UNA APROXIMACIÓN AL LIBRO X DE *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Trabajo de grado, asociado al grupo RE-MATE, presentado como requisito parcial para obtener el grado de Licenciada en Matemáticas

GERALDINE YISSET RÍOS GARCÍA

RUTH ALEJANDRA SANDOVAL SILVA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C., 2016

UNA APROXIMACIÓN AL LIBRO X DE *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Trabajo de grado, asociado al grupo RE-MATE, presentado como requisito parcial para obtener el título de Licenciada en Matemáticas

Presentado por:

GERALDINE YISSET RÍOS GARCÍA

Cód. 2010140045

C.C. 1.106.030.627

RUTH ALEJANDRA SANDOVAL SILVA

Cód. 2010140064

C.C. 1.03.623.619

Director:

EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

Edgar A Guacaneme S.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C., 2016

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos de forma muy especial a nuestro director de trabajo de grado Edgar Alberto Guacaneme Suárez, por todo el conocimiento que amablemente ha compartido con nosotras.

Geraldine y Alejandra

La familia siempre es y será eslabón más fuerte en mi vida, gracias a ella he cumplido mis metas y superado grandes retos; mis padres, Myriam y Miguel, quienes con sus consejos y su aliento siempre me impulsaron a seguir adelante, me dan fortaleza cuando los problemas y las dificultades detuvieron mi avance.

Geraldine Ríos García

Gracias a Dios porque en este largo camino me ha respaldado y sustentado; a mi esposo Iván quien ha sabido alentarme, apoyarme y comprenderme y a mi hermosa Luciana que cada día, con sus sonrisas me recuerda cuanto debo esforzarme. Gracias a mis padres, hermana y sobrina que han sido un apoyo incondicional.

Alejandra Sandoval

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una aproximación al Libro X de *Elementos* de Euclides
Autor(es)	RÍOS GARCÍA, Geraldine Yisset; SANDOVAL SILVA, Ruth Alejandra
Director	GUACANEME SUÁREZ, Édgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 231 pp.
Unidad patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras claves	CONOCIMIENTO DEL PROFESOR, EUCLIDES, HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS, INCONMENSURABILIDAD, RECTAS APÓTOMAS, RECTAS BINOMIALES, RECTAS MEDIALES, RECTAS RACIONALMENTE EXPRESABLES.

2. Descripción
El presente documento tiene como objetivo mostrar los resultados obtenidos del estudio de Libro X de *Elementos* de Euclides, particularmente de su primera de tres partes. En este sentido, se identifican asuntos centrales de la teoría expuesta y se recapitulan y confrontan las posturas de algunos historiadores que han tratado el tema. Asimismo se reflexiona sobre la experiencia de estudio de este elemento de la Historia de las Matemáticas y su influencia en el conocimiento personal y profesional del futuro profesor de Matemáticas.

3. Fuentes
A continuación se presentan algunas de las fuentes bibliográficas más importantes:
Euclides. (1991). *Elementos* (Vol. 1). (M. L. Castaños, Trad.) Madrid, España: Gredos.
Euclides. (1996). *Elementos* (Vol. 3). (M. L. Castaños, Trad.) Madrid, España: Gredos.
Fowler, D. H. (1992). An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements. *Historia Mathematica, 19*(3), 233-264.
Guacaneme Suárez, E. A. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. Ponencia presentada en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil.
Knorr, W. (1983). "La Croix des Mathématiciens": The Euclidean theory of the irrational lines. *Bulletin (New Series) Of The American Mathematical Society, 9*(1), 41-69.
Knorr, W. R. (1974). *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of*

Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry. Boston, U.S.A.: D. Reidel Publishing Company.

Parra, E., & Vargas, E. (2012). *¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?* (Tesis de Pregrado). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Roskam, J. (2009). Book X of The Elements: Ordering Irrationals. *The Mathematics Enthusiast, 6*(1-2), 277-294.

Urbaneja, P. M. (febrero de 2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Vega, L. (1991). Introducción General. En (M. L. Puertas Castaños, Trad.). *Elementos*. Vol. 1, pp. 7-184. Madrid, España: Gredos.

4. Contenidos

El presente documento se ha organizado en los siguientes cuatro capítulos:

En el primer capítulo “Preliminares”, se expone la justificación, la descripción del objeto de estudio y los objetivos, general y específicos que se pretenden alcanzar con este estudio.

El segundo capítulo, titulado “Libro X de *Elementos* de Euclides” inicia con la recapitulación de las posturas de algunos historiadores en relación con el contenido del Libro; luego se expone el estudio realizado a la primera parte del Libro en donde se describe la primera parte, se analizan las proposiciones (cada proposición, las relaciones entre ellas y la construcción de estructuras entre ellas) y se muestran las cadenas deductivas configuradas. Finalmente se presenta nuestra postura sobre el contenido de la primera parte del Libro X.

En el tercer capítulo, “Aportes para la formación personal y profesional del docente de matemáticas”, se exponen algunos aportes que el estudio del Libro X, entendido como parte de la Historia de las Matemáticas, brinda al futuro profesor de Matemáticas; estos aportes se decantan a partir de seis categorías, a saber: (i) Visiones de la actividad matemática. (ii) Visiones de los objetos matemáticos. (iii) Competencias profesionales. (vi) Transformación de la manera de enseñar. (v) Historia como posible fuente de recursos para la enseñanza. (vi) Fortalecimiento de la valoración y el papel de la profesión docente.

El último capítulo, titulado “Conclusiones”, muestra los resultados más relevantes obtenidos a lo largo del estudio, atendiendo a los objetivos planteados.

5. Metodología

Para el desarrollo del presente trabajo se realizó el estudio exhaustivo de la teoría matemática expuesta en la primera parte del Libro X de *Elementos*. Las dos partes restantes se estudiaron de manera superficial, debido a la amplia extensión del Libro.

También se estudió bibliografía del campo de la Historia de las Matemáticas en donde se trataban asuntos sobre la teoría en sí y sus implicaciones en el desarrollo de objetos matemáticos. Para ello fue necesario hacer algunas traducciones de tales documentos. Así, se recapitularon las ideas centrales de los planteamientos de algunos historiadores de las Matemáticas y se logró proponer una postura de las autoras en relación con el Libro X.

A través de un proceso de reflexión sistemático, se reconocieron las implicaciones que este estudio, y en general el estudio de la Historia de las Matemáticas, puede ejercer a nivel personal y profesional en el futuro docente de Matemáticas.

6. Conclusiones

Con respecto al contenido del Libro X de *Elementos* se puede concluir que:

- Consta de 4 definiciones y 115 proposiciones expuestas en tres partes. En la primera parte hace un tratamiento matemático a las relaciones de conmensurabilidad e inconmensurabilidad sobre magnitudes, desarrolla las ideas de rectas y cuadrados de rectas racionalmente expresables y no racionalmente expresables, se construyen la recta medial y las seis rectas binomiales, se demuestra que las anteriores son rectas no racionalmente expresables y su unicidad. En la segunda parte hace un estudio de las propiedades de estas rectas mediante construcciones. En la tercera parte construye las rectas apótomas, utilizando mecanismos similares a los utilizados para construir las rectas binomiales.
- La primera parte del Libro X inicia con cuatro definiciones y presenta 47 proposiciones (con algunos porismas y lemas). Las proposiciones se pueden agrupar de acuerdo con la finalidad de las mismas como sigue: [X 1-18] Resultados sobre magnitudes conmensurables e inconmensurables y líneas racionalmente expresables y no racionalmente expresables. [X 19-26] Áreas formadas por rectas racionalmente expresables. [X 27-35] Construcciones necesarias para obtener las rectas no racionalmente expresables. [X 36-41] Construcción de rectas no racionalmente expresables. [X 42-47] Unicidad de estas rectas no racionalmente expresables.
- La organización de las proposiciones no necesariamente es lineal; la posibilidad de identificar grupos de proposiciones está ligado a la observación de diferentes tipos y propósitos demostrativos.

Con respecto a los estudios hechos por historiadores sobre el Libro X se logra concluir que:

- Algunos de los asuntos centrales sobre los que han versado los comentarios de los historiadores respecto del Libro X refieren a su finalidad, su origen, los estudios anteriores a los hechos por Euclides, los comentarios posteriores sobre la autoría de las últimas proposiciones, el sistema deductivo que sigue y la identificación de núcleos de proposiciones que no son utilizadas dentro de la teoría.
- Mediante el álgebra de magnitudes irracionales se podría comprender mejor la teoría, sin embargo esto se ha prestado para confusiones en la comprensión de la teoría y específicamente entre la diferencia de las nociones irracionalidad e inconmensurabilidad.

En relación con las implicaciones del estudio a la formación del conocimiento del profesor de Matemáticas:

- Se reconocen los aportes que trae al profesor de Matemáticas el estudio de la Historia de las Matemáticas y el estudio de los objetos matemáticos en los diferentes periodos de su evolución.

- Se identifica la potencialidad de la reflexión sistemática que atiende a la visión de la actividad matemática, la visión de los objetos matemáticos, las competencias profesionales desarrolladas, la transformación de la manera de enseñar, la historia como fuente de recursos para la enseñanza y el fortalecimiento de la valoración y el papel de la profesión docente.

Elaborado por:	RÍOS GARCÍA, Geraldine Yisset; SANDOVAL SILVA, Ruth Alejandra
Revisado por:	GUACANEME SUÁREZ, Édgar Alberto

Fecha de elaboración del Resumen:	26	1	2016

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El presente documento tiene como objetivo mostrar los resultados obtenidos del estudio de Libro X de *Elementos* de Euclides, particularmente de su primera de tres partes. En este sentido, se identifican asuntos centrales de la teoría expuesta y se recapitulan y confrontan las posturas de algunos historiadores que han tratado el tema. Asimismo se reflexiona sobre la experiencia de estudio de este elemento de la Historia de las Matemáticas y su influencia en el conocimiento personal y profesional del futuro profesor de Matemáticas.

En el primer capítulo "Preliminares", se expone la justificación, la descripción del objeto de estudio y los objetivos, general y específicos que se pretenden alcanzar con este estudio.

El segundo capítulo, titulado "Libro X de *Elementos* de Euclides", inicia con la recapitulación de las posturas de algunos historiadores en relación con el contenido del Libro; luego se expone el estudio realizado a la primera parte del Libro en donde se describe la primera parte, se analizan las proposiciones (cada proposición, las relaciones entre ellas y la construcción de estructuras entre ellas) y se muestran las cadenas deductivas configuradas. Finalmente se presenta nuestra postura sobre el contenido de la primera parte del Libro X.

En el tercer capítulo, "Aportes para la formación personal y profesional del docente de matemáticas", se exponen algunos aportes que el estudio del Libro X, entendido como parte de la Historia de las Matemáticas, brinda al futuro profesor de Matemáticas; estos aportes se decantan a partir de seis categorías, a saber: (i) Visiones de la actividad matemática. (ii) Visiones de los objetos matemáticos. (iii) Competencias profesionales. (vi) Transformación de la manera de enseñar. (v) Historia como posible fuente de recursos para la enseñanza. (vi) Fortalecimiento de la valoración y el papel de la profesión docente.

El último capítulo, titulado "Conclusiones", muestra los resultados más relevantes obtenidos a lo largo del estudio, atendiendo a los objetivos planteados.

Capítulo 1. PRELIMINARES

1.1 Justificación

Existen varios factores motivantes que nos llevan a escoger el tema del tratamiento de la inconmensurabilidad en el Libro X de *Elementos* de Euclides como trabajo de grado, entre ellos está el interés por el conocimiento que este proyecto pueda generarnos, ya que en el curso de "Tópicos de Historia de las Matemáticas" (sic), desarrollado en el segundo semestre de 2014, se ha evidenciado que el estudio de la historia de los saberes matemáticos fortalece y aporta al conocimiento del profesor de Matemáticas. También se resalta la importancia del estudio de la Historia de las Matemáticas dentro del rol docente, ya que como lo menciona Bell (1985, citado en Urbaneja, 2004, p. 54) "Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas".

Generalmente existe confusión entre irracionalidad e inconmensurabilidad, como lo cita Gómez (2014):

> Uno de los errores frecuentes de los profesores es la confusión entre la inconmensurabilidad y la irracionalidad. Cuando se estudia lo que hacen los profesores o en algunos libros de texto cuando se intenta hablar de irracionalidad se alude al ejemplo de inconmensurabilidad o a veces cuando se intenta hablar del lado y la diagonal lo que termina demostrándose es la irracionalidad de raíz de dos. Es necesario generar conciencia en los profesores de que muchas de las afirmaciones que nosotros presentamos en la escuela no las podemos sustentar para nosotros mismos y terminan siendo actos de fe. Los profesores no conocemos demostraciones para hechos tan ampliamente divulgados como la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado. (pp. 88-89).

El Libro V de *Elementos* de Euclides evita el problema de la inconmensurabilidad al proponer una teoría de las proporciones para magnitudes geométricas, independiente de si estas son o no conmensurables. En contraste, el mismo autor griego en la misma obra, pero en el Libro X, elabora un tratado sobre las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Aquí tenemos la oportunidad para profundizar en aspectos de *Elementos* que no son netamente geométricos, pues al parecer el Libro X es una mezcla entre Geometría y Aritmética. Ello en tanto que cuando se habla de *Elementos* de Euclides, generalmente se piensa en Geometría y se mencionan con mayor frecuencia los temas de los Libros I a IV. Nos surge el reto de identificar bibliografía en español que verse sobre el Libro X, pues en una primera aproximación esta se muestra escaza; también se presenta la necesidad de identificar si lo que se trabaja en el Libro X acerca de la inconmensurabilidad, ofrece una ampliación efectiva del conocimiento sobre esta noción. Finalmente tenemos un interés por aumentar nuestro conocimiento acerca de la inconmensurabilidad, dado que en la Licenciatura en Matemáticas este tema no se ha profundizado en ningún espacio académico.

1.2 Descripción del objeto de estudio

Inicialmente el objeto de estudio de este proyecto fue el abordaje de la inconmensurabilidad a partir de la teoría expuesta en la primera parte del Libro X de *Elementos* de Euclides, ya que como futuras docentes de Matemáticas reconocemos que el profesor de Matemáticas debe poseer un conocimiento sobre los objetos matemáticos que enseña. En el aula de clase habitualmente se trata la inconmensurabilidad desde un punto de vista intuitivo. Lo que se quiso hacer fue trascender de esta noción intuitiva, abordándola desde otros puntos de vista, proporcionados principalmente por la traducción y notas de *Elementos* realizada por Puertas (Euclides, 1996). También se abordarían diferentes consideraciones de tipo histórico elaboradas por historiadores.

A medida que se fue desarrollando el proyecto nos dimos cuenta de que el objeto de estudio planteado inicialmente no se correspondía con lo que estábamos realizando, pues aunque abordamos diferentes fuentes, estas no fueron específicamente de inconmensurabilidad, sino que nos daban una mirada general del Libro X; así pues nuestro objeto de estudio dejó de ser la inconmensurabilidad y se convirtió en la primera parte del Libro X de *Elementos* de Euclides. Además de la revisión de la teoría expuesta en esta primera parte, consideramos también lo que otros han dicho acerca del este libro para rescatar parte de la idea original.

1.3 Objetivos

1.3.1 **Objetivo general**

El principal objetivo que nos atañe es el estudio detallado del Libro X de *Elementos* de Euclides y de diferentes documentos relacionados, con el fin de identificar elementos de la teoría y de los comentarios históricos que nutran nuestro conocimiento.

1.3.2 **Objetivos específicos**

1. Identificar el tratamiento matemático que hace Euclides en *Elementos* a la inconmensurabilidad.
2. Identificar asuntos centrales del Libro X de *Elementos* de Euclides sobre los que han versado los comentarios de los historiadores.
3. Reconocer los posibles aportes que este estudio pueda generar, que contribuyan a la formación tanto personal, como profesional del docente de Matemáticas.

Capítulo 2. LIBRO X DE *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Aunque no fue ese el orden cronológico en el que se dio el estudio y las posturas de Knorr (1983) y Roskam (2009) fueron analizadas posterior a la revisión del Libro X, a continuación mostramos las posturas que estos historiadores proponen frente al contenido del libro, para poder ver el contraste con el estudio realizado. Luego presentamos el estudio que hicimos a la primera parte del libro, en donde hacemos una descripción de este y un análisis de cada una de las proposiciones basándonos en tres niveles de comprensión: intra-proposición en donde analizamos las definiciones y proposiciones y observamos una serie de propiedades de estas, inter-proposición en donde damos una mirada a las proposiciones en conjunto, a las relaciones de unas con otras y posibles grupos de proposiciones que se develan y por último trans-proposición en donde observamos los vínculos entre los grupos de proposiciones y que llevan a la construcción de estructuras de proposiciones. Luego del análisis realizado y los grupos de proposiciones formados mostramos las líneas argumentativas y cadenas deductivas configuradas. Todo lo anterior se hizo para obtener el apartado que titulamos "nuestra postura" en donde mostramos nuestra propia postura acerca de las intenciones y contenido del Libro X.

