértices utilizando tres³ colores como se muestra en la figura 4.6. En la tabla 4.5 se muestra el número de vértices de cada color para cada grafo.

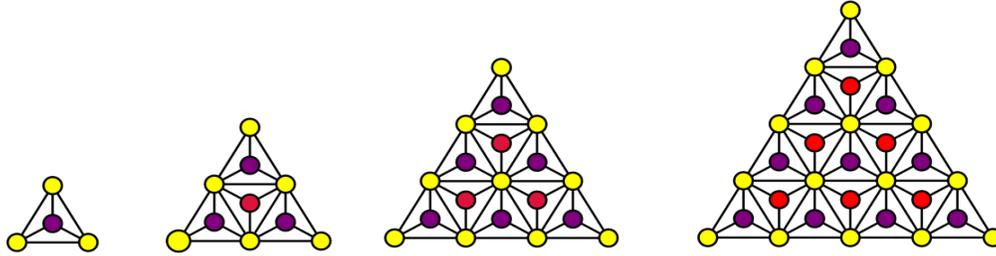


Figura 4. 6. Segunda estrategia para contar los vértices

	$G_{3,1}$	$G_{3,2}$	$G_{3,3}$	$G_{3,4}$...	$G_{3,n}$
Rojo	0	1	3	6	...	$\frac{(n-1)n}{2}$
Morado	1	3	6	10	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
Amarillo	3	6	10	15	...	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Tabla 4. 5. Secuencia de triangulares consecutivos

Notemos que con esta distribución de los colores, el número de vértices se obtiene de la suma de tres números triangulares consecutivos, así:

$$V_{3,1}^* = 0 + 1 + 3 = T_0 + T_1 + T_2$$

$$V_{3,2}^* = 1 + 3 + 6 = T_1 + T_2 + T_3$$

$$V_{3,3}^* = 3 + 6 + 10 = T_2 + T_3 + T_4$$

⋮

³ Cabe recalcar que $\chi(G_{3,n}) = 4$, pero utilizamos tres colores como estrategia para contar los vértices.

$$V_n = T_{n-1} + T_n + T_{n+1}$$

Entonces $V_{3,n}^*$ para el grafo $G_{3,n}^*$ se expresa de la siguiente manera:

$$V_{3,n}^* = T_{n-1} + T_n + T_{n+1}$$

$$V_{3,n}^* = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad [T\ 4.4]$$

$$= \frac{3n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n}{2} + 1$$

- **Tercera forma**

Por otro lado, si se divide cada grafo de la secuencia $G_{3,n}^*$ en tres partes como se observa en la figura 4.7 se obtiene tríos de números triangulares, con lo que se muestra otra forma de contar los vértices de dichos grafos.

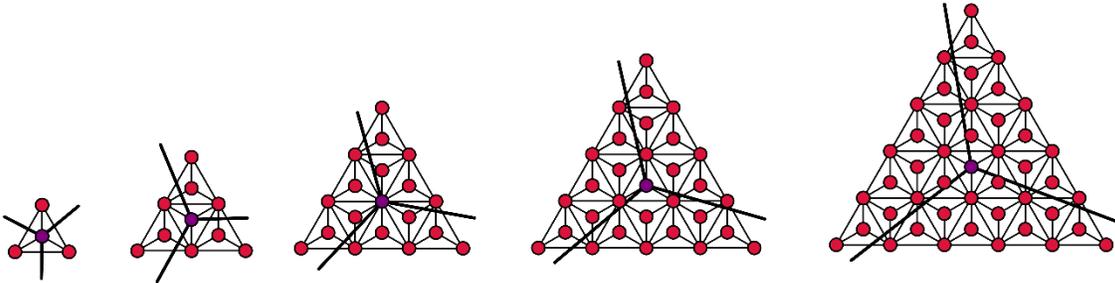


Figura 4. 7. Tríos de triangulares en los $G_{3,n}^*$

De acuerdo a la representación gráfica se evidencia:

$$V_{3,1}^* = 3T_1 + 1 = 3(1) + 1 = 4$$

$$V_{3,2}^* = 3T_2 + 1 = 3(3) + 1 = 10$$

$$V_{3,3}^* = 3T_3 + 1 = 3(6) + 1 = 19$$

$$V_{3,4}^* = 3T_4 + 1 = 3(10) + 1 = 31$$

$$V_{3,5}^* = 3T_5 + 1 = 3(15) + 1 = 46$$

En general el número de vértices $V_{3,n}^*$ del grafo $G_{3,n}^*$ es

$$V_{3,n}^* = 3T_n + 1$$

Por lo que

$$V_{3,n}^* = \frac{3n(n+1)}{2} + 1 \quad [T\ 4.5]$$

$$= \frac{3n^2 + 3n}{2} + 1$$

- **Cuarta forma**

Por último, se pintaron los vértices de cada grafo de distintos colores para distinguir la secuencia que se muestra en la figura 4.8. Pues a partir del número de vértices del primer grafo, el siguiente aumenta en un múltiplo de 3 el número de vértices.

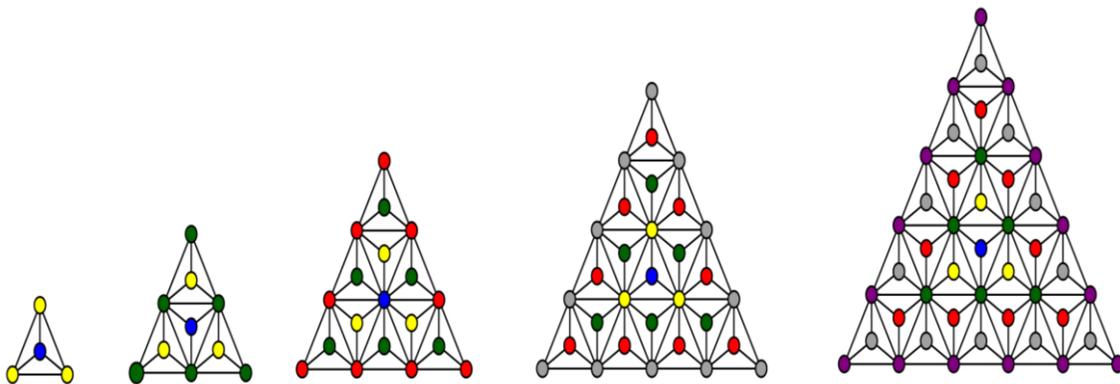


Figura 4. 8. Secuencia $3n$ en los vértices en $G_{3,n}^*$

De acuerdo a la representación gráfica se evidencia:

$$V_{3,1}^* = 1 + 3 = 4$$

$$V_{3,2}^* = 1 + 3 + 6 = 10$$

$$V_{3,3}^* = 1 + 3 + 6 + 9 = 19$$

$$V_{3,4}^* = 1 + 3 + 6 + 9 + 12 = 31$$

⋮

$$V_{3,n}^* = 1 + 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 3n$$

Factorizando la expresión anterior

$$V_{3,n}^* = 1 + 3(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$$

Teniendo en cuenta que la suma de los primeros n números naturales es la secuencia de los T_n , se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} V_{3,n}^* &= 1 + 3 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] && [T 4.6] \\ &= 1 + \frac{3n^2 + 3n}{2} \end{aligned}$$

4.1.2.2 CONTEO DE LAS ARISTAS

- **Primera forma**

Para el conteo de las aristas en los $G_{3,n}^*$ se utiliza una estrategia análoga a la de los grafos $G_{3,n}$, pues allí se clasificaron los triángulos que se forman con los vértices de color distinto al negro en dos tipos: los triángulos con la punta hacia arriba y los triángulos con la punta hacia abajo (Figura 4.9).

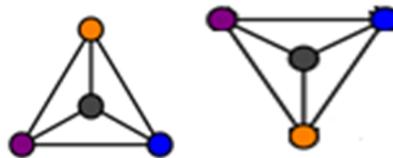


Figura 4. 9. Triángulo con la punta hacia arriba y Triángulo con la punta hacia abajo respectivamente

Por tanto haciendo uso de la tabla 4.2 en la que se mostró el conteo de los triángulos de cada tipo y teniendo en cuenta que los grafos de forma triangular con la punta hacia arriba tienen **6** aristas y los grafos de forma triangular con la punta hacia abajo tienen **3** aristas, se

obtiene la tabla 4.6. En la que, de manera general se muestra el conteo de aristas de acuerdo a la figura 4.10.

