UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ESCOLAR

YULY MARLEY BELTRÁN BOLÍVAR

2007240010

STEPHANY LORENA MEJÍA SUAREZ

2010240038

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2016

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ESCOLAR

YULY MARLEY BELTRÁN BOLÍVAR

2007240010

STEPHANY LORENA MEJÍA SUAREZ

2010240038

Trabajo de Grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesora

CARMEN INÉS SAMPER DE CAICEDO

Profesora Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2016

Dedicado mi hija Juliana Prada, quien es el motor de mi vida, la razón para alcanzar cada una de mis metas y proponerme cada día cosas nuevas. A mi madre María del Carmen Suarez por su apoyo incondicional y amor y a mi padre Jair Mejía (QEPD).

Stephany L. Mejía S.

Dedicado a mis padres Clara Inés Bolívar y Luis Eduardo Beltrán, y a mi hermano Cristian E. Beltrán quienes han sido mi apoyo para el alcance de mis logros y el aliciente para fijarme nuevas metas.

Yuly M. Beltrán B.

Damos gracias a nuestra asesora por su dedicación en la orientación y construcción del presente trabajo, y por su contribución en nuestra formación como futuras docentes.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una propuesta para la enseñanza de la geometría escolar
Autor(es)	Beltrán Bolívar, Yuly Marley; Mejía Suarez, Stephany Lorena
Director	Samper de Caicedo, Carmen
Publicación	Bogotá D.C. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 98 p. 84
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	SECUENCIA DIDÁCTICA, CONSTRUCCIÓN SOCIAL, ARGUMENTO, ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA.

2. Descripción
En el presente documento, se presenta un análisis didáctico de una secuencia didáctica propuesta en el trabajo de grado de Lara y Fonseca (2013), presentado para optar por el título Maestría en Docencia de las Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Algunas de las actividades de dicha secuencia fueron modificadas o reubicadas, con el fin de mejorar la comprensión del contenido, y se diseñaron otras tareas para apoyar la construcción e interiorización de los contenidos trabajados. El análisis didáctico incluye los referentes teóricos que apoyan y justifican la propuesta, tales como el uso de la geometría dinámica, la actividad demostrativa, la construcción social del conocimiento y los estándares que se fortalecen con la implementación de la secuencia. Además, se usa la clasificación de las tareas, propuesta por Silva (2013), para determinar el tipo de argumento que se propicia con ellas.

3. Fuentes
• Lara, L y Fonseca, J. (2013). Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. • Lara, L. y Samper, C. (2014). Un aporte a la caracterización del comportamiento argumental y racional cuando se aprende a demostrar .*Educación Matemática,* Vol. 26, núm.1, pp. 7-40. • MEN. (1998). Lineamientos curriculares, Cooperativa editorial magisterio. Bogotá D.C. • MEN. (2006). Estándares básicos de competencias matemáticas, Cooperativa editorial magisterio. Bogotá D.C. • Perry, P., C. Samper, L. Camargo y Ó. Molina (2013), "Innovación en un aula de geometría de nivel universitario", en C. Samper y Ó. Molina, Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 13-56. • Rodríguez, L. (2004). El modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa. *revista digital universitaria*. recuperado el 10 de abril del 2015 de: http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/art2.htm • Silva, L. (2013). Argumentar para definir y definir para argumentar. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

4. Contenidos
El presente trabajo de grado está compuesto por cuatro capítulos como se describen a continuación. En el primer capítulo, se realiza una descripción detallada del contenido del documento junto con la exposición de los argumentos que llevaron a la realización de este trabajo. Se incluyen también los objetivos que se esperan alcanzar con este. En el Capítulo 2, se desarrolla el marco teórico que sustenta el diseño e implementación de la secuencia didáctica: el uso de la geometría dinámica, la actividad demostrativa según el grupo de investigación Aprendizaje y

Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$), los argumentos de acuerdo con Toulmin, la clasificación de las tareas, la construcción social del conocimiento y una breve descripción de lo establecido en la estándares de competencias en matemáticas. En el tercer capítulo, se presenta el análisis didáctico de la secuencia didáctica en un formato, diseñado por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, con el que se busca explicar al lector aspectos de la secuencia como: estructura, objetivos, logros de aprendizaje, actuaciones de los estudiantes, actuaciones del docente, entre otros, basados en los constructos expuestos en los referentes teóricos. En el Capítulo 4, se dan a conocer las conclusiones personales y las conclusiones propias del trabajo de grado. Para finalizar se exhibe la bibliografía que apoya la elaboración del presente trabajo.

5. Metodología

Las fases que conformaron el estudio que dio lugar a este trabajo fueron dos. En primer lugar, se realizó un análisis de los documentos citados en la bibliografía del presente documento, con el fin de poder plasmar el marco teórico que sustenta el diseño e implementación de la secuencia didáctica que aquí se presenta. El foco de la segunda fase del trabajo, fue el análisis de cada una de las actividades que componen la secuencia, labor de la cual surgieron la modificación de algunas de las actividades, la reorganización de las mismas y la creación de algunas nuevas.

6. Conclusiones

- Dentro de los espacios académicos registrados durante el programa Lic. en Matemáticas se cursaron las materias: elementos de la geometría, geometría plana, geometría en el espacio y Enseñanza de la geometría, los aportes de estos contribuyeron a desarrollar conocimientos más profundos sobre algunos elementos que conforman el sistema teórico de la geometría. Con relación a los aprendizajes adquiridos fue posible desarrollar y analizar las actividades propuestas en la secuencia didáctica.
- En el momento de realizar actividades es necesario tener en cuenta los estándares básicos en competencias matemáticas y su relación con el contexto ya que permiten evidenciar los procesos matemáticos y el tipo de pensamiento a desarrollar. De esta manera las actividades tendrán un contenido enriquecedor en el desarrollo de habilidades por parte de los estudiantes.

- El uso de la geometría dinámica en el aula no busca eliminar el uso de papel y lápiz. Por el contrario, es un herramienta que permite realizar otras acciones que generan o fortalecen el conocimiento geométrico, tal como, descubrir dependencias entre propiedades al visualizar cuáles se mantienen bajo el arrastre del objeto geométrico que fue construido para que se cumplieran otras propiedades.
- Al propiciar la argumentación en las tareas, se favorece la construcción de conocimiento y el desarrollo de la habilidad para justificar enunciados desde la teoría.
- El análisis de la secuencia didáctica nos permitió descubrir que en los diferentes momentos de su construcción se hace necesario tener en cuenta todos los elementos de esta para obtener mejores resultados en cuanto al objeto matemático a desarrollar.
- Como resultado de esta experiencia adquirimos conocimientos teóricos y metodológicos para fortalecer nuestro quehacer como futuras docentes.
- Al propiciar la argumentación en las tareas, se favorece la construcción de conocimiento y el desarrollo de la habilidad para justificar enunciados desde la teoría.
- Diseñar una secuencia didáctica requiere conocimiento profundo del contenido y creatividad para proponer tareas innovadoras que despierten el interés de los alumnos.

Elaborado por:	Beltrán Bolívar, Yuly Marley; Mejia Moreno, Lorena Stephany
Revisado por:	Samper de Caicedo, Carmen

Fecha de elaboración del Resumen:	26	01	2016

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

En los estándares básicos de competencias en matemáticas, presentados por el Ministerio de Educación Nacional, se establece que el aprendizaje se logra a través de la construcción social del conocimiento y que se debe velar por la formación de personas matemáticamente competentes. La secuencia didáctica de geometría que se analiza y se enriquece cumple con dichas directrices. La actividad demostrativa que favorece la propuesta didáctica es un mecanismo para construir el conocimiento en espacios de interacción social, donde los conceptos y relaciones geométricas se abordan conjuntamente, para dar lugar a la argumentación y justificación. Es así que se construye conocimiento.

Este documento, en el que se presenta como producto final el análisis didáctico de la secuencia de actividades, está constituido por cinco capítulos como se describe a continuación.

En el primer capítulo, se exponen las razones que nos llevaron a la realización de este documento, así como el porque de la elección de cada uno de los referentes teóricos que sirven de base para el análisis de la secuencia didáctica que se presenta.

El Capítulo 2 contiene una presentación breve de cada uno de los referentes teóricos escogidos para el posterior análisis de la secuencia. Entre dichos referentes se encuentran los estándares básicos de competencias en matemáticas, los cuales sirvieron para reforzar nuestra postura acerca del manejo de la geometría dinámica y la construcción de saberes en espacios de trabajo en grupo y como mecanismo para la construcción significativa de conceptos, además estos sirvieron para clasificar las actividades de la secuencia didáctica, teniendo en cuenta los tipos de procesos y pensamientos matemáticos que ellas fortalecen. Por otro lado se define la construcción social del conocimiento, de acuerdo a lo expuesto por varios autores, quienes tomando a Vygotsky como referente recalcan la importancia de desarrollar en las actividades educativas procesos psicológicos superiores entre los cuales se encuentra el pensamiento, el razonar de manera lógica y la memoria. También se menciona lo que es actividad demostrativa, en concordancia con lo establecido por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad

Pedagógica Nacional (UPN). Se presenta el modelo de argumentación de Toulmin y los tipos de argumentos. Finalmente, se expone la propuesta de clasificación de problemas establecido por Silva (2013).

En el tercer capítulo, se presenta el análisis de la secuencia didáctica, la cual está dividida en dos partes, teniendo en cuenta la herramienta que media en la construcción de conocimiento. En la primera parte se propone el uso de material manipulativo para descubrir los criterios de congruencia de triángulos; en la segunda parte se hace uso de la geometría dinámica para descubrir diferentes conceptos geométricos. En el análisis de la secuencia, se pueden encontrar aspectos como: objetivos, conocimiento matemáticos previo e involucrado en las actividades, requisitos para la implementación de estas, descripciones breves de cada uno de los bloques, las tareas propuestas, logros de aprendizaje, entre otros.

En el Capítulo 4, se presentan las conclusiones, tanto personales como las propias del trabajo de grado, que sugieren de la realización del mismo.

Para finalizar, se exponen las referencias bibliográficas de las cuales se extrajo la información que sirvió de base para el análisis de la secuencia didáctica que se presenta en el documento.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Justificación

Una de las actividades que un docente debe realizar para cumplir con la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (MEN) es proponer actividades para el aprendizaje que involucren el uso de tecnología y se adecúen al contexto del colegio en el cual se trabaja. Por lo tanto, cuando se realiza una propuesta pedagógica es indispensable conocer qué debe contener, a quién va dirigida y cuáles son los prerrequisitos, entre otras cosas. Es decir, el trabajo que requiere diseñar una propuesta es exigente, más si lo que se busca es implementar en el aula una metodología de enseñanza diferente a la tradicional, que propicie el aprendizaje. En los trabajos de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Línea de Geometría, en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), se encuentran propuestas didácticas para la enseñanza de la geometría en el aula escolar que han sido implementadas y validadas, y que buscan que los estudiantes de edad escolar se inicien en los procesos de argumentación y de justificación. Surge el interés de analizar la propuesta presentada en el trabajo de grado *"Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa"* (Lara y Fonseca, 2013) con el objetivo de conformar un documento, donde se presente la propuesta didáctica, que sea útil para profesores en ejercicio que quieran usarla y emularla para plantear su propia propuesta didáctica. Otra de las finalidades del presente trabajo es difundir las ideas respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, basadas en la teoría del aprendizaje como construcción social, que el grupo de investigación, Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría *(Æ·G)*, de la Universidad Pedagógica Nacional, ha desarrollado, no solo a través de un documento teórico, sino con ejemplos prácticos. Para ello, es útil realizar un análisis de esta propuesta con el fin de mejorar, añadir información y dar los fundamentos teóricos correspondientes y así conformar un documento que sea un aporte real y relevante para los profesores en ejercicio, que ayude a rescatar la importancia de la enseñanza de la geometría en la escuela.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Analizar, desde un punto de vista didáctico, el contenido de una propuesta para el aula escolar, diseñada y presentada en la tesis de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática *"Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa"* (Lara y Fonseca, 2013) para conformar un documento para profesores en ejercicio en el cual se presente la propuesta organizada, posiblemente con algunas modificaciones que surjan del análisis de las actividades, y el sustento teórico de la metodología de enseñanza propuesta y de la actividad demostrativa que se busca favorecer.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Clasificar las actividades según el tipo de argumento requerido para dar solución a ellas.
2. Analizar la propuesta didáctica ya mencionada que se elaboró en una tesis elaborada en la Línea de Geometría de la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional.
3. Solucionar las actividades presentadas en la secuencia didáctica.
4. Modificar, si es el caso, las actividades de la propuesta didáctica presentadas en el trabajo de grado de la Maestría, atendiendo a lo ahí expuesto en las conclusiones, y establecer algunas posibles actuaciones de los estudiantes frente a las tareas propuestas.
5. Elaborar un documento, organizado de acuerdo a una propuesta del Grupo Æ•G, dirigido a profesores en ejercicio, que presenta la unidad didáctica.

CAPÍTULO 2. REFERENTES TEÓRICOS

Una de las intenciones de este trabajo es presentar un documento, dirigido a profesores en ejercicio, que deseen convertir su clase de geometría en un escenario donde se propicie la argumentación, la construcción social de conocimiento, un aprendizaje significativo y el uso de tecnologías educativas para realizar actividad demostrativa. Se presentará una propuesta didáctica, diseñada por estudiantes de la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional, como parte de su trabajo de grado, junto con un análisis desde la didáctica de la geometría.

De acuerdo a lo anterior, los constructos teóricos que sustentan el análisis de dicha propuesta, y que además provee al docente que desee implementar la propuesta de aula información teórica sobre los pilares de esta son: actividad demostrativa, según el grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ de la Universidad Pedagógica Nacional; el modelo de Toulmin para la argumentación; construcción social de conocimiento, desde la perspectiva de Vygotsky, expuesta por Velázquez (s.f) y Mendoza (2010), para lo cual se requiere la generación de un ambiente de indagación en el aula escolar; uso de la geometría dinámica como herramienta para el aprendizaje de la geometría (MEN, 2004) y las definiciones que Silva (2013) provee para los términos taller, tarea, problema, ejercicio así como la clasificación que presenta de estos. Teniendo en cuenta la población a la cual va dirigido el documento, otro elemento importante para la realización del análisis son los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas presentadas por el MEN, los cuales permitirán determinar cómo la propuesta aporta al desarrollo de estos y a las competencias, relacionadas con la geometría, que se describen en dicho documento.

2.1 Construcción social del aprendizaje

Mendoza (2010), en su artículo "*Vygotsky y la construcción del conocimiento*" menciona que una de las ideas principales de Vygotsky, es que muchos de los procesos humanos se desarrollan en un contexto social y pasan posteriormente a un plano personal, que él llama interiorización o internalización. Resalta que la internalización no es tomar algo externo ya existente y pasarlo a un plano interno, sino que se refiere a la manera como se relaciona todo lo que se percibe en el contacto con la sociedad, para posteriormente construir un determinado conocimiento. En palabras de Mendoza, “es un movimiento al terreno práctico de lo cultural en una sociedad” (Mendoza, 2010, p. 10).

Además, Vygotsky (Mendoza, 2010) señala que los procesos psicológicos superiores pasan por las etapas anteriormente mencionadas. Entre estos procesos se encuentran: el pensamiento, el razonar de manera lógica y la memoria. Aboga por la construcción social del conocimiento, pues el aprendizaje se propicia en espacios de interacción y discusión con otras personas, para posteriormente pasar a ser parte personal de cada uno de los individuos que allí interactúan. En este proceso surge la necesidad de usar un lenguaje determinado para argumentar las ideas. Expone Vygotsky que el uso del lenguaje trae consigo la noción de herramienta y de signo; la primera, además de facilitar acciones, permite interactuar con otros objetos y personas; en cuanto al signo no solo designa al objeto, sino que también transmite contenido sociocultural. Dado que en el colegio se crean ciertas normas lingüísticas que conllevan a un lenguaje más científico que el utilizado en la casa, el lenguaje varía según el contexto en el que se usa.

Por otra parte, la construcción social de conocimiento según Schudson, citado en Mendoza (2010), favorece lo que él llama “concepción optimista de la cultura” (Mendoza, 2010, pp. 3), que consiste en las diferentes maneras como se puede dar solución a una situación y la posterior elección de una de ellas, lo cual propicia el paso de lo social a lo personal. Dicha concepción surge del “grado de elección consiente” (Mendoza, 2010, pp. 3) que se puede desarrollar en un grupo de trabajo.

Anexo a lo anterior, de acuerdo a lo expuesto en *“La construcción social de saberes matemáticos. El caso del tratamiento de la información”*, Velázquez (s.f.), apoya la idea de que el aprendizaje y el lenguaje están estrechamente relacionados. Él expone que el discurso matemático que surge en la interacción discursiva promueve el pensamiento matemático y contribuye a vislumbrar el carácter inmutable de las matemáticas; es decir que la interacción social que surge durante la construcción social del conocimiento permite que los estudiantes, además de enriquecer su conocimiento cognitivo, descubran como la matemática es permeable ante los cambios culturales y sociales.

En la construcción social del aprendizaje se concibe al alumno como constructor de sus saberes y al docente como el orientador y diseñador de las actividades en las que se crea el aprendizaje. Así el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura en el aula, donde se busca la construcción de un aprendizaje significativo alejado de la escolarización del saber de la escuela tradicionalista. Además, la construcción social del conocimiento promueve el desarrollo de competencias matemáticas y ciudadanas, favoreciendo la interdisciplinaridad de los contenidos. Esto hace que esta práctica no sea propia de la escuela sino de diferentes ámbitos sociales (Velázquez, s. f).

2.2 Actividad demostrativa

De acuerdo a lo establecido por Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) la actividad demostrativa está compuesta por los procesos de conjeturar y justificar; estos se encuentran relacionados entre sí, puesto que las conjeturas que se proponen serán las afirmaciones que se tratan de justificar en el segundo proceso. Lo que se acepta como justificación va a variar según el nivel escolar. Es posible que la justificación sea simplemente una verificación empírica de la conjetura establecida o que sea un desarrollo deductivo basado en un sistema teórico.