2.1 Posturas de los historiadores

Realizando una búsqueda en el idioma Español se muestra escasa la bibliografía acerca del Libro X, consideramos la descripción que hace Luis Vega acerca de este libro, en la introducción hecha a la versión de María Luisa Puertas, que fue la que estudiamos. Luego remitiéndonos al idioma Inglés encontramos que varios historiadores y académicos han realizado artículos en donde plasman sus posturas sobre este tema. En los artículos *"La Croix des Mathématiciens": The Euclidean Theory of Irrational Lines* (Knorr, 1983) y *Book X of The Elements: Ordering Irrationals* (Roskam, 2009), se plantean cosas similares, como que el Libro X cumple el propósito de clasificación de rectas irracionales (Roskam, 2009) y caracterización de irracionales (Knorr, 1983). A continuación exponemos un breve resumen de las tres posturas revisadas:

2.1.1 **Jade Roskam (2009)**

La temática del Libro X es la organización sistemática y la clasificación de líneas irracionales[1], esto a través de la comprensión de lo que son las líneas racionales e irracionales, por medio de las ideas de longitudes y cuadrados conmensurables e inconmensurables. Debido a la poca documentación sobre el estudio inicial de los inconmensurables se han hecho especulaciones acerca de ello. Knorr (1998) señala en un artículo que originalmente estos números fueron conocidos por el Imperio Babilónico, cuyas tablillas datan de 1800-1500 a.C. en donde plasmaron que algunos valores no pueden ser expresados como cocientes de números enteros, aunque ello no implique que los comprendieran. Pero otras fuentes contradicen a Knorr y atribuyen el conocimiento original de estos números a la escuela Pitagórica, alrededor de 430 a.C. esto debido a que el Teorema de Pitágoras hace inevitable que esta escuela descubriera valores irracionales como longitudes de diagonales de triángulos rectángulos, aunque no pudieron incorporarlos a su teoría de números por no poder expresarlos como cocientes de números enteros. Así pues los números irracionales fueron vistos como un descubrimiento desafortunado hasta casi 13 siglos después de Euclides, cuando el matemático islámico al-Karaji tradujo la terminología euclidiana en raíces cuadradas irracionales de números enteros.

Teodoro, alumno de Platón y Teeteto alumno de Teodoro, estudiaron y divulgaron la primera teoría conocida de líneas irracionales (Knorr, 1975), sin embargo los descubrimientos de Teodoro se limitaron a casos específicos como las líneas cortadas en extrema y media razón[2] y nunca los pudo generalizar, aunque su discípulo Teeteto extendió la teoría, clasificando raíces cuadradas conmensurables e inconmensurables en longitud. Luego, Eudemo que vivió entre Platón y

---

[1] Cuando hablamos de líneas Irracionales, no nos estamos refiriendo a la irracionalidad como una característica propia de los números. Cuando Roskam y Knorr hablan en sus artículos acerca de líneas irracionales, en realidad hacen referencia a segmentos no racionalmente expresables, conceptos que se ampliaran en los apartados de análisis de las proposiciones.

[2] En el Libro VI la definición tres [VI. Def. 3] dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor. En el Libro XIII se aplica este concepto al pentágono regular, pues el punto de intersección de dos diagonales de un pentágono regular divide a ambas en la razón áurea (o en media y extrema razón).

Euclides pasó esta teoría a la generación de Euclides; si no fuera por Teeteto y Eudemo se le atribuiría todo el trabajo de líneas conmensurables e inconmensurables a Euclides (Knorr, 1983).

Teeteto estudió las tres clases principales de magnitudes irracionales, que son la medial, la binomial, y la apótoma (sin embargo estos nombres pudieron no haber sido los originales, sino puede que Eudemo los haya cambiado), ligando cada clase a una única media[3], la medial a la media geométrica, la binomial a la aritmética y la apótoma a la armónica. Pero fue Euclides quien generalizó la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad en cuadrado y ordenó las líneas irracionales binomial[4] y apótoma en seis clases distintas cada una. Las seis clases de cada recta se comprenden más fácilmente utilizando el Álgebra por el orden de las magnitudes irracionales; aunque se afirma que la comprensión de la Geometría a través del Álgebra se originó en el siglo VIII debido a los avances logrados por muchos matemáticos islámicos, se podría llegar a argumentar que la mayoría de *Elementos* es Álgebra disfrazada de Geometría (Grattan-Guinness, 1996), aunque este se podría constituir en un obstáculo para la comprensión de la teoría euclidiana.

Roskam comenta que Euclides basa su clasificación primero en la conmensurabilidad de la línea y luego en la racionalidad. Dice además que si ese fue su razonamiento, este no se preocupa por el orden en que aparecen los conceptos según el momento de aplicarlos; por ejemplo la línea cortada en relación extrema y media aparece inicialmente en la definición 3 del Libro VI, luego esta se relaciona con la línea apótoma en el Libro X (el corte de mayor longitud es una apótoma y el de menor longitud es la primera apótoma) y se viene a aplicar hasta el Libro XIII. Y por último hace la observación de que gran parte del Libro X está dedicado a la exploración entre las relaciones de las líneas irracionales.

---

[3] Las tres medias se realizan a dos segmentos que tienen que cumplir las condiciones dadas en las definiciones de las rectas para que den una recta que cumpla la condición de la recta pedida. (Ver Knorr 1983)

[4] Las seis clases de rectas binomiales aparecen en la primera parte del Libro X.

2.1.2 **Wilbur Richard Knorr (1983)**

El Libro X de *Elementos* es el libro que posee mayor dificultad tanto para entender su contenido, como sus motivaciones; Stevin (1548-1620) proclamó que era fácil de entender su contenido al expresarlo en términos algebraicos, lo cual históricamente sería un error, pues no se debe concebir o explicar desde un punto de vista atemporal una teoría desarrollada bajo un contexto sociocultural y concepciones matemáticas diferentes.

El estudio de las magnitudes inconmensurables se constituye a partir de algunos problemas geométricos expuestos en (Knorr W. , 1983), la idea esencial del Libro X es su función en la construcción de las figuras regulares planas y sólidas. Los primeros indicios de la aparición de las magnitudes inconmensurables se atribuyen a los pitagóricos y al estudio del pentágono regular y a la división de líneas de acuerdo con la sección aurea (extrema y media razón).

Knorr (1983) considera que la investigación sobre los irracionales hecha en el Libro X es una recopilación hecha por Euclides; su procedencia viene a partir de la concepciones de Teeteto en el primer tercio del siglo IV a.C. sobre las líneas irracionales y los conocimientos de Eudoxo acerca de la irracionalidad de la diagonal y el lado del pentágono; se considera que las líneas irracionales han sido estudiadas también por geómetras en el periodo de Eudoxo y Euclides, según el comentarista Proclo, aunque no se conocen los trabajos precisos. El procedimiento de Teeteto para hallar las líneas irracionales fue a partir de dos líneas conmensurables solo en cuadrado, para las cuales halla su media geométrica, aritmética y armónica; posteriormente demuestra que cada una de las medias es una línea irracional; el tratamiento dado a las dos primeras es similar al tratamiento de Euclides a las líneas medial y binomial. Eudoxo realiza su trabajo a partir magnitudes, de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio racional, en el cual demuestra que el lado y la diagonal son irracionales y además que son la suma y diferencia respectivamente de términos racionales conmensurables entre sí solo en cuadrado.

El Libro X expone inicialmente los resultados generales sobre magnitudes conmensurables y rectas expresables [Def. 1-4 y X, 1-18]; las áreas formadas como productos de rectas expresables [X. 19-26]; algunas construcciones [X. 27-35] necesarias para las seis clases de rectas binomiales [X. 36-41] y las rectas apótomas [X. 73-78] demostrando que son no expresables; la unicidad de esas rectas [X. 42-47 y X.79-84]; construcciones [X. 48-53 y X. 85-90]; si una recta es conmensurable con un tipo de rectas construidas, también será del mismo tipo [X. 66-69 y X. 103-107]; la suma de una medial y una expresable es una de las cuatro primeras rectas binomiales [X. 71]; la suma de dos mediales es una de las dos rectas binomiales restantes [X. 72]; las relaciones análogas para las apótomas [X.108-110]; ninguna apótoma puede igualar a una binomial [X. 111]; productos especiales entre binomiales y apótomas [X. 112-114] y finalmente el procedimiento para hallar rectas mediales y mediales de mediales y sucesivamente [X. 115], dando lugar a nuevas clases de no expresables. Al interior de cada conjunto de proposiciones, a partir de [X. 19] no se tiene algún orden específico pues ninguna es prerrequisito de otra.

Parece que estos últimos teoremas hubieran sido posteriores a Euclides, debido al aparente cierre de la teoría en [X. 111] y la relevancia de los mismos para la teoría.

No se conoce la obra original de Euclides lo que ha llevado a especulaciones sobre la autoría de algunas proposiciones o demostraciones, pues se han evidenciado inconsistencias en las mismas, por ejemplo una construcción general admite tratamiento diferente para cada uno de los casos particulares; eso lleva a Knorr a catalogar el Libro X como un *"desastre pedagógico"*. Considera que el Libro X tiene pocas ideas matemáticas, que su verdadero mérito está en ser un ejemplar único del sistema deductivo y que trata de convertir un cuerpo de conclusiones geométricas en un sistema del conocimiento matemático.

2.1.3 **Luis Vega (1991)**

Stevin se refiere al *Libro X* como "La cruz de los matemáticos", para recordar que muchos matemáticos renacentistas solo veían en este libro dificultades sin provecho, se pregunta si aún para los historiadores matemáticos representa una cruz. No recibe este apelativo por los problemas que causa su interpretación, sino también porque representa una encrucijada dentro de *Elementos*. En este libro se reúnen desarrollos de la teoría generalizada de la proporción y motivos aritméticos y de él parten nuevas formas de construir figuras planas y sólidas. Consta de

16 definiciones y 115 proposiciones, todas ellas teoremas[5], aunque algunas de ellas se proponen construir o hallar algo. Está dedicado al estudio de tipos y criterios de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y a la clasificación de rectas irracionales. Se subdividen las rectas conmensurables/inconmensurables en dos clases, las que lo son en longitud y las que lo son en cuadrado (dándose estos de forma natural); se distingue entre líneas o áreas racionales e irracionales (ya no naturalmente sino por convención, con respecto a la recta designada como racional).

Entre los muchos resultados que se exponen a lo largo del libro, se da la base para el método de exhausión (X 1). La proposición 2 hace referencia a que dos magnitudes son inconmensurables si la búsqueda de su medida común máxima (antifairesis) nunca tiene fin. Las proposiciones 3 y 4 proporcionan un algoritmo para determinar la medida común máxima de dos o tres magnitudes conmensurables. X, 5 establece una relación entre las magnitudes conmensurables y los números (guardar relación). 6 a 8 mantienen la idea de X, 5, para desembocar en X, 9 (resultado atribuido a Teeteto).

El *Libro X* recoge investigaciones de Teeteto, Eudoxo y posiblemente Hermótimo se mueve en una línea de categorización de resultados de diversos tipos de conmensurabilidad/inconmensurabilidad y de clases posibles de rectas racionales/irracionales; aun así mantiene cierta oscuridad y ambigüedad. Su estructura deductiva carece de cohesión interna, las proposiciones 27-35, 42-47, 66-70, 79-84, 85-90, 103-107 representan núcleos aislados en el conjunto del libro, las proposiciones 2-4, 24-25, 112-115 no cumplen ningún cometido en *Elementos*. Se ha dicho que el Libro X es un desastre pedagógico, pero vale reconocer en él ciertos valores disciplinarios y metódicos, logra una clasificación de líneas irracionales en 13 géneros distintos y enseña a construir ejemplos de ellas.

---

[5] A lo largo del estudio de la teoría se verá que no todas son teoremas.

2.2 Estudio de la Primera parte del Libro X

El Libro X de *Elementos* está compuesto de tres partes; la primera parte se compone de 4 definiciones y 47 proposiciones, la segunda parte se compone de 6 definiciones y 37 proposiciones y la tercera parte de 6 definiciones y 30 proposiciones; para un total de 16 definiciones y 115 proposiciones. Debido a la extensión de este libro (el más largo de los libros de *Elementos*) y el tiempo que nos tomó analizar cada una de las primeras definiciones y proposiciones solo trabajamos la primera parte.

2.2.1 Descripción sintética de la Primera parte del Libro X

La primera parte del Libro X consta de 4 definiciones y 47 proposiciones,[6] en ella se desarrollan los siguientes conceptos fuertes: magnitudes conmensurables e inconmensurables, líneas rectas conmensurables en cuadrado e inconmensurables en cuadrado, rectas y áreas racionalmente expresables y no racionalmente expresables; a partir de las rectas no expresables trabaja rectas y áreas mediales y binomiales. Lo anterior se relaciona con algunas propiedades conocidas en la actualidad con nombres específicos, como por ejemplo: Proposición 2: Antanairesis, Proposiciones 3 y 4: Máximo Común Divisor, Lema Proposición 13: Criterio para restar cuadrados, Proposición 21: Media proporcional, entre otras.

Inicialmente en el libro se desarrolla la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y, a partir de ello, se despliegan una serie de propiedades de las rectas que permiten clasificarlas.

Se parte de las definiciones de magnitudes conmensurables e inconmensurables[7] y líneas conmensurables e inconmensurables; se hace un desarrollo sobre la conmensurabilidad e

[6] Luis Vega comenta en su introducción a la traducción que estamos estudiando que todas las proposiciones son teoremas, a lo largo del estudio hecho a la primera parte del libro se evidenció que esto no es así, pues por ejemplo el enunciado de la proposición 10 nos sugiere que esta es una construcción y en el desarrollo de la demostración se evidencia que el “hallar” que se menciona en el enunciado evoca una construcción.

[7] Dos magnitudes son conmensurables si se miden con la misma medida e inconmensurables si no es posible hallar una medida en común.

inconmensurabilidad, exponiendo: propiedades de transitividad, propiedades heredadas luego de operar con magnitudes conmensurables e inconmensurables, procedimientos como el método de *Antifairesis* o *Antanairesis* para hallar la medida común máxima de dos o más rectas (procedimiento que está relacionado con la forma de hallar el máximo común divisor de números enteros desarrollado en la escuela), hallar rectas conmensurables e inconmensurables en longitud y cuadrado, y solo en cuadrado y relaciones de razón entre magnitudes que guardan la misma razón entre números. Lo anterior es válido algunas veces para cualquier tipo de magnitud, otras veces solo para líneas y cuadrados de las líneas. Al parecer el tratamiento hecho hasta la proposición 18 es con el fin de trabajar lo que sigue en las proposiciones 19 a 47, en donde se empieza a desarrollar un estudio fundamentado en las definiciones 3 y 4 (rectas y cuadrados racionalmente expresables) y aclara a qué hace referencia el concepto de expresabilidad. El desarrollo de lo racionalmente expresable y no racionalmente expresable[8] se realiza a partir de las definiciones de línea y cuadrado racionalmente expresable, líneas y cuadrados racionalmente expresables, y líneas y cuadrados no racionalmente expresables, las proposiciones antes mencionadas (19 a 47) tratan acerca de rectas y áreas expresables y las distintas rectas no expresables que se forman a partir de dichos términos.

La intención final del Libro X parece ser la definición y estudio de trece rectas sin razón expresable que serán utilizadas posteriormente. En la primera parte se hace referencia a las siete primeras: medial, binomial, primera bimedial, segunda bimedial, mayor, lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial y lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales.

Aparece la idea de rectángulos y áreas expresables para definir la *recta medial* que es la media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado y el área medial hace referencia al área igual al cuadrado de una recta medial.

---

[8] En Euclides (1996) la traductora utiliza estos términos para evitar la confusión con *racional* e *irracional* que lleva a pensar en números; una traducción más literal es *"expresable"* ($rh\bar{e}t\acute{o}s$) y *"sin razón"* ($\acute{a}logos$) que no muestran su carácter de antónimos.

Las proposiciones 36-41 definen las siguientes rectas producidas por la suma de dos rectas que pueden ser mediales o expresables y conmensurables solo en cuadrado o inconmensurables:

- La *recta binomial* que es la suma de dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado.
- La *recta primera bimedial* es la suma de dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable.
- La *recta segunda bimedial* es la suma de dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial.
- La *recta mayor* es la suma de dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el rectángulo comprendido por ellas medial.
- La *recta lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial* es la suma de dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas expresable.
- La *recta lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales* es la suma de dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas también medial e inconmensurable además con la suma de sus cuadrados.

Posteriormente presenta algunas propiedades de estas rectas y las áreas que forman y la porción de esta primera parte (proposiciones 42 a 47) se encarga de mostrar que estas seis rectas encontradas solo se pueden dividir por un único punto para hallar las dos rectas que las originaron (en otras palabras la unicidad del punto).

2.2.2 **Análisis de la Primera parte del Libro X**

Este análisis está organizado de manera semejante a las etapas dialécticas definidas por Piaget y García (1982) en su caracterización del mecanismo de pasaje de un estado de conocimiento al estado siguiente. Así pues, se hace una revisión de todas las definiciones y proposiciones con el fin de identificar los aspectos más relevantes y hacer una caracterización del modo de trabajar y las concepciones de los conceptos para Euclides y como estos repercuten en la actualidad.