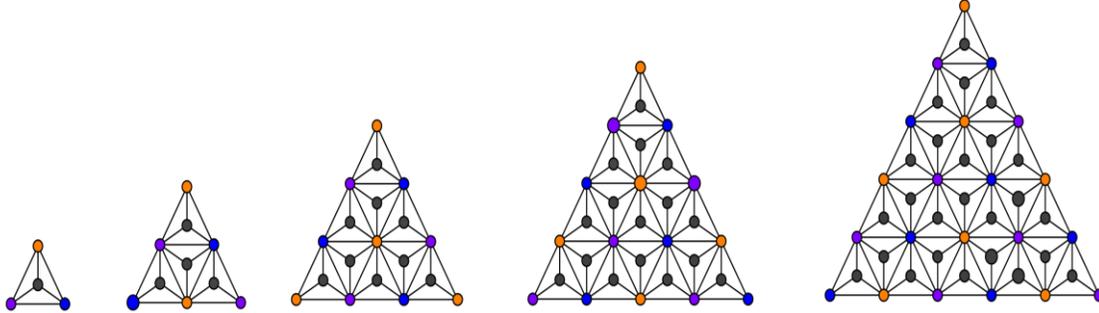


Figura 4. 10. Grafos $G_{3,n}^*$

Grafo	# aristas en triángulos punta hacia arriba	# aristas en triángulos punta hacia abajo	Total de aristas
$G_{3,1}^*$	$1 \cdot (6) = 6$	$0 \cdot (3) = 0$	6
$G_{3,2}^*$	$3 \cdot (6) = 18$	$1 \cdot (3) = 3$	21
$G_{3,3}^*$	$6 \cdot (6) = 36$	$3 \cdot (3) = 9$	45
$G_{3,4}^*$	$10 \cdot (6) = 60$	$6 \cdot (3) = 18$	78
$G_{3,5}^*$	$15 \cdot (6) = 90$	$10 \cdot (3) = 30$	120
$G_{3,6}^*$	$21 \cdot (6) = 126$	$15 \cdot (3) = 45$	171
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$G_{3,n}^*$	$6 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$	$3 \left[\frac{(n-1)n}{2} \right]$	$\frac{3[3n^2 + n]}{2}$

Tabla 4. 6. Conteo general de aristas de $G_{3,n}^*$

Finalmente para el grafo $G_{3,n}^*$ el número de aristas $a_{3,n}^*$ se encuentra con la expresión

$$\begin{aligned}
 a_{3,n}^* &= 6 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + 3 \left[\frac{(n-1)n}{2} \right] && [T 4. 7] \\
 &= \frac{3[3n^2 + n]}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3n(3n + 1)}{2}$$

- **Segunda forma**

También se puede contar las aristas utilizando la relación que se mostró en la sección 2, donde la suma de los grados de los vértices del grafo es igual al doble de las aristas. Para ello se colorea del mismo color los vértices que tienen el mismo grado, como se observa en la figura 4.11.

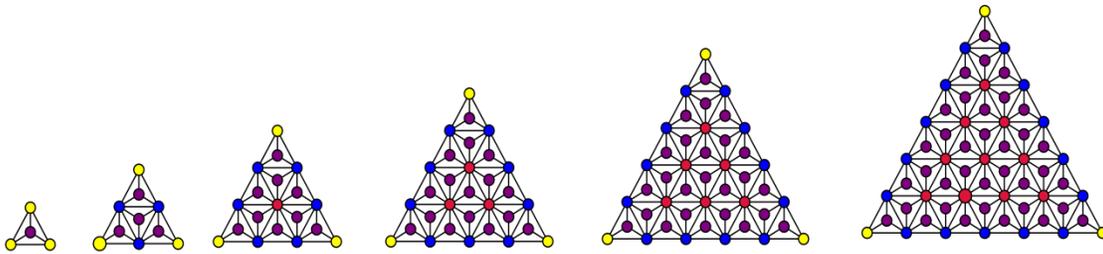


Figura 4. 11. Grado de los vértices en los grafos $G_{3,n}^*$

En la secuencia de grafos de la figura 4.11 los vértices de color amarillo son de grado⁴ 3, los vértices de color morado son de grado 3, los vértices de color azul son de grado 7 y los vértices de color rojo son de grado 12. En la tabla 4.7 se muestra de manera general el conteo de vértices para cada uno de los grados mencionados en cada grafo.

Grafo \ Grado	1	2	3	4	5	6	...	n
3	3	3	3	3	3	3		3
3	1	4	9	16	25	36		$C_n = n^2$
7	0	3	6	9	12	15		$3(n - 1)$
12	0	0	1	3	6	10		$T_{n-2} = \frac{(n - 2)(n - 1)}{2}$

Tabla 4. 7. Conteo general de vértices con grado 3,3,7 y 12

⁴ Los vértices de color amarillo y morado tienen el mismo grado, es decir 3. Pero para identificar regularidades es necesario diferenciarlos y contarlos aparte.

Entonces el número de $a_{3,n}^*$ de un grafo $G_{3,n}^*$ es:

$$2(a_{3,n}^*) = 3(3) + 3n^2 + 7(3(n-1)) + 12\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right) \quad [T 4.8]$$

Simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} a_{3,n}^* &= \frac{9n^2 + 3n}{2} \\ &= \frac{3n(3n + 1)}{2} \end{aligned}$$

4.2 COLORACIÓN DE GRAFOS $G_{4,n}$

4.2.1 GRAFOS $G_{4,n}$

Los grafos $G_{4,n}$ son una secuencia de grafos con forma de polígono regular cuadrado, en los que se realiza el mismo procedimiento que se hizo con los grafos $G_{3,n}$, como se muestra en la figura 4.12. Además el número cromático es $\chi(G_{4,n}) = 2$.

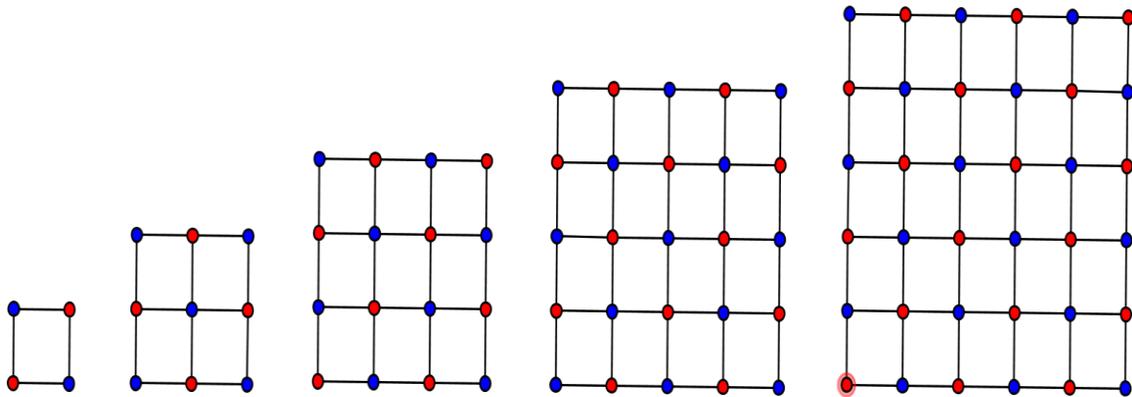


Figura 4. 12. Grafos $G_{4,n}$

4.2.1.1 CONTEO DE VÉRTICES

En la tabla 4.8 se muestra el número de vértices de cada color para la secuencia de grafos anterior

	$G_{4,1}$	$G_{4,2}$	$G_{4,3}$	$G_{4,4}$	$G_{4,5}$	$G_{4,6}$
Rojo	2	4	8	12	18	24
Azul	2	5	8	13	18	25
# total de vértices	4	9	16	25	36	49

Tabla 4. 8. Conteo de vértices por color de $G_{4,n}$

Notemos que de la suma entre el número de vértices rojos con el número de vértices azules se obtiene la secuencia de números cuadrados C_n a partir de C_2 .

Por tanto, el número de vértices $V_{4,n}$ del grafo $G_{4,n}$ es:

$$V_{4,1} = 4 = C_2$$

$$V_{4,2} = 9 = C_3$$

$$V_{4,3} = 16 = C_4$$

⋮

$$V_{4,n} = C_{n+1} = (n + 1)^2 \quad [T 4. 9]$$

4.2.2 GRAFOS $G_{4,n}^*$

La secuencia de Grafos $G_{4,n}^*$ es análoga a la del apartado anterior, con la diferencia que, en el interior de cada cuadrado se ubica un vértice y se trazan las aristas desde los vértices del cuadrado al nuevo vértice, tal como se muestra en la Figura 4.13. Además el número cromático es $\chi(G_{4,n}^*) = 3$.