Como su nombre lo indica, conjeturar consiste en formular afirmaciones acerca de propiedades de los objetos geométricos involucrados en una situación, con base en lo observado o analizado de dicha situación; la conjetura se manifiesta siempre y cuando se considere como cierta, a pesar de no haber sido demostrada. En matemáticas, la conjetura se expresa como un enunciado condicional general expresado en el lenguaje matemático. En el antecedente de la condicional se exponen las propiedades que definen la situación propuesta, y en el consecuente la propiedad que se descubre como consecuencia de esas propiedades.

Debido a la certeza que se tiene de la veracidad de las conjeturas que se formulan, se puede proceder a justificarlas dentro de un sistema teórico formal, si se cuenta con ello, o se aceptan como hechos geométricos válidos, en caso contrario. En el primer caso la afirmación demostrada se convierte en teorema del sistema. En el segundo caso se usa como si fuera un teorema aunque no lo es en el sentido estricto de la matemática. Esto depende del nivel escolar de los estudiantes que están realizando la actividad demostrativa.

En el proceso de conjeturación, generalmente se presentan cuatro acciones: detectar un invariante, verificarlo siempre que surjan elementos de incertidumbre, formular la conjetura y corroborarla. En el proceso de justificación teórica, es posible reconocer tres acciones donde la meta es la producción de una argumentación de carácter deductivo[1] que valide una conjetura; dichas acciones son: seleccionar entre los elementos del sistema teórico aquellos que podrían sustentar la afirmación; organizarlos de manera deductiva y finalmente presentar la justificación de forma escrita.

Según Perry, Samper, Camargo y Molina (2013, p.38) un enunciado condicional en matemáticas es un objeto definido a partir de la lógica matemática. Su estructura se compone de dos proposiciones (antecedente y consecuente) ligados con el conectivo si-entonces. En el antecedente se expresan condiciones que deben ser suficientes para garantizar el consecuente, contrario a lo que sucede en la lógica cotidiana donde los argumentos dados para garantizar el consecuente pueden ser no suficientes. Además, la validez de la condicional en matemáticas se garantiza en un solo sentido. Es decir, si se tiene como verdadero el consecuente no se puede garantizar los datos del antecedente, dificultad que se presenta en los estudiantes cuando se hace uso del condicional en matemáticas, ya que en la lógica cotidiana teniendo el consecuente se puede deducir el antecedente.

[1]Ver definición argumento deductivo. p.

2.3 Modelo de argumento de Toulmin

Teniendo en cuenta a Rodríguez (2004), el modelo de Toulmin describe los argumentos que se formulan para persuadir o convencer a un interlocutor individual o colectivo de alguna idea, para solucionar problemas, resolver conflictos y tomar decisiones de diferente índole. El modelo de Toulmin se relaciona con la argumentación en cualquier tipo de disciplina o espacio abierto a la discusión, por lo cual este puede usarse para la construcción y análisis de argumentos en la actividad académica matemática a pesar de no ser creado con tal fin. Servirá como respaldo para el análisis de los argumentos que pueden dar los estudiantes en el desarrollo de cada una de las tareas propuestas en la unidad didáctica que se analiza en el documento para profesores.

Según Rodríguez (2004), Toulmin considera que un "argumento" es una estructura compleja que tiene principalmente tres componentes: evidencias o datos, una aserción y una regla general o garantía. A partir de los datos se establece la aserción gracias a la existencia de la garantía que los relaciona. Sin embargo, Toulmin incluye como elementos de un argumento otros tres componentes que se relacionan con los anteriores para estructurar cualquier tipo de argumento. Estos son: respaldo (estudios o afirmaciones por medio de las cuales se apoya la garantía), cualificador modal (indica el grado de probabilidad de la aserción) y reserva (habla de las posibles objeciones que se le puedan formular).

El grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ establece que un argumento puede ser expresado de manera oral o escrita. Aclara que la garantía en un argumento se concibe como una proposición general, y los datos y la conclusión como proposiciones particulares. Expresa que la manera como dichas proposiciones se relacionan permiten tipificar los argumentos en argumentos inductivos, deductivos o abductivos. Además en algunos casos dichas proposiciones no se encuentran explícitas por completo pero al momento de usar el argumento es posible tomarlas del enunciado. Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) describen tres tipos de argumentos:

Argumento deductivo: aparece principalmente en el proceso de justificación. En su estructura se tiene una *proposición general* (*garantía*) que indica qué propiedades de un objeto dado se toman como verdaderas y qué propiedad se desprende de esta, unos *datos* que son específicos para la situación dada y que concuerdan con las propiedades dadas en la garantía, y una *aserción* que es consecuencia de los datos y la garantía. La aserción constituye nueva información sobre el objeto involucrado en la situación que se está exponiendo.

Argumento abductivo: Estos pueden aparecer durante el proceso de conjeturación o de justificación; en este tipo de argumento se tiene como verdadera una aserción; a partir de ella se determina una posible garantía y sus correspondientes datos que son temporales hasta cuando se demuestren que podrían corresponder a la situación que se tiene en manos. La regla general puede surgir de una exploración empírica, dando lugar a una regla hipotética, o puede derivarse del sistema teórico en el que se trabaja, generando una regla aceptada; en ambos casos, se tiene que determinar si los datos correspondientes pueden ser verdaderos en la situación que se está estudiando. Sin embargo cuando la regla es hipotética, como mecanismo para validarla se puede crear un argumento deductivo, ya que se toma la garantía como cierta para demostrar la conclusión teniendo en cuentas los datos.

Argumento inductivo: Estos se utilizan con mayor frecuencia en el proceso de conjeturación. Para este tipo de argumento se cuenta con n instancias de una proposición p (situaciones particulares que ilustra la proposición p que se tiene) y de una proposición (q) la cual se relaciona con cada una de las instancias de p. Dichas proposiciones llevan a establecer provisionalmente una regla, sí p entonces q, que es verdadera solo sí q es acertada para cada instancia de p. Si es posible validarla, se introduce como nueva información al sistema teórico.

Para ayudar a los estudiantes a expresar sus argumentos de manera clara, el grupo Æ•G propone el uso de diferentes tipos de diagramas. Su uso ayuda a organizar los argumentos y a identificar las partes que los compone. Uno de los diagramas que menciona el grupo de investigación y que se utiliza en el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica que se presenta en este trabajo, es el que se describe a continuación. En él se pueden registrar argumentos que tienen la estructura de los esquemas de razonamiento Modus Ponendo y Modus Tollendo Tollens en los que se usan tres componentes: premisa, garantía y conclusión. El diagrama-deducción está compuesto por tres columnas tituladas “Qué sé”, “Qué Uso”, “Qué concluyo”.

Estas se corresponden, respectivamente, a las tres componentes de un argumento anteriormente mencionadas. En la columna Qué sé, se colocan los datos; en la Qué uso la garantía y en la columna Qué concluyo la aserción.

Tabla 1. Diagrama deducción

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
QS biseca al $\angle TQA$	Definición bisectriz de un ángulo	$\angle TQS \cong \angle AQS$

2.4 Estándares y competencias

A continuación se exponen algunas ideas, con base en la lectura del documento Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), en el cual se desarrollan y exponen argumentos que buscan globalizar la enseñanza de la matemática. En él, se explica de manera coherente el porqué de la formación matemática con relación a las problemáticas de la sociedad colombiana. Además se mencionan cinco procesos generales de la actividad matemática, los cuales exponen los pasos para hacerla. A la vez, estos se complementan con los cinco tipos de pensamiento. Específicamente, relacionado con la secuencia didáctica se tienen *el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.*

En el documento escrito por el MEN se observa el esfuerzo por rescatar de manera sintética las nociones que mejor explican cada aspecto de los estándares básicos de competencias en matemáticas. Por dicha razón, el presente texto está construido en su mayor parte por los conceptos originales que utilizó el Ministerio de Educación Nacional (2006), citas textuales y parafraseo del documento original, con el fin de no alterar el sentido para el cual fue construido. El objetivo de este es orientar al cuerpo de docentes de matemáticas en sus acciones diarias dirigidas a la formación en esta área del conocimiento. La matemática se debe considerar no como una colección de algoritmos y hechos que simplemente se repiten, sino como una disciplina que exige la reflexión para resolver problemáticas reales a través de las herramientas que brinda. Se procede a iniciar el análisis respetando el orden de las categorías que utiliza el texto de estándares básicos de competencias en matemáticas, para mantener una sincronía entre los dos documentos.

2.4.1 Los cinco procesos generales de la actividad matemática[2]

En este apartado el Ministerio de Educación Nacional (2006) hace énfasis en los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Ellos son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. A continuación se presentará una breve explicación de ellos.

La formulación, tratamiento y resolución de problemas. Este proceso dota de significado el conocimiento ya que cuando se contextualizan las matemáticas estas cobran sentido para el estudiante y pueden despertar su interés por el aprendizaje de las mismas. Al mismo tiempo al ser una actividad no aislada o propia de las matemáticas los problemas pueden surgir en otras disciplinas y/o en las matemáticas bien sea del mundo cotidiano cercano o lejano contribuyendo así a la interdisciplinariedad. Además este proceso permite desarrollar capacidades mentales y sociales en los estudiantes por lo cual es productivo experimentar con diferentes tipos de problemas por ejemplo, enunciados narrativos o incompletos en los que los estudiantes deban formular las preguntas o problemas abiertos con única respuesta, múltiples respuestas o ninguna, entre otros.

La modelación. En el texto se define la modelación como la representación de la realidad por medio de imágenes, figuras, diagramas y otros, con el fin de hacerla más comprensible

[2] MEN (2006)

para facilitar su apropiación y manejo. Además indica que esta permite identificar distintos caminos para solucionar un problema y verificar que tan razonable son los resultados obtenidos teniendo en cuenta la información inicial dada. Es un proceso que toma complejidad a medida que el sujeto lo usa e interioriza por lo cual puede iniciar desde la etapa temprana escolar y mejorar a medida que este proceso se realiza. En otro sentido, la modelación consiste en encontrar esquemas que se repiten, los cuales se denominan modelos o patrones con los cuales se puede llegar a producir nuevas estructuras matemáticas.

La comunicación. En el documento del MEN (2006), se reitera que contrario a lo que afirman muchos, las matemáticas no es un lenguaje. Sin embargo, se requiere el lenguaje para comunicarlas por escrito u oralmente. La construcción del conocimiento matemático surge de un proceso en el que se interpreta y se comunican ideas matemáticas usando el lenguaje u otros registros como diagramas, símbolos, y gráficas. En el documento se menciona que según Raymond Duval la buena comprensión de un contenido matemático depende del manejo y uso de diferentes representaciones del mismo.

El razonamiento. Se expresa en el documento del MEN que en los primeros grados de educación escolar, el razonamiento va acompañado de la modelación ya que esta facilita comprender patrones y relaciones para poder formular conjeturas y en lo posible justificarlas. Solicitar justificaciones es ofrecer la oportunidad de descubrir que las matemáticas van más allá que memorizar reglas o algoritmos. En cuanto a la educación superior, en el documento de los estándares, el MEN establece que el razonamiento se puede independizar de la modelación trabajando directamente con proposiciones y teorías. Es necesario resaltar la importancia de diseñar ambientes de aprendizaje en los cuales se promueva el uso de los diferentes tipos de razonamiento: abductivo, inductivo y deductivo.

La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. Este proceso consiste en la adquisición de lo comúnmente llamado algoritmos; es decir, producción y ejecución de procedimientos mecánicos o rutinarios. Sin embargo, según el MEN, para que este proceso sea significativo para los estudiantes se deben considerar los mecanismos cognitivos allí involucrados. Uno de ellos es la capacidad de alternar entre el concepto y el procedimiento, lo cual exige que en la planeación de clase se dedique tiempo tanto al manejo del concepto como al manejo del procedimiento. Un claro ejemplo de esto es tiene que ver con el concepto de área. Encontrar el área de una figura sobreponiendo cuadrados cuya área es $1\ cm^2$ es usar el concepto de área, mientras que hallar el área haciendo uso de las fórmulas matemáticas establecidas es manejar el algoritmo. Otro mecanismo propuesto por el MEN consiste en la práctica repetitiva de los algoritmos para lograr así rapidez y efectiva ejecución de los mismos, pues desarrolla seguridad en el estudiante al momento de usarlos aunque no contribuye al desarrollo significativo del concepto. Sin embargo, aunque se deben introducir herramientas tecnológicas en el aula que permitan hacer dichos procesos de manera más precisa y ágil, esto debe hacerse una vez los estudiantes hayan dominado el procedimiento, entiendan la teoría que apoya la validez del algoritmo, y comprendan cuándo usarlo. Dado que existe más de un mismo algoritmo para dar solución a un problema, es conveniente mostrar varias posibilidades a los estudiantes para que observen las ventajas y desventajas de usarlo en la situación específica.

2.4.2 Los cinco tipos de pensamiento matemático

El Ministerio de Educación Nacional (2006) explica que el pensamiento matemático no es un pensamiento único. Es decir, indica que para ser matemáticamente competente es necesario concentrase en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático. Estos, a su vez, se dividen en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medida, variacional y sistemas algebraicos analíticos, aleatorio y los sistemas de datos, y el numérico y los sistemas numéricos. De los cinco pensamientos anteriormente nombrados se realizará una breve explicación de los tres primeros ya que estos son los que fundamentan la secuencia didáctica que se presenta. Además se indican cuáles son los estándares, para los grados octavo y noveno, involucrados en la secuencia didáctica.

El pensamiento métrico y sistemas de medidas. Este pensamiento hace referencia a la capacidad que tiene una persona para medir, y usar cantidades y magnitudes teniendo en cuenta diferentes sistemas métricos que pueden ser establecidos por comunidades científicas o de manera personal. El siguiente estándar está involucrado en la secuencia didáctica:

- Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Este pensamiento permite que el individuo relacione objetos físicos con objetos geométricos teniendo en cuenta sus propiedades. Así posteriormente podrá hacer representaciones mentales de ellas, las cuales no son únicas, pues un solo objeto se puede representar de diferentes maneras. La interacción y manejo entre estas le permitirá al estudiante hacer acercamientos conceptuales de otros objetos matemáticos o profundizar en los que se trabajan, favoreciendo la creación de nuevas representación mentales. El MEN asegura que los sentidos, especialmente la visión, tienen un papel importante en la creación y manejo de las representaciones mentales, ya que facilitan la comprensión y uso de los conceptos y propiedades de los objetos físicos y geométricos. Los siguientes estándares son los que favorece la secuencia didáctica:

- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración.
- Aplico y justifico criterios de congruencia entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Uso representaciones geométricas para resolver problemas en las matemáticas.

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. De acuerdo al MEN, este pensamiento consiste en reconocer e identificar regularidades que permiten ver la variación y el cambio en varios contextos en los que se puede hacer uso de la representación y modelación de manera verbal, gráfica o algebraica. Además, favorece la construcción de estrategias para el uso y la comprensión del cálculo numérico y algebraico. También aporta en gran medida a la resolución de problemas y la modelación cuando se trata de situaciones de la vida real. Los siguientes estándares son los que están presentes en la secuencia didáctica:

- Identífico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

2.5 Geometría Dinámica

La geometría dinámica ofrece nuevas posibilidades de enseñanza para la geometría escolar ya que sirve como instrumento de mediación entre el estudiante y el conocimiento geométrico. Esto porque permite la manipulación de figuras geométricas, para que el estudiante pueda explorar y realizar construcciones. Y a partir de ello, puedan elaborar proposiciones geométricas que serán conjeturas que permitan la evidencia empírica que sirven como garantías a la hora de comunicar sus aserciones y argumentar. Es decir, con la geometría dinámica es posible hacer actividad demostrativa. Utilizar geometría dinámica ofrece algunas ventajas frente a las representaciones con papel y lápiz (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013). Entre ellas se encuentran las siguientes:

- Con el uso de geometría dinámica se puede visualizar propiedades matemáticas de los objetos geométricos que se mantienen durante la exploración. De esta manera, se pueden estudiar infinitos casos, lo cual permite formular conjeturas con un alto grado de veracidad, para posteriormente definir o caracterizar un objeto o establecer teoremas.
- Despierta en el estudiante interés por encontrar argumentos teóricos con los que justifica su respuesta a la situación problema, lo cual puede desencadenar en construcciones auxiliares, que enriquecen la situación con el fin de encontrar, en el sistema teórico, las garantías para los argumentos.
- Genera seguridad en el estudiante al momento de defender sus conjeturas o justificaciones, ya que acepta la geometría dinámica como una autoridad frente al conocimiento matemático, porque el software está diseñado para que respete los postulados de la geometría euclidiana.

2.6 Problema y tarea

Para el análisis de las actividades contenidas en cada una de las propuestas que se trabajarán en el presente documento, se han tomado como base las siguientes definiciones de Silva (2013), presentadas en su trabajo de grado "*Argumentar para definir y definir para argumentar":*

Taller: consiste en una acumulación de diferentes tareas con un mismo fin.

Tareas: son enunciados donde lo que se pretende es la producción de un resultado, o son indicaciones explícitas o implícitas con las que se espera una acción específica. Resolver una tarea consiste en realizar las acciones solicitadas en el enunciado. Las indicaciones implícitas son aquellas que no requieren ser explicadas cada vez que se desarrolle una tarea, porque son normas de clase previamente establecidas. Las tareas pueden ser problemas o ejercicios dependiendo de los conocimientos que tenga la persona que debe resolver la tarea.

- Una tarea es un *problema* para quien no posee un conocimiento suficiente para resolverla con facilidad; es decir, o no tiene claro como sus argumentos permiten dar respuesta al enunciado o no tiene ningún argumento que ayude a encontrar la respuesta.
- Una tarea es un *ejercicio* cuando la persona conoce algún algoritmo que permite obtener una solución.