Intra-proposición

Aquí se muestran ideas y comentarios que surgieron a partir del estudio hecho a cada una de las 4 definiciones y 47 proposiciones que componen la primera parte del *Libro X*. Aclaramos que al hacer esta revisión estuvimos estudiando Matemáticas y no Historia de las Matemáticas y que omitimos las proposiciones que no proceden de forma similar o que no nos aportan algo nuevo o que sea objeto de discusión. Pusimos un título a cada proposición en donde tratamos de recoger algo de la intención de la proposición.[9]

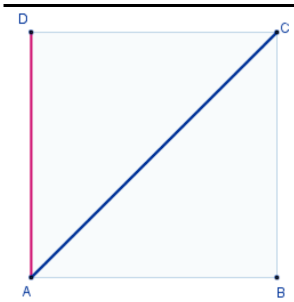
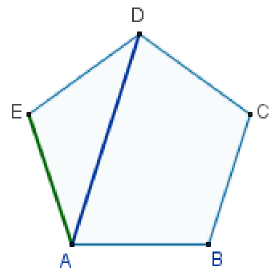
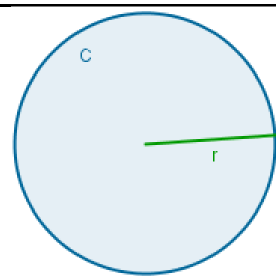
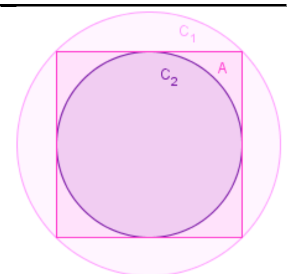
Definición 1, magnitudes conmensurables e inconmensurables:

La definición hace referencia a magnitudes conmensurables e inconmensurables; es importante aclarar que la conmensurabilidad no es una característica de números, sino de magnitudes del mimo tipo. Así pues, la inconmensurabilidad es una relación entre dos magnitudes del mismo tipo y no una característica propia de un número. A nivel escolar se ha evidenciado que los términos irracional e inconmensurable se usan sin alguna distinción, sin tener en cuenta que el número es una unidad de medida que se le asigna a la magnitud y no la magnitud misma. En Geometría se distinguen distintos tipos de objetos y magnitudes asociadas a ellos: segmento, región, volumen y ángulo; en esta primera definición, Euclides no hace distinción sobre el tipo de magnitud a la que se refiere, por lo que se asume que la definición es aplicable a todas las anteriores.

A continuación se muestran algunos ejemplos clásicos de inconmensurabilidad entre segmentos, ya que realizando una búsqueda no se encontraron ejemplos de inconmensurabilidad entre otros tipos de magnitudes.

[9] Remitirse al anexo 5 para ver el enunciado de cada proposición, aquí pusimos un nombre que sintetice la idea de la proposición según lo estudiado.

Tabla 1. *Ejemplos de magnitudes inconmensurables*

Del lado del cuadrado con su diagonal	**Del lado del pentágono regular con su diagonal**	**De la circunferencia con su radio**	**Del cuadrado y los círculos inscritos y circunscritos**
			
$\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AD}}$ son inconmensurables	$\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son inconmensurables	La circunferencia C y el radio r son inconmensurables	El área del cuadrado A es inconmensurable con las áreas C_1 y C_2

Luego presentamos algunas demostraciones de ejemplos clásicos de inconmensurabilidad.

1. Inconmensurabilidad del lado del cuadrado con su diagonal

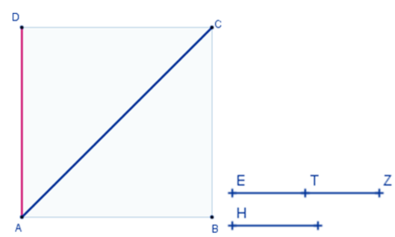


Figura 1. Inconmensurabilidad del lado de cuadrado ABCD con su diagonal AC. Tomada de Jiménez (2006)

Sea $ABCD$, un cuadrado de diagonal AC, digo que AC, AB son inconmensurables en longitud. Porque si suponemos que son conmensurables, decimos entonces que el mismo número es par e impar, ya que el cuadrado sobre AC es dos veces el cuadrado sobre BC. Como AC, AB son conmensurables, guardan la misma razón que un número con un número. Digamos que AC es a AB como EZ es a H, y supongamos que EZ y a H son los mas pequeños de aquellos que tienen la misma razón.

Entonces EZ no es la unidad, porque si lo fuera, y EZ es a H como AC es a AB, y AC es mayor que AB, entonces EZ es mayor que H, la unidad mayor que un número, lo cual es absurdo. Así, EZ no es la unidad y, por lo tanto, es un número.

Puesto que AC es a AB como EZ es a H, entonces también el cuadrado sobre AC es al cuadrado sobre AB como el cuadrado sobre EZ es al cuadrado sobre H. Pero el cuadrado sobre AC es dos veces el cuadrado sobre AB, así el cuadrado sobre EZ es dos veces el cuadrado sobre H. Por tanto, el cuadrado sobre EZ es par. Entonces, EZ también es par, porque si fuera impar, su cuadrado también sería impar, ya que cuando se combina un número par de sumandos impares, el total es impar. Así, EZ es par. Divídase EZ en dos partes iguales en T. Como EZ y H son los menores con la misma razón, son primos entre si. Pero EZ es par, así H es impar. En realidad, si fuera par, 2 mediría a EZ y a H, puesto que todo número par tiene una mitad; esto es imposible para números primos entre si y así H no es par. Por lo tanto es impar.

Dado que EZ es dos veces ET, el cuadrado sobre EZ será cuatro veces el cuadrado sobre ET. Pero el cuadrado sobre EZ es dos veces aquel sobre H, así que el cuadrado sobre H es el doble del cuadrado sobre ET. Luego el cuadrado en H es par. Por lo antes dicho H es par. Pero también es impar, lo que es una contradicción. Así, AC y AB no son conmensurables en longitud. Q.E.D.[10]

2. Demostración geométrica de la inconmensurabilidad del lado del cuadrado con diagonal $\sqrt{2}$

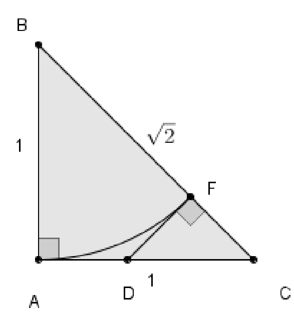


Figura 2. Inconmensurabilidad del lado del cuadrado con diagonal √2. Tomada de (González, 2008)

Supongamos que existe un $\overline{HK}$ que divide a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es decir HK divide a AB y HK divide a BC.

[10] Tomado de (Jiménez, 2006)

De la geometría de la figura se deduce:

$$AB = FB$$

$$FD = AD$$

$$FC = BC - AB \qquad (1)$$

$$FD = FC$$

$$DC = AC - AD = AC - FC \qquad (2)$$

De 1 y 2 se deduce que: HK divide a FC y HK divide a DC.

Este proceso se puede reiterar indefinidamente, con el resultado de que se van obteniendo triángulos isóceles que pueden llegar a ser tan pequeños como se quiera, en los que el segmento fijo HK divide simultaneamente al cateto y a la hipotenusa, lo cual es imposible. Esto lleva a la conclusión de que no puede haber una unidad de longitud que mida simultaneamente el cateto y la hipotenusa del triángulo, es decir, estos dos segmentos no son conmensurables.[11]

3. Demostración geométrica de la inconmensurabilidad del lado del pentágno con su diagonal

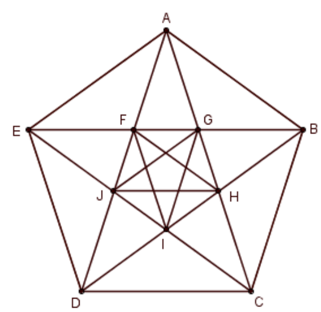


Figura 3. Demostración geométrica de la inconmensurabilidad del lado del pentágono con su diagonal. Tomado de (González, 2008)

[11] Tomado de (González, 2008)

Supongamos que existe un segmento PQ que divide a la diagonal EB y al lado AB del primer pentágono, es decir: $\frac{PQ}{EB}, \frac{PQ}{AB}$.

De la geometría de los pentágonos resulta:

$FBCD$ es un rombo, luego se verifica $FB = DC = AB$,

$EFHJ$ es un rombo, luego se verifica $EF = FH$.

De las relaciones anteriores se obtiene:

$$FH = EF = EB - FB = EB - AB,$$

$FG = EB - 2EF = EB - 2(EB - AB) = 2AB - EB$. Luego $\frac{PQ}{FH}, \frac{PQ}{FG}$.

De modo que si un segmento fijo PQ divide a la diagonal y al lado del primer pentágono, también divide a la diagonal y al lado del segundo petágono. Este proceso se puede reiterar indefinidamente, obteniendose pentágonos que pueden llegar a ser tan pequeños como se quiera, en los que el segmnento fijo PQ divide simultáneamente a la diagonal y al lado, lo cual es imposible. Entonces no puede haber una unidad de longitud que mida a la diagonal y al lado de un pentágono, es decir, estos dos segmentos son inconmensurables.[12]

Cabe señalar que los ejemplos anteriores corresponden magnitudes de longitud, específicamente segmentos; en nuestra búsqueda no se encontraron ejemplos de inconmensurabilidad entre magnitudes como áreas, volúmenes ni ángulos.

Definición 2, líneas rectas conmensurables en cuadrado e inconmensurables en cuadrado.

El primer comentario que encontramos en la revisión nos hace notar que cuando se menciona la conmensurabilidad en cuadrado, esta no hace referencia a elevar la medida de la longitud del

[12] Tomado de (González, 2008)

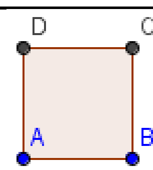
segmento al cuadrado, sino a construir un cuadrado que tenga como lado el segmento dado; el segmento al que se referencia corresponde al lado del cuadrado. A partir de esta definición se habla de líneas como segmentos.

Esta definición señala cuándo dos magnitudes en longitud son inconmensurables pero no como demostrarlo y además dice cuándo dos líneas son conmensurables en cuadrado, pero no como hallar el área común a las dos líneas.

Definición 3, Racionalmente expresable, Racionalmente expresables y no Racionalmente expresables.

Euclides llama racionalmente expresable a la recta determinada lo cual se interpreta como un segmento cuya longitud es una unidad de medida tomada como referencia y establece que a partir de esta recta inicial existen infinitos segmentos tanto conmensurables como inconmensurables con ella. Las líneas racionalmente expresables son las que son conmensurables en longitud y cuadrado o solo en cuadrado con esa unidad. Las líneas inconmensurables con la unidad son las que no son racionalmente expresables. Al interpretar esta definición, se puede decir que para que las magnitudes sean no racionalmente expresables existe el caso en el cual son conmensurables en longitud pero inconmensurables en cuadrado. La definición nos sugiere:

Tabla 2. *Relación entre racionalmente expresable, racionalmente expresables y no racionalmente expresables.*

	Casos	Longitud	Cuadrado
Unidad de referencia			
Racionalmente expresables	1.	Conmensurables con la unidad de referencia	Conmensurables con la unidad de referencia
	2.	Inconmensurables con la unidad	Conmensurables con la unidad de

	Casos	Longitud	Cuadrado
		de referencia	referencia
No racionalmente expresables	3.[13]	Conmensurables con la unidad de referencia	Inconmensurables con la unidad de referencia
	4.	Inconmensurables con la unidad de referencia	Inconmensurables con la unidad de referencia

A diferencia de cuando leemos literatura (con algunas excepciones), en matemáticas es necesario volver a leer para entender y así sucedió con esta definición puesto que su comprensión no fue sencilla. Luego de releerla y entenderla observamos que el tercer caso no es posible. Para la comprensión de esta definición, se quiere destacar la complejidad de la lectura en matemáticas más que en literatura.

Luego revisando los comentarios de María Luisa Puertas, ella menciona que según un porísma de la proposición 9 de este mismo libro, todas las rectas conmensurables en longitud, también lo son en cuadrado, lo que ratifica que el tercer caso de la tabla no es posible.

Definición 4, Cuadrado racionalmente expresable, Cuadrados (áreas) racionalmente expresables, Cuadrados (áreas) no racionalmente expresables.

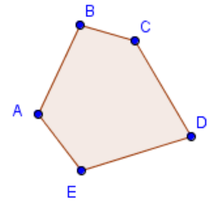
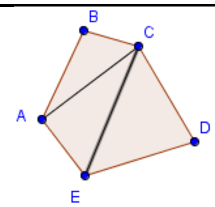
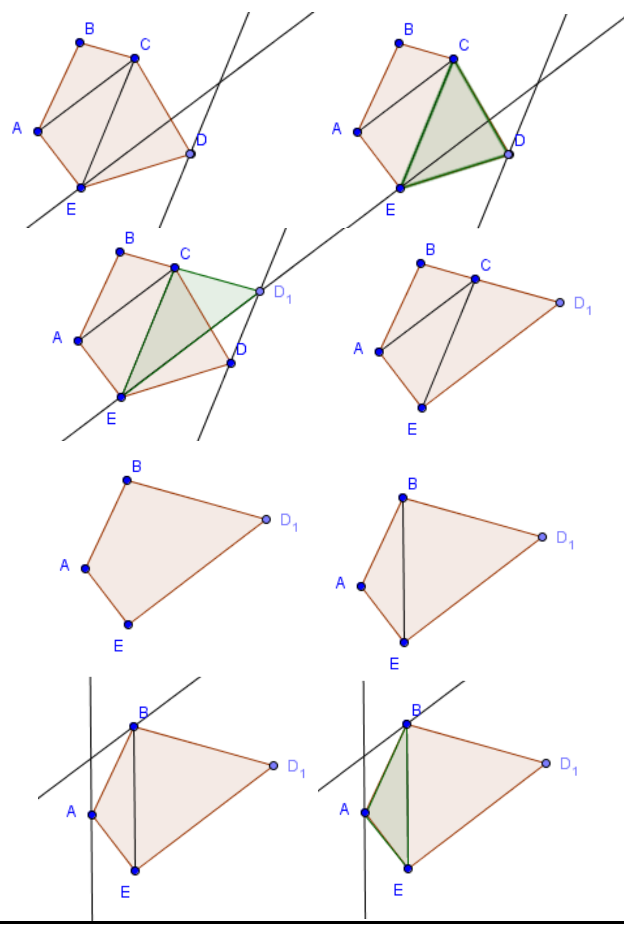
Al revisar esta definición no se logró una total claridad de ella pues las definiciones no siempre logran capturar el concepto y muchas veces para comprender una definición no nos remitimos como tal a ella sino a su uso, que fue lo que hicimos en este caso. Se hace un poco tedioso entender esta definición al leerla y saber qué define, por ello esperamos hasta su aparición en el lema posterior a la proposición 18.

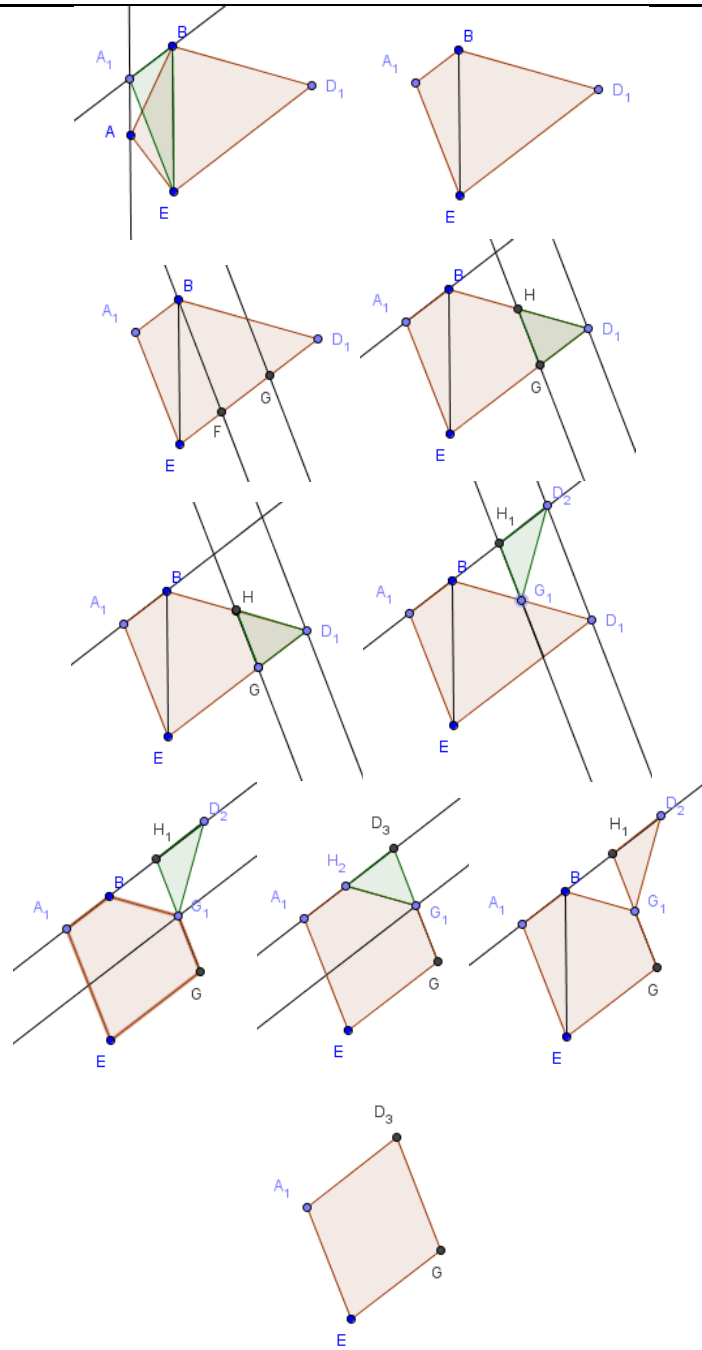
En las definiciones anteriores se hace referencia a las líneas y sus cuadrados, ahora se extiende a figuras rectilíneas que se pueden transformar en cuadrados y por tanto obtener la línea correspondiente al lado. Para lograr transformar una figura rectilínea en un cuadrado de igual área se utiliza el método de aplicación de áreas y la media geométrica. El método de aplicación de

[13] Mas adelante mostraremos que este caso no es posible.