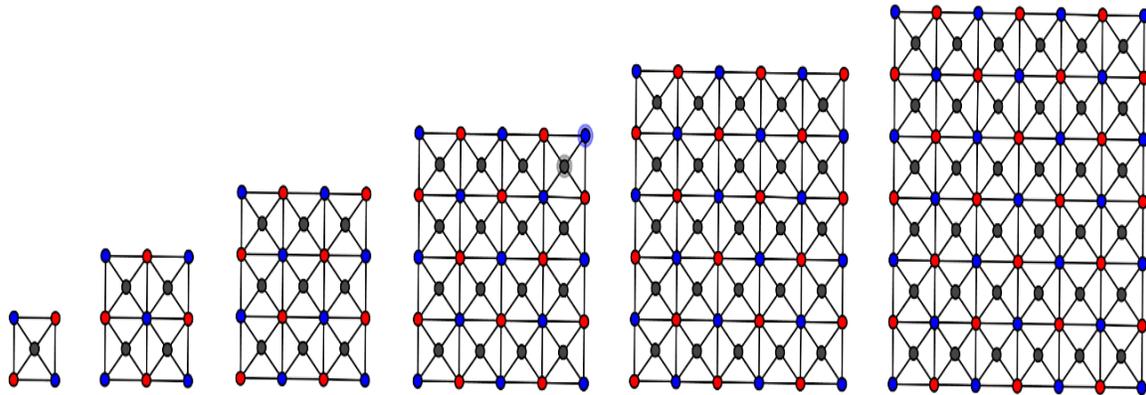


Figura 4. 13. Grafos $G_{4,n}^*$

4.2.2.1 CONTEO DE VÉRTICES

- **Primera forma**

En analogía con la forma de contar los vértices de los grafos $G_{3,n}^*$ y utilizando los resultados de la tabla 4.8 para este caso se pintaran los vértices que no son negros de color verde, como se muestra en la Figura 4.14 y en la Tabla 4.9 se hace el conteo de los vértices para cada color.

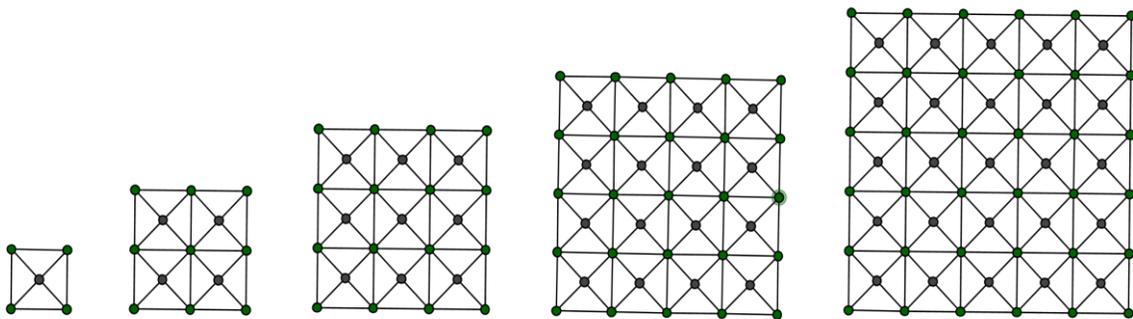


Figura 4. 14. Grafos $G_{4,n}^*$ con vértices verdes y negros

	$G_{4,1}^*$	$G_{4,2}^*$	$G_{4,3}^*$	$G_{4,4}^*$	$G_{4,5}^*$	$G_{4,6}^*$
Negro	1	4	9	16	25	36
Rojo + Azul	4	9	16	25	36	49

Tabla 4. 9. Conteo de vértices verdes y negros de $G_{4,n}^*$

Notemos que en la tabla 4.9 la cantidad de vértices negros en cada grafo corresponde con la secuencia de los números cuadrados C_n . Además, como ya lo habíamos notado en el apartado anterior, el total de vértices de color verde para cada grafo se obtiene también la secuencia de números cuadrados, pero a partir de C_2 .

Por tanto, el número de vértices $V_{4,n}^*$ del grafo $G_{4,n}^*$ es

$$\begin{aligned}
 V_{4,n}^* &= C_n + C_{n+1} \\
 &= n^2 + (n + 1)^2 && [T 4. 10] \\
 &= 2n^2 + 2n + 1
 \end{aligned}$$

- **Segunda forma**

Otra estrategia es, dividir en cuatro partes cada uno de los grafos, buscando equivalencias con los números triangulares, así como se muestra en la figura 4.15.

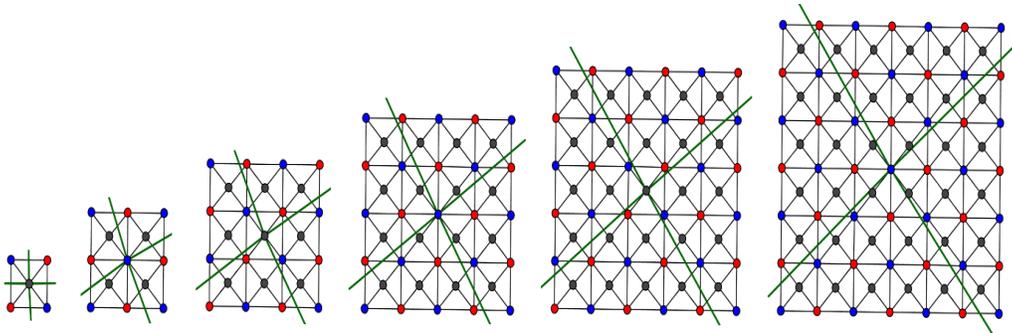


Figura 4. 15. Cuádruples de números triangulares en $G_{4,n}^*$

Con los que se obtuvo cuádruples de números triangulares, pues

$$V_{4,1}^* = 4T_1 + 1 = 4(1) + 1 = 5$$

$$\begin{aligned}
V_{4,2}^* &= 4T_2 + 1 = 4(3) + 1 = 13 \\
V_{4,3}^* &= 4T_3 + 1 = 4(6) + 1 = 25 \\
V_{4,4}^* &= 4T_4 + 1 = 4(10) + 1 = 41 \\
V_{4,5}^* &= 4T_5 + 1 = 4(15) + 1 = 61 \\
V_{4,6}^* &= 4T_6 + 1 = 4(21) + 1 = 85
\end{aligned}$$

Por tanto, el número de vértices para el n-ésimo grafo es

$$V_{4,n}^* = 4T_n + 1$$

$$\begin{aligned}
V_{4,n}^* &= 4 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + 1 && \text{[T 4. 11]} \\
&= 2n^2 + 2n + 1
\end{aligned}$$

- **Tercera forma**

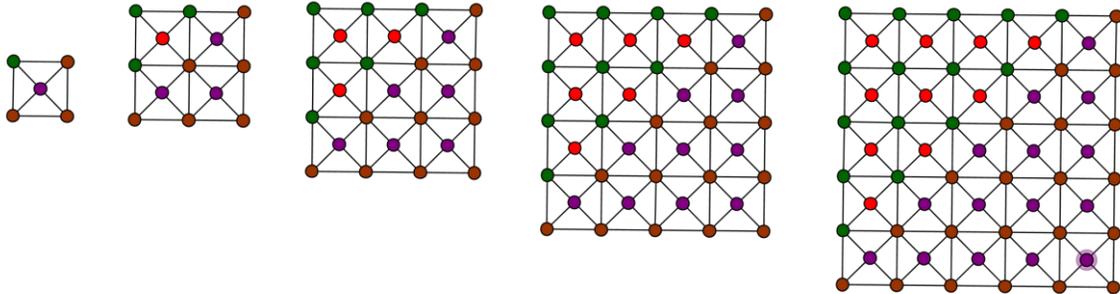


Figura 4. 16. Secuencias de triangulares en los $G_{4,n}^*$

Notemos que en la figura 4.16 se clasifican los vértices por colores, porque de esta forma se visualiza secuencias de números triangulares, pues:

$$\begin{aligned}
V_{4,1} &= 0 + 1 + 1 + 3 = T_0 + T_1 + T_1 + T_2 = 4 \\
V_{4,2} &= 1 + 3 + 3 + 6 = T_1 + T_2 + T_2 + T_3 = 13 \\
V_{4,3} &= 3 + 6 + 6 + 10 = T_2 + T_3 + T_3 + T_4 = 25 \\
V_{4,4} &= 6 + 10 + 10 + 15 = T_3 + T_4 + T_4 + T_5 = 41
\end{aligned}$$

$$V_{4,5} = 10 + 15 + 15 + 21 = T_4 + T_5 + T_5 + T_6 = 61$$

$$V_{4,2} = 15 + 21 + 21 + 28 = T_5 + T_6 + T_6 + T_7 = 85$$

De manera para $G_{4,n}^*$ el número de vértices $V_{4,n}^*$ es

$$V_{4,n}^* = T_{n-1} + 2T_n + T_{n+1} = \frac{(n-1)n}{2} + 2\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad [T\ 4.12]$$