De acuerdo a lo anterior, Silva propone las siguientes definiciones:

Tarea de construcción*:* requiere para su solución el uso de instrumentos geométricos manipulativos como regla, compás o un *software* de geometría dinámica.

Problema no abierto: es aquel donde se indican respuesta esperada o posibles métodos para llegar a la solución. En el caso contrario, se considera un *problema abierto*.

Problema de argumentación: además de solicitarse la respuesta se exige reportar los argumentos que permitieron llegar a dicha respuesta, los cuales pueden surgir del enunciado mismo del problema o de otra información externa.

En la siguiente tabla se presenta la clasificación final de las tareas, propuesto por Silva (2013), las cuales se usarán para el análisis de las actividades propuestas.

Tabla 2. Categorías finales para análisis de tareas

Clasificación de las tareas	Tipo	• Problema abierto (PA) • Problema no abierto (PNA) • Problema abierto de argumentación (PA-A) • Problema abierto de construcción (PA-C) • Problema abierto de argumentación y construcción (PA-AC) • Problema no abierto de argumentación (PNA-A) • Problema no abierto de construcción (PNA-C) • Problema no abierto de argumentación y de construcción (PNA-AC)

CAPÍTULO 3. PRESENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En el presente capítulo se presenta la secuencia didáctica tomada del trabajo de grado "Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa" (Fonseca y Lara, 2013). A este se le hicieron pequeñas modificaciones. La estructura de la presentación de la secuencia busca establecer explícitamente aspectos como: objetivos, logros de aprendizaje, tipos de argumentos que favorece la tarea, entre otros, con el fin de dar a conocer qué conforma cada actividad, qué del desarrollo matemático del estudiante se propicia con su implementación, y cómo implementarla.

En los requisitos se numeran las condiciones que deben cumplir la institución, los estudiantes y los profesores, para poder realizar cada actividad. Bajo el título de logros de aprendizaje se identifican puntualmente cada logro que se espera los estudiantes lleguen a cumplir al desarrollar la actividad identificando el pensamiento matemático correspondiente que conlleva a los estándares específicos correspondientes (ver sección 2.4.2). En cuanto a la sección evaluación se numeran algunas de las cosas que podría evaluar el profesor, sin embargo él tiene la autonomía para diseñar el elemento correspondiente para la evaluación que considere pertinente.

En cuanto a la metodología de clase a utilizar, el profesor debe dirigir las actividades teniendo en cuenta lo establecido por Vygotsky y mencionado en el presente trabajo (ver sección 2.1), con el fin de desarrollar las clases en un ambiente de trabajo en grupo que propicie la construcción social del conocimiento.

3.1 Generalidades

Esta secuencia didáctica consta de dos partes. Con ella se busca conformar un sistema teórico local e iniciar a los estudiantes en la actividad demostrativa, enmarcado en el concepto de construcción social. En la primera parte se hace uso de material concreto, elaborado en cartón, diseñado para descubrir, establecer y usar los criterios de congruencia para triángulos; la segunda parte está dividida en dos bloques que constan de tareas que requieren el uso de geometría dinámica. A través de ellas se pretende que los estudiantes, por medio de la exploración de sus construcciones, establezcan algunas definiciones y hechos geométricos que conformen el sustento teórico que permita, en la última tarea, validar la caracterización como lugar geométrico de la bisectriz de ángulo, descubierta por los estudiantes.

Además, como la finalidad de la secuencia didáctica que se presenta a continuación es que los profesores de secundaria en ejercicio puedan usarla en clase, se tuvo en cuenta lo establecido en los estándares básicos de competencias en matemáticas, en especial aquellos contemplados en los tipos de pensamiento que se describieron en el marco teórico. Vale la pena recalcar que las actividades de la secuencia apuntan a fortalecer los cinco procesos del pensamiento matemático.

En la descripción de cada una de las tareas, se realizan las siguientes clasificaciones de los ejercicios o problemas de acuerdo a lo expuesto en el marco teórico: tipos de argumentos que se deben utilizar al desarrollar las tareas (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013), y clasificación de los ejercicios o problemas (Silva, 2013).

3.2 Primera parte de la secuencia didáctica

Meta

Establecer y usar los criterios de congruencia para triángulos.

Tema

Criterios de congruencia de triángulos.

Intención de la primera parte de la secuencia didáctica

Se busca iniciar a los estudiantes en la actividad argumentativa y demostrativa, a partir del uso de material manipulativo, para explorar relaciones geométricas entre triángulos. Como los estudiantes trabajan en grupos pequeños, se espera generar la interacción entre ellos para descubrir y enunciar conjuntamente los criterios de congruencia de triángulos.

Objetivo de la de la primera parte de la secuencia didáctica

Generar un espacio para el descubrimiento de los criterios de congruencia de triángulos, los cuales entran a formar parte del sistema teórico local que se está conformando. Además promover el uso de estos como herramienta en la actividad demostrativa.

3.2.1 Estructura Conceptual

Definiciones geométricas

Ángulo: unión de dos rayos que no son colineales y que tienen el mismo origen.

Ángulos congruentes: dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

Distancia: la distancia de un punto D a un punto C es la medida de la longitud del DC.

Segmentos congruentes: dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

Triángulos congruentes: dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre sus vértices tal que los lados y ángulos correspondientes son congruentes.

Hechos Geométricos

Criterio LAL: dados dos triángulos. Si existe una correspondencia entre los vértices de los triángulos tal que dos lados de un triángulo y el ángulo determinado por ellos son congruentes a los lados correspondientes del otro triangulo y el ángulo determinado por estos, entonces los dos triángulos son congruentes.

Criterio ALA: dados dos triángulos. Si existe una correspondencia entre los vértices de los triángulos tal que dos ángulos de un triángulo y el lado determinado por sus vértices son congruentes a los ángulos correspondientes del otro triangulo y el lado determinado por los vértices de estos, entonces los dos triángulos son congruentes.

Criterio LLL: dados dos triángulos si existe una correspondencia entre los vértices de los triángulos tal que los lados de un triángulo son congruentes a los lados correspondientes del otro triangulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Criterio LAA: dados dos triángulos. Si existe una correspondencia entre los vértices de los triángulos tal que dos ángulos de un triángulo y el lado opuesto a uno de ellos son congruentes a los ángulos correspondientes del otro triangulo y el lado correspondiente al lado del primer triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Criterio HC: dados dos triángulos rectángulos. Si existe una correspondencia entre los vértices de los triángulos tal que la hipotenusa de uno de los triángulos y uno de los catetos son congruentes a los lados correspondientes del otro triangulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

3.2.2 Requisitos de la primera parte de la secuencia didáctica

Para las Instituciones

Tiempos. Se requieren aproximadamente seis sesiones de una hora de clase.

Recursos. Lápiz, papel traslucido, regletas y moldes construidos por el profesor. El profesor representa triángulos diferentes, cada uno en una hoja distinta de papel. Para cada uno de ellos construye las regletas y moldes descritos en las páginas 27 y 28. Las regletas tienen la misma longitud que los lados de un triángulo específico y los moldes la misma medida de los ángulos del mismo triángulo.

Para los estudiantes

Conceptuales. Definición de triángulo, reconocimiento visual de diferencias y semejanzas entre triángulos.

Habilidades

Manuales

- Exhibir destreza con el manejo de las regletas y moldes.

Comunicativas

- Expresar sus ideas de manera verbal o escrita, y tener una posición crítica y reflexiva ante los comentarios de sus compañeros.
- Realizar representaciones del objeto geométrico a tratar.

- Usar el lenguaje geométrico como medio de comunicación.
- Argumentar, a partir de la teoría, su aceptación o desaprobación, de las ideas propias o de los demás.

Sociales

- Escuchar con respeto las ideas de los demás.
- Participar genuinamente con los compañeros del grupo de trabajo.

Para las Profesores

- Propiciar la comunicación de ideas, exigiendo el uso del lenguaje geométrico.
- Favorecer la expresión de ideas de estudiantes.
- Promover el trabajo colectivo y la construcción social del conocimiento.

3.2.3 Descripción general de la primera parte de la secuencia didáctica

A partir de la visualización de triángulos, construidos usando algunas regletas y/o moldes, los estudiantes pueden determinar si hay o no diferencias entre ellos para decidir si existe un triángulo o muchos triángulos con las características transferidas por las regletas o moldes utilizados. Una vez estudiados los resultados obtenidos con el uso de todas las posibles combinaciones de regletas y moldes, y con la comparación del triángulo original con los construidos, se concretan qué condiciones producen triángulos congruentes al original.

Evaluación de aprendizajes

- Manipulación adecuada del material (regletas y moldes).
- Visualización y comparación de triángulos para determinar triángulos congruentes.
- Coherencia de los argumentos producidos.
- Uso del lenguaje matemático para comunicar ideas.
- Participación en conversaciones y actividades del grupo.
- Uso de los criterios de congruencia.

- Uso adecuado del esquema, propuesto en clase, en el que se consignan los argumentos para validar una aserción a partir de unos datos.

3.2.4 Bloque 1. Construcción y uso de los criterios de congruencia de triángulos

Objetivo

Descubrir relaciones entre triángulos para establecer los criterios de congruencia de estos. Utilizar los criterios en la solución de problemas.

Logros de aprendizaje del bloque

- Identifica propiedades que determinan si dos triángulos son congruentes o no (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos).
- Usa los criterios de congruencia de triángulos para resolver problemas. (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos).
- Usa la definición de triángulos congruentes (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos).
- Resuelve ecuaciones de primer grado (Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos Analíticos).
- Formula ecuaciones lineales que le permiten encontrar la medida de lados y ángulos de triángulos, teniendo en cuenta congruencias dadas (Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos Analíticos).

Contenido matemático previo

Definiciones

- Ángulo
- Ángulos par lineal
- Ángulo recto
- Ángulos suplementarios
- Estar entre
- Rayo opuesto

- Triángulo
- Triángulo rectángulo

Contenido matemático involucrado

Definiciones

- Ángulos congruentes
- Correspondencia entre vértices de triángulos
- Segmentos congruentes
- Triángulos congruentes

Criterios de congruencia

- LLL (lado-lado-lado)
- LAL (lado-ángulo-lado)
- ALA (ángulo-lado- ángulo)
- LAA (lado- ángulo- ángulo)
- HC (Hipotenusa-Cateto)

Papel del artefacto escogido

El artefacto escogido consta de lápiz, papel traslucido, las regletas y los moldes. Con ellos, los estudiantes pueden representar diferentes triángulos que cumplen con la congruencia de lados y/o ángulos correspondientes, de acuerdo a los elementos usados. Es de destacar que los estudiantes no conocen el triángulo original que dio lugar a las regletas y moldes, ni reciben todo el material que corresponde al triángulo. Van recibiendo parte de las regletas y/o moldes del profesor para hacer todas las posibles representaciones de triángulos con esos elementos. Las posibles combinaciones de las regletas y moldes que aseguran un estudio completo de los triángulos que tienen partes congruentes al triángulo original se dan en la Tabla 2, a continuación. El uso del papel traslucido permite mover las representaciones de los triángulos para encontrar correspondencias entre los vértices para así decidir si los triángulos son congruentes.

Requisitos

- Conocer el concepto de triángulo y la definición de segmentos y ángulos congruentes.
- Saber cómo solucionar ecuaciones de primer grado.

Análisis de las tareas

A continuación se presenta cada una de las actividades que componen este bloque junto con los logros, la descripción, enunciados, actuaciones tanto de los estudiantes como del profesor y sugerencias para cada una.

3.2.4.1 Tarea 1

Logros de aprendizaje de la tarea

- Construye triángulos a partir del material (regletas y moldes de ángulos)
- Descubre los criterios de congruencia de triángulos.

Descripción de la tarea

Para el desarrollo de la tarea, se deben organizar los estudiantes en grupos de tres personas. Cada grupo recibe algunas de las regletas, y/o algunos de los moldes de los ángulos del triángulo desconocido, elaborados por el profesor o por otro grupo de estudiantes si saben usar regla y compás para copiar segmentos y ángulos. Deben dibujar cuantos triángulos diferentes puedan, que tengan los lados y/o ángulos, que corresponden a los elementos que recibieron, congruentes a los del triángulo desconocido. El material que se entrega en cada momento, corresponden a los elementos que juegan un papel en cada uno de los casos de acuerdo a la siguiente tabla se lista en la siguiente tabla.

Tabla 3. Casos triángulo perdido

No.	Caso
1	Dos ángulos
2	Un lado y el ángulo con vértice en el lado
3	Un lado y un ángulo sin vértice en el lado
4	Dos lados
5	Tres ángulos
6	Dos lados y el ángulo no incluido
7	Dos lados y el ángulo incluido
8	Dos ángulos y el lado no incluido
9	Dos ángulos y el lado incluido
10	Tres lados

Los estudiantes deben registrar en una Tabla 4 (pág. 26) dada el nombre de los moldes y/o regletas usadas, y cuántos triángulos diferentes obtienen. Finalizados los diez casos, reciben la representación del triángulo original para que lo comparen con los triángulos construidos y determinen en cuáles de los casos se construye un triángulo congruente al original. Posteriormente, se realiza la socialización de los resultados obtenidos por cada grupo, para concluir los criterios de congruencia entre triángulos. Los criterios de congruencia son aquellos casos en los que solo se puede obtener un triángulo congruente al original. Dichos criterios ingresan al sistema teórico local que se ha venido conformando con el contenido matemático anteriormente mencionado.

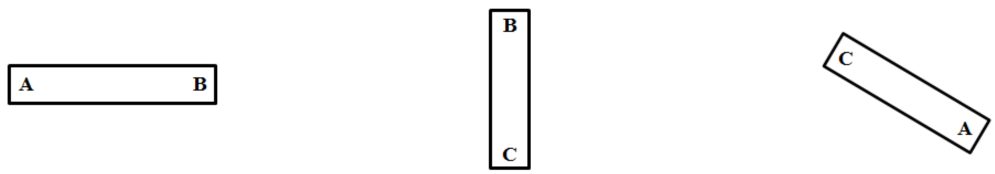
La tarea se clasifica como PA-AC. Es un problema abierto porque los estudiantes no conocen el número de triángulos que pueden construir y nada en el enunciado de la tarea lo sugiere. Es de argumentación porque favorece el argumento inductivo puesto que, a partir de lo que descubren, los estudiantes tienen que generalizar para reconocer las condiciones que conforma cada criterio de congruencia de triángulos. Es de construcción porque tienen que construir triángulos con las piezas que reciben.

Tabla 4. Actividad regletas y moldes

	Nombre de moldes utilizados	**Nombre de regletas utilizados**	**¿Cuántos triángulos diferentes se obtienen?**
Caso 1 Dos ángulos			
Caso 2 Un lado y un ángulo con vértice en el lado			
Caso 3 Un lado y el ángulo sin vértice en el lado			
Caso 4 Dos lados			
Caso 5 Tres ángulos			
Caso 6 Dos lados y el ángulo no incluido			
Caso 7 Dos lados y el ángulo incluido			
Caso 8 Dos ángulos y el lado no incluido			
Caso 9 Dos ángulos y el lado incluido			
Caso 10 Tres lados			

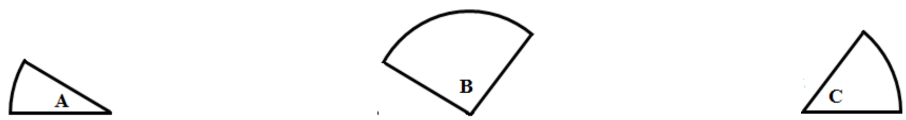
Enunciado de la tarea

El propósito de esta actividad es determinar cuál es el **triángulo perdido** de cada grupo. Para ello, recibirán el material necesario para cada uno de los **casos** mencionados en tabla que deberán diligenciar con la información que obtengan. El material consiste en unas **regletas** con las que se dibujarán **segmentos** y unos **moldes** con los que se dibujarán **ángulos,** con la intención de formar con ellos triángulos.



AB BC CA

Figura 1. Regletas



$\angle A$ $\angle B$ $\angle C$

Figura 2. Moldes de ángulos

Usando las piezas indicadas, el grupo tratará de dibujar la mayor cantidad de triángulos diferentes, obedeciendo las siguientes reglas:

- Las letras indicadas en cada pieza deben coincidir. Por ejemplo, si se usa la regleta BC y el molde C, el extremo del segmento y el vértice del molde ángulo deben coincidir en C**.**

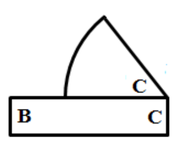


Figura 3. Molde y regleta sobrepuestos

- Los segmentos deben tener la misma longitud de la regleta, y nombrarse como esta.

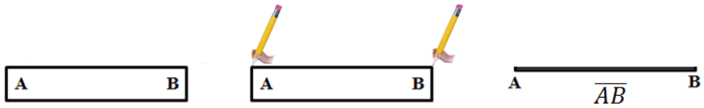


Figura 4. Construcción regletas

- Para dibujar un ángulo se deben trazar líneas usando los lados rectos del molde como guía. Estas líneas se pueden extender o acortar cuanto sea necesario para que el dibujo dé lugar a un triángulo, a menos que sobre una de las líneas se deba colocar una de las regletas, como se mencionó en la primera regla.