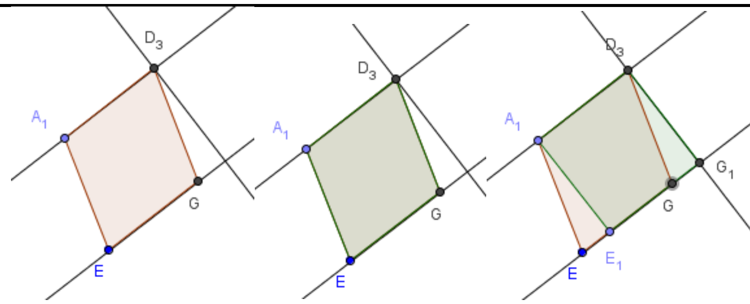
áreas consiste en descomponer figuras rectilíneas en triángulos y posteriormente en paralelogramos, como se muestra a continuación:

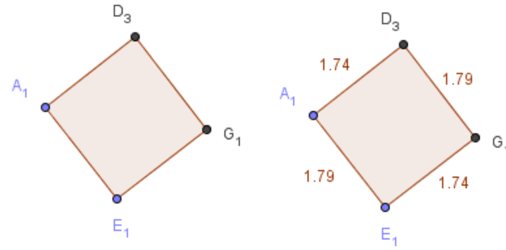
Tabla 3. *Procedimiento para transformar una figura rectilínea en un cuadrado de igual área*

Construir un paralelogramo de área igual a la figura $ABCDE$.	
Descomponer la figura en triángulos	
Convertir la figura en un paralelogramo	

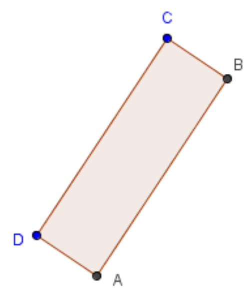

A1 B D1 A E
A1 B D1 E
A1 B D1 G F E
A1 B H D1 G E
A1 B H D1 G E
H1 D2 A1 B G1 D1 E
H1 D2 A1 B G1 G E
D3 H2 A1 G1 G E
H1 D2 A1 B G1 G E
D3 A1 G E

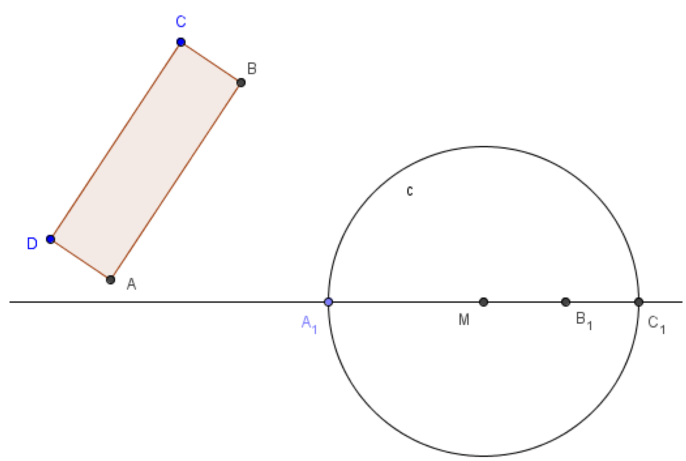
Hallar un cuadrado de igual área

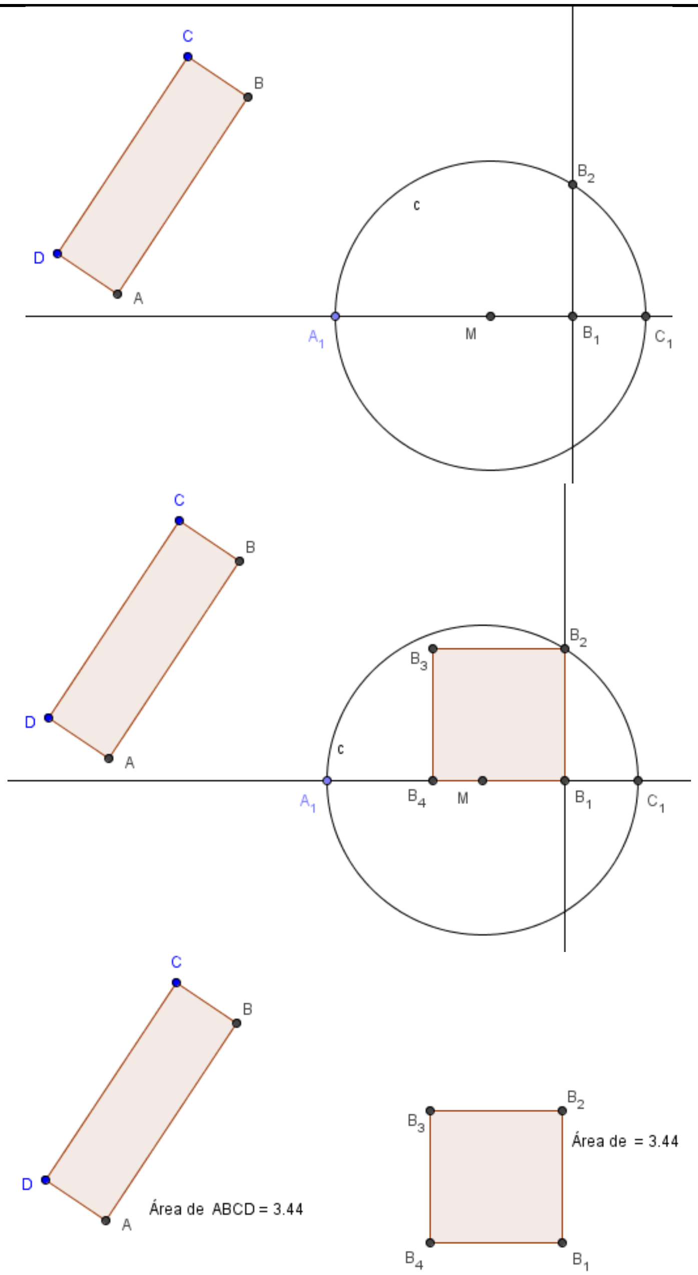




Media geométrica







De las definiciones que encontramos hasta ahora podemos decir que son nominales, pues dan nombres a las cosas.

Proposición 1, Encontrar una magnitud menor que una magnitud dada.

La demostración de esta proposición no requiere del uso de conceptos previos del Libro X y es utilizada solamente hasta el libro XII cuando se emplea el método de exhausión lo que nos sugiere que hubiese podido ir antes o después. Esta proposición nos hace pensar que para Euclides no existen las magnitudes infinitamente pequeñas, dado que siempre vamos a encontrar una magnitud menor a una dada.

En cuanto a la estructura de las demostraciones utilizada por Euclides, Proclo las describe mediante seis partes: enunciado, exposición, determinación o delimitación (diorismo), preparación, demostración y conclusión;[14] de estos pasos nos llama la atención el diorismo, porque en el diorismo se explica a través de un caso particular pero genérico el enunciado por lo cual parece que la forma usual de trabajar de Euclides es mediante la instanciación, es decir, argumentando con un caso particular que se extiende a todos los casos.

Proposición 2, Principio de Antifairesis.

Los pitagóricos no descubrieron irracionalidad sino inconmensurabilidad. Una cosa es decir que dos magnitudes son inconmensurables o no, y otra cosa es demostrarlo, a lo que puede ayudar el proceso de Antifairesis (también llamado de Antanairesis). Este proceso como lo menciona Fowler (citado en Parra & Vargas, 2012), consiste es la secuencia de resta que resulta de restar dos magnitudes del mismo tipo sucesivamente, la mayor de la menor.

El principio de Antifairesis se muestra en esta proposición como un criterio de verificación para conmensurabilidad/inconmensurabilidad; aunque este es un criterio difícilmente aplicable ya que no es operativamente funcional. Al ser utilizado como criterio de inconmensurabilidad entre dos magnitudes, cómo saber si el algoritmo es infinito o simplemente repite una cantidad considerable de veces. La misma demostración procede por reducción al absurdo, lo cual sugiere revisar la forma en que se usará en proposiciones posteriores. Al revisar la proposición siguiente, se muestra que al tener dos magnitudes conmensurables, mediante este algoritmo se encuentra la medida común máxima y procede de manera directa.

---

[14] Ver anexo 1. Resumen Introducción de *Elementos* por Luis Vega

Nos preguntamos acerca del origen de la Antifairesis y si esta es equivalente a la Antanairesis. En Parra & Vargas (2012) se muestra que estos términos son equivalentes y se define la *Antanairesis* o *Antifairesis* como el proceso de resta sucesiva entre dos magnitudes A y B, siendo A mayor que B, en el cual se resta la menor magnitud de la mayor hasta encontrar una magnitud común que las mida a ambas (cuando A y B son conmensurables) o proseguir de manera infinita (cuando A y B son inconmensurables).

Cuando se habla del concepto de Antifairesis cabe mencionar también los conceptos de razón y proporción, pues este primero guarda con los otros dos una estrecha relación. Fueron los pitagóricos los primeros personajes de los que existen referencias del trabajo con sumas y restas infinitas sucesivas, luego Eudoxo trabaja la razón y la proporción como propias no de números, sino de magnitudes en general. Finalmente Euclides, en [X 2] de *Elementos*, relaciona las restas sucesivas con las magnitudes, encontrando si dos magnitudes son o no inconmensurables por medio de un proceso de resta continua.

Se da el siguiente orden cronológico:

Tabla 4. *Orden cronológico sobre principio de antifairesis*

Pitagóricos	• **Sumas infinitas** • Diferencias infinitas • Resta Sucesiva **Antifairesis**
Eudoxo	• Estudió los conceptos de razón y proporción. • Magnitudes.
Euclides	Continúa el trabajo de Eudoxo acerca de razón y proporción y la relación que ello guarda con la Antanairesis.

En el libro VII, Euclides menciona que un número mide a otro, lo que nos sugiere que las medidas no se dan únicamente para las magnitudes.

Esta proposición solo es utilizada en la siguiente proposición de manera directa.

Proposición 3, Máximo Común Divisor.

A partir del enunciado de esta proposición se infiere que es una construcción, sin embargo, finaliza con la abreviatura $Q.E.D.$ lo cual no es consistente. En la introducción hecha por Luis Vega, se resalta que la conclusión de los problemas tiene la cláusula final "que era lo que había que hacer" y en el caso de los teoremas "que era lo que había que demostrar". En la traducción (Euclides, *Elementos*, 1991), se utiliza las abreviatura $Q.E.F.$ ($Quod\ erat\ fuciencium = \text{Qué es lo que había que hacer}$) para señalar la conclusión del problema y la abreviatura $Q.E.D.$ ($Quod\ erat\ demonstrandum = \text{qué es lo que había que demostrar}$). Hay aquí entonces un argumento para decir que no todas las proposiciones del Libro X son teoremas.

Esta construcción está relacionada con el algoritmo de Euclides para obtener el máximo común divisor entre dos números enteros (enunciado en el libro VII) y para ello utiliza el método antifarético. Normalmente en la escuela se enseña el procedimiento para hallar el M.C.D. de números naturales o enteros pero no se enseña para otras magnitudes (por ejemplo encontrar un segmento que sea medida común máxima para otros dos segmentos), aunque son equivalentes. El mcm (mínimo común múltiplo) y el MCD (máximo común divisor) son aplicables no solo a los números sino a las magnitudes geométricas, ya que hacen referencia a cantidad y no a número.

Un aspecto a resaltar es que al final de esta proposición aparece el primer *Porisma* de este libro, en una nota hecha en *Elementos* (Euclides, 1991) se habla de los porismas como lo que hoy llamamos colorarios (casos específicos):

Porisma:

> Las proposiciones de este género no tienen en *Elementos* el carácter que al parecer presentaban en un tratado perdido de Euclides titulado precisamente Porismata. Si allí eran una especie de proposiciones intermedias entre teoremas y problemas, aquí representan lo que hoy conocemos como colorarios.[15]

[15] Tomado de: (Euclides, 1991, p. 221)

Proposición 4, Máximo común divisor para más de dos magnitudes

La proposición 4 extiende esta proposición al caso de tres magnitudes conmensurables y presenta una proposición equivalente en el libro VII para obtener el máximo común divisor de tres números enteros. También contiene un porisma que sugiere extender los resultados de la proposición para hallar la medida común máxima a más de tres magnitudes y es en este caso el porisma el que finaliza con la abreviatura $Q.E.D.$

Proposición 5, Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Esta proposición es de la forma $p \rightarrow$ q, se demuestra por reducción al absurdo y es válida para cualquier tipo de magnitud.

Euclides no identifica magnitudes con números, sino relaciones entre magnitudes con relaciones entre números. Aquí aparece una relación entre dos magnitudes y dos números por medio de la razón que cumplen las dos magnitudes y la razón que cumplen los dos números, si las magnitudes son conmensurables, entonces estas dos razones son la misma.

Al tener dos magnitudes su medida común máxima parece ser una especie de unidad de referencia lo cual se podría ligar a los números que son unidad de referencia, es decir los que se utilizan para *contar tantas veces* o *de tanto en tanto*.

Una dificultad común que se presenta en la escuela es la confusión de *guardar la misma razón* con *ser igual;* esto debido al uso del *símbolo igual* $=$ en ambos casos.

En esta proposición aparece algo nuevo: la notación para hablar de números se hace con letras griegas igual que con las magnitudes y además su trazo es similar, nombrando los trazos con la letra en el extremo izquierdo. Esta forma de referirse a los números y a las magnitudes no se diferencia a simple vista. Algunos historiadores afirman que los trazos son heredados de la obra original, otros dicen lo contrario y otros afirman que son anexos.

Se empieza a observar algo con respecto a los trazos que aparecen en el libro; a simple vista no se diferencia cuáles son números y cuales son segmentos por la forma en la que se ubican los nombres de los trazos; cuando pone solo una letra sobre el trazo no hay lugar a confusión y cuando lo nombra con dos letras es porque va a operar sobre dicho trazo (magnitud). Por ejemplo en la Figura 4 se ve como A y B representan magnitudes conmensurables, Γ es una magnitud que mide a las dos primeras, Δ y E son números, luego A y B se dividen en las unidades que cabe Γ en ellas y allí no hay lugar a confusión. Ahora en la Figura 5 vemos como el segmento ΔE que es un múltiplo de la magnitud Γ mayor que B, está dividido por los puntos Z y H ya que va a dividirlo en los segmentos ΔZ, ZH y HE que a su vez son iguales a la magnitud Γ, si no se nombraran los extremos de los segmentos podría presentarse confusión.

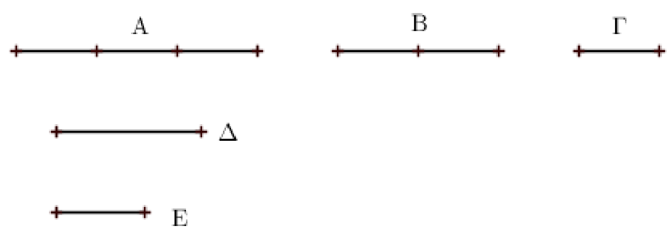


Figura 4. Gráfico de la proposición [X-5]. Tomado de (Euclides, Libro X, 1996)

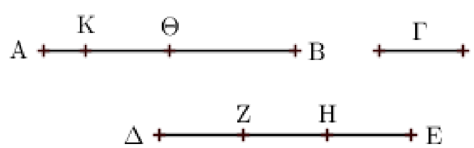


Figura 5. Gráfico proposición [X 1]. Tomado de (Euclides, Libro X, 1996)

En la mayoría de las proposiciones el gráfico ayuda a la comprensión de la demostración, pero en una o dos proposiciones la notación es imprecisa[16] y ello da lugar a confusión, como lo veremos mas adelante en las proposiciones 12 y 14. Según lo observado durante todo el estudio no podríamos decir que los dibujos hacen parte de la obra original, pero sí que sirven para aclarar o comprender las demostraciones.

[16] Por ejemplo como se verá en la *figura 8*, en la proposición [X 14] el gráfico no se corresponde con la notación usada en la demostración.

Proposición 6, Porisma

De este Porisma se puede decir que tiene una connotación diferente a los hasta ahora encontrados, pues pasa de ser un argumento a un procedimiento, así pues sirve como procedimiento geométrico para realizar (posteriormente) la demostración de [X 10]. El procedimiento arroja como resultado la construcción de una cuarta proporcional (siendo en este caso un cuadrado) que surge de la relación entre dos números y una recta, en donde se quería construir un cuadrado cuya razón con otro cuadrado guardara la misma razón que los dos números.