$$V_{4,n}^* = 2n^2 + 2n + 1$$

- Cuarta forma

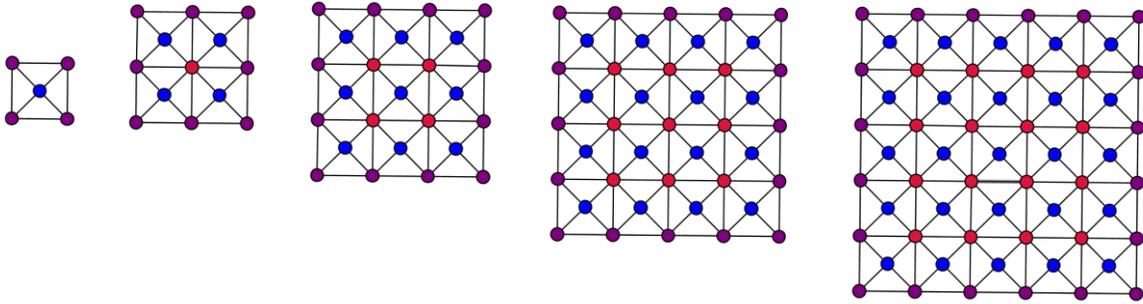


Figura 4. 17. Dos números cuadrados consecutivos $+4n$

En la figura 4.17 los vértices en cada grafo, de color rojo al igual que los de color azul corresponden con la secuencia de los números cuadrados, entonces el total de vértices para el n -esimo grafo es:

$$V_{4,1}^* = 1 + 4 = C_0 + C_1 + 4 = 5$$

$$V_{4,2}^* = 1 + 4 + 8 = C_1 + C_2 + 8 = 13$$

$$V_{4,3}^* = 4 + 9 + 12 = C_2 + C_3 + 12 = 25$$

$$V_{4,4}^* = 9 + 16 + 16 = C_3 + C_4 + 16 = 41$$

$$V_{4,5}^* = 16 + 25 + 24 = C_4 + C_5 + 24 = 61$$

De manera general $V_{4,n}^*$ es

$$V_{4,n}^* = C_{n-1} + C_n + 4n = (n-1)^2 + n^2 + 4n \quad [T 4.13]$$

$$= 2n^2 + 2n + 1$$

- **Quinta forma**

Por último, se pintaron los vértices de cada grafo de distintos colores para distinguir la secuencia que se muestra en la figura 4.18. Pues a partir del número de vértices del primer grafo, el siguiente aumenta en un múltiplo de 4 el número de vértices.

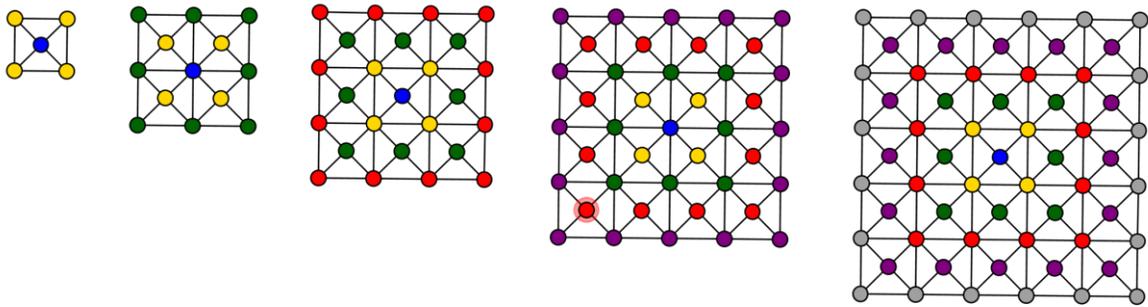


Figura 4. 18. Secuencia $4n$ en los vértices en $G_{4,n}^*$

De acuerdo a la representación gráfica se evidencia:

$$V_{3,1}^* = 1 + 4 = 5$$

$$V_{3,2}^* = 1 + 4 + 8 = 13$$

$$V_{3,3}^* = 1 + 4 + 8 + 12 = 25$$

$$V_{3,4}^* = 1 + 4 + 8 + 12 + 16 = 41$$

⋮

$$V_{3,n}^* = 1 + 4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 4n$$

Factorizando la expresión anterior

$$V_{3,n}^* = 1 + 4(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$$

Teniendo en cuenta que la suma de los primeros n números naturales es la secuencia de los T_n , se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned}
 V_{3,n}^* &= 1 + 4 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] && [T\ 4.14] \\
 &= 1 + 2(n(n+1)) \\
 &= 1 + 2n^2 + 2n
 \end{aligned}$$

4.2.2.2 CONTEO DE ARISTAS

- **Primer forma**

Por otro lado, para contar las aristas de los grafos $G_{4,n}^*$ se utiliza la relación que se mostró en la sección 2, donde la suma de los grados de los vértices del grafo es igual al doble de las aristas. Para ello se pintan del mismo color, los vértices del grafo que tienen el mismo grado. Como se observa en la Figura 4. 19.

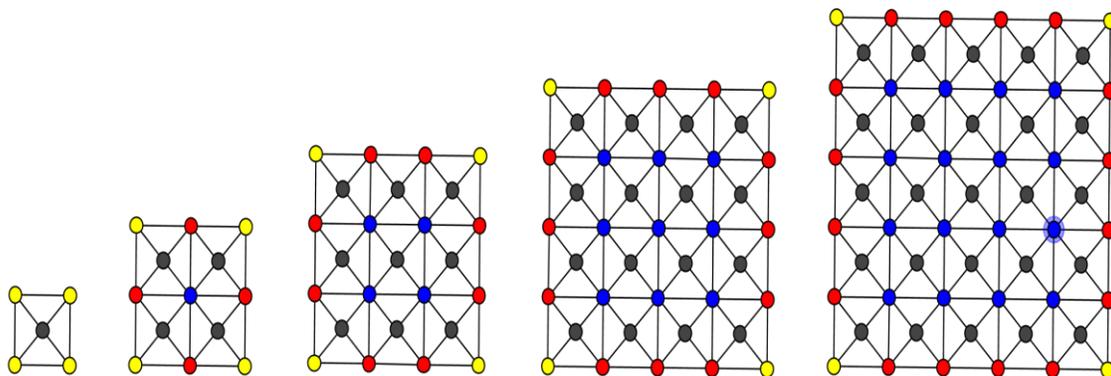


Figura 4. 19. Grado de los vértices en los $G_{4,n}^*$

Veamos que, los vértices de color amarillo tienen grado 3, los de color rojo son de grado 5, los de color azul son de grado 8 y los de color negro son de grado 4. En la tabla 4.10 se muestra el conteo de vértices para cada uno de los grados mencionados.

Grafo Grado	1	2	3	4	5	6	...	n
3	4	4	4	4	4	4		4
4	1	4	9	16	25	36		$C_n = n^2$
5	0	4	8	12	16	20		$4(n - 1)$
8	0	1	4	9	16	25		$C_{n-1} = (n - 1)^2$

Tabla 4. 10. Conteo general de vértices con grado 3, 4, 5 y 8 en $G_{4,n}^*$

Entonces el número de aristas $a_{4,n}^*$ de un grafo $G_{4,n}^*$ es:

$$2(a_{4,n}^*) = 3(4) + 4n^2 + 5(4(n - 1)) + 8((n - 1)^2) \quad [T 4. 15]$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} a_{4,n}^* &= \frac{12n^2 + 4n}{2} \\ &= \frac{4(3n^2 + n)}{2} \\ &= 2(3n^2 + n) \end{aligned}$$

SECCIÓN 5

MATRICES ASOCIADAS AL GRAFO

La teoría de grafos se considera una herramienta útil en algunas otras ciencias y áreas del conocimiento debido a que por medio de los grafos se pueden representar una multitud de situaciones posibles, es decir, se puede utilizar como instrumento de modelización y representación de situaciones de la vida real, pues como se ha visto en las secciones anteriores su representación gráfica es muy simple, careciendo de información geométrica en el sentido euclídeo. Pero también se le atribuye que por medio de estos objetos se puede resolver las situaciones que representan, sin necesidad de tener conocimientos avanzados en matemáticas, basta solamente con tener conocimientos básicos en aritmética. Agregando que la riqueza de este modelo es que una misma situación se puede representar de distintas formas, con lo cual llama bastante la atención por su fácil adaptación a las aplicaciones.

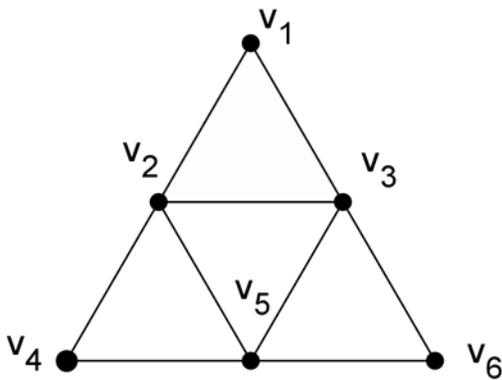
Hasta el momento en el documento se ha estudiado la representación algebraica y en mayor grado la representación gráfica, pero veremos que los grafos también se pueden representar por medio de matrices. Luego, la matriz asociada al grafo contendrá exactamente la misma información que la representación algebraica del grafo. Teniendo en cuenta que la representación matricial de un grafo tiene una gran ventaja, pues para las matrices ha sido desarrollada toda una teoría, que permitirá la manipulación de las matrices para extraer cierta información característica del grafo. (Menéndez, 1998). Por ello, esta matriz goza de múltiples aplicaciones en distintas ramas de la ciencia.