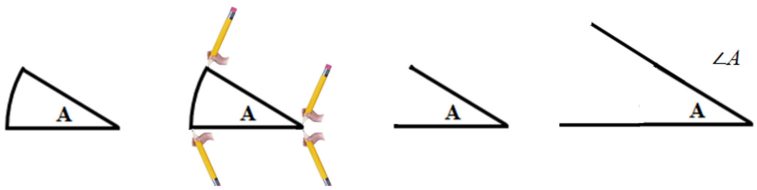


Figura 5. Construcción moldes

Posibles actuaciones de los estudiantes

- Conformarse con construir solo un triángulo.
- No hacer la correspondencia correcta entre los bordes de las regletas que corresponden a los extremos de los segmentos y la punta del molde que corresponde al vértice del ángulo.
- En el Caso 6, variar muy poco la posición del lado por lo cual no se visualiza el cambio en la medida del ángulo.
- Como no encuentra cómo crear un triángulo con los elementos asignados, el estudiante concluye que no existe algún triángulo.
- Al dibujar el triángulo con las propiedades dadas, su representación no es exacta, por lo cual se le dificultará determinar la congruencia o no con el triángulo perdido.
- Observar que entre los infinitos triángulos con las características dadas, existe uno que es congruente al triángulo perdido, y a partir de ello concluir que esas condiciones sí determina un criterio de congruencia.
- Si los estudiantes construyen el material correspondiente al triángulo perdido sin la exactitud requerida, no resultaría alguno congruente al triángulo perdido.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Mostrar a los estudiantes, si es necesario, que colocar las piezas en otra posición permite construir triángulos posiblemente diferentes que comparten las propiedades dadas en cada caso.
- Mostrar a los estudiantes que el molde del ángulo no limita la longitud de los segmentos que determinan los lados del triángulo que se está construyendo; es decir, se puede variar la medida de dichos segmentos, según sea necesario.

Sugerencias

A continuación se realizará una corta descripción de la mejor forma de realizar las construcciones con un ejemplo gráfico como apoyo para facilitar su comprensión y evidenciar fácilmente cuántos triángulos diferentes se pueden construir, cuando las condiciones no dan lugar a un criterio de congruencia. Es usual que los estudiantes construyan los triángulos separados, sin aprovechar que al compartir propiedades, se pueden representar solapados.

Caso 1. Dos ángulos.

Con estas condiciones, se puede fijar uno de los ángulos y sobre uno de los rayos de dicho ángulo, deslizar el otro ángulo dado para construir infinitos triángulos con dichas propiedades. Se puede resaltar que el tercer ángulo del triángulo queda determinado con estas condiciones[3] y mencionar que se debe al Teorema Suma de Medidas de Ángulos de Triángulo, si se quiere incluir este teorema en el sistema teórico.

[3] La medida del ángulo queda determinado por: Teorema suma medida de ángulos interiores de un triángulo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (es decir, 180°).

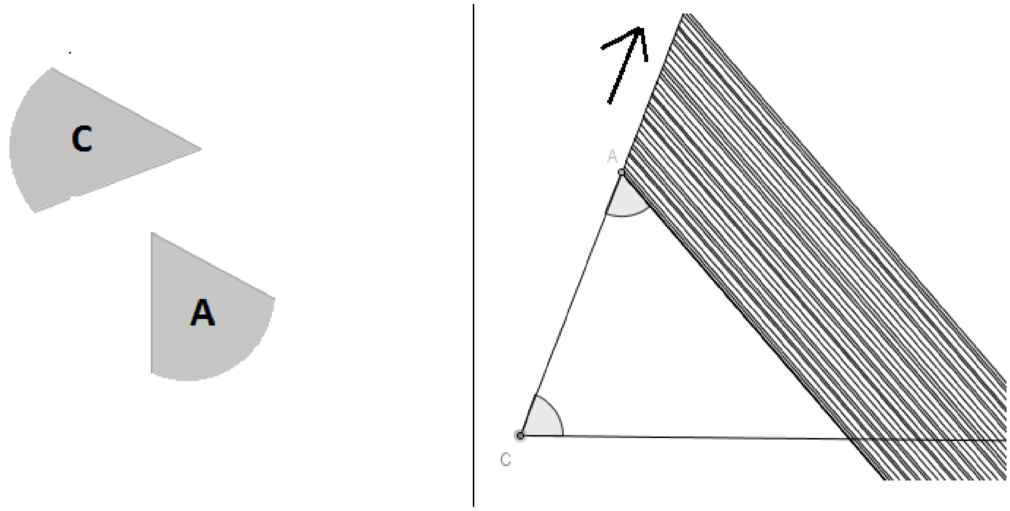


Figura 6. Caso 1

Hay infinitos triángulos ya que el vértice de uno de los ángulos se puede desplazar por toda el rayo, lado del $\angle \boldsymbol{C}$, produciendo así infinitos segmentos diferentes.

Caso 2. Un lado y un ángulo con vértice en el extremo del lado.

Para este caso, es importante que los estudiantes comprendan que la longitud de los lados de los moldes no determina la longitud de los segmentos de los triángulos, puesto que la diferencia entre los posibles triángulos depende de la medida de los segmentos no dados.

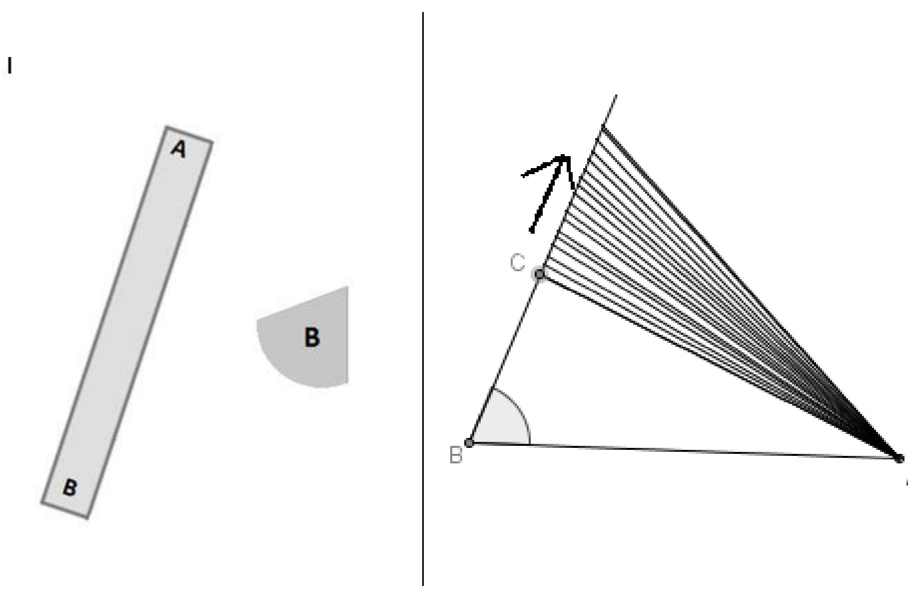
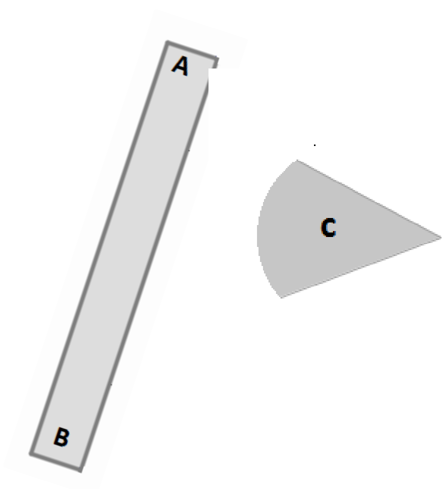


Figura 7. Caso 2

Para construir los infinitos segmentos que serán lados de los diferentes triángulos, se debe escoger el otro extremo del segmento entre los infinitos puntos del $\boldsymbol{BA}$.

Caso 3. Un lado y un ángulo sin vértice en el lado.

Este caso suele ser uno de los más complejos de resolver. Se sugiere inicialmente graficar el ángulo extendiendo sus rayos, con el fin de poder, posteriormente, tomar la regleta del segmento y "encajarla" de tal manera que sus extremos queden sobre los rayos del ángulo. Así se pueden construir infinitos triángulos con las características exigidas.



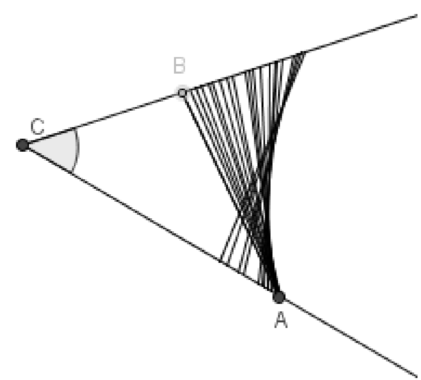


Figura 8. Caso 3

En este caso, se debe dejar el ángulo fijo y dibujar los lados de este, tan largos como sea posible. Se coloca la regleta correspondiente al $\boldsymbol{AB}$ de tal forma que cada extremo esté en cada lado del ángulo, es decir, debe encajar perfectamente entre los lados del ángulo.

Caso 4. Dos lados.

Para resolver esta situación, se debe cambiar la medida del ángulo determinado por los segmentos dados obteniendo así infinitos triángulos ya que se puede deducir del Teorema de la Charnela[4] ,que a medida que se modifica la apertura del ángulo varia la longitud del

[4] Teorema de la Charnela: Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente , con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el

segmento opuesto a este. En caso de que los estudiantes conozcan el teorema de la Charnela este se puede utilizar como ayuda para la solución del problema.

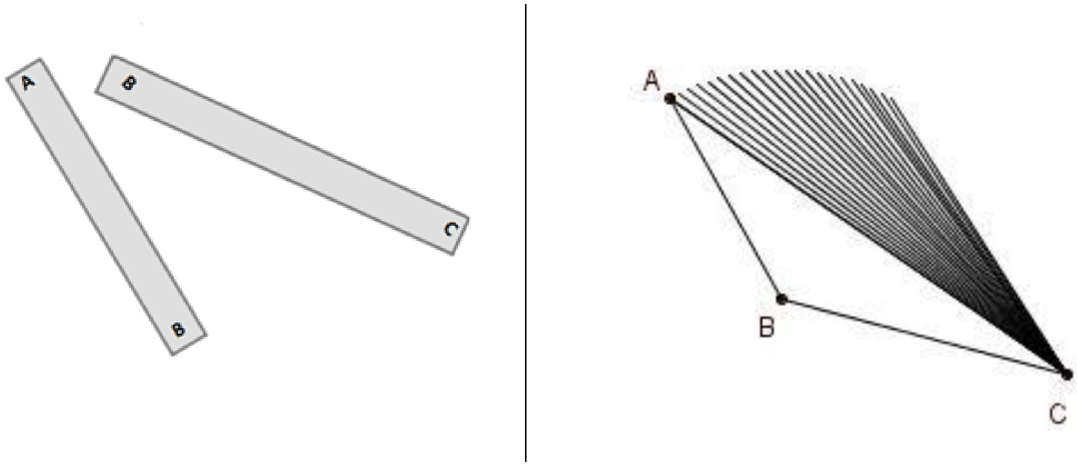


Figura 9. Dos lados

Se deja fija una de las regletas y colocando la otra en el extremo común, se abre y cierra esta de tal manera que se modifica la amplitud del ángulo que determinan los dos segmentos.

Caso 5. Tres ángulos.

Al igual que en el Caso 1, lo que se debe hacer es fijar uno de los ángulos dados y deslizar los otros dos sobre sus lados. Cuando se lleva a cabo este procedimiento, se puede evidenciar que el tercer ángulo no juega ningún papel en dicha construcción. De nuevo, se puede mencionar el Teorema Suma de Medidas de Ángulos de Triángulo como la razón por la cual esto sucede, si se ha incluido este teorema en el sistema teórico que se está conformando.

Caso 6. Dos lados y el ángulo no incluido.

Es importante que algunos de los grupos para los cuales el triángulo desconocido es rectángulo, reciba como elementos para la construcción, la hipotenusa, un cateto y el ángulo rectángulo. Solo en ese caso se tiene seguridad de que todos los triángulos

---

segundo, entonces el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo.(Moise y Downs, 1966) representados son congruentes al triángulo desconocido. En los demás tipos de triángulo, es posible, en ocasiones, generar dos triángulos diferentes, uno obtusángulo y el otro acutángulo, como se ilustra en la Figura 10. La justificación de lo expuesto anteriormente se encuentra en la Ley de los Senos. No es un hecho matemático conocido por los estudiantes de grados octavo o noveno, razón por la cual no se puede mencionar.

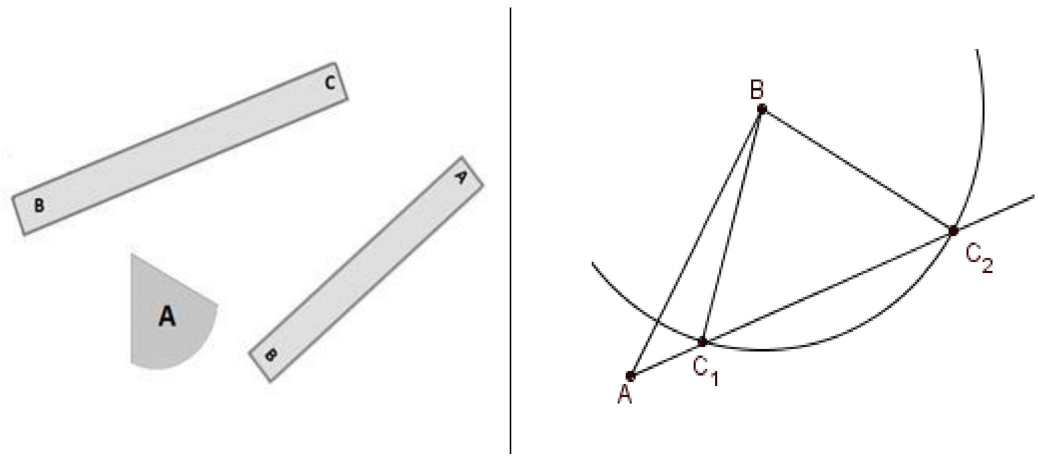


Figura 10. Triángulo no rectángulo

Si el triángulo no es rectángulo, se debe prolongar los rayos que conforman al $\angle \boldsymbol{A}$. En un lado del ángulo se identifica el punto $\boldsymbol{B}$ usando la regleta $\boldsymbol{AB}$. A partir de $\boldsymbol{B}$ se coloca la otra regleta para encontrar al punto C.

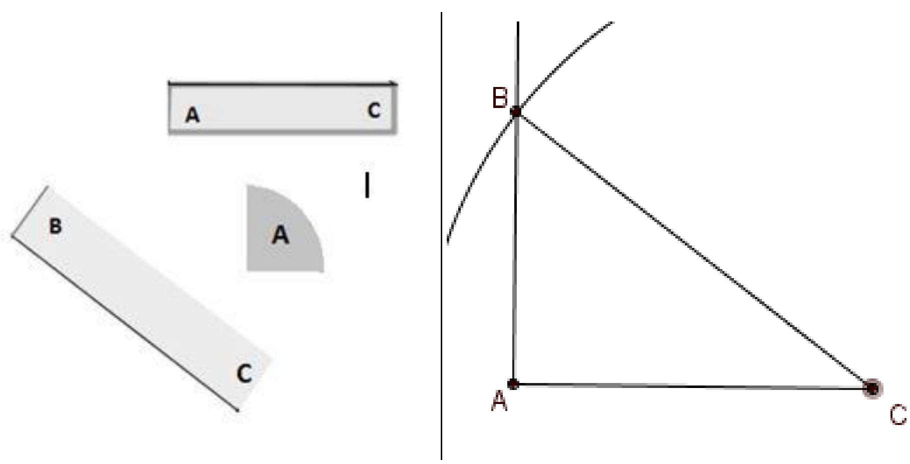


Figura 11. Triángulo rectángulo, análogo a la anterior figura

3.2.4.2 Tarea 2

Logros de aprendizaje

- Reconoce visualmente la correspondencia entre vértices para determinar si dos triángulos son o no congruentes.
- Hace uso de la definición de triángulos congruentes para describir sus características.
- Involucra los criterios para construir (dibujar) triángulos congruentes.
- Usando la correspondencia de congruencia entre ángulos y segmentos, encuentra la medida de estos.
- Reconoce si la información dada de los triángulos permite establecer la congruencia entre ellos.
- Inicia procesos de argumentación haciendo uso del esquema a tres columnas.

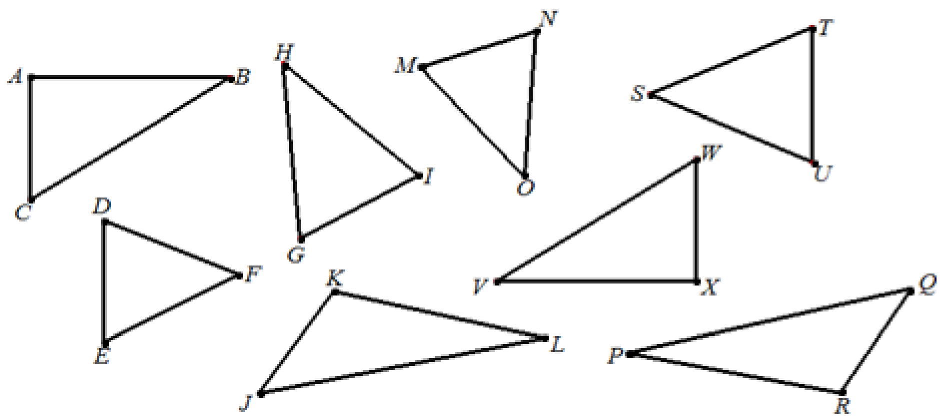
Descripción de la tarea

La siguiente tarea contiene tres problemas con los que se pretende que los estudiantes usen la visualización para establecer la congruencia entre triángulos, por medio de la comparación de los triángulos. Para resolver dos de los problemas, se requiere saber cómo ubicar puntos en el plano cartesiano. Aunque visualmente se puede determinar si dos segmentos son congruentes, si los estudiantes conocen la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos, conocidas sus coordenadas, también pueden recurrir a hacerlo para comprobar congruencia.