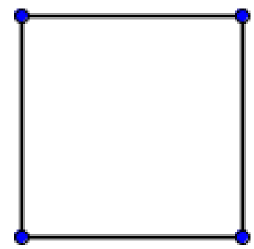
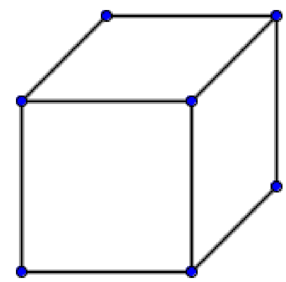
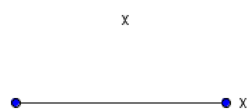
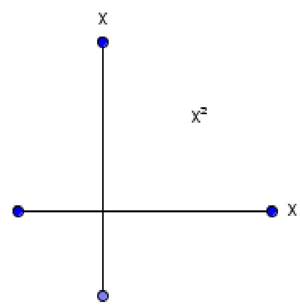
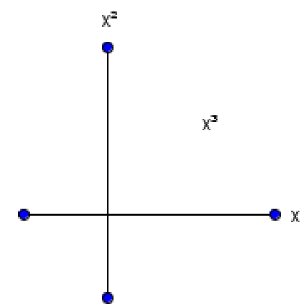
No profundizamos en las proposiciones 6 a 8 porque son similares a la proposición 5.

Proposición 9, Cuadrados de rectas inconmensurables en longitud – guardar razón- número cuadrado.

A diferencia de las proposiciones 5 a 8 en donde se exponen por separados los casos posibles de una relación, esta proposición son cuatro proposiciones en una. Se restringe a los segmentos ya que no es posible para las demás magnitudes (en ese sistema), relacionando mediante una razón los cuadrados de las rectas con los números cuadrados.

Euclides solo puede relacionar mediante una razón a los números con los segmentos y a los números elevados al cuadrado con los cuadrados cuyos lados son los segmentos. Otro tipo de relaciones que no utiliza Euclides, pero sin embargo se podría pensar es en la relación de los números elevados al cubo con los cubos cuyas aristas son los segmentos. En este sentido, para los griegos una variable correspondería a la longitud de algún segmento, el producto de dos variables al área de algún rectángulo y el producto de tres variables al volumen de algún paralelepípedo rectangular; ellos no tenían cómo darle sentido al producto de cuatro variables. Descartes interpretó el producto de dos líneas como una línea, no como un área lo que le permitió interpretar cualquier potencia como una longitud. (De la Torre, 2006), así se puede hallar el cubo de un segmento, el cubo de un cuadrado, etc. Para Euclides solo se podía tener un cuadrado a partir de su construcción con segmentos.

Tabla 5. *Comparación entre las concepciones de cuadrado y cubo para Euclides y Descartes.*

Interpretación	x	x^2	x^3
Euclides			
Descartes			

Vemos aquí conmensurabilidad e inconmensurabilidad en una teoría que no involucra a los números irracionales y en esta proposición se utiliza la conversa (la proposición en sentido contrario-Recíproco).

Aparecen a continuación de la anterior proposición un porisma y un lema. ¿Qué es un lema? Se observa que estos son demostrados dentro de la proposición y se utilizan generalmente inmediatamente después.

Lema:[17]

> "Los lemas son teoremas que se suponen ciertos al demostrar una proposición, pero que una vez probada ésta se deben demostrar a su vez. Es decir, son afirmaciones que si se justificaran por completo cuando se emplean en una demostración harían perder al lector el hilo del razonamiento general por eso

[17] Tomado de:
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=504

se declaran como algo sabido en la proposición en la que se utiliza, pero luego se enuncian como lemas y se demuestran."

Acerca del lema de esta proposición podemos decir que rompe la relación entre las proposiciones y se dedica a hablar de lo aritmético usando la equivalencia. *Elementos* maneja dos dominios, el Aritmético (libros V-IX) y el Geométrico (libros I-IV y XI-XIII), el Libro X se mueve entre esos dos dominios y utiliza elementos geométricos para caracterizar los números, por ejemplo los pitagóricos tenían una idea similar al representar números mediante configuraciones puntuales, como por ejemplo con los números triangulares

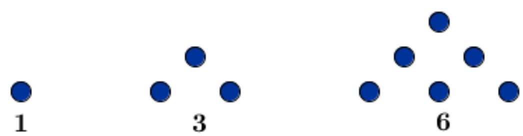


Figura 6. Números triangulares

Luego del estudio de la teoría nos dimos cuenta de que la relación aritmético-geométrica es muy estrecha aunque no podemos meter aritmética de los racionales e irracionales en el Libro X, pues en ese momento histórico esto no era posible.

Aparece entonces en este lema la expresión "Números planos" (Libro VII): lo extiende a los números (Números planos semejantes). En las notas de (Euclides, *Elementos*, 1991) se manifiesta que este lema es *"sospechoso"* al ser utilizado en la proposición siguiente la cual también se pone en duda que sea de autoría de Euclides, así pues este lema es atetizado (rechazado) por Heat, sin embargo Heiberg no lo desecha debido su utilización en la siguiente proposición (Citado por Vega, 1991).

Este lema habla específicamente de una relación entre *números planos semejantes*[18] relacionados mediante una razón con números cuadrados. En el Libro VII se hace referencia a números planos y números sólidos:

[18] $[VII\ Def. 22]$: Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales.

- Números planos: con ellos se puede expresar una superficie (producto entre dos números).
- Números solidos: con ellos se puede expresar un volumen (producto entre tres números).

Otro concepto a tener en cuenta es:

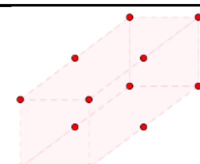
- Números planos/sólidos semejantes: tienen lados proporcionales.

Tabla 6. *Números planos semejantes y números sólidos*

		Descomposición
Números planos semejantes	Superficie	$x \times y$
Números sólidos	Paralelepípedo	$x \times y \times z$

Por ejemplo 12 es plano pero también es un número sólido. Es plano porque se puede formar una superficie de 2×6; también es número sólido pues se puede formar un volumen de $2 \times 2 \times 3$.

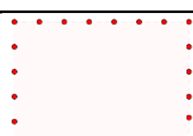
Tabla 7. *Ejemplo de números planos y números sólidos*

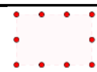
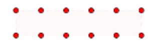
12 número plano	12 número sólido
	
$\mathbf{2 \times 6}$	$2 \times 2 \times 3$

De acuerdo a este lema se entiende por números planos semejantes aquellos cuya razón es comparable con la razón entre dos números cuadrados.

Poe ejemplo: 12 y 48 son planos y semejantes, ya que su distribución es de dos figuras semejantes. La razón entre 12 y 48 es 1:4 y 1 y 4 son números cuadrados.

Tabla 8. *Ejemplo de números planos semejantes*

48	 6×8	 4×12

12	 3×4	 2×6

Proposición 10, Hallar dos rectas inconmensurables, una solo en longitud, otra también en cuadrado, con una recta determinada.

Cuando nos dicen “hallar” asumimos que esta es una construcción y realizando el análisis de la demostración encontramos que efectivamente es una construcción; aunque en su conclusión no está incluido el Q.E.H. que le daría el estatus de construcción, tampoco aparece Q.E.D. He aquí el por qué anteriormente se dijo que se expondrían argumentos que a nuestro parecer contradicen lo mencionado por Luis Vega en la Introducción General del *Elementos* (Vega, L. 1991), pues el afirma que de las 115 proposiciones de las cuales consta el Libro X son todas teoremas.

En la proposición 6 surgió un porisma que usamos para la demostración de la proposición 10, pero se evidenció que no habíamos prestado la suficiente atención a este porisma, lo cual generó que tuviésemos que devolvernos a estudiarlo para entender la demostración. Vemos que el porisma de la proposición 6 es un proceso de una construcción. Empezamos a hacer dicha construcción apoyándonos en el software Geogebra. Aquí nos preguntamos si dada una relación entre dos números y una recta podíamos construir un cuadrado cuya razón con otro cuadrado guarde la misma razón que los dos números; vemos que en este procedimiento se construye una cuarta proporcional, que en este caso es un cuadrado (como Β es a Γ, el cuadrado de Α es al cuadrado de Δ).

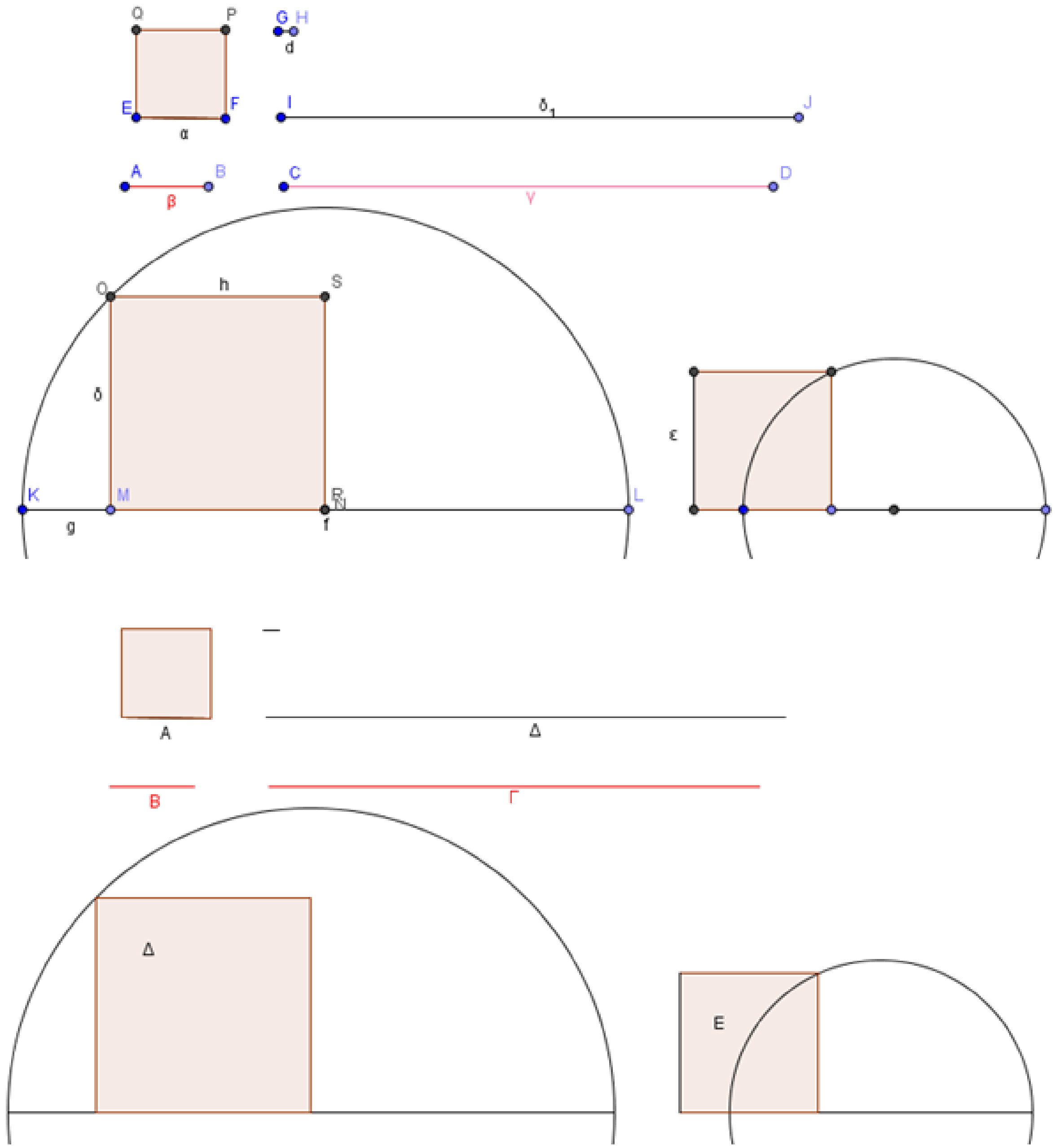


Figura 7. Construcción de la cuarta proporcional.

El porisma de la proposición 6 cobra en la proposición 10 una connotación diferente, pues sirve como procedimiento geométrico para realizar parte de la demostración. Así pues el Porisma 6 es o bien un argumento o un procedimiento.

Proposición 11, Cuatro magnitudes proporcionales – la primera conmensurable / inconmensurable con la segunda – la tercera conmensurable / inconmensurable con la cuarta.

Está proposición es importantísima para la forma hipotético deductiva del Libro X pues es muy utilizada; se podría decir que es la más utilizada de las proposiciones de la primera parte de las tres partes del Libro. Establece una relación entre la proporcionalidad y la conmensurabilidad e inconmensurabilidad.

La comprensión de la demostración de esta proposición, y de la proposición misma no ocasionan alguna dificultad. Sin embargo llama la atención que parece ser un teorema sin embargo, luego de su demostración no tiene la terminación $Q.E.D.$

Proposición 12, Las magnitudes conmensurables con una misma magnitud son también conmensurables entre sí.

Al parecer esta proposición es una estrategia para encontrar el m.c.m. (mínimo común múltiplo) entre magnitudes conmensurables.

Se dan tres magnitudes, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ que cumplen que A es conmensurable con Γ y que Γ es conmensurable con B. Utilizamos la proposición 5 para decir que existen números (Δ, E, Z, H) que guardan la misma razón que las magnitudes, Δ es a E como A es a Γ y Z es a H como Γ es a B. Tomamos los números $\Theta, \mathrm{K}, \Lambda$, por $[VIII\ 4]$ y los asignamos a las razones de forma que como Δ es a E así Θ sea a K y como Z es a H así K a Λ (al parecer esta proposición es mas una estrategia para encontrar el mínimo común múltiplo, que en este caso es K). De todo lo anterior tendríamos que $\Delta{:}\,\mathrm{E}$ como $\mathrm{A}{:}\,\Gamma$, $\Delta{:}\,\mathrm{E}$ así $\Theta{:}\,\mathrm{K}$ y $\mathrm{Z}{:}\,\mathrm{H}$ como $\Gamma{:}\,\mathrm{B}$, $\mathrm{Z}{:}\,\mathrm{H}$ así $\mathrm{K}{:}\,\Lambda$. Entonces por $[V\ 11]$ tenemos que como $\mathrm{A}{:}\,\Gamma$ así $\Theta{:}\,\mathrm{K}$ y como $\Gamma{:}\,\mathrm{B}$ así $\mathrm{K}{:}\,\Lambda$ y por igualdad (quitando Γ y K) concluimos que $\mathrm{A}{:}\,\mathrm{B}$ como $\Theta{:}\,\Lambda$; luego A guarda con B la razón que el número Θ guarda con el número Λ, entonces A y B son conmensurables por la proposición 6.

Proposición 13, Si hay dos magnitudes conmensurables y una de ellas es inconmensurable con una otra magnitud cualquiera, también la restante será inconmensurable con ella.

Esta proposición como muchas se demuestra por reducción al absurdo.

$$\neg(p \to q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$$

En esta proposición encontramos un lema; al observar que para demostrarlo Euclides no utiliza proposiciones del Libro X, concluimos que lo pone ahí porque lo va a utilizar en las proposiciones próximas, lo que refuerza la idea de que los lemas surgen para ser utilizados en la proposición inmediatamente siguiente, pues de no ser así lo pudo poner inmediatamente después de $[IV, 1]$, ya que esta es la única proposición que utiliza para su demostración. El lema muestra el Teorema de Pitágoras como un algoritmo para sumar y restar cuadrados.

Proposición 14, Cuatro rectas proporcionales – cuadrado mayor en una recta conmensurable/ inconmensurable.

Del seguir la demostración de esta proposición surgen dos proposiciones importantes por revisar:

- Separación V, 17: Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también serán proporcionales por separación.
- Igualdad V, 22: Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.

Dentro de la demostración se presenta algo de confusión, pues el orden en el cual están escritas las letras genera algo de duda de si el procedimiento es correcto.

Γ al de Δ [VI 22]. Pero los cuadrados de E, B son iguales al cuadrado de A, y los cuadrados de Δ, Z son iguales al cuadrado de Γ. Entonces, como los cuadrados de E, B son al cuadrado de

Figura 8. Proposición [X-14].

Tabla 9. *Interpretación de la proposición 14*

$A : B :: \Gamma : \Delta$ $A^2 : B^2 :: \Gamma^2 : \Delta^2$	
Lo que da a entender el libro:	La forma correcta de interpretación (moderna):
$\mathrm{E}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{A}^2$ $\Delta^2 + \mathrm{Z}^2 = \Gamma^2$	$\mathrm{E}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{A}^2$ $\mathrm{Z}^2 + \Delta^2 = \Gamma^2$ Para que no haya lugar a confusión.

Podemos ver la interpretación de esta demostración como un sistema de ecuaciones, si cambiamos las letras griegas por letras usuales, aunque no debemos ni aritmetizar ni algebraizar el Libro. En este punto surge una hipótesis sobre el Libro X, y es que trataba a las magnitudes conmensurables como objetos que se podían operar constituyéndose lo que podríamos comparar con una especie de *"álgebra de magnitudes"*; sin embargo, más adelante se descarta esta hipótesis.

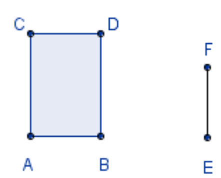
Proposición 16, Suma de magnitudes inconmensurables, magnitud total inconmensurable con cada una de ellas.