En esta sección se estudiarán las matrices de adyacencia del grafo, mostrando ejemplos en los cuales se encuentre formas de hacer conteo de vértices, además se estudiará un importante teorema, que sirve para contar los caminos posibles que existen entre dos vértices dados. Destacando que nuestra atención se centrará especialmente a los conceptos de la teoría de grafos con los cuales se pueda argumentar cuestiones de conteo.

5.1 MATRICES DE ADYACENCIA

Definición 5.1: Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Entonces la matriz de adyacencia $A(G) = (a_{ij})$, es una matriz $p \times p$, donde $a_{ij} = 1$ si v_i y v_j son adyacentes y $a_{ij} = 0$ si v_i y v_j no son adyacentes.

En la figura 5.1 se muestra el grafo G_1 y su matriz de adyacencia $A(G_1)$, tomando como ordenación de las filas y las columnas en la matriz, el orden natural de los subíndices de los vértices. Entonces, el elemento de la matriz $a_{1,1} = 0$, porque no hay una arista que conecte a v_1 con él mismo, luego $a_{1,2} = 1$, porque v_1 y v_2 son adyacentes, de esta forma se completa la matriz.



$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 5. 1. Grafo G_1

Las siguientes son algunas observaciones, que se evidencian en la matriz de adyacencia de un grafo:

- a) La diagonal principal de la matriz está compuesta por ceros “0”, debido a que los grafos que estudiamos no tienen aristas llamadas bucles, que conecten al vértice consigo mismo.

- b) La matriz de adyacencia de un grafo es una matriz simétrica, pues cada lado que une v_1 con v_2 une también v_2 con v_1 . Por ello es que $a_{i,j} = a_{j,i}$.
- c) Puede calcularse el grado de un vértice sumando los elementos de la fila o la columna correspondiente al mismo. Por ejemplo en la gráfica 5.1 la columna 3 de la matriz, representa a v_3 , de la suma de los elementos de esta columna obtenemos un 4, siendo este el grado de v_3 , lo que significa que este vértice se conecta con cuatro aristas.

Ahora bien, siendo nuestro interés principal hacer conteo a propósito de la teoría de grafos, vamos a mirar de qué manera nos sirve la representación de un grafo por medio de la matriz adyacente para realizar el conteo de vértices, para esto utilizamos el grafo G_2 de la figura 5.2. (Se ordenan las filas y las columnas tal y como se hizo en la matriz de la figura 5.1)

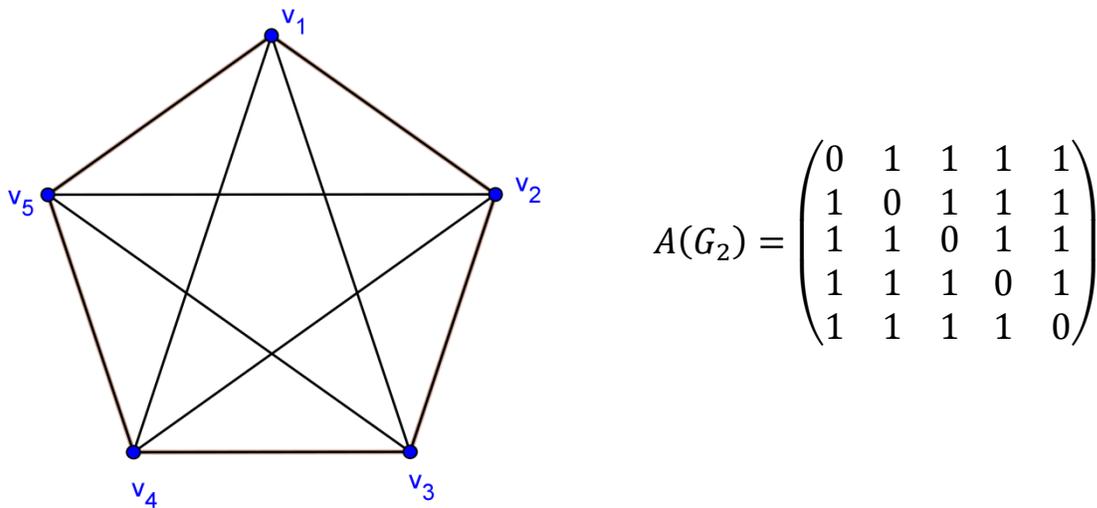


Figura 5. 2. Grafo G_2

Notemos que el grafo G_2 es un grafo completo, este tipo de grafos ya los habíamos estudiado en la sección 2,1 con el problema del apretón de manos.

Observemos que si en $A(G_2)$ contamos cuántas veces aparece el “1” obtenemos el número total de aristas. Por tanto $A(G_2)$ tiene 25 entradas, de las cuales se restan 5 (los ceros)

porque cada vértice consigo mismo no se conecta con una arista y luego se divide entre dos, porque la matriz es simétrica, así se quitan las posibilidades de contar dos veces la misma arista. En la tabla 5.1 se muestra de manera general este proceso para encontrar el número total de aristas en el grafo K_n .

Representación matricial de K_n	Expresión
$A(K_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_2 = \frac{4 - 2}{2} = 1$
$A(K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_3 = \frac{9 - 3}{2} = 3$
$A(K_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_4 = \frac{16 - 4}{2} = 6$
\vdots	\vdots
$A(K_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_n = \frac{n^2 - n}{2}$

Tabla 5. 1. Conteo de aristas del grafo completo K_n por medio de la matriz asociada

Por tanto se obtiene la misma expresión de [T 2,1] con la que se determina el número total de aristas del grafo K_n , donde a_n es:

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2}$$

5.2 CAMINOS DE LONGITUD n EN UN GRAFO G

Los grafos son utilizados con frecuencia para representar redes, pero es importante conocer de estas la existencia de caminos que recorran todas las aristas o todos los vértices y que en cierto modo sean las más óptimas (Menéndez, 1998). Teniendo en cuenta lo anterior y la

representación matricial de los grafos, estudiaremos los caminos y la longitud del camino, por medio de las matrices. Pero antes se definirá y mostrarán ejemplos de estas.

Definición 5.2: Sean v_0 y v_n vértices de un grafo G , si existe una sucesión finita de vértices v_1, v_2, \dots, v_{n-1} de modo que v_1 es adyacente de v_2 , v_2 de v_3 y así sucesivamente, se dice que existe un camino de v_1 a v_{n-1} . Dicho camino se puede representar como una sucesión de aristas, así:

$$\blacktriangleright v_0 v_1 \rightarrow v_1 v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1}$$

También se puede representar como una sucesión de vértices, así:

$$\blacktriangleright v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \dots v_{n-1} \rightarrow v_n, \text{ donde } v_0 \text{ y } v_n \text{ son los extremos del camino.}$$

Por ejemplo, en la figura 5.3 se muestra el grafo H , hallar algunos de los caminos de v_2 a v_4 y de v_3 a v_3 .

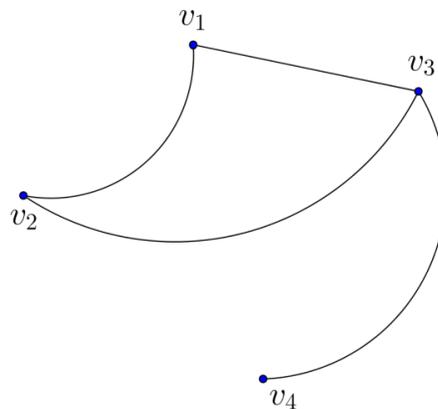


Figura 5. 3. Caminos del grafo H

Los caminos de v_2 a v_4 son:

- $\blacktriangleright v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$
- $\blacktriangleright v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$

Los caminos de v_3 a v_3 son:

- $v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3$
- $v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$
- $v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3$
- $v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$
- $v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$

Notemos que la diferencia que existe entre los caminos mencionados anteriormente es el número de vértices que se utilizan para realizar el camino, pues hay de 3, 4 y hasta 6 vértices, pero recordemos que para ir de un vértice a otro es necesario pasar por la arista que los une a ellos dos, por ello se define *La longitud de un camino* como el número de aristas que este contiene. Un camino tiene la propiedad de que dos lados consecutivos del mismo son o bien adyacentes o bien idénticos (si se retrocede en el camino).