La clasificación de los problemas difiere. El primer problema se clasifica como PA-A. Es un problema abierto porque aunque los estudiantes deben identificar parejas de triángulos congruentes, no se indica cómo deben reconocerlo. Es un problema de argumentación ya que deben usar argumentos abductivos para al determinar cuál de los criterios es la garantía y por tanto, cuáles ángulos o lados deben ser congruentes. El problema 2 no es abierto, pues se informa qué deben hacer. Se solicita una justificación, que se dará mediante un argumento deductivo, por tanto es de argumentación. Por ende, se clasifica como PNA-A. El problema 3 3 se clasifican como PA-A. Es un problema abierto porque no se indica ni método ni cuántas respuestas posibles hay, y es de argumentación porque se solicita una justificación. En este caso, el argumento es de tipo abductivo ya que se sabe cuál es la aserción pero no con cuál criterio garantizar la congruencia ni qué datos se tienen que establecer.

Enunciado de la tarea

1. Identifique parejas de triángulos que podrían ser congruentes. Nómbrelos de acuerdo con la correspondencia adecuada. Explique las razones que usó para concluir que los triángulos son congruentes.



2. Localice en una hoja cuadriculada los siguientes puntos usando el plano cartesiano. Dibuje él ΔABC y el ΔDEF. ¿Los dos triángulos son congruentes? Explique su respuesta.

a. A $-1,2$, B $4,2$, C $2,4$; D $5,-1$, E $7,1$, F $10,-1$.

b. A $-3,1$, B $2,1$, C $2,3$; D $4,3$, E $6,3$, F $6,8$.

c. A $2,2$, B $5,4$, C $6,1$; D $-1,-2$, E $-5,1$, F $-3,-5$.

3. Localice los puntos en el plano cartesiano. Dibuje el $\Delta\, ABC$ y el DE. En cada caso, ¿en dónde debe localizarse el punto F para que el $\Delta\, ABC$ sea congruente al $\Delta\, DEF$?

a. A $1,2$, B $4,2$, C $2,4$; D $6,4$, E $6,7$.

b. $A \quad -1{,}0 \ , B \quad -5{,}4 \ , C \quad -6{,}1 \ ; \qquad D \quad 1{,}0 \ , E \quad 5{,}4 \ .$

c. $A \quad 1{,}4 \ , B \quad 3, \frac{15}{2} \ , C \ \ 5{,}4 \ ; \qquad D \quad -3, -1 \ , E \quad 1. -1 \ .$

Posibles actuaciones de los estudiantes

- Dificultad para rotar mentalmente figuras para determinar la correspondencia entre los vértices de los triángulos que puede dar lugar a la congruencia de estos.
- No ubicar adecuadamente los puntos.
- Encontrar solo una posible ubicación en el plano cartesiano para el punto F. Usar diferentes escalas en los ejes cartesianos.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Explicar cómo se deben ubicar los puntos en el plano cartesiano
- Indagar para que los estudiantes descubran todas las posiciones posibles para el punto F.
- Mostrar que al no usar escalas iguales en los ejes las representaciones gráficas de los triángulos no serán correctas.

Sugerencias

- Usar una copia, en papel traslúcido, de los triángulos para efectuar los movimientos (rotaciones, traslaciones y simetrías axiales) para sobreponer un triángulo en otro, que permitirá mostrar que dos triángulos son congruentes.
- Tener en cuenta que se requiere conocimiento previo del manejo de coordenadas en el plano cartesiano para la ubicación de puntos.

3.2.4.3 Tarea 3

Logros de aprendizaje

- Usa el diagrama-deducción para consignar argumentos.
- Usa la definición de triángulos congruentes o los criterios de congruencia como garantía en sus argumentos.

- Reconoce que cuando dos triángulos comparten un lado, se usa la propiedad reflexiva para establecer la congruencia del lado con sí mismo.
- Reconoce si los datos dados son o no suficientes para determinar la congruencia entre dos triángulos.

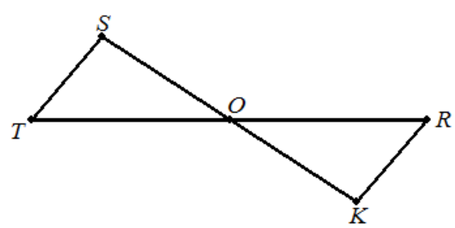
Descripción de la tarea

Esta tarea está compuesta por tres problemas que pueden ser realizados en grupos de tres estudiantes. Con dichos problemas, además de iniciar a los estudiantes en el uso del diagrama-deducción, se espera crear conciencia de la necesidad de tener todas las propiedades requeridas por alguno de los criterios de congruencia para poder concluir la congruencia de dos triángulos.

Los problemas 1 y 3 se clasifican como PNA-A. Son problemas no abiertos ya que se indica exactamente qué se debe hacer. Son de argumentación ya que se solicita completar el esquema de un argumento deductivo, completando el diagrama-deducción. El problema 2 no es abierto ni de argumentación pues no se solicita explicación de la respuesta.

Enunciado de la tarea

1. Los dos triángulos que se muestran a continuación son congruentes. Completen el diagrama-deducción**.**



Qué sé	**Qué uso**	**Qué concluyo**
$\Delta STO \cong \Delta KRO$		

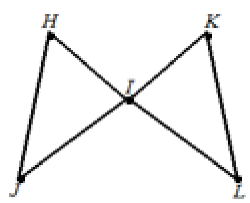
2. Teniendo en cuenta lo anterior, seleccionen la proposición *falsa* en cada literal.

a. $ST \cong KR, \angle T \cong \angle O, TO \cong RO, \angle S \cong \angle K$

b. $SO \cong KO, \angle O \cong \angle O, \angle T \cong \angle R, ST \cong RO$

3. Para cada caso, determinen si con la información dada existe congruencia de la pareja de triángulos. Justifiquen su respuesta haciendo uso del diagrama-deducción.

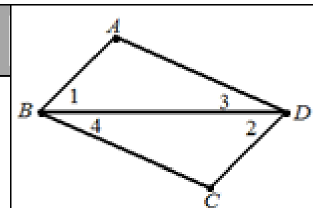
a. **Dado:** $HI \cong KI, \angle HIJ \cong \angle KIL, JI \cong IL$



Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

b. **Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo



Posibles actuaciones de los estudiantes

- Escribir incorrectamente las correspondencias de los vértices de los triángulos.
- No usar la información gráfica para obtener el dato faltante.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

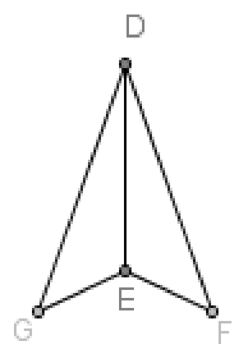
- Cuestionar a los estudiantes acerca de la forma como nombran los triángulos cuando reportan la congruencia, con el fin de que sean ellos mismos quienes determinen si han establecido la correspondencia adecuadamente.
- Dar ejemplos en los cuales se use la propiedad reflexiva de la congruencia para poder establecer congruencia de triángulos.

Sugerencias

- En caso de que se evidencie dificultad al reconocer que se requiere usar la propiedad reflexiva para completar las condiciones requeridas en el criterio de congruencia que se debe utilizar, proveer más ejemplos que conjuntamente resuelva con los estudiantes. A continuación se dan dos ejemplos que puede ser útiles para reforzar el uso de la propiedad reflexiva.

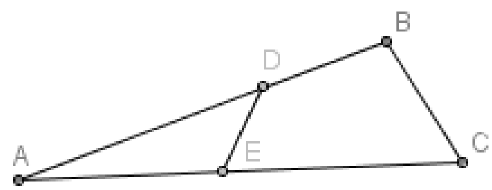
Ejemplos

1. Dado que $EF \cong EG\ y\ \angle DEF \cong \angle DEG$, ¿es posible concluir que los triángulos son congruentes? Explique su respuesta.

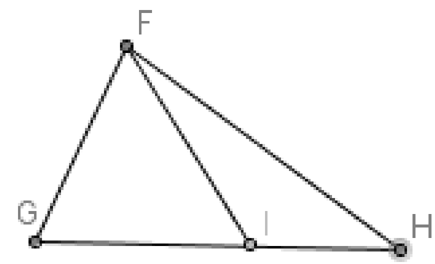


2. En cada figura, determine dos triángulos para los cuales se puede asegurar que tienen un ángulo o lado congruentes. ¿Qué propiedad permite asegurarlo? ¿Son congruentes los triángulos? Explique su respuesta.

a)



b)



3.2.4.4 Tarea 4

Logros de aprendizaje

- Reconoce las condiciones para que dos triángulos sean congruentes.
- Reconoce que marcas iguales sobre segmentos o ángulos de figuras informan sobre la congruencia de esta.

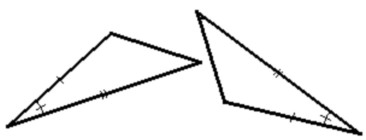
Descripción de la tarea

Esta tarea contiene dos ejercicios y dos problemas. El fin primordial es afianzar los criterios de congruencia. Lo propuesto en los numerales 1 y 3 son ejercicios pues se indica que se deben usar los criterios de congruencia para resolverlos. En el primer ejercicio, se proveen los datos, la congruencia de segmentos o de ángulos, de manera gráfica, mientras que en los otros ejercicios se presenta la información de manera simbólica. Para apoyar el proceso de solución, en los problemas 2 y 3, se pide a los estudiantes representar los triángulos. Con ello, visualmente pueden determinar correspondencias y posibles congruencias. Los problemas 2 y 4 se clasifican como PA-A. En el primero se solicita un argumento empírico, es decir, se solicita justificar la respuesta con ilustraciones, no con teoría. En el problema 4, se requieren argumentos abductivos para justificar las respuestas. Ello porque se debe escoger el criterio que se puede usar y proveer los datos que hacen falta. Los dos son problemas abiertos pues no hay indicio alguno de cómo proceder para resolverlos.

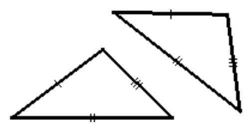
Enunciado de la tarea

1. Observe cada pareja de triángulos dada. ¿Cuál de los criterios de congruencia de triángulos permite establecer la congruencia de estos? (*Acéptese que la congruencia está indicada por las marcas, aunque es posible que los triángulos no parezcan congruentes*).

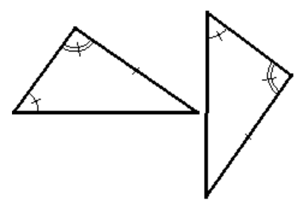
a. __________



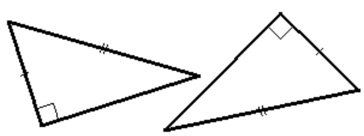
b. __________



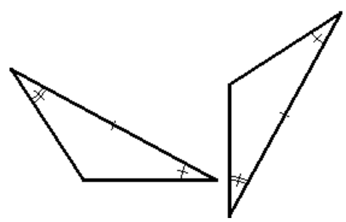
c. __________



d. __________



e. __________



2. Si ΔSED y ΔRAT son triángulos rectángulos, ¿se cumple qué son congruentes? Ilustre con dibujos su repuesta.

3. Realice un dibujo en el cual registra la información que se da y decida si existe congruencia entre los ΔPQR y ΔXYZ. Si es el caso, usando el símbolo $\cong$ escriba la relación correspondiente entre los triángulos e indique cuál criterio de congruencia de triángulos lo asegura. Registre su respuesta en un diagrama-deducción.

a. $PQ \cong YZ,\ QR \cong ZX,\ PR \cong XY.$

b. $\angle P \cong \angle Y,\ \angle Q \cong \angle X,\ PR \cong YZ.$

c. $\angle P \cong \angle Y,\ \angle Q \cong \angle Z, \angle X \cong \angle R.$

d. $QR \cong ZY,\ PR \cong XY,\ \angle R \cong \angle Y.$

e. $QP \cong ZY, \angle Q \cong \angle Z,\ \angle P \cong \angle Y.$

4. En cada caso se da la congruencia entre partes correspondientes del ΔDEF y ΔKLM. ¿Qué dato faltaría para establecer la congruencia de los triángulos? Explique su respuesta.

a. $DE \cong KL,\ DF \cong LM.$ ***b.*** $\angle F \cong \angle L, \angle E \cong \angle M.$

c. $EF \cong LM,\ \angle F \cong \angle L.$ ***d.*** $MK \cong DE,\ \angle F \cong \angle L.$

Posibles actuaciones de los estudiantes

- Establecer la congruencia de los triángulos sin tener en cuenta las marcas de congruencia dadas en los triángulos.
- Indicar solo una respuesta cuando existen otras soluciones.
- Nombrar un criterio que no es el adecuado de acuerdo a la información suministrada.
- Concluir la congruencia de dos lados o dos ángulos sin fundamento alguno.
- Reportar la congruencia de los triángulos sin usar la correspondencia adecuada de los vértices.
- Consignar información errónea en el diagrama-deducción.
- Reportar incorrectamente, en la representación gráfica del triángulo, la congruencia de acuerdo a la correspondencia dada.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Cuestionar al estudiante para que este busque otras soluciones cuando se conforma con encontrar una sola.
- Indicar cómo se establece la correspondencia entre los vértices de los triángulos para reportar, usando el símbolo de congruencia, que los triángulos son congruentes.
- Explicar que errores en la consignación de la información respecto a la congruencia de partes de los triángulos lleva a no poder concluir que los triángulos son congruentes.

Sugerencias

- Para la solución del segundo punto, si se observa que algún(os) grupo(s) de estudiantes reconoce que el hecho de ser triángulos rectángulos no es suficiente para establecer que son congruentes los triángulos, solicitar un argumento que valide su solución. Si ninguno de los grupos da la respuesta acertada, ilustrar diferentes triángulos rectángulos que visualmente se nota que no son congruentes.

3.2.4.5 Tarea 5

Logros de aprendizaje

- Interpreta expresiones algebraicas que resultan de la congruencia entre triángulos.
- Establece ecuaciones de primer grado para hallar valores de incógnitas, teniendo en cuenta las congruencias dadas.
- Resuelve ecuaciones de primer grado.

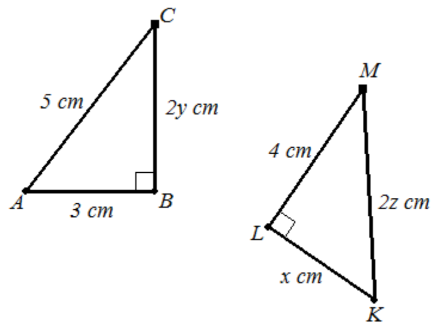
Descripción de la tarea

En esta tarea se pretende que los estudiantes usen la definición de triángulos congruentes para encontrar la medida de lados o ángulos de triángulos congruentes, estableciendo y resolviendo ecuaciones lineales. El primer enunciado es un ejercicio porque se indica qué se debe hacer; dado que son congruentes los triángulos establecer las ecuaciones que surgen de las partes correspondientes congruentes. El segundo enunciado es un problema no abierto ya que se indica a los estudiantes que deben tomar una decisión respecto a la congruencia de los triángulos y justificarla teóricamente. Por ello es un problema de argumentación. Por tanto, este problema se clasifica como PNA-A. El argumento que deben proveer los estudiantes es deductivo.

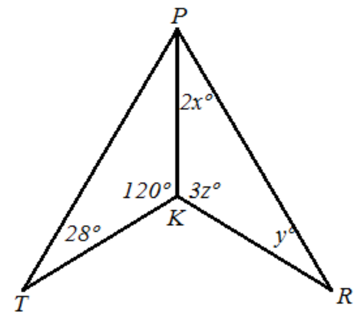
Enunciado de la tarea

1. De acuerdo con la información de cada ilustración, halle los valores de x, y y z.

a. $\Delta ABC \cong \Delta KLM$.

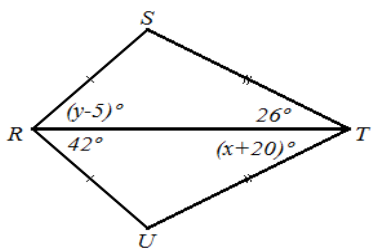


b. $\Delta TPK \cong \Delta RPK$. (Asuma como verdadero el siguiente hecho geométrico: ***La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º***)

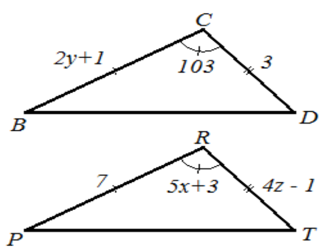


2. En cada caso, determine si con la información dada se puede establecer la congruencia de los triángulos. Justifique su respuesta haciendo uso del diagrama-deducción. Luego, halle el valor de x, y, z si ello es posible.

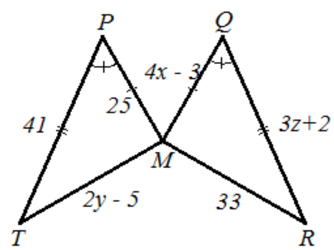
a.



b.



c.



Posibles actuaciones de los estudiantes

- Establecer incorrectamente las ecuaciones que expresan la congruencia de partes de los triángulos.
- Carecer de conocimiento algebraico requerido para solucionar las ecuaciones.
- No reconocer que la congruencia significa igualdad de medidas.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Realizar un breve repaso sobre cómo resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Recordar que la definición de congruencia entre segmentos y ángulos y tiene que ver con igualdad de magnitudes.

Sugerencias

Tener en cuenta que uno de los conocimientos previos necesarios para implementar esta parte de la secuencia didáctica es el manejo de expresiones algebraicas y ecuaciones de primer grado con una incógnita.

3.3 Segunda parte de la secuencia didáctica

Meta

Usar definiciones y hechos geométricos para descubrir propiedades de los puntos que pertenecen a la bisectriz de un ángulo.

Temas

Hecho geométrico: ángulos opuestos por el vértice.

Definiciones: punto medio, bisectriz de un ángulo, rectas perpendiculares, distancia de un punto a una recta.

Intención de la segunda parte de la secuencia didáctica

Por medio del trabajo en grupo, se pretende que los estudiantes exploren situaciones usando un software de geometría dinámica, con el fin de proponer conjeturas para posteriormente establecer hechos geométricos y definiciones que ingresarán al sistema teórico local.