Esta proposición es demostrada por reducción al absurdo, un asunto que llama la atención en los gráficos es que se usan en vertical.

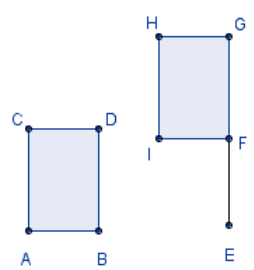
De esta proposición surge un lema, este lema nos cuestiona acerca de qué es *aplicar un área a una recta*; revisando la nota al pie de página nos remite al procedimiento de la proposición $[I, 44]$, según este procedimiento, por ejemplo, si se tiene el paralelogramo $ABCD$ y el segmento EF, se construye el paralelogramo $FGHI$ de tal manera que uno de sus lados este sobre la misma recta que el segmento EF, se traza una perpendicular $\overline{EF}$ por el punto E y se halla el punto de intersección de la perpendicular con $\overleftrightarrow{HI}$, el punto J, se traza la recta JF y se halla el punto de intersección con la recta HG, el punto K, se traza una perpendicular a HG por el punto K que interseque a la recta IF en el punto L y a la recta JE en el punto M, de este modo resulta que los paralelogramos $FGHI$ y $EFLM$ son iguales, por tanto también lo son los paralelogramos $ABCD$ y $EFLM$.

Tabla 10. *Procedimiento para aplicar un área de un rectángulo a un segmento*

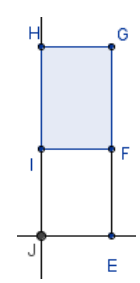
1

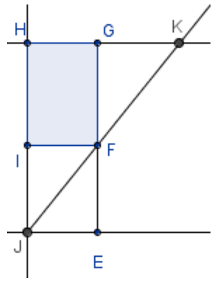
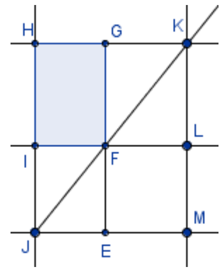
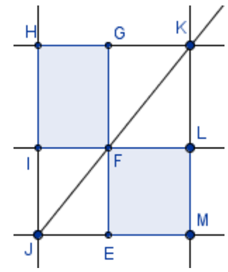
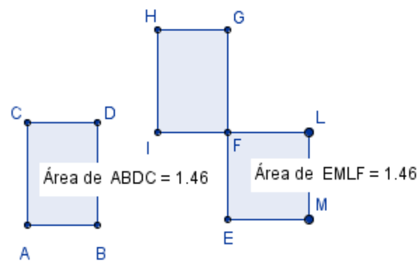


2



3



4 	5 	6 
7 		

"Aplicar áreas" alude a un concepto que vamos a utilizar bastante de aquí en adelante.

Proposición 17, Rectas desiguales – rectángulo aplicado – cuadrado mayor en una recta conmensurable que el menor.

Al revisar esta proposición vemos que estamos dando una mirada a un capítulo de un libro que aparentemente trabaja la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad pero que no se limita a eso. Para realizar lo anterior se emplean las ideas de razón y proporción y cabe mencionar que el libro liga (no mezcla) la idea de lo aritmético con lo geométrico.

Surgen varios asuntos importantes por resaltar, que se han notado hasta ahora del Libro X de *Elementos*. Aparentemente es un libro que trabaja la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad utilizando las ideas de razón y proporción tratadas en libros anteriores; el libro liga (no mezcla) la idea de lo aritmético con lo geométrico mediante la idea de *"guardar la misma razón que…"* relacionando números y magnitudes y realizando una mirada hacia lo que viene del libro, se llega a la conclusión que lo que ha hecho Euclides hasta ahora (hasta$[X\ 18]$) es con el fin de llegar a demostrar proposiciones de cosas “Expresables”[19].

Proposición 18, Lema.

Esta proposición viene acompañada de un lema que reitera lo que habíamos pensado al revisar las definiciones en cuanto a la conmensurabilidad en longitud y en cuadrado.

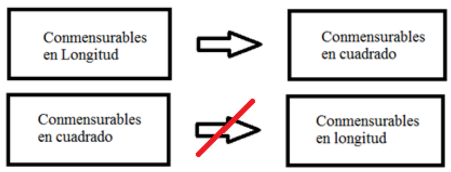


Figura 9. Lema Proposición 18, Libro X

Se puede decir que hasta este momento se logra claridad de las definiciones 3 y 4, pues había quedado cierta confusión ya que sus enunciados no eran muy claros. Inicialmente se había propuesto esperar hasta su uso para ver si lo que habíamos entendido de lo que es ser “Racionalmente Expresable” era correcto. Luego de un primer análisis individual se entendió que una recta no racionalmente expresable era una recta para la cual no existían rectas conmensurables con ella y se pensó en los números irracionales, así pues, una recta o en este caso segmento *no racionalmente expresable* podría ser el segmento de magnitud π, que es un número irracional; luego revisando en asesoría, el asesor nos hace ver que si la idea que teníamos de no ser racionalmente expresable era correcta entonces el segmento de magnitud 2π no era conmensurable con el de magnitud π. Así entendimos que la idea que teníamos era equivocada y que el ser racionalmente expresable estaba asociado al siguiente concepto:

- **Recta expresable determinada:** que será la magnitud unidad.

Fue necesario realizar un gráfico para comprender mejor

[19] “Expresable” y “No Expresable” será ahora lo que se determinó en las definiciones $[X\ Def.3]$ y $[X\ Def.4]$ como rectas y figuras racionalmente expresables y no racionalmente expresables, respectivamente.

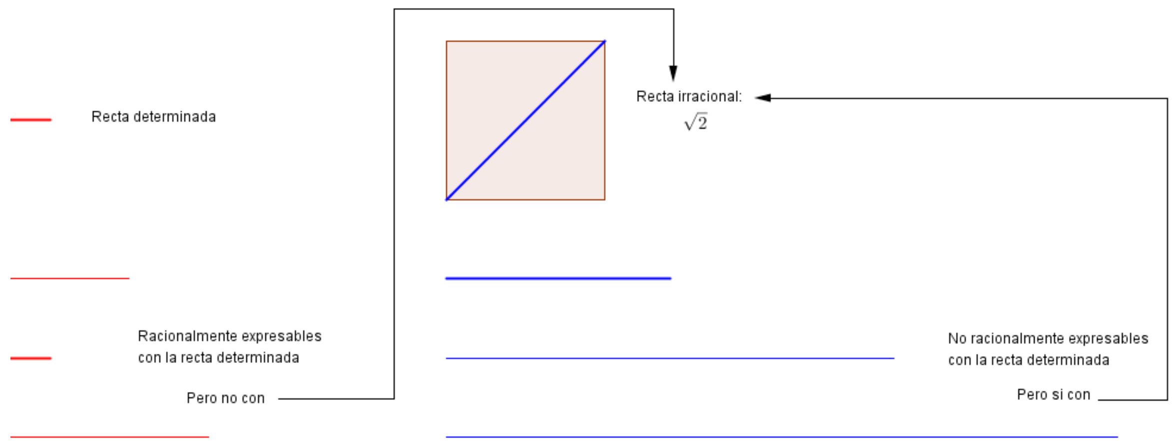


Figura 10. Relación rectas expresables.

Podríamos decir que el ser racionalmente expresable podría interpretarse como una relación de equivalencia que parte un conjunto en dos clases, el de los que cumplen la propiedad y el de los que no; ya que dentro el conjunto de todos los segmentos cualquiera es una recta expresable, pero si vamos a tomar los que son expresables con una específica, se producirían dos clases, el de las rectas que son racionalmente expresables con la dada y el de las que no.

Una recta define dos conjuntos en relación con la conmensurabilidad, esta define un criterio para realizar una partición.

$\overline{AB}$	Múltiplo	Racionalmente expresable con $\overline{AB}$
	Múltiplo de un divisor	Racionalmente expresable con $\overline{AB}$
	Ninguna de las anteriores	No racionalmente expresable con $\overline{AB}$

Este lema se omite por Heath (Citado por Vega, 1991) por considerarlo innecesario.

Teniendo presente que las rectas conmensurables en longitud lo son siempre en cuadrado mientras que las que lo son en cuadrado no lo son siempre en longitud, se nombran las diferentes combinaciones de rectas expresables con rectas conmensurables e inconmensurables.

Proposición 19, Rectángulo comprendido por rectas expresables conmensurables en longitud, expresable.

Esta es la primera vez que encontramos en el Libro algo acerca de áreas expresables.

En el lema anterior se separan las rectas conmensurables en longitud de las rectas conmensurables en cuadrado, esta últimas se dice que pueden ser conmensurables o inconmensurables en longitud, y según ello ser expresables y conmensurables en longitud y cuadrado o solo encuadrado, respectivamente, con la recta determinada.

La demostración de esta proposición procede como sigue:

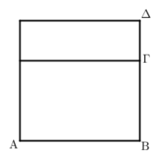


Figura 11. Gráfico proposición [X-19]

Se dan dos rectas expresables y conmensurables en longitud, siendo una de ellas (la mas grande) la recta expresable, se construye un paralelogramo con las dos rectas y se completa el cuadrado, que será expresable por ser el cuadrado de la recta determinada. Luego decimos que el lado del cuadrado que comprende el lado más corto del paralelogramo es conmensurable en longitud con el lado corto del paralelogramo, por ser este conmensurable con la recta dada y el primero igual a la recta dada; luego utiliza el hecho de que las áreas de los paralelogramos son entre si como sus bases para decir que el cuadrado y el paralelogramo son conmensurables y concluir que el paralelogramo es expresable, por ser conmensurable con el cuadrado, que es cuadrado de la recta determinada.

Esta proposición se considera (y según el proceder de la demostración es) un teorema sin embargo en su demostración no aparece la terminación $Q.E.D.$

A partir de aquí se retoman las definiciones 3 y 4 sobre rectas y cuadrados racionalmente expresables; por racionalmente expresable se entienden las magnitudes conmensurables con alguna unidad de referencia determinada.

Aparece otro elemento aparentemente nuevo que es el de *rectángulo expresable* comprendido por rectas expresables conmensurables en longitud, esto se puede entender como áreas expresables, pues es posible hallar un cuadrado con área igual a la de cualquier figura rectilínea.

Proposición 20, Área expresable, recta expresable, anchura expresable.

Se aplica un área expresable (paralelogramo inferior) a una recta AB expresable. El cuadrado sobre AB es expresable por ser el cuadrado de la recta determinada, luego el cuadrado es conmensurable con el área del paralelogramo porque esta área es expresable. Así aparece $\mathrm{A\Delta}:\mathrm{A\Gamma} :: \mathrm{\Delta B}:\mathrm{B\Gamma}$. Luego $\mathrm{\Delta B}$ es conmensurable con $\mathrm{B\Gamma}$ porque $\mathrm{A\Delta}$ y $\mathrm{A\Gamma}$ son conmensurables y AB es conmensurable con $\mathrm{B\Gamma}$ porque $\mathrm{\Delta B} = \mathrm{BA}$. Entonces $\mathrm{B\Gamma}$ es expresable y conmensurable en longitud con AB (por ser AB expresable).

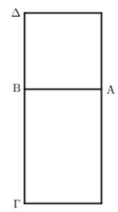


Figura 12. Gráfico de la proposición [X-20].

Esta proposición se considera un teorema sin embargo en su demostración no aparece la terminación $Q.E.D.$

En el lema 3, posterior a la proposición 16, se muestra el método de aplicación de áreas utilizado en esta proposición. Se entiende como "anchura" a una de las rectas que compone el área.

Proposición 21, Recta medial.

Esta construcción permite encontrar la media proporcional (medial), que es igual al lado (este es no racionalmente expresable) del cuadrado que surge de cuadrar un rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado (este rectángulo es un área no racionalmente expresable).

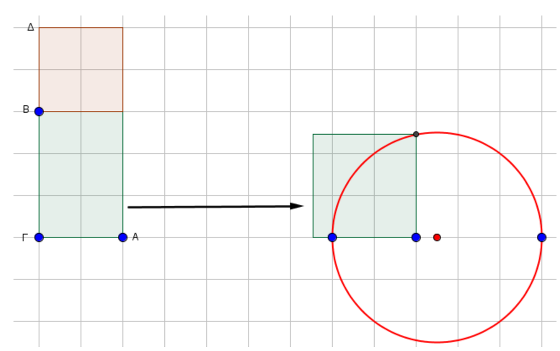


Figura 13. Gráfico proposición 21.

Lo que se quiere demostrar acá es que dado que AB y $\mathrm{B\Gamma}$ son expresable solo en cuadrado, el rectángulo comprendido por ellas no es racionalmente expresable (es decir, es inconmensurable con el cuadrado de la recta determinada AB), y si cuadramos el área del rectángulo, el lado del cuadrado que se forma tampoco es racionalmente expresable y se va a llamar *medial*[20].

La demostración consiste en construir el cuadrado sobre la recta expresable, y como las rectas dadas son inconmensurables en longitud y $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Delta}$, entonces $\Delta\mathrm{B}$ es inconmensurable en longitud con $\mathrm{B\Gamma}$. Luego $\Delta\mathrm{B}: \mathrm{B\Gamma} :: \mathrm{A\Delta}: \mathrm{A\Gamma}$ entonces las áreas son inconmensurables. Pero como el área del cuadrado es expresable, la del rectángulo no, entonces si cuadramos el rectángulo, el área sigue siendo no expresable y aparece la *medial*, que es la recta igual al lado de este nuevo cuadrado y que tampoco es expresable.

Aparece el concepto de *recta medial* que según la proposición no es racionalmente expresable y es el lado de un cuadrado de área no expresable; un área no expresable se obtiene en un rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado, en otras palabras la recta medial es la media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado y además es una recta no racionalmente expresable.

A partir de esta proposición se hace una serie de combinaciones entre rectas mediales, expresables y conmensurables en longitud o cuadrado para determinar cómo son las áreas que componen.

Esta proposición es considerada como teorema y concluye con la terminación $Q.E.D.$

Al final de la proposición aparece un lema, este y su demostración no representan alguna dificultad en su comprensión; sin embargo se incluye una nota de la traductora que resume el lema de la siguiente forma:

---

[20] Esta es la primera de las trece rectas ***No Expresable*** trabajadas en el libro X. En el comentario 22, Puertas se refiere a la medial como: "media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado" (Euclides, Libro X, 1996).

$$\text{Si } a, b \text{ son dos rectas } a : b :: a^2 : ab$$

Proposición 22, Cuadrado de una medial, anchura expresable e inconmensurable

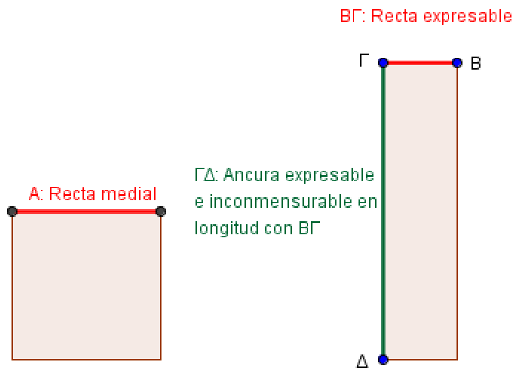


Figura 14. Gráfico proposición 22.

Si se aplica el área del cuadrado de una recta medial sobre una recta expresable, produce un lado expresable e inconmensurable en longitud con el otro lado.

La proposición y su demostración no presentan alguna dificultad en su comprensión.

Proposición 23, Recta conmensurable con una medial es medial.

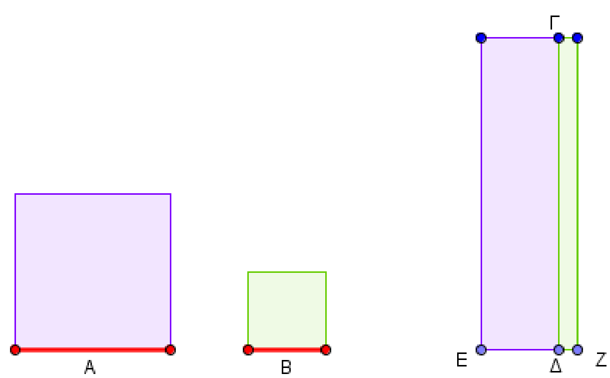


Figura 15. Gráfico proposición 23.

A es una recta medial y conmensurable con B (dado). Construimos una recta expresable ΓΔ y aplicamos sobre ella un área rectangular ΓE igual al cuadrado de A que produzca la anchura EΔ, entonces EΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ. Luego aplicamos a ΓΔ un área rectangular ΓZ igual al cuadrado de B y produce la anchura ΔZ. Como A es conmensurable con

B, entonces sus cuadrados son conmensurables. Luego $E\Gamma$ y ΓZ son conmensurables por ser iguales a los cuadrados de A y B respectivamente. Ahora $E\Gamma : \Gamma Z :: E\Delta : \Delta Z$, entonces $E\Delta$ es conmensurable en longitud con ΔZ. Pero como $E\Delta$ (que en este momento será como la recta determinada) es expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$, entonces $\Gamma\Delta$ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔZ[21], luego $\Gamma\Delta$ y ΔZ son expresables y conmensurables solo en cuadrado. Pero como la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado es medial, entonces la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por $\Gamma\Delta$ y ΔZ es medial e igual al cuadrado de B, entonces B es medial.

Porisma

> A partir de esto queda claro que un (área) conmensurable con un área media es medial.