Veamos las longitudes de cada camino para ir de v_3 a v_3 :

- El camino $v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3$ es de longitud 2
- El camino $v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ es de longitud 2
- El camino $v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3$ es de longitud 2
- El camino $v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ es de longitud 3
- El camino $v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ es de longitud 5

Con lo cual se obtuvo tres caminos de longitud 2, uno de longitud 3 y uno de longitud 5. ¿Será que existen más caminos de longitud 2, 3, 4 y 5? ¿Cómo determinar cuántos caminos de longitud n hay? Para responder a estas preguntas se estudiará antes el grafo F.

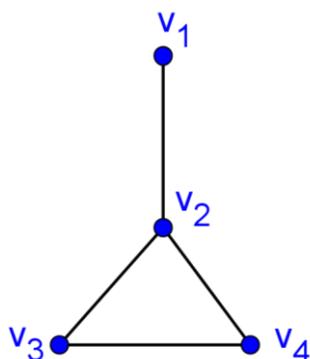


Figura 5. 4.Grafo F

Recordemos que las aristas algebraicamente representan la conexión entre dos vértices, es decir, si entre v_a y v_b hay una arista que los conecte, la arista se escriben como $v_a v_b$. Luego en la tabla 5.2 muestra que vértices se encuentran conectados por medio de aristas del grafo F de la figura 5.4 siendo estos los caminos de longitud 1.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	No hay	$v_1 v_2$	No hay	No hay
v_2	$v_2 v_1$	No hay	$v_2 v_3$	$v_2 v_4$
v_3	No hay	$v_3 v_2$	No hay	$v_3 v_4$
v_4	No hay	$v_4 v_2$	$v_4 v_3$	No hay

Tabla 5. 2.Caminos de longitud 1 del grafo F

Como en la tabla se determinaron cuántos caminos de longitud 1 hay para cada par de vértices del grafo F , el conteo de los caminos se puede escribir en la matriz A , que es la misma matriz de adyacencia asociada al grafo F (tomando como ordenación de las filas y las columnas en la matriz, el orden natural de los subíndices de los vértices):

$$A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [E 5.1]$$

Ahora bien, para contar los caminos que hay entre cada par de vértices, pero que sean dos las aristas que los conectan (es decir caminos de longitud 2) se utilizan los resultados de la tabla 5.2, Pues hay que agregarle otra arista al recorrido para conectar cada par de vértices.

¿Cómo determinar los caminos de longitud 2 de acuerdo a la tabla 5.2?

Por ejemplo, miremos si existen caminos para ir de v_1 a v_1 , es decir hay que encontrar qué aristas en su vértice inicial contiene a v_1 y otras que su vértice final contiene a v_1 , siendo v_1v_2 y v_2v_1 las únicas aristas con estas condiciones, pero además coinciden el vértice final de la primera y el inicial de la segunda, lo que indica que por ellas se puede realizar un recorrido. En adelante se utilizará la notación que se mostró anteriormente para representar los caminos, es decir, el camino como una sucesión de aristas. Así

➤ Camino de v_1 a $v_1 = v_1v_2 \rightarrow v_2v_1$, por tanto **hay 1** camino de longitud 2.

Ahora observemos si hay camino de longitud 2 de v_1 a v_2 . Debemos buscar, tal y como en el caso anterior, si hay aristas cuyo vértice inicial sea v_1 y otras que el final sea v_2 . Siendo v_1v_2 la única arista que cumple la condición, y sabiendo que deben ser dos aristas para que el camino sea de longitud 2, entonces no existe camino de longitud 2 de v_1 a v_2 .

➤ Camino de v_1 a $v_2 = v_1v_2$ por tanto **no hay** camino de longitud 2.

Ahora observemos si hay camino de v_2 a v_2 . Para ello, buscamos en la tabla de los caminos de longitud 1 aquellos que inicien con v_2 y aquellos que terminen en v_2 , luego emparejamos los que permitan realizar un recorrido, es decir, que el vértice con el que termine la primera arista sea el mismo vértice con el que inicia la segunda. Pero además observemos que las aristas que cumplen dichas condiciones están en la columna v_2 y la fila v_2 de la tabla 5.2, luego las aristas son $v_1v_2, v_2v_1, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_2, v_4v_2$. Por tanto:

➤ Camino de v_2 a $v_2 = v_2v_1 \rightarrow v_1v_2; v_2v_3 \rightarrow v_3v_2; v_2v_4 \rightarrow v_4v_2$, por tanto **hay 3** caminos de longitud 2.

De acuerdo a la manera de encontrar los caminos de longitud 2 en los tres ejemplos anteriores, se completa la tabla 5.3 utilizando la notación mencionada anteriormente para

simbolizar los caminos de longitud 2 para cada par de vértices del grafo F . teniendo en cuenta que en los espacios donde solo se encuentra una arista, es porque no hay un camino.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	$v_1v_2 \rightarrow v_2v_1$	v_1v_2	$v_1v_2 \rightarrow v_2v_3$	$v_1v_2 \rightarrow v_2v_4$
v_2	v_2v_1	$v_2v_1 \rightarrow v_1v_2$; $v_2v_3 \rightarrow v_3v_2$; $v_2v_4 \rightarrow v_4v_2$.	$v_2v_4 \rightarrow v_4v_3$	$v_2v_3 \rightarrow v_3v_4$
v_3	$v_3v_2 \rightarrow v_2v_1$	$v_3v_4 \rightarrow v_4v_2$	$v_3v_2 \rightarrow v_2v_3$; $v_3v_4 \rightarrow v_4v_3$.	$v_3v_2 \rightarrow v_2v_4$
v_4	$v_4v_2 \rightarrow v_2v_1$	$v_4v_3 \rightarrow v_3v_2$	$v_4v_2 \rightarrow v_2v_3$	$v_4v_2 \rightarrow v_2v_4$; $v_4v_3 \rightarrow v_3v_4$.

Tabla 5. 3. Caminos de longitud 2 para el grafo F

Al igual que como se hizo con la tabla 5.2, con los resultados de la tabla anterior, se cuentan los caminos de longitud 2 para cada par de vértices y se muestran en la siguiente matriz (tomando como ordenación de las filas y las columnas en la matriz, el orden natural de los subíndices de los vértices):

$$A_2(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad [E 5.2]$$

Ahora, para hallar los caminos de longitud 3 para cada par de vértices del grafo F , hay que utilizar los caminos de longitud 1 y los de longitud 2, por ello se emplea las tablas 5.2 y 5.3. Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para completar la tabla 5.3 se obtienen los caminos de longitud 3 en la tabla 5.4. Sin embargo, se muestran el siguiente ejemplo.

Para determinar si hay caminos de longitud 3 desde v_2 a v_3 , buscamos en los caminos de longitud 2 aquellos que inicien con v_2 y en los de longitud 1 aquellos que terminen en v_3 , (la idea es unir tres aristas para ir de v_2 a v_3) luego emparejamos aquellos que permitan

realizar un recorrido, es decir, que el vértice con el que termine el camino de longitud 2, sea el mismo vértice con el que inicia el camino de longitud 1. Entonces los vértices que cumplen estas condiciones son los de la fila de v_2 y los de la columna de v_3 , los cuales mostraremos en la figura 5.5.

v_2	v_2v_1	$v_2v_1 \rightarrow v_1v_2;$	$v_2v_4 \rightarrow v_4v_3$	$v_2v_3 \rightarrow v_3v_4$	v_3
		$v_2v_3 \rightarrow v_3v_2;$			No hay
		$v_2v_4 \rightarrow v_4v_2;$			v_2v_3
					No hay
					v_4v_3

Figura 5. 5. Fila v_2 caminos de longitud 2 y columna v_3 caminos de longitud 1

Por ende, los caminos de longitud 3 que se pueden realizar de v_2 a v_3 son los que se encuentran del mismo color, estos son:

- $v_2v_1 \rightarrow v_1v_2 \rightarrow v_2v_3$
- $v_2v_3 \rightarrow v_3v_2 \rightarrow v_2v_3$
- $v_2v_4 \rightarrow v_4v_2 \rightarrow v_2v_3$
- $v_2v_3 \rightarrow v_3v_4 \rightarrow v_4v_3$

De manera análoga siguiendo el anterior procedimiento es como se encuentran todo los caminos de longitud 3, que se muestran en la siguiente tabla