Objetivo de la segunda parte de la secuencia didáctica

Reconocer a la geometría dinámica como autoridad frente a la información geométrica que provee, y como medio para apoyar la actividad argumentativa.

3.3.1 Estructura Conceptual

Definiciones geométricas

Ángulo: si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su unión es un ángulo.

Ángulos congruentes: dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

Ángulos opuestos por el vértice: dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

Ángulos par lineal: dos ángulos son par lineal si un lado de cada ángulo son rayos opuestos y el lado otro lado lo comparten.

Ángulo recto: un ángulo es recto si su medida es 90°.

Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°.

Bisectriz de ángulo: si D está en el interior del $\angle\mathrm{BAC}$ y $\angle\mathrm{BAD} \cong \angle\mathrm{DAC}$, entonces AD biseca al $\angle\mathrm{BAC}$ y AD se llama bisectriz del $\angle\mathrm{BAC}$.

Distancia: la distancia de un punto D a un punto C es la medida de la longitud del DC.

Distancia de un punto a una recta: la distancia entre una recta y un punto que no pertenece a ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta.

Estar entre: un punto B esta entre los puntos A y C si (i) A, B y C son colineales, y (ii) la distancia de A a B sumada a la distancia de B a C es igual a la distancia de A a C

Punto medio: B es el punto medio del segmento AC si (i) B está entre A y C y (ii) $AB = BC$.

Rayos opuestos: dos rayos son opuestos si son subconjuntos de la misma recta y solo comparte el extremo.

Rectas perpendiculares: dos rectas son perpendiculares si los ángulos par lineal que se determinan son congruentes.

Hechos Geométricos

Ángulos opuestos por el vértice: si dos ángulos son opuestos por el vértice entonces son congruentes.

Ángulos par lineal: si dos ángulos son par lineal entonces son suplementarios

Ángulos rectos: si dos ángulos son rectos entonces son congruentes.

3.3.2 Requisitos de la segunda parte de la secuencia didáctica

Para las Instituciones

Tiempos: Se requieren aproximadamente seis sesiones de una hora de clase.

Recursos. Software de geometría dinámica (Cabri o GeoGebra) y actividades escritas. Las instrucciones de las construcciones están diseñadas para usar el software Cabri. De no contar con ese programa, el profesor debe modificar las guías de acuerdo al software que utilice. Entre las actividades presentadas se encuentran las indicaciones para construir un objeto geométrico especial con el fin de establecer las propiedades que lo define e introducir la definición al sistema teórico, o para determinar propiedades entre dos objetos geométricos que se mantienen bajo el arrastre, para establecer un hecho geométrico. También incluye talleres en los que los estudiantes deben usar las definiciones o hechos geométricos encontrados.

Para los estudiantes

Conceptuales

Definición de: distancia, ángulo, ángulos par lineal, ángulo recto, ángulos opuestos por el vértice, ángulos congruentes, estar entre, rayos opuestos. Manejo algebraico de ecuaciones de primer grado.

Habilidades

Manuales

- Adquirir destreza en el manejo de las diferentes herramientas y funciones del software de geometría dinámica.

Comunicativas

- Expresar sus ideas de manera verbal o escrita y tener una posición crítica y/o reflexiva ante los comentarios de sus compañeros.
- Argumentar sus conjeturas a partir de información proveída por el software.
- Usar el lenguaje geométrico como medio de comunicación.
- Argumentar, a partir de la teoría, su aceptación o desaprobación, de las ideas propias o de los demás.

Sociales

- Escuchar con respeto las ideas de los demás.
- Participar genuinamente con los compañeros del grupo de trabajo.

Para las Profesores

- Propiciar la comunicación clara de ideas, exigiendo el uso del lenguaje geométrico.
- Favorecer la expresión de ideas de los estudiantes.
- Promover el trabajo colectivo y la construcción social del conocimiento.
- Conocer y manejar el software de geometría dinámica.

3.3.3 Descripción general de la segunda parte de la secuencia didáctica

Algunas de las actividades propuestas en esta parte de la secuencia didáctica buscan que los estudiantes formulen conjeturas a partir de la exploración de construcciones geométricas en ambientes dinámicos. Algunas de las conjeturas serán parte del sistema teórico local, después de validarlas empíricamente y unificar, en una puesta en común entre los estudiantes y el profesor, los enunciados. Luego se decide si serán definiciones o hechos geométricos. Las demás actividades constan de un conjunto de ejercicios y/o problemas con los cuales se busca afianzar los conceptos trabajados con geometría dinámica.

Evaluación de aprendizajes

- Manipulación adecuada de las funciones y herramientas del software.
- Exploración de situaciones geométricas.
- Concordancia de conjetura propuesta con exploración realizada.
- Coherencia en los argumentos que producen.
- Utilización del lenguaje matemático para comunicar sus ideas
- Participación genuina en el grupo de trabajo.
- Uso de definiciones o hechos geométricos encontrados.
- Uso adecuado del diagrama-deducción

3.3.4 Bloque 2. Construcción de la definición de objetos geométricos con geometría dinámica

Descripción del bloque

Este bloque consta de cinco tareas; cada una de ellas se divide en dos partes. La primera parte está conformada por las instrucciones para usar una herramienta específica de un software de geometría dinámica, en este caso Cabri, o para construir una situación específica. El objetivo es explorar el comportamiento, ya sea del objeto geométrico que surge a partir de esa herramienta o de partes que componen la figura representada. En esta parte para cada una de las tareas los estudiantes tienen que registrar cómo hicieron la construcción y cómo exploraron la situación, haciendo uso de una tabla, dividida en tres partes: construcción, exploración y conjeturación. En la construcción se deben escribir las instrucciones de que herramienta de cabri usar, en la parte exploración los estudiantes deben describir los que queda en la pantalla y usar la función de arrastre, y para la conjeturación deben reportar lo que construyeron y lo que obtuvieron

En la primera actividad, debido a que los estudiantes se encuentran en una etapa de instrumentalización del software, se comienza guiándolos en cada uno de los pasos que deben seguir para realizar una construcción geométrica; en las demás actividades se darán a los estudiantes solamente los pasos principales de cada una de las construcciones, esperando que ellos exploren el software y descubran qué usar.

En el primer caso, se busca encontrar propiedades que definen un objeto geométrico específico para poder establecer la definición. En el segundo caso, se espera que descubran propiedades de objetos geométricos específicos para establecer una conjetura. Estas, después de ser socializadas para que conjuntamente se modifiquen, si es necesario, se convertirán en definiciones o hechos geométricos que se incluyen en el sistema teórico local. En la segunda parte de cada tarea se proponen ejercicios y/o problemas para los cuales los estudiantes deben hacer uso de las definiciones o hechos geométricos, establecidos anteriormente, además de los criterios de congruencia de triángulos, para resolverlos.

En cada una de las tareas se trabajan objetos matemáticos diferentes; en la primera se aborda la definición de punto medio; en la segunda el hecho geométrico de ángulos opuestos por el vértice; la tercera tarea tiene que ver con la definición de rectas perpendiculares; y finalmente, la cuarta tarea tiene como objetivo establecer la definición de bisectriz de un ángulo.

Objetivo

- Construir un objeto geométrico para que, a partir de este, los estudiantes analicen las características y posteriormente establezcan la definición del mismo; hacer uso de las definiciones encontradas en el desarrollo de las tareas.

Logros de aprendizaje

- Identifica las herramientas del software que le sirven para resolver un problema específico (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos).
- Usa adecuadamente las herramientas del software Cabri. (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos).
- Explora las construcciones geométricas haciendo uso del software (toma medidas, arrastra, realiza construcciones auxiliares). (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos; Pensamiento métrico y sistemas de medidas)
- Formula ecuaciones lineales que le permiten encontrar la medida de lados y ángulos de triángulos, teniendo en cuenta congruencias dadas (Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos Analíticos).
- Reconoce las propiedades que se mantienen bajo el arrastre, cuando trabaja con geometría dinámica (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos).
- Formula conjeturas basadas en las propiedades que descubre a través de la exploración con Cabri (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos).

Contenido matemático previo

- Ángulo
- Ángulos par lineal
- Ángulo recto
- Ángulos suplementario
- Estar entre
- Rayos opuestos
- Triángulo rectángulo

Contenido matemático involucrado

Definiciones

- Ángulos opuestos por el vértice
- Bisectriz de ángulo
- Distancia de un punto a una recta
- Punto medio
- Rectas perpendiculares

Papel del artefacto escogido

El artefacto escogido es un software de geometría dinámica (Cabri, GeoGebra,…). Este no solamente permite representar las situaciones propuestas, sino que además, dadas sus características, propicia la exploración para descubrir e indagar sobre las propiedades y características de los objetos geométricos.

Además de lo anterior, la geometría dinámica se convierte en autoridad del contenido matemático que se pone en juego, dado que son programas que se han diseñado esencialmente respetando los postulados de la geometría euclidiana. Es por ello que las propiedades no construidas que se mantiene bajo el arrastre son con seguridad consecuencia de las propiedades que se han impuesto a través de la construcción o el arrastre. Es decir los objetos geométricos representados con geometría dinámica tienen las propiedades que los definen en el sistema de la geometría euclidiana.

Requisitos

- Conocer los criterios de congruencia de triángulos.
- Interpretar información sobre figuras geométricas en una representación gráfica tales como congruencia de segmentos, perpendicularidad, congruencia de triángulos entre otros.
- Tener noción de qué es un segmento y cómo representarlo.

Análisis de las tareas

A continuación se presenta cada una de las actividades que componen este bloque junto con los logros, la descripción, enunciados, actuaciones tanto de los estudiantes como del profesor y sugerencias para cada una.

3.3.4.1. Tarea 1. Establecimiento de la definición de punto medio

Logros de aprendizaje

- Realiza representaciones con papel y lápiz o geometría dinámica de los objetos geométricos.
- Construye con el software el punto medio de un segmento.
- Caracteriza el punto medio haciendo uso de las herramientas del software.
- Hace uso de la definición de punto medio para formular conjeturas y demostrarlas.
- Usa el diagrama - deducción para demostrar la validez de las propiedades de los objetos.
- Utiliza las conclusiones de las demostraciones en la construcción del sistema teórico local.
- Desarrolla habilidades para realizar actividad demostrativa.

Descripción de la tarea

Esta tarea está conformada por dos partes: en la primera se pide a los estudiantes que, por medio del software de geometría dinámica, representen un segmento y su punto medio. Se les solicita que explore las características del punto medio con herramientas como Distancia o Longitud y con la función arrastre. Posteriormente, deben establecer una conjetura acerca de estas propiedades, usando el formato de proposición condicional. Es a partir de esas conjeturas que se establecerá la definición de punto medio. En la segunda parte de la tarea, se propone una secuencia de ejercicios, cuya solución requiere del uso de la definición establecida en la primera parte, además de la visualización de las imágenes y el uso del diagrama-deducción. El quinto ejercicio de la tarea requiere también usar álgebra para hallar el valor de una incógnita.

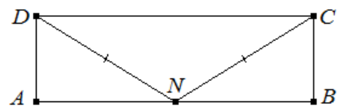
La tarea se clasifica como PNA-C ya que se les da a los estudiantes los pasos que deben seguir para la construcción del punto medio de un segmento haciendo uso del software de geometría dinámica. En cuanto a la actividad de la tarea, lo que se quiere es que los estudiantes usen la definición de punto medio. Los puntos, excepto el segundo, se clasifican como PNA-A. Estos problemas son no abiertos ya que los enunciados se indican qué se debe hacer. Todos son de argumentación porque se solicita registrar en el diagrama-deducción cómo la definición de punto medio permite resolver el problema. El segundo punto es un problema abierto ya que no se indica cuál es la respuesta esperada en el ítem b. Puede ser que el punto X está entre los puntos P y R, que los segmentos que determina X en el PR son congruentes, que X es el punto de intersección de dos segmentos, o que X es punto medio del PR. Es deseable esta última respuesta pero cualquiera de las anteriores deben ser aceptadas.

Enunciado de la tarea

<table>
<tr><th rowspan="5">Construcción</th><th>Qué se hace</th><th>Cómo se hace</th></tr>
<tr><td>Crear un archivo en Cabri llamado pmedio.</td><td>Al abrir el programa Cabri Geometry, seleccione 3: Nuevo..., oprima ENTER. Desplace el cursor al recuadro Variable: digite pmedio y oprima ENTER.</td></tr>
<tr><td>Trazar el segmento AB.</td><td>Oprima F2, y con el cursor seleccione 5: Segmento. Ubique el cursor en cualquier parte de la pantalla, oprima ENTER e inmediatamente nombre el punto con la letra A.
Desplace el cursor, oprima ENTER e inmediatamente nombre el punto con la letra B.</td></tr>
<tr><td>Construir el punto medio.</td><td>Oprima F4 y señale 3: Punto medio. Describir lo que pasa para que descubran que el punto está en el segmento</td></tr>
<tr><td>Medir longitudes de segmentos.</td><td>Oprima F6 y seleccione 1: Distancia o Longitud Señale el punto A y el punto M. Repita este proceso con los puntos M y B.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exploración</td><td colspan="2">Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan?</td></tr>
<tr><td>Arrastrar</td><td>Arrastren cualquiera de los extremos del AB y verifiquen su conjetura.</td></tr>
<tr><td>Conjeturación</td><td colspan="2">¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional:
Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).</td></tr>
</table>

Tarea de aplicación

1. Dada la figura donde N es el punto medio del AB.



a. De acuerdo a lo anterior ¿qué pueden concluir acerca de N con respecto al AB? Consigne en el diagrama-deducción, tanto lo dado como lo que concluyeron.

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

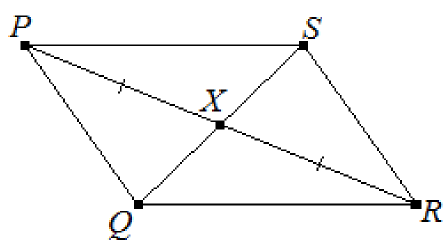
b. ¿Qué información se da gráficamente sobre N?

c. ¿Es N punto medio del DC? Expliquen su respuesta

2. De acuerdo con la siguiente figura

a. ¿Se puede concluir que X es punto medio de QS? ¿Por qué?

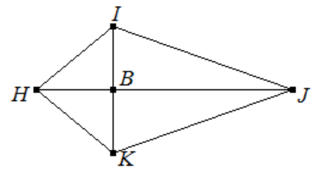
b. ¿Qué se puede concluir del punto X ? Completen el diagrama-deducción**.**



Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

3. Dado que B es el punto medio de IK

a) ¿Qué pueden concluir? Completen el diagrama-deducción.



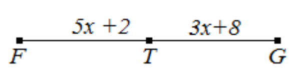
Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

b) De acuerdo con la figura dada, ¿es B punto medio de HJ? Expliquen su respuesta.

4. Si $X \in PR$ y $PX \cong XR$, entonces ¿qué pueden concluir acerca de X?

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

5. Si T es punto medio del FG, observe la siguiente figura y responda la pregunta.



¿Cuánto mide el FG? Completen el diagrama-deducción para justificar su respuesta.

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

Posibles actuaciones de los estudiantes

- Debido a que posiblemente esta sea la primer vez que los estudiantes interactúen con el software, se podría evidenciar frustración debido dificultad para manejar las herramientas o para comprenderlas instrucciones escritas.
- Usar el software para realizar cosas que no tienen que ver con la tarea que tienen entre manos.
- Extraer información incorrecta de las imágenes que llevan a conclusiones no válidas.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Exponer ante los estudiantes las ventajas que tiene usar un software de geometría dinámica para el aprendizaje. Buscar estrategias que ayuden a que los estudiantes se concentren en la actividad cuando usan el programa de geometría dinámica.
- Indagar con el fin de que los estudiantes descubran las propiedades que se mantienen bajo el arrastre, reconozcan cuáles propiedades construyeron y cuáles obligaron con el arrastre, para que puedan reportar las dependencias que se evidencian.
- Aclara cuáles son propiedades específicas de una figura y cuáles generales de la familia de la figura.

Sugerencias

- Generar un espacio para que los estudiantes interactúen con las herramientas del software libremente, como estrategia para iniciar a los estudiantes en el manejo del mismo.

3.3.4.2 Tarea 2. Hecho Geométrico Ángulos opuestos por el vértice

Logros de aprendizaje

- Construye con el software ángulos opuestos por el vértice.

- Reconoce la importancia de nombrar ángulos por medio de tres puntos que lo determina.
- Usa el Hecho Geométrico Ángulos Opuestos por el Vértice para formular conjeturas y demostrarlas.
- Hace uso del diagrama - deducción para consignar los argumentos que propone para justificar una aserción.
- Utiliza los elementos incorporados en el sistema teórico local como garantías en sus argumentos.
- Desarrolla habilidades para realizar actividad demostrativa a través de la solución de situaciones propuestas.

Descripción de la tarea

Esta tarea se encuentra dividida en dos partes. En la primera se pide a los estudiantes que, usando geometría dinámica, representen ángulos opuestos por el vértice y que descubran, con la herramienta medida de ángulo, una propiedad sobre ellos. Posteriormente, deben reportar lo que descubrieron como una conjetura haciendo uso del formato de proposición condicional. A partir de la exposición y análisis de las conjeturas de todos los grupos de estudiantes, se debe establecer el Hecho Geométrico Ángulos Opuestos por el Vértice. En la tarea de aplicación se propone una secuencia de problemas que requieren del uso del hecho geométrico establecido en la primera parte, sin embrago para la solución de estas no se requiere el uso del software de geometría dinámica. Visualmente se establece cuáles ángulos son opuestos por el vértice. En todos los problemas se solicita usar el diagrama-deducción. En el quinto ejercicio de la tarea se resuelven ecuaciones algebraicas determinar la medida de ángulos que son opuestos por el vértice.