Este Porisma extiende la proposición anterior a las *áreas mediales*, las cuales no se hacen explícitas en las proposiciones anteriores, sin embargo se entiende de acuerdo a la proposición 21 que es el área del cuadrado de una recta medial, o lo que es lo mismo, el área del rectángulo comprendido por rectas conmensurables solo en cuadrado. En el comentario hecho a este Porisma también se explica lo anterior.

Proposición 24, Rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud medial.

En el enunciado de esta proposición también se hace referencia al lema posterior a la proposición 18 por lo que igual que antes, Heath omite la referencia: *"según alguna de las formas antedichas"* (Citado por Puertas en Euclides, Elementos, 1991).

[21] Aquí se presentó dificultad con la demostración pues en ella se escribió un término mal, lo que causó confusión. La conclusión a la que llega el libro en esta parte es que $\Gamma\Delta$ es expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$, lo cual es imposible.

> con $\Delta\Gamma$; entonces $\Delta\Gamma$ es expresable [X Def. 3] e inconmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$ [X 13]; luego $\Gamma\Delta$, ΔZ son expresables y

Esta proposición es considerada como teorema y concluye con la terminación $Q.E.D.$

Proposición 25, Rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado o es expresable o es medial.

En la demostración de este teorema se supone una recta expresable, y si ésta resulta ser conmensurable en longitud con la que con ella conforma un área igual al rectángulo inicial este rectángulo es expresable; pero si es inconmensurable en longitud con la que con ella conforman un área igual al rectángulo inicial, entonces éste rectángulo es medial.

Proposición 26, Un área medial no excede a otra medial en un área expresable.

La demostración de este teorema sugiere que al tener un área medial y se le quita otra área menor también medial, el área resultante no es expresable.

La demostración es hecha por contradicción suponiendo que un área medial mayor excede a otra área medial menor en un área expresable. Luego utilizando un método similar al de la proposición anterior se supone una recta expresable y de ello resulta que la recta que con la recta expresable conforma un área igual al área mayor inicial es expresable y al mismo tiempo no expresable, haciendo la suposición inicial falsa, por tanto un área medial mayor excede a otra área medial menor en un área no expresable.

La comprensión del teorema y su demostración no presentan mayor dificultad, sin embargo llama la atención la forma en como de alguna manera se determina una operación entre áreas mediales, en este caso de una sustracción.

También tiene la terminación $Q.E.D.$ que confirma la forma de teorema.

Proposición 27, Rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Para hallar las rectas pedidas, se parte de dos rectas con esas características, es decir dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado, se halla la media proporcional que resulta ser también medial y otra recta que con ella tengan la misma razón que las dos rectas iniciales, como todas las rectas son proporcionales (haciendo referencia a la proposición V 16) resulta que el cuadrado de una de las iniciales es igual al rectángulo comprendido por las dos rectas halladas y además es expresable, también el rectángulo conformado por las rectas halladas es expresable.

A pesar de ser una construcción, tiene la terminación $Q.E.D.$, lo cual confunde nuevamente el criterio para dar esta terminación.

Proposición 28 – Lema Ternas Pitagóricas.

Para hallar las rectas pedidas, se parte de tres rectas con esas características, es decir tres rectas mediales conmensurables solo en cuadrado, se halla la media proporcional de dos de ellas que resulta ser también medial; ahora se halla una recta que tenga la misma razón con la media proporcional hallada que la razón de la tercera recta con una de las que se halló la media proporcional, nuevamente haciendo referencia a la proposición V 16 y el hecho de que las dos rectas iniciales son mediales, entonces las rectas halladas también lo son.

Este procedimiento tiene la misma terminación que el anterior, y además ninguno de los dos es usado posteriormente es esta primera parte del Libro X.

El enunciado del primer lema nos sugiere que estamos encontrando Ternas Pitagóricas[22]. Aunque finaliza con Q.E.D., el término “hallar” nos sugiere que es una construcción y no un teorema. Luego la construcción procede de la siguiente forma:

Se escogen dos números A y B, ambos pares o impares, que además sean números planos semejantes[23], se resta el menor del mayor y el resultado se divide en dos $\frac{A-B}{2}$, entonces $(A \cdot B) +$

[22] Terna Pitagórica: conjuntos de tres números x, y, z que satisfacen la ecuación dada por el teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$.

[23] Números que forman rectángulos que tienen los lados proporcionales; ejemplo 6 y 24, $2:3 :: 4:6$.

$\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 = \left(B + \left(\frac{A-B}{2}\right)\right)^2$ y el producto de $A \cdot B$ es también cuadrado por ser planos semejantes (lo cual se demostró en la proposición i del libro 9).

Terna

$$(A \cdot B) + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 = \left(B + \left(\frac{A-B}{2}\right)\right)^2, A, B \text{ números planos semejantes.}$$

La comprensión de este lema no sugiere inconvenientes, será utilizado en la proposición 29.

Una extensión que se hace al final del lema es que si A y B no son planos semejantes, el número hallado no será cuadrado.

La comprensión del segundo lema y su demostración no sugieren inconvenientes, será utilizado en la proposición 30.

La demostraciones siguientes (desde la 29 a la 35) se realizan utilizando los lemas anteriores y otros resultados, sin embargo lo que llama la atención son la proposiciones en sí, pues sugieren ternas pitagóricas con algunas características de magnitudes conmensurables.

Proposición 29, Rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado - el cuadrado de la mayor, mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella

Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas AB y BC tal que:

Uno. AB y BC sean expresables

Dos. AB y BC sean conmensurables solo en cuadrado

Tres. La diferencia de sus cuadrados sea un cuadrado, en este caso el cuadrado de AC. Además AC y BC sean conmensurables en longitud

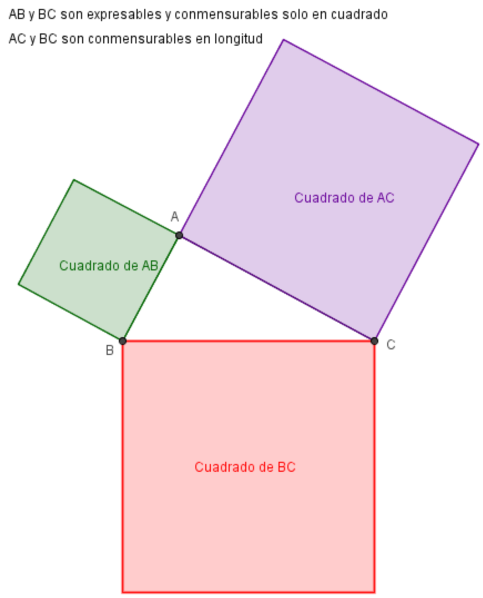


Figura 16. Interpretación de la proposición 29.

Ahora se verifican cada una de las condiciones que deben cumplir las rectas AB y AC a partir de los siguientes elementos iniciales:

- La recta BC expresable
- Los números a, b y c, tal que $c - b = a$, c y b son cuadrados y a no es un número cuadrado

Ahora se crea una recta AB tal que se cumpla la siguiente proposición

$$c : a :: \text{Cuadrado de } BC : \text{Cuadrado de } AB$$

Por esta proporción, BC y AB son conmensurables en cuadrado

Como c y a no guardan la misma razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces BC y AB tampoco guardan la misma razón que un número cuadrado con un número cuadrado por lo que BC y AB son inconmensurables en longitud. Así se cumple la condición dos.

Como BC es expresable, su cuadrado también es expresable y por esta misma proporción, $\text{Cuadrado de } AB$ es expresable, por tanto AB también es expresable. Así se cumple la condición uno.

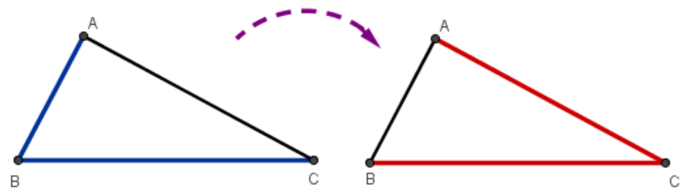


Figura 17. Proporciones en un triángulo rectángulo

Como se cumple la primera proporción, entonces se cumple la segunda.
Como c y b guardan la misma razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces BC y AC también guardan la misma razón que un número cuadrado con un número cuadrado por lo que BC y AC son conmensurables en longitud. Así se cumple la condición tres.

Así se cumplen las tres condiciones de la construcción para hallar las dos rectas. En esta traducción a pesar de ser una construcción tiene la terminación $Q.E.D.$ propia de los teoremas.

Proposición 30, Rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado - el cuadrado de la mayor, mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable en longitud con la mayor.

Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas AB y BC tal que:

Uno. AB y BC sean expresables

Dos. AB y BC conmensurables solo en cuadrado

Tres. La diferencia de sus cuadrados sea un cuadrado, en este caso el cuadrado de AC. Además BC y AC sean inconmensurables en longitud.

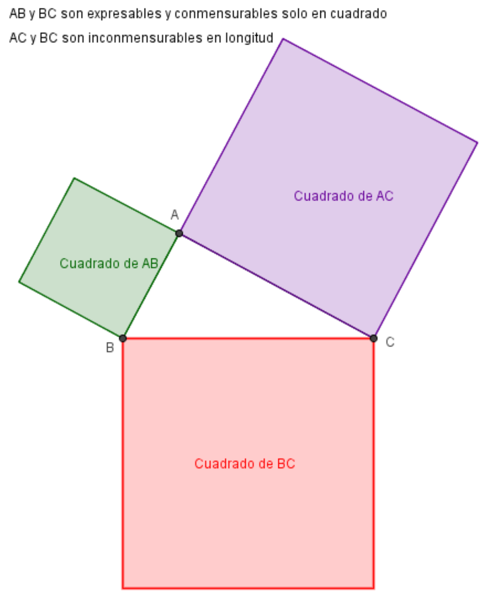


Figura 18. Interpretación de la proposición [X 30]

Ahora se verifican cada una de las condiciones que deben cumplir las rectas AB y AC a partir de los siguientes elementos iniciales:

- La recta BC expresable
- Los números a, b y c, tal que $a + b = c$, a y b son cuadrados y c no es un número cuadrado

Ahora se crea una recta AB tal que se cumpla la siguiente proposición

$$c : a :: \text{Cuadrado de } BC : \text{Cuadrado de } AB$$

Por esta proporción, BC y AB son conmensurables en cuadrado

Como c y a no guardan la misma razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces BC y AB tampoco guardan la misma razón que un número cuadrado con un número cuadrado por lo que BC y AB son inconmensurables en longitud. Así se cumple la condición dos.

Como BC es expresable, su cuadrado también es expresable y por esta misma proporción, $\text{Cuadrado de } AB$ es expresable, por tanto AB también es expresable. Así se cumple la condición uno.

Se tienen las siguientes proporciones:

$c : a :: $ Cuadrado de BC:Cuadrado de AB $\qquad$ $c : b ::$ Cuadrado de BC : Cuadrado de CA

Como se cumple la primera proporción, entonces se cumple la segunda,

Como c y b no guardan la misma razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de BC y el cuadrado de AC tampoco guardan la misma razón que un número cuadrado con un número cuadrado por lo que BC y AC son inconmensurables en longitud. Así se cumple la condición tres.

Así se cumplen las tres condiciones de la construcción para hallar las dos rectas.

Proposición 31, Rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable - el cuadrado de la mayor, mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con la mayor.

Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas PQ y NP tal que:

Uno. PQ y NP son mediales y conmensurables solo en cuadrado
Dos. PQ y NP comprenden un rectángulo expresable
Tres. La diferencia de sus cuadrados sea un cuadrado, en este caso el cuadrado de QN. Además NP y QN sean inconmensurables en longitud

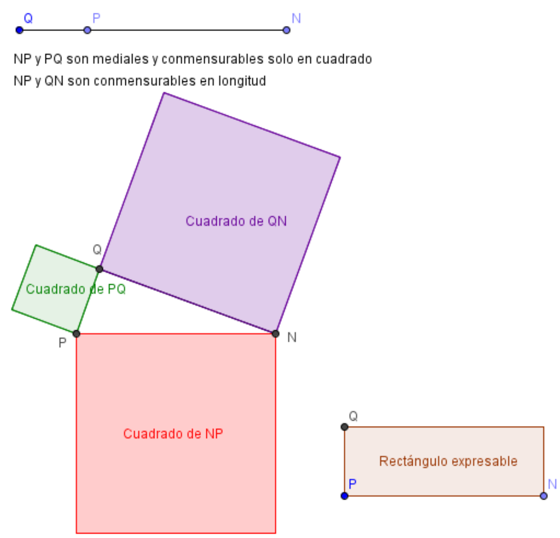


Figura 19. Interpretación de la proposición [X 31]

Para hallar las rectas mencionadas, se parte de las rectas MN y NO expresables y conmensurables solo en cuadrado que producen un rectángulo medial; el cuadrado igual a este rectángulo también es medial y por tanto su lado NP también es medial, cumpliendo con parte de la condición uno.

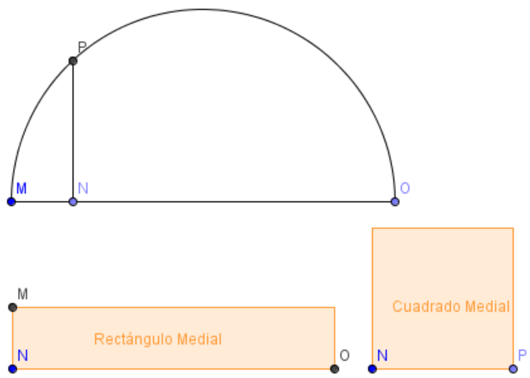


Figura 20. Cuadrado de lado igual a la media geométrica de las rectas MN y NO

Se produce un rectángulo comprendido por NP y PQ igual al cuadrado de MN, así, dado que MN es expresable su cuadrado también, por tanto el rectángulo comprendido por NP y PQ también es expresables.

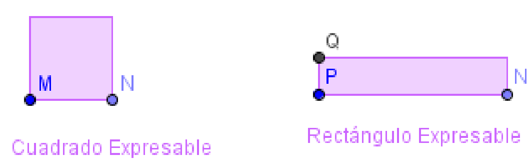


Figura 21. Cuadrado y rectángulo expresables de igual área

Como $NO : MN :: \text{Rectángulo comprendido por } MN \text{ y } NO : \text{Cuadrado de } MN;$ el cuadrado de NP es igual al rectángulo comprendido por MN y NO; y el rectángulo comprendido por NP y PQ es igual al cuadrado de MN, entonces $NO : MN :: \text{Cuadrado de } NP : \text{Rectángulo comprendido por } NP \text{ y } PQ :: NP : PQ$

Al ser MN y NO conmensurables solo en cuadrado, entonces NP y PQ también son conmensurables solo en cuadrado. Además como NP es medial PQ es medial. Así se completa la condición uno.

Como las rectas MN y NO son expresables y conmensurables solo en cuadrado, la diferencia de sus cuadrados producen un cuadrado cuyo lado MO es conmensurable con la recta mayor, en este caso con NO. Así mismo, la diferencia de los cuadrados de NP y PQ producen un cuadrado cuyo lado QN es conmensurable con la recta mayor, en este caso con PN, esto verifica parte de la condición tres.

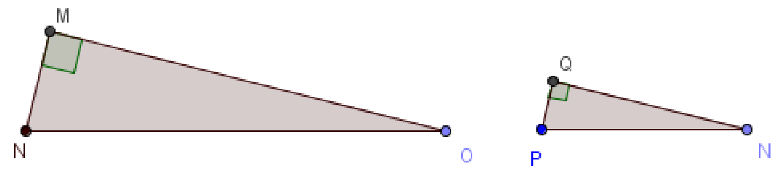


Figura 22. Diferencia de los cuadrados de las rectas MN y NO y diferencia de los cuadrados de las rectas NP y PQ

Proposición 32, Rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado - rectángulo medial, de manera que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con la mayor.

Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas CE y EF tal que:

Uno. CE y EF sean mediales y conmensurables solo en cuadrado

Dos. CE y EF comprenden un rectángulo medial

Tres. La diferencia de sus cuadrados sea un cuadrado, en este caso el cuadrado de FC. Además CE y FC sean inconmensurables en longitud

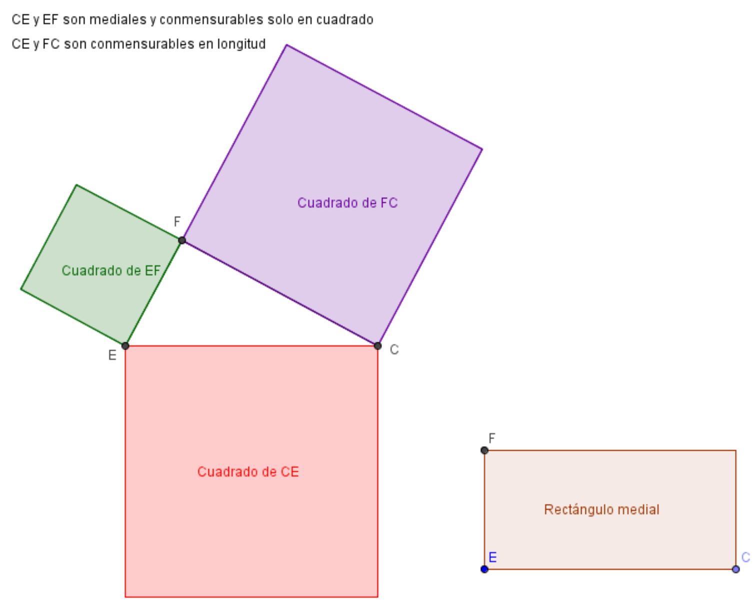


Figura 23. Interpretación de la proposición [X 32]

El procedimiento para hallar dichas rectas se hace a partir de las rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado AB, BC y CD.