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	$v_1v_2 \rightarrow v_2v_1$	$v_1v_2 \rightarrow v_2v_1 \rightarrow v_1v_2 ;$ $v_1v_2 \rightarrow v_2v_3 \rightarrow v_3v_2 ;$ $v_1v_2 \rightarrow v_2v_4 \rightarrow v_4v_2 .$	$v_1v_2 \rightarrow v_2v_4 \rightarrow v_4v_3$	$v_1v_2 \rightarrow v_2v_3 \rightarrow v_3v_4$
v_2	$v_2v_1 \rightarrow v_1v_2 \rightarrow v_2v_1 ;$ $v_2v_3 \rightarrow v_3v_2 \rightarrow v_2v_1 ;$ $v_2v_4 \rightarrow v_4v_2 \rightarrow v_2v_1 .$	$v_2v_4 \rightarrow v_4v_3 \rightarrow v_3v_2 ;$ $v_2v_3 \rightarrow v_3v_4 \rightarrow v_4v_2 .$	$v_2v_3 \rightarrow v_3v_2 \rightarrow v_2v_3 ;$ $v_2v_1 \rightarrow v_1v_2 \rightarrow v_2v_3 ;$ $v_2v_4 \rightarrow v_4v_2 \rightarrow v_2v_3 ;$ $v_2v_3 \rightarrow v_3v_4 \rightarrow v_4v_3 .$	$v_2v_1 \rightarrow v_1v_2 \rightarrow v_2v_4 ;$ $v_2v_3 \rightarrow v_3v_2 \rightarrow v_2v_4 ;$ $v_2v_4 \rightarrow v_4v_2 \rightarrow v_2v_4 ;$ $v_2v_4 \rightarrow v_4v_3 \rightarrow v_3v_4 .$
v_3	$v_3v_4 \rightarrow v_4v_2 \rightarrow v_2v_1$	$v_3v_2 \rightarrow v_2v_1 \rightarrow v_1v_2 ;$ $v_3v_2 \rightarrow v_2v_3 \rightarrow v_3v_2 ;$ $v_3v_4 \rightarrow v_4v_3 \rightarrow v_3v_2 ;$ $v_3v_2 \rightarrow v_2v_4 \rightarrow v_4v_2 .$	$v_3v_4 \rightarrow v_4v_2 \rightarrow v_2v_3 ;$ $v_3v_2 \rightarrow v_2v_4 \rightarrow v_4v_3 .$	$v_3v_4 \rightarrow v_4v_2 \rightarrow v_2v_4 ;$ $v_3v_2 \rightarrow v_2v_3 \rightarrow v_3v_4 ;$ $v_3v_4 \rightarrow v_4v_3 \rightarrow v_3v_4 .$
v_4	$v_4v_3 \rightarrow v_3v_2 \rightarrow v_2v_1$	$v_4v_2 \rightarrow v_2v_1 \rightarrow v_1v_2 ;$ $v_4v_2 \rightarrow v_2v_3 \rightarrow v_3v_2 ;$ $v_4v_2 \rightarrow v_2v_4 \rightarrow v_4v_2 ;$ $v_4v_3 \rightarrow v_3v_4 \rightarrow v_4v_2 .$	$v_4v_3 \rightarrow v_3v_2 \rightarrow v_2v_3 ;$ $v_4v_2 \rightarrow v_2v_4 \rightarrow v_4v_3 ;$ $v_4v_3 \rightarrow v_3v_4 \rightarrow v_4v_3 .$	$v_4v_3 \rightarrow v_3v_2 \rightarrow v_2v_4 ;$ $v_4v_2 \rightarrow v_2v_3 \rightarrow v_3v_4 .$

Tabla 5. 4. Caminos de longitud 3 del grafo F

Al igual que para los otros dos caminos, se contarán los caminos de longitud 3 en la siguiente matriz (tomando como ordenación de las filas y las columnas en la matriz, el orden natural de los subíndices de los vértices):

$$A_3(F) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad [E 5.3]$$

Hasta el momento se ha realizado un proceso de conteo para cada par de vértices y estos resultados se han mostrado por medio de una tabla, si se sigue podemos encontrar los

caminos de longitud 4, 5 hasta 10, o más. Ahora estudiaremos la relación que existe entre las tablas que utilizamos para encontrar dichos caminos.

Retomemos el primer ejemplo para hallar los caminos de longitud 2 de v_1 a v_1 , fijándonos en las posiciones que ocupan las aristas que conforman el camino (de color rojo), de acuerdo a la tabla 5.2.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	No hay	v_1v_2	No hay	No hay
v_2	v_2v_1	No hay	v_2v_3	v_2v_4
v_3	No hay	v_3v_2	No hay	v_3v_4
v_4	No hay	v_4v_2	v_4v_3	No hay

Figura 5. 6. Caminos de longitud 1 (tabla 5.2), resaltando la fila v_1 y la columna v_1

Notemos que las posiciones son: v_1, v_2 y v_2, v_1 . El segundo de la primera fila y el segundo de la primera columna. Además no hay más caminos porque en las demás posiciones no existen aristas. Siendo las posiciones de las aristas de la forma v_1, v_m y v_m, v_1 .

Observemos igualmente en la tabla 5.2, qué sucede con las posiciones de las aristas que permiten realizar los caminos de longitud 2 de v_2 a v_2 .

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	No hay	v_1v_2	No hay	No hay
v_2	v_2v_1	No hay	v_2v_3	v_2v_4
v_3	No hay	v_3v_2	No hay	v_3v_4
v_4	No hay	v_4v_2	v_4v_3	No hay

Figura 5. 7. Caminos de longitud 1 (tabla 5.2), resaltando la fila v_2 y la columna v_2

Luego, las posiciones de las aristas que permiten el recorrido de longitud 2 y que en la figura 5.7 se encuentran del mismo color son:

- v_2, v_1 y v_1, v_2 , el segundo de la segunda fila y el segundo de la segunda columna.
- v_2, v_3 y v_3, v_2 , el tercero de la segunda fila y el tercero de la segunda columna.
- v_2, v_4 y v_4, v_2 , el cuarto de la segunda fila y el tercero de la segunda columna.

Notemos que al igual que con el ejemplo anterior, las posiciones de las aristas tienen la forma v_2, v_m y v_m, v_2

Por último, retomemos el único ejemplo que se mostró para hallar los caminos de longitud 3 de v_2 a v_3 . Teniendo en cuenta que se utiliza la fila v_2 de la tabla de caminos de longitud 2 y la columna v_3 de la tabla de caminos de longitud 1.

v_2	$v_2 v_1$	$v_2 v_1 \rightarrow v_1 v_2$;	$v_2 v_4 \rightarrow v_4 v_3$	$v_2 v_3 \rightarrow v_3 v_4$	v_3
		$v_2 v_3 \rightarrow v_3 v_2$;			No hay
		$v_2 v_4 \rightarrow v_4 v_2$;			$v_2 v_3$
					No hay
					$v_4 v_3$

Figura 5. 8.Fila v_2 caminos de longitud 2 (tabla 5.3) y columna v_3 caminos de longitud 1 (tabla 5.2)

Luego, las posiciones de las aristas que permiten el recorrido de longitud 3 y que en la figura 5.8 se encuentran subrayadas del mismo color son:

- v_2, v_2 y v_2, v_3 , el segundo de la segunda fila y el segundo de la tercera columna.
- v_2, v_4 y v_4, v_3 , el cuarto de la segunda fila y el cuarto de la tercera columna.

Veamos que al igual que con los otros ejemplos, las posiciones de las aristas tienen la forma v_2, v_m y v_m, v_3

Ahora bien, de acuerdo a lo percibido en los ejemplos anteriores se llega lo siguiente:

- Las posiciones de las aristas que conforman el camino de longitud n de v_k a v_s tienen la forma v_k, v_m y v_m, v_s .

Esta notación se hace familiar, pues es la notación utilizada en operaciones con matrices, específicamente para la multiplicación de matrices. Lo cual nos lleva a pensar que la operación que se debe realizar para contar los caminos de longitud n de un grafo, es la multiplicación de matrices. ¿Cuáles matrices?

Recordemos que anteriormente se determinaron los caminos de longitud y esta información se organizó en tablas, pero además a cada tabla se le asoció una matriz, esta matriz cuenta el número de caminos de longitud n que existen para cada par de vértices del grafo.

Ahora, reconstruyamos el proceso para hallar los caminos de longitud 2, pues utilizamos las filas y las columnas de la tabla de caminos de longitud 1. Por tanto, se debería multiplicar dos veces la matriz $A(F)$ (matriz de los caminos de longitud 1) para hallar los caminos de longitud 2. Es decir, se debe hallar $A(F)^2$, probemos:

$$A(F) \cdot A(F) = A(F)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [E 5.4]$$

No se centrará la atención en resolver la multiplicación de matrices, la idea es comprobar si por medio de la multiplicación, se llega a los resultados obtenidos en los ejemplos que se han estudiado.

Siguiendo la definición de la multiplicación entre matrices, para saber cuántos caminos de longitud 2 hay de v_1 a v_1 , multiplicamos la fila 1 de la primera matriz y la columna 1 de la segunda matriz de [E 5.4] así:

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = 1$$

Según esto, solo existe 1 camino de longitud 2 para ir de v_1 a v_1 , que fue el mismo resultado encontrado por el otro método.