La tarea no es un problema abierto puesto que se da a los estudiantes las pautas para iniciar la construcción con ayuda de geometría dinámica; ellos deben encontrar las herramientas y funciones que les permite realizar la construcción y consignar en la tabla cuáles fueron. Debido a lo anterior la tarea es un PNA-C. La actividad propuesta está compuesta por cinco puntos: los primeros cuatro son problemas y el último es un ejercicio. En los problemas se solicita justificar la respuesta. Esto se hará con argumentos deductivos pues es a partir del Hecho Geométrico Ángulos Opuesto por el Vértice pueden resolver el problema. En los enunciados de los problemas se indica qué se espera como respuesta; por lo tanto, se clasifican como no abiertos. Es decir, los primeros cuatro problemas se clasifican como PNA-A. El quinto enunciado es un ejercicio puesto que se debe encontrar la medida del ángulo teniendo en cuenta la información suministrada por la gráfica y algoritmos algebraicos.

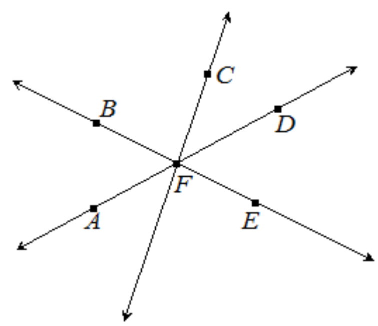
Enunciado de la tarea

	Qué se hace	***Cómo se hace***
Construcción	Crear un archivo en Cabri llamado *aov*.	Al abrir el programa **Cabri Geometry**, seleccione **3: Nuevo**, oprima ENTER. Desplace el cursor al recuadro **Variable:** digite *aov* y oprima ENTER.
	Trazar las rectas m y n que se intersecan.	
	Nombrar el punto P como la intersección de las rectas m y n.	
	Nombrar dos puntos, de la recta m, A y B de tal manera que el punto P esté entre A y B.	
	Nombrar dos puntos, de la recta n , C y D de tal manera que el punto P esté entre C y D.	
	Medir los ángulos que se determinan.	
Exploración	*Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de las medidas de los ángulos?*	
	Arrastrar	Arrastre una de las dos rectas y verifique su conjetura.

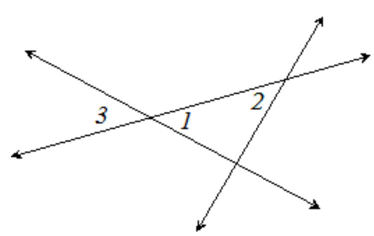
Conjeturación	*¿Qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional: *Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**.

Tarea de aplicación

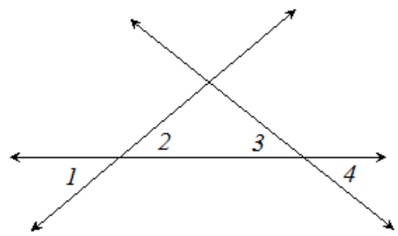
1. En la siguiente figura, ¿cuáles parejas de ángulos son congruentes? Justifiquen su respuesta.



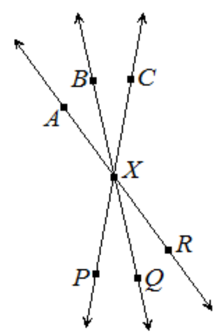
2. Dado $\angle 1 \cong \angle 2$, ¿qué pueden concluir del $\angle 3$? Empleen el diagrama-deducción para consignar su respuesta.



3. Dado $\angle 2 \cong \angle 3$, ¿qué pueden concluir de $\angle 1$ *y* $\angle 4$? Empleen el diagrama-deducción para consignar su respuesta.

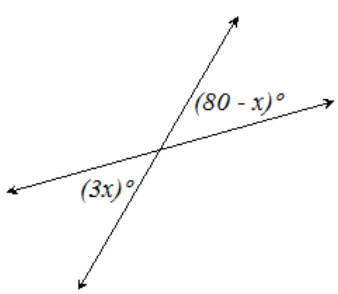


4. Si $\angle AXB \cong \angle BXC$ entonces ¿qué pueden concluir del $\angle QXR$ y $\angle PXQ$? Empleen el diagrama-deducción para consignar su repuesta.

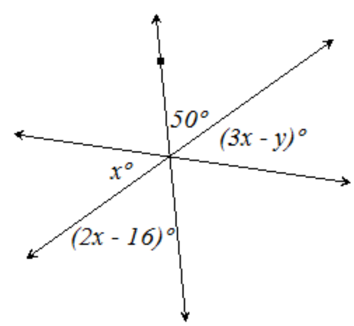


5. Con base en cada figura, hallen el valor de x y y, según corresponda.

a.



b.



Posibles actuaciones de los estudiantes

- No identificar todos los ángulos opuestos por el vértice que se tienen en una figura.
- No establecer adecuadamente las ecuaciones que surgen de la congruencia de ángulos opuestos por el vértice.
- Carecer de conocimiento algebraico requerido para resolver las ecuaciones.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Repasar los algoritmos requeridos para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Recomendar el uso de la definición de ángulos opuestos por el vértice para identificar cuáles lo son en una representación gráfica.

Sugerencias

- Destacar la necesidad de nombrar los ángulos opuestos por el vértice por medio de tres puntos, ya que todos comparten el vértice y usar solo eso no permite identificarlos.

3.3.4.3 Tarea 3. Rectas perpendiculares

Logros de aprendizaje

- Realiza representaciones con papel y lápiz o geometría dinámica de los objetos geométricos.
- Construye con el software rectas perpendiculares.
- Mide los ángulos determinados por las rectas perpendiculares, lo que le permite establecer una conjetura haciendo uso del formato de proposición condicional.
- Utiliza la herramienta de arrastre para verificar la conjetura establecida.
- Hace uso de la definición de rectas perpendiculares para hacer conjeturas y demostrarlas
- Usa el diagrama - deducción para consignar sus argumentos acerca de la validez de propiedades de los objetos.
- Utiliza los elementos del sistema teórico local como garantía en sus argumentos.
- Desarrolla habilidades para realizar actividad demostrativa

Descripción de la tarea

Esta tarea está conformada por dos partes. En la primera se pide a los estudiantes que usando geometría dinámica realicen la representación gráfica de rectas perpendiculares, midan los ángulos determinados por las rectas, formulen una conjetura de lo observado, y finalmente la verifiquen por medio del arrastre. Se busca con ello llegar a establecer la definición de rectas perpendiculares. En la tarea de aplicación, se propone un conjunto de ejercicios, cuya solución requiere emplear la definición establecida en la primera parte y el uso del diagrama-deducción**.** En los últimos problemas propuestos, el estudiante puede realizar la representación gráfica de la situación como mecanismo para facilitar su comprensión y solución.

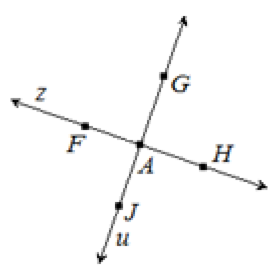
La tarea es un problema no abierto puesto que se da a los estudiantes las pautas para iniciar la construcción con ayuda de geometría dinámica y ellos deben encontrar las herramientas y funciones que le permitan completar la tabla para realizar la construcción. Todos los problemas de la actividad de la tarea son de argumentación, puesto que se pide a los estudiantes justificar su aserción y, en algunos casos, hacer uso del diagrama-deducción teniendo en cuenta la información dada. Los argumentos pueden ser deductivos o abductivos. Ello depende de cómo los conforma el estudiante. Si comienza tomando como válida la aserción y busca los datos y garantía correspondiente, serán argumentos abductivos; si comienzan con los datos y dan la garantía y la aserción que se desprende, el argumento será deductivo. Las justificaciones arman con argumentos deductivos. Dichos puntos también son problemas abiertos puesto que aunque se indica que se debe determinar una relación entre objetos geométricos o una propiedad de estos, no se sugiere a los estudiantes un método para llegar a la respuesta. La información dada permite hacer uso de la definición de perpendicularidad y/o congruencia de triángulos para llegar a la respuesta. El último problema es de construcción porque, a partir de la información dada, los estudiantes tienen que representar la situación para resolver el problema. Por tanto, los primeros cinco problemas son PA-A y el sexto es PA-AC.

Enunciado de la tarea

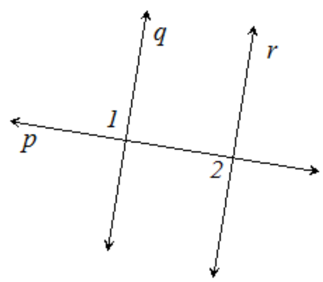
	Qué se hace	*Cómo se hace*
Construcción	Crear un archivo en Cabri llamado *recp*.	Al abrir el programa **Cabri Geometry**, seleccione **3: Nuevo**, oprima ENTER. Desplace el cursor al recuadro **Variable:** digite *recp* y oprima ENTER.
	Trazar dos rectas perpendiculares.	
	Medir los ángulos que se determinan.	
Exploración	*Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de los ángulos?*	
	Arrastrar	Arrastre una de las dos rectas y verifiquen su conjetura.
Conjeturación	*¿Qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional: *Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**.	

Tarea de aplicación

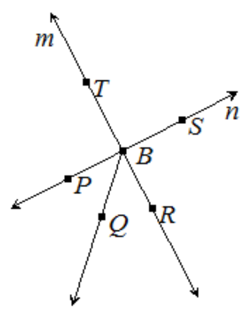
1. Si $m\angle FAG = 90°$, entonces ¿qué pueden concluir de los demás ángulos determinados por las dos rectas? Utilicen el diagrama-deducción para consignar su respuesta.



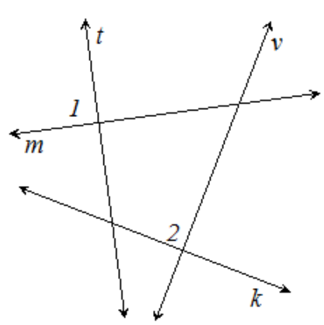
2. Sean las rectas p, q y r tal que $p \perp q$ y $\angle 1 \cong \angle 2$. ¿Cuál es la relación entre la recta p y la recta r? Justifiquen su respuesta. Utilicen el diagrama-deducción para consignar su respuesta.



3. Dadas las rectas m y n, tal que $m \perp n$ y $\angle PBQ \cong \angle RBQ$. ¿Qué pueden concluir acerca de la medida de los ángulos congruentes? Usen el diagrama-deducción para consignar su respuesta.



4. Dadas las rectas m, k, t y v tal que $m \perp t, k \perp v$, ¿qué pueden concluir del $\angle 1$ y $\angle 2$? Utilicen el diagrama-deducción para reportar su respuesta



5. Dados ΔABC y ΔDEF tal que $AB \perp BC, FE \perp ED, AB \cong EF$ y $CB \cong DE$. ¿Qué pueden concluir sobre los triángulos? Utilicen el diagrama-deducción para consignar su respuesta.
6. X es punto medio de WZ y también punto de intersección de WZ y VY, $YZ \perp XZ, VW \perp WX$. ¿Qué relación existe entre el ΔWXV y el ΔZXY? Para comunicar su respuesta, utilicen el diagrama-deducción.

Posibles actuaciones de los estudiantes

- No representar correctamente la situación geométrica presentada.
- No establecer la congruencia como relación entre ángulos.
- No establecer adecuadamente las ecuaciones que dan solución a cada uno de los ejercicios.
- No tener el conocimiento algebraico requerido para resolver las ecuaciones encontradas.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Realizar un breve repaso de los algoritmos para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Indicar que se deben establecer relaciones geométricas entre las figuras, en este caso los ángulos o los triángulos.

Sugerencias

Solicitar hacer la representación de las situaciones descritas usando geometría dinámica.

3.3.4.4 Tarea 4. Definición de bisectriz de un ángulo

Logros de aprendizaje

- Realiza representaciones con geometría dinámica.
- Construye con el software ángulos opuestos por el vértice.

- Usa la definición de ángulos opuestos por el vértice para hacer conjeturas y demostrarlas.
- Usa el diagrama - deducción para consignar los argumentos con los que valida las propiedades de los objetos.
- Utiliza los elementos del sistema teórico local como garantías en sus argumentos.
- Desarrollar habilidades para realizar actividad demostrativa.

Descripción de la tarea

La siguiente tarea está dividida en dos partes. En la primera se pide a los estudiantes que representen la bisectriz de un ángulo y midan los ángulos determinados por la recta que aparece. Posteriormente, deben establecer las propiedades que descubren como conjetura y validar su conclusión con el arrastre. El fin es establecer la definición de bisectriz de un ángulo. Es de notar que aunque la representación que provee Cabri de la bisectriz de un ángulo es una recta, está realmente es un rayo. Esto es una aclaración que debe hacer el profesor. En la tarea de aplicación, se propone un conjunto de ejercicios, cuya solución requiere emplear la definición establecida en la primera parte y/o los criterios de congruencia de triángulos para resolverlos.

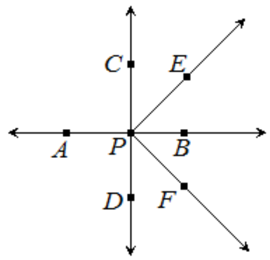
.La tarea es un problema no abierto puesto que se da a los estudiantes las pautas para iniciar la construcción con ayuda de geometría dinámica y ellos solo deben encontrar las herramientas y funciones que le permitan completar la tabla. De los ejercicios que componen la actividad, se concluye que el punto 3 es un PNA-A, ya que los estudiantes deben completar cada fila del diagrama–deducción, teniendo en cuenta si lo que hace falta es la garantía, la aserción o los datos. Debido a esto se pueden usar tanto argumentos abductivos como deductivos. Los demás puntos se clasifican como PA-A. Son abiertos ya que los estudiantes deben contestar la pregunta y buscar el medio para justificar su respuesta. Como se explicó para la tarea anterior, los argumentos que provean los estudiantes para justificar su respuesta en los problemas 1, 2, y 4, pueden ser deductivos o abductivos, dependiendo de cómo proceden. Deductivos si parten de los datos y dan la garantía y aserción; abductivos si el punto de partida es la aserción y proveen los datos y garantía. En cambio, en el quinto punto se deben usar argumentos abductivos, dado que según lo que decidan sobre la congruencia de los triángulos, lo cual es la aserción que establecen, deben los estudiantes deben buscar las garantías y los datos correspondientes que le permitan afirmar su aserción.

Enunciado de la tarea

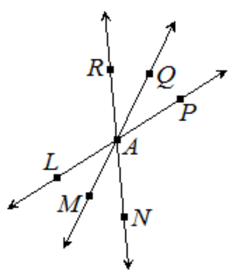
<table>
<tr><th rowspan="5">Construcción</th><th>Qué se hace</th><th>Cómo se hace</th></tr>
<tr><td>Crear un archivo en Cabri llamado bda.</td><td></td></tr>
<tr><td>Construir un $\angle ABC$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Construir la bisectriz del ángulo $\angle ABC$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Medir los ángulos que se determinan.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exploración</td><td colspan="2">Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de los ángulos?</td></tr>
<tr><td>Arrastrar</td><td>Reportar las propiedades que evidencia al utilizar el arrastre</td></tr>
<tr><td>Conjeturación</td><td colspan="2">¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional:
Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).</td></tr>
</table>

Tarea de aplicación

1. Si $AB \perp CD, PE$ bisectriz del $\angle CPB$ y PF bisectriz del $\angle BPD$, ¿qué pueden decir del $\angle EPB$? Justifiquen su respuesta. Usen el diagrama-deducción para consignar sus argumentos.

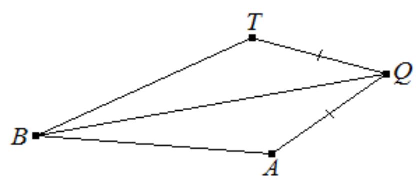


2. En la figura, AQ es bisectriz del $\angle RAP$ y AM es bisectriz del $\angle LAN$. ¿Qué relación existe entre el $\angle RAQ$ y el $\angle LAM$? Empleen el diagrama-deducción para consignar los argumentos que validan su respuesta.



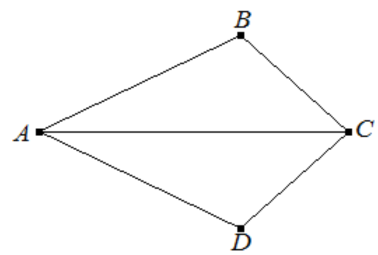
3. Completen el siguiente diagrama-deducción.

Si QB biseca al $\angle TQA$ y $QT \cong QA$, entonces $\Delta BQT \cong \Delta BQA$.

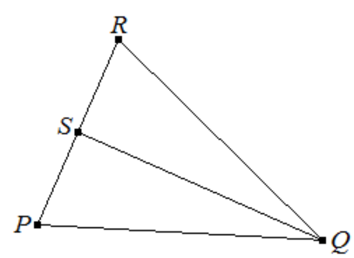


Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
1. $QB\ biseca\ al\ \angle TQA$	Definición Bisectriz de un ángulo	
2.	Propiedad reflexiva	
3. - - $QT \cong QA$		$\Delta BQT \cong \Delta BQA$

4. Si AC biseca al $\angle DAB$ y CA biseca al $\angle DCB$, entonces ¿qué pueden decir de los ΔBCA y ΔDCA. Empleen el diagrama-deducción para consignar su respuesta.



5. Dado que QS es bisectriz del $\angle PQR, \angle R \cong \angle P$, ¿se puede afirmar que $\Delta RSQ \cong \Delta PSQ$? Justifiquen su respuesta. Usen el diagrama-deducción.



Posibles actuaciones de los estudiantes

- Establecer relaciones a partir de la visualización sin usar definiciones o hechos geométricos.

- No hacer uso de elementos teóricos, diferentes a la definición de bisectriz de ángulo, para establecer la congruencia de triángulos.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Recordar a los estudiantes que tienen a su disposición un sistema teórico para resolver los ejercicios propuestos.