Como AB y BC son expresables y conmensurables solo en cuadrado, entonces conmensurables solo en cuadrado, entonces la suma de sus cuadrados es un cuadrado cuyo lado es conmensurable con la recta mayor, en este caso BC y AC son conmensurables.

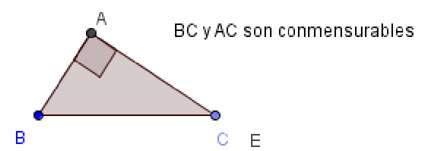


Figura 24. Suma de los cuadrados de AB y BC

Cuando el cuadrado de una recta está comprendido por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado, dicha recta es medial, a partir del procedimiento para hallar. En este caso se toman las rectas BC y CD que producen el cuadrado de lado CE que es medial, por lo que la recta CE es medial, así mismo el rectángulo comprendido por las rectas BC y CD es medial

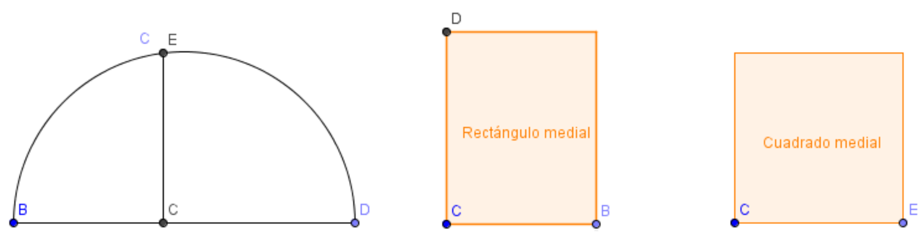


Figura 25. Cuadrado medial de lado igual a la media geométrica de las rectas BC y CD

Como AB y CD son expresables y conmensurables solo en cuadrado, producen un rectángulo medial, luego se produce otro rectángulo igual a este a partir de la recta EC hallada anteriormente; este rectángulo estaría compuesto entonces por las rectas EC y EF y también sería medial (por ser iguales). Así se cumple con la condición dos.

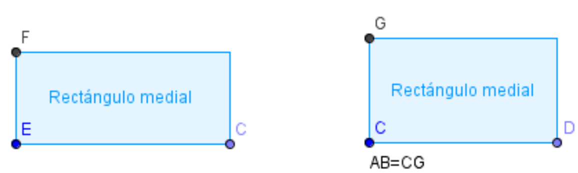


Figura 26. Rectángulos mediales de igual área

Se tiene que:

El rectángulo comprendido por BC y CD : Rectángulo comprendido por DC y AB :: BC : AB

y como el cuadrado de CE es igual al rectángulo comprendido por CE y CD y el rectángulo comprendido por CE y EF es igual al rectángulo comprendido por DC y AB entonces se tiene la siguiente proporción

Cuadrado de CE : Rectángulo comprendido por CE y EF :: BC : AB :: CE : EF

De lo anterior como BC : AB :: CE : EF y BC y AB son conmensurables en cuadrado, entonces CE y EF son conmensurables en cuadrado, cumpliendo con la condición uno.

La otra parte de la condición uno es que sean mediales, pero dado que comprenden un rectángulo medial y CE es medial, también EF es medial

Como la diferencia de los cuadrado BC y AB producen el cuadrado de AC y además BC y AC son conmensurables, ocurre lo mismo con la diferencia de los cuadrado CE y EF que producen el cuadrado de FC, y CE y FC son conmensurables, cumpliendo con la condición tres.

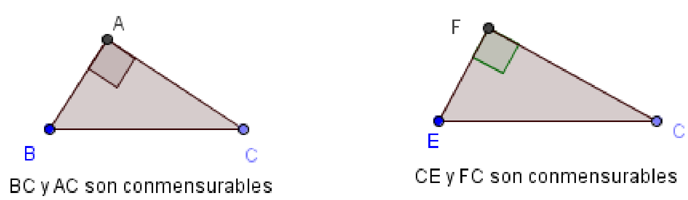


Figura 27. Diferencia de los cuadrado BC y AB y diferencia de los cuadrado CE y EF

Proposición 33, Rectas inconmensurables en cuadrado - la suma de sus cuadrados expresable - el rectángulo comprendido por ellas sea medial.

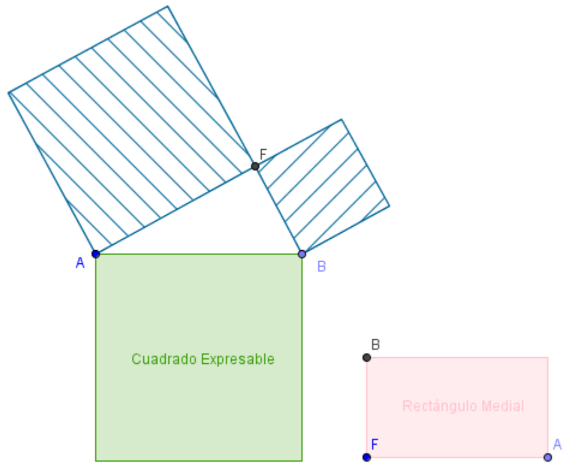
Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas AF y FB tal que:

Uno. AF y FB inconmensurables en cuadrado[24]

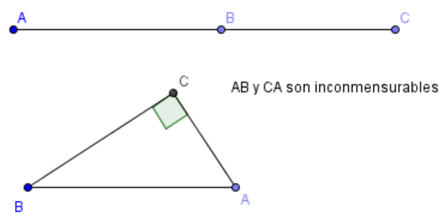
[24] Esto es, los cuadrados de las rectas AF y FB no guardan la misma razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Dos. La suma de sus cuadrados sea un cuadrado, en este caso el cuadrado de AB y AB es expresable.

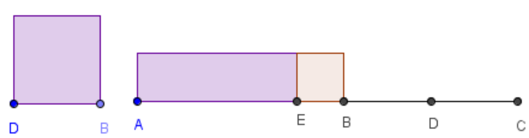
Tres. AF y FB comprenden un rectángulo medial



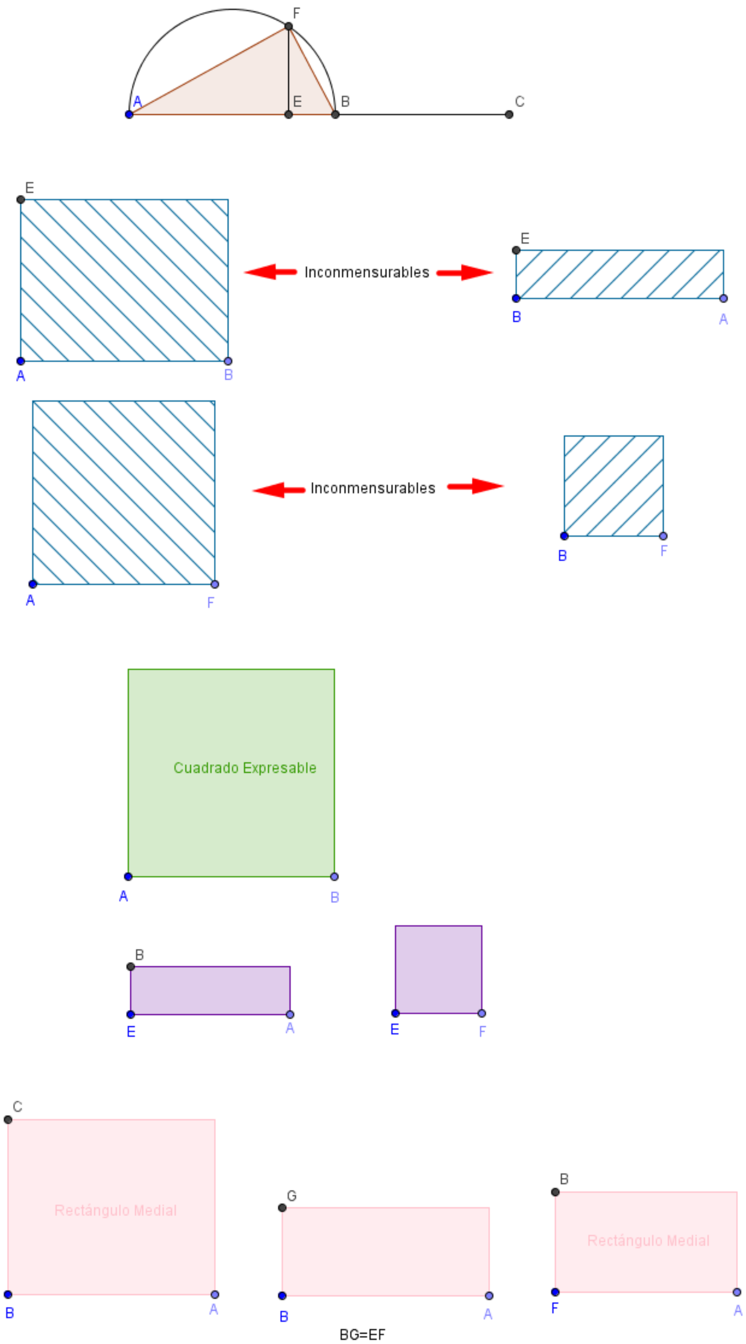
A partir de las rectas AB y BC expresables y conmensurables solo en cuadrado y AB y CA sean inconmensurables solo en longitud, estas rectas se pueden obtener a partir del procedimiento de la proposición 30 de este libro.



La cuarta parte del cuadrado de BC es el cuadrado de DB, teniendo en cuenta que AB y BC no son iguales, se aplica el paralelogramo igual al cuadrado de DB a la recta AB deficiente en un cuadrado, en este caso de lado EB



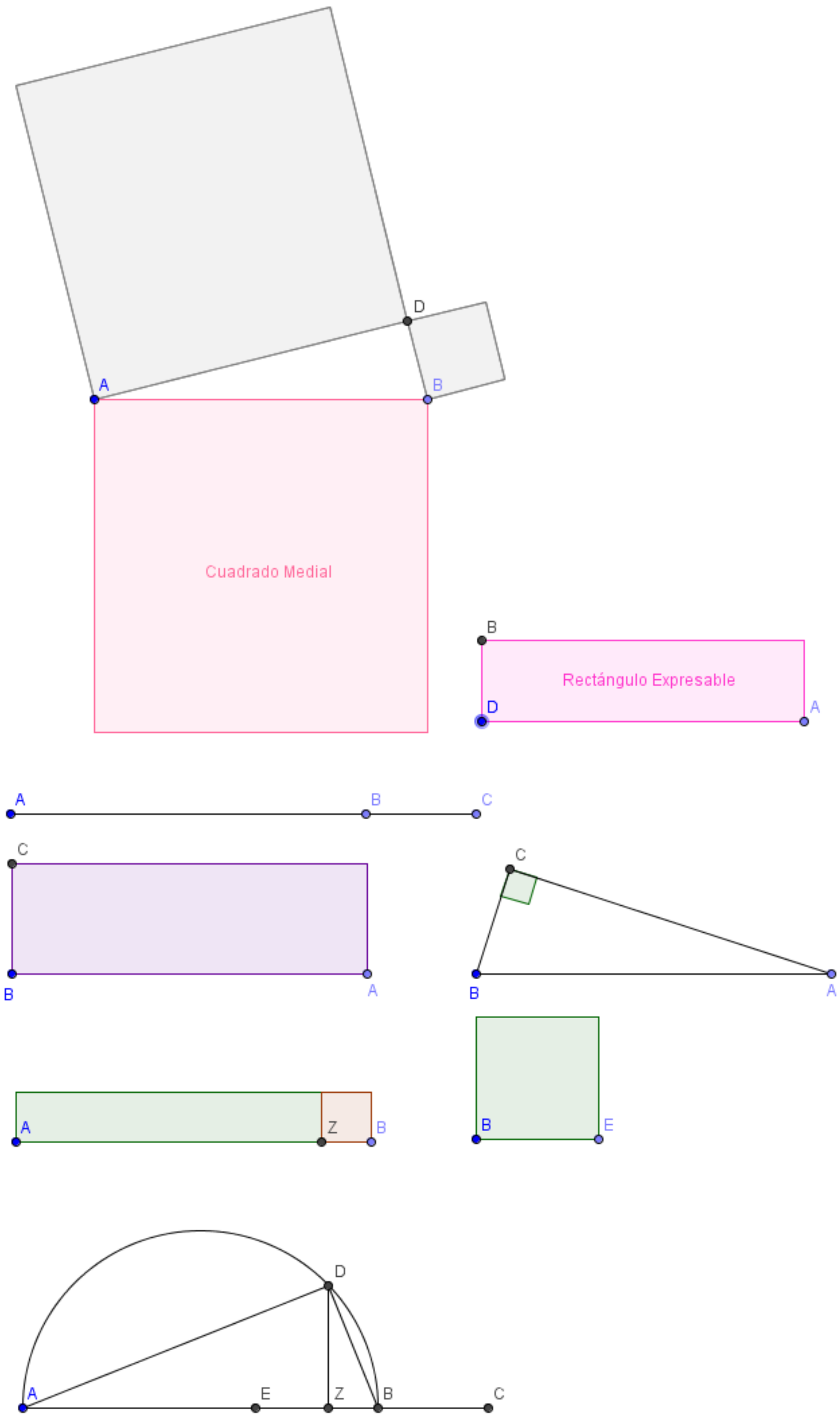
Como AB y CA son inconmensurables solo en longitud entonces AE y EB también son inconmensurables en longitud

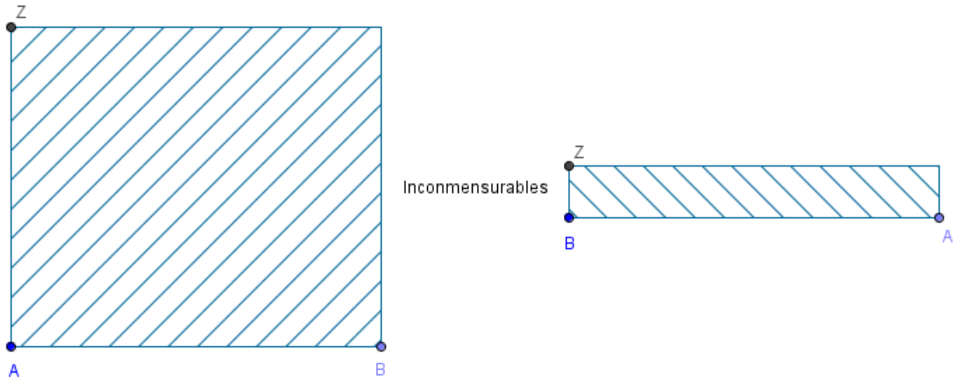


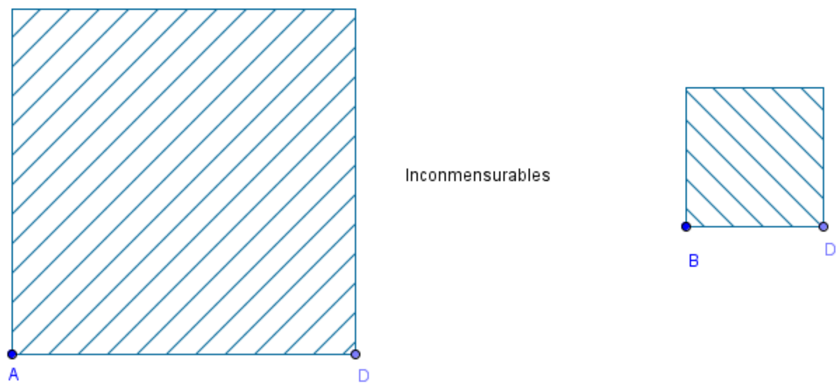
Proposición 34, Rectas inconmensurables en cuadrado - la suma de sus cuadrados medial - el rectángulo comprendido por ellas expresable.

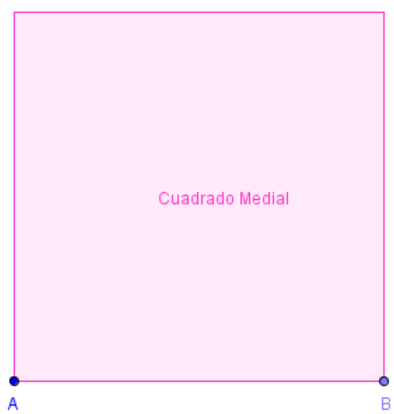
Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas AD y DB tal que:

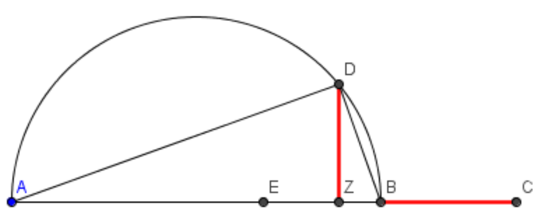
- La suma de sus cuadrados es medial, en este caso el cuadrado de AB
- AD y DB comprenden un rectángulo expresable
- AD y DB sean inconmensurables en cuadrado