Ahora, cuantos caminos hay de v_2 a v_2 , se debe multiplicar la fila dos de la primera matriz y la columna 2 de la segunda matriz.

$$(1 \ 0 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 3$$

Lo que quiere decir que existen 3 caminos de longitud 2 para ir de v_2 a v_2 , igualmente, fue el mismo resultado encontrado por el otro método. Desde luego, realizando el cálculo para cada componente de la matriz, se completará la matriz que cuenta los caminos de longitud 2 del grafo F .

$$A(F)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notemos que este resultado fue el mismo que se obtuvo en [E 5.2]

Ahora, a fin de determinar cuántos caminos de longitud 3 hay para cada par de vértices del grafo F utilizando el método del producto entre matrices; retomemos como lo hacíamos de acuerdo al método anterior. Pues se utilizaban las filas de la tabla de caminos de longitud 2 y las columnas de caminos de longitud 1, por ende se debe multiplicar la matriz $A(F)^2$ con $A(F)$, como se muestra a continuación

$$(A(F))^2 \cdot A(F) = (A(F))^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectivamente el resultado es el obtenido en la [E 5.3]. Además se encontró que las potencias a la n de la matriz $A(F)$, son las que permiten el cálculo de caminos de longitud n .

De acuerdo al estudio que se hizo a partir del grafo F se puede llegar al siguiente resultado:

Teorema 5.1⁵: Sea G un grafo con $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y se A su matriz de adyacencia. Entonces el coeficiente (i, j) de la matriz A^n es igual al número de caminos de longitud n que unen v_i con v_j .

Demostración: se prueba por inducción. Para $n = 1$, se obtiene la matriz de adyacencia A del grafo. Entonces, por definición de la misma, si $a_{i,j} = 1$, hay una arista entre los vértices i y j , es decir, un camino de longitud 1 entre los vértices, por tanto el teorema es cierto para $n = 1$.

Supóngase que el teorema es cierto para $n = p$.

Nótese que $A^{p+1} = A^p \cdot A$ de tal forma el elemento $a_{i,k}$ en la matriz A^{p+1} se obtiene multiplicando los elementos de la fila i -ésima de A^p por los de la fila k -ésima de A y sumándolos, es decir,

$$a_{i,k} = \sum_{j=1}^m b_{i,j} c_{j,k} = b_{i,1}c_{1,k} + b_{i,2}c_{2,k} + b_{i,3}c_{3,k} + \dots + b_{i,m}c_{m,k}$$

Ahora bien, $b_{i,j}, j = 1, 2, 3, \dots, m$ es un elemento de A^p , luego por la hipótesis de inducción, es el número de caminos de longitud p que hay entre los vértices v_i y v_j .

⁵ Como el interés de este trabajo se centra buscar estrategias para contar, no se considera irrelevante realizar la demostración, teniendo en cuenta que ésta se puede encontrar en cualquier texto que trate sobre matrices asociadas al grafo, sin embargo, se mostrará de que trata, aclarando que fue tomada de .

Por otro lado, $c_{j,k}, k = 1, 2, 3, \dots, m$ es un elemento de la matriz A , luego es cero o uno. Pues bien,

Si $c_{j,k} = 0$, no existe arista entre los vértices v_j y v_k , consecuentemente habrá $b_{i,j} \cdot c_{j,k} = b_{i,j} \cdot 0 = 0$ caminos de longitud $p+1$ entre los vértices i y k cuya última arista sea $v_j v_k$.

Si $c_{j,k} = 1$, existe una arista entre los vértices v_j y v_k , entonces como hay $b_{i,j}$ caminos de longitud p desde v_i a v_j , ahora habrá $b_{i,j}c_{j,k} = b_{i,j} \cdot 1 = b_{i,j}$ caminos de longitud $p+1$ cuya última arista sea $v_j v_k$.

Al efectuar la suma sobre todos los j 's se cuentan todos los caminos de longitud $p+1$ desde v_i a v_k . Consecuentemente, el elemento $a_{i,k}$ en A^{p+1} nos da el número de caminos de longitud $p+1$ desde v_i hasta v_k . Comprobando el paso inductivo. ■

Notemos que con la demostración se confirma porqué funciona el procedimiento utilizado anteriormente para contar los caminos de longitud n .

CONCLUSIONES

En relación con los propósitos perseguidos con el desarrollo de este documento, se puede concluir que:

1. Las representaciones del grafo fueron fundamentales para identificar las situaciones de conteo. A partir, de las secuencias graficas del grafo y las estrategias que se utilizaron para clasificar los vértices, fue como se reconocieron patrones de secuencias aritméticas conocidas (números triangulares y cuadrados), que llevaron a plantear conjeturas, las cuales fueron argumentadas con base a conceptos de la teoría de grafos.
2. Se encontraron maneras de argumentar algunas secuencias aritméticas como la de los números triangulares haciendo uso de algunas definiciones y técnicas de la teoría de grafos. Por ejemplo, en la sección 2.1 con los grafos completos y los grafos isomorfos, al igual que en la sección 5.1 con la matriz asociada al grafo completo.
3. Siendo *el conteo* el interés principal de este trabajo, además el estudio de una teoría que se destaca porque modela un sin número de situaciones, se hace necesario resaltar que las estrategias utilizadas para contar, propiamente fueron halladas con el estudio de la teoría. Un claro ejemplo de esto son las potencias de la matriz adyacente al grafo, las cuales sirven para contar los caminos de longitud n de cada par de vértices del grafo.
4. La actividad primordial de este trabajo fue contar. Para ello la estrategia más útil fue aplicar color a los objetos que se querían contar y a las cosas que se querían resaltar, pues así, se logró realizar un escrito, para que el lector comprenda lo que se quería

mostrar y con eso visualizar e identificar las secuencias y patrones a las que se llegó con este estudio.

5. La idea de sistematizar la experiencia surge a raíz de la escasez de bibliografía referente a los procesos de conteo en dicha teoría. Hay autores que mencionan la importancia de incorporar la teoría de grafos en las actividades que proponen para sus estudiantes, pero no se encuentra escritos que traten propiamente de estrategias para contar en la teoría de grafos. Por ello, se cree que este documento contribuirá a los lectores, en especial a los maestros, para que fomenten un espacio de creatividad con la introducción de problemas que resulten atractivos por su simplicidad y, al mismo tiempo, posibiliten la búsqueda de estrategias de resolución y argumentación.
6. La utilización del software de matemáticas *Geogebra 5.0*, posibilitó la realización de las secuencias de grafos, para que visualmente la lectura de documento sea más amena, pues esto genera en el lector agrado y permite mostrar fácilmente la idea que se quiere expresar.
7. El documento queda abierto hacia la búsqueda de otras formas de contar, un ejemplo de esto es tomar los grafos $G_{3,n}$ y $G_{4,n}$, para identificar la secuencia que se visualiza en los vértices de colores, de acuerdo con el número cromático y determinar el número vértices por color que hay en cada grafo de la secuencia.
8. El desarrollo de este trabajo, contribuyó a mi formación profesional, dado que la búsqueda de actividades, de formas de contar y la argumentación, reafirmó mis conocimientos didácticos y matemáticos. Además, con la realización de este documento comprendí la importancia de utilizar teorías que modelen situaciones y a su vez sirvan como introducción para nuevos conceptos; como lo es, la teoría de grafos, con la matriz de adyacencia del grafo, para explicar él porque del proceso para multiplicar matrices.

Bibliografía

- Braicovich, T., & Cognigni, R. (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. *Números*, 76, 135-148.
- Bressan, A., & Gallego, M. F. (Mayo de 2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamineto de patrones. *Correo del maestro*(168), 5-21.
- Chartrand, G. (1977). *introductory graph theory*. New York: Dover Publications, Inc.
- Combariza, G. (2003). Una introducción a la teoría de Grafos. *XIV Encuentro de geometría y II de aritmética y sus aplicaciones* (págs. 565-591). Bogotá - Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Falero, S., Paroni, A., & Zinga, M. (2013). El misterio del manuscrito. *Revista Premisa*, 15(59), 36-46.
- Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. *Revista Suma*(28), 11-26.
- Niño, H., & Ramírez, J. L. (2008). *Actividades de club de matemáticas para el desarrollo del talento. Modulo teoría de grafos*. Bogotá, D.C- Colombia: Fundación Euler.
- Ruíz, C., & Sánchez, M. (Noviembre de 2006). Algunas conjeturas aritmeticas a partir de relaciones geométricas. *trabajo de grado para optar al titulo de Licenciados en Matemáticas*. Bogotá, Colombia : Universisdad Pedagógica Nacional.
- Valdés, J., Pérez, M., Díanez, M., & otros, e. (2004). Siete puentes, un camino: Königsberg. *Suma*(45), 69-78.