3.3.4.5 Tarea 5. Distancia de un punto a una recta

Logros de aprendizaje

- Usa las definiciones y hechos geométricos para dar solución a situaciones problema.
- Realiza diferentes representaciones de una situación.
- Manipula adecuadamente las funciones y herramientas de Cabri.
- Completa el esquema de construcción, exploración y conjeturación de manera autónoma con base en lo desarrollado en las anteriores actividades.
- Establece conjeturas utilizando el formato de proposición condicional.

Descripción de la tarea

Esta última tarea del bloque, a diferencia de las anteriores tareas, solo está compuesta por una parte. Se presenta a los estudiantes una situación problema, la cual exige que hagan la representación geométrica con papel y lápiz y haciendo uso del software. Después de realizar la respectiva representación, deben usar el arrastre para encontrar la solución al problema. Además, tienen que completar, autónomamente, la tabla que se ha diligenciado en las anteriores actividades, pero no se incluye información como se había hecho anteriormente. La finalidad de esta tarea es establecer, teniendo en cuenta los resultados de cada uno de los grupos, la definición de distancia de un punto a una recta. Esta tarea se puede clasificar como un PA-AC. Es un problema abierto de construcción por lo descrito anteriormente. Es también un problema de argumentación ya que los estudiantes por medio de la exploración de casos particulares, haciendo uso de las herramientas del software, encuentran cuándo la distancia de un punto a una recta es mínima, y establecen una conjetura y la justifican.Debido a que los estudiantes deben basar su generalización en la exploración de casos particulares, se puede clasificar el argumento como inductivo.

Enunciado de la tarea

Situación

Don Gustavo es un campesino que desea cultivar arroz en su finca. Para ello, tiene que inundar el potrero en que sembrará las matas de arroz, llenando de agua una canal. Hay una llave de agua en el punto P lejos de la canal. Por tanto, debe construir una tubería desde el punto P a un punto de la canal para llenarla de agua. Si Don Gustavo quiere que la construcción sea lo más barata posible, ¿cómo localiza un punto Q en la canal para que pueda cumplir con su intención?

a. Representen la situación en una hoja.
b. Representen la situación usando Cabri y encuentren el punto Q.
c. Completen la tabla con la información solicitada.
d. Describan cómo encontraron el punto Q.

	Qué se hace	***Cómo se hace***
Construcción		
Exploración		
Conjeturación	*¿Qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional: *Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**.	

Posibles actuaciones de los estudiantes

- Dificultad en la comprensión del enunciado del problema.
- Dificultad para representar la situación usando geometría dinámica.
- Dificultad para traducir la situación de la vida real en una situación geométrica.
- No usar el arrastre para determinar cuándo la distancia es mínima.
- Formular una conjetura basada en la visualización y no en la verificación empírica.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Solicitar a algún estudiante que recuente lo que entendió de la situación presentada.
- Indagar para asegurar que tanto la representación en papel como con el software se corresponden con la situación dada en la actividad.
- Explicar que la situación descrita es una simplificación de una situación de la vida real para permitir una representación matemática.

Sugerencias

Para llegar a la definición de distancia de un punto a una recta, sin utilizar como herramienta la geometría dinámica, se sugiere hacer uso del siguiente artefacto. Consiste en un modelo manipulable de la situación. Para la construcción de dicho modelo se requiere los siguientes materiales:

- Palo de madera balso
- Pita o cuerda
- Chinches o alfileres

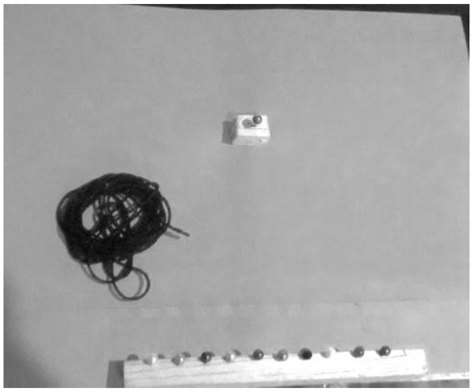


Figura 12. Materiales artefacto

En la construcción del modelo se usa dos piezas de palo balso: una larga para para simular el canal y una corta para representar, con un alfiler, al punto P. Los alfileres representan puntos en la canal.

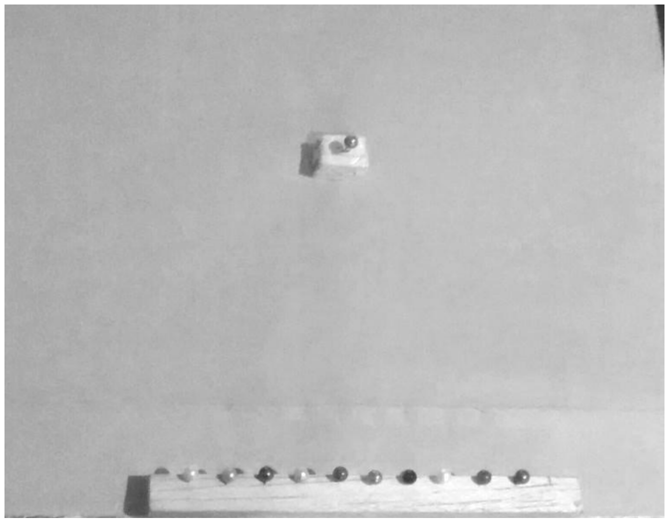


Figura 13. Construcción artefacto

Posteriormente, se pide al estudiante que tome la cuerda y empiece a unir el punto P (llave del agua) con cada uno de los puntos establecidos en el palo de balso, cortando la cuerda, y repitiendo el mismo proceso con el punto P y otro punto de la canal. Después de este proceso, deben soltar cada pedazo de pita y compararlos. Con el fin de determinar cuál de los trozos representa la menor distancia. No se va llegar necesariamente a la menor distancia, pero ayudará a entender de qué trata el problema. Solo con la representación en un entorno de geometría dinámica pueden asegurar con mayor exactitud cuando es mínima la distancia.

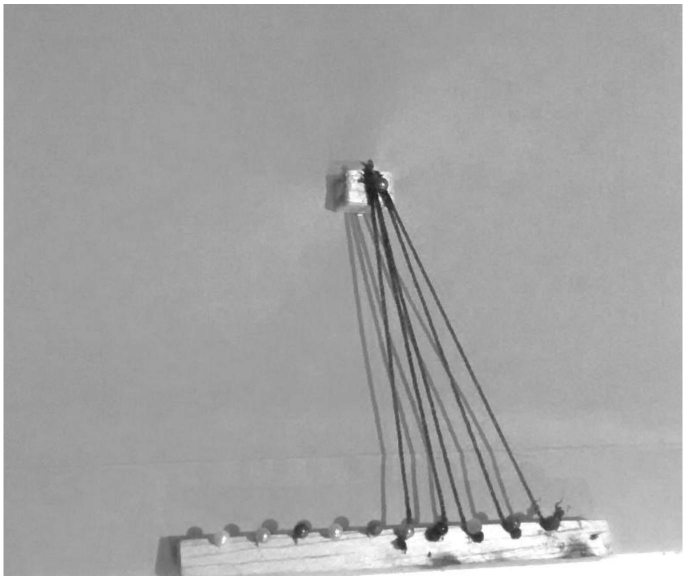


Figura 14. Uso del artefacto

3.3.5 Bloque 3. Uso de las definiciones para caracterizar la bisectriz de un ángulo

Descripción del bloque

A continuación se presenta la actividad que compone este bloque junto con los logros, la descripción, enunciados, actuaciones tanto de los estudiantes como del profesor y sugerencias para cada una.

Objetivo

- Establecer una conjetura sobre la caracterización de los puntos que cumplen una propiedad específica y realizar su demostración haciendo uso del esquema de deducción.

Logros de aprendizaje del bloque

- Interpreta la situación dada y la representa haciendo uso de Cabri.
- Demuestra autonomía para realizar la construcción que da solución a la situación.
- Utiliza diferentes herramientas y funciones del software para dar solución a cada uno de los interrogantes de la situación.
- Formula conjeturas haciendo uso del lenguaje matemático.

- Hace uso del diagrama-deducción para demostrar una conjetura teniendo en cuenta los pasos realizados durante la construcción de donde surge dicha conjetura.
- Muestra un dominio avanzado en el uso del diagrama-deducción.

Todos los logros de aprendizaje nombrados anteriormente desarrollan el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.

Contenido matemático previo

Definiciones

- Punto medio
- Rectas perpendiculares
- Bisectriz de ángulo
- Distancia de un punto a una recta

Contenido matemático involucrado

- Caracterización de la bisectriz de un ángulo.

Papel del artefacto escogido

El artefacto escogido para el desarrollo de este bloque es el software de geometría dinámica (Cabri, GeoGebra,…).Como se mencionó anteriormente, este se asume como autoridad frente al contenido matemático que se pone en juego. En este caso particular, permitirá representar una situación de la vida real y, por medio de la exploración, dar solución a interrogantes que surgen en dicha situación.

Requisitos

- Aplicar la definición de punto medio, rectas perpendiculares, bisectriz de un ángulo y distancia de un punto a una recta.
- Interpretar situaciones problemas de contextos no geométricos y llevarlos a representaciones geométricas para facilitar su solución.

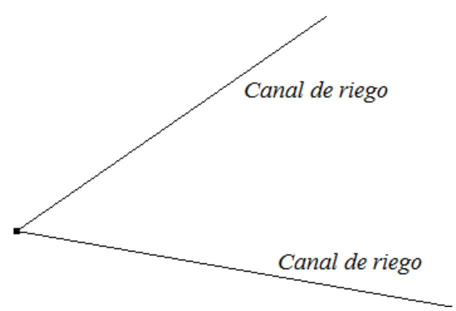
- Uso adecuado del diagrama-deducción

Descripción de la tarea

En esta tarea se presenta una situación problema, en la cual se pide a los estudiantes buscar solución a una situación presentada en el contexto del campo, haciendo uso de geometría dinámica. La finalidad de dicho ejercicio es que los estudiantes descubran una caracterización de la bisectriz de un ángulo, y la importancia y aplicabilidad de esta en la vida real. Para el desarrollo de la actividad, además de hacer uso del software, se pide a los estudiantes registrar de manera escrita la construcción, la exploración con base en ciertas preguntas, y finalmente la conjetura teniendo en cuanta el uso del condicional. Es decir, deben reportar el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa. Esta tarea es un problema abierto ya que los estudiantes, por medio de la exploración de casos particulares y haciendo uso de las herramientas del software, establecen una conjetura. Es una tarea de argumentación porque deben justificar la conjetura, realizando así el segundo proceso de la actividad demostrativa. La tarea propicia la formulación de argumentos inductivos y deductivos. El primer tipo porque los estudiantes formulan su conjetura teniendo en cuenta el análisis de casos particulares. El segundo tipo ya que deben formular argumentos deductivos enlazados que constituirán la justificación de la conjetura. Teniendo en cuenta lo anterior dicha tarea se clasifica como PA-AC.

Enunciado de la tarea

Situación



Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal de riego sea la misma. *a*) ¿Dónde puede sembrar las matas? *b*) ¿Cuántas de estas puede sembrar? *c*) ¿Cómo puede describirle a Don Gustavo el sitio donde debe colocar las matas?

a. Represente la situación usando Cabri.

b. Complete la tabla con la información solicitada.

<table>
<tr><td rowspan="3">Construcción y Exploración</td><td>Qué se hace</td><td>Cómo se hace</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Con base en la anterior construcción, respondan
a. ¿Dónde puede sembrar las matas?
b. ¿Cuántas de estas puede sembrar?
c. ¿Cómo puede describirle a Don Gustavo el sitio en donde debe colocar las matas?</td></tr>
<tr><td>Conjeturación</td><td colspan="2">En términos de geometría, ¿qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional:
Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).</td></tr>
</table>

Posibles actuaciones de los estudiantes

- Tiene dificultad para modelar la situación con geometría dinámica.
- No evidencia una correspondencia entre la representación en papel y lápiz y la realizada en geometría dinámica.
- No expresa sus conclusiones usando un lenguaje matemático.
- No consigna correctamente, en el diagrama-deducción, la información correspondiente.
- No relaciona los pasos realizados en la construcción con los pasos que debe usar en la justificación.

Posibles actuaciones del profesor en relación a las de los estudiantes

- Mostrar la correspondencia entre los pasos de la construcción y los pasos de la justificación.
- Cuestionar a los estudiantes acerca de la relación entre los pasos de la construcción dinámica y los de la construcción realizada en papel y lápiz.
- Revisar con todo el grupo los argumentos expuestos en el diagrama-deducción.

Sugerencias

- Proponer a los estudiantes situaciones problemáticas más simples que se puedan modelar fácilmente con el software de geometría dinámica para familiarizar a los estudiantes con dicho proceso.
- Motivar el dialogo entre los grupos de trabajo par que hayan espacios en los que se identifiquen de manera conjunta las hipótesis, tesis o conclusiones que deben ir en la tabla y que deben hacer parte de la conjetura.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

Las conclusiones que se pueden derivar de la elaboración del presente trabajo de grado son de dos tipos. Están las que tienen que ver con el trabajo de grado mismo y las personales que son fruto del trabajo que demandó la realización de este trabajo. Es decir, unas conclusiones se refieren a lo que aprendimos para nuestra futura labor como docentes, y otros tienen que ver con lo académico respecto a lo que debe ser una propuesta didáctica.

Como consecuencia de lo anterior, se exponen las conclusiones de acuerdo al tipo.

4.1 Conclusiones personales

- Evidenciamos diferentes ejemplos de variedad de actividades para propiciar la argumentación y el aprendizaje.
- Dentro de los espacios académicos cursados durante la Licenciatura en Matemáticas están: Elementos de Geometría, Geometría Plana, Geometría del Espacio, y Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. Los primeros tres contribuyeron a desarrollar conocimientos sobre lo que es un sistema teórico de la geometría, y de geometría los cuales fueron útiles para realizar el análisis. El último proveyó elementos para imaginarnos las posibles actuaciones de los estudiantes, los procesos que están involucrados en el aprendizaje de la geometría, metodología para propiciar el aprendizaje, entre otras cosas. Ello fue útil para desarrollar y analizar las actividades propuestas en la secuencia didáctica.
- Como resultado de esta experiencia adquirimos conocimientos teóricos y metodológicos para fortalecer nuestro quehacer como futuras docentes.
- El análisis del marco teórico nos permitió conocer aspectos, hasta el momento desconocidos por nosotras, acerca del proceso de argumentación y el estudio que existe en torno a los argumentos, conociendo con ello la importancia de dicho proceso en la formación de estudiantes.

- Comprendemos la sugerencia que se hace en el plan decenal de educación acerca de la construcción social de conocimiento, y por ello la importancia de involucrar a nuestros estudiantes en espacios de diálogo como mecanismo para favorecerlo.

4.2 Conclusiones respecto al diseño de secuencias didácticas

- En el momento de realizar actividades es necesario tener en cuenta los estándares básicos en competencias matemáticas y su relación con el contexto ya que permiten evidenciar los procesos matemáticos y el tipo de pensamiento a desarrollar. De esta manera las actividades tendrán un contenido enriquecedor en el desarrollo de habilidades por parte de los estudiantes.
- El uso de la geometría dinámica en el aula no busca eliminar el uso de papel y lápiz. Por el contrario, es un herramienta que permite realizar otras acciones que generan o fortalecen el conocimiento geométrico, tal como, descubrir dependencias entre propiedades al visualizar cuáles se mantienen bajo el arrastre del objeto geométrico que fue construido para que se cumplieran otras propiedades.
- El análisis de la secuencia didáctica nos permitió descubrir que en los diferentes momentos de su construcción se hace necesario tener en cuenta todos los elementos de esta para obtener mejores resultados en cuanto al objeto matemático a desarrollar.
- Al propiciar la argumentación en las tareas, se favorece la construcción de conocimiento y el desarrollo de la habilidad para justificar enunciados desde la teoría.
- Es posible transformar paulatinamente explicaciones espontáneas en argumentos matemáticos ceñidos a un sistema teórico.
- Diseñar una secuencia didáctica requiere conocimiento profundo del contenido y creatividad para proponer tareas innovadoras que despierten el interés de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍCAS

- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Gempeler, M. (2004) *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Ministerio de Educación Nacional.

- Lara, L y Fonseca, J. (2013). Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Lara, L. y Samper, C. (2014). Un aporte a la caracterización del comportamiento argumental y racional cuando se aprende a demostrar .*Educación Matemática,* Vol. 26, núm.1, pp. 7-40.
- Lastra, S. y Romeo, J. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas*. (Tesis de maestría).
- MEN. (1998). Lineamientos curriculares, Cooperativa editorial magisterio. Bogotá D.C.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias matemáticas, Cooperativa editorial magisterio. Bogotá D.C.
- Mendoza, J. (2010). Vygotsky la construcción del conocimiento. *Boletín Electrónico de Investigación de la Asociación Oaxaqueña de Psicología A.C.* Recuperado el 13 de enero del 2016 de: http://www.conductitlan.net/notas_boletin_investigacion/81_vygotsky_construccion_conocimiento.pdf
- Perry, P., C. Samper, L. Camargo y Ó. Molina (2013), "Innovación en un aula de geometría de nivel universitario", en C. Samper y Ó. Molina, Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 13-36.
- Perry, P., C. Samper, L. Camargo y Ó. Molina (2013), "El enunciado condicional: actuaciones problemáticas y diagramas para abordarlas", en C. Samper y Ó.

Molina, Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 37-56.

- Plan Nacional Decenal de Educación PNDE. (2006-2016). Lineamientos en TIC. Recuperado el 19 de enero del 2016 de: http://www.plandecenal.edu.co/html/1726/articles-166057_TICS.pdf
- Ramiro, S. (s.f.). La construcción social de saberes matemáticos. el caso del tratamiento de la información. Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Rodríguez, L. (2004). El modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa. revista digital universitaria. recuperado el 10 de abril del 2015 de: http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/art2.htm
- Silva, L. (2013). Argumentar para definir y definir para argumentar. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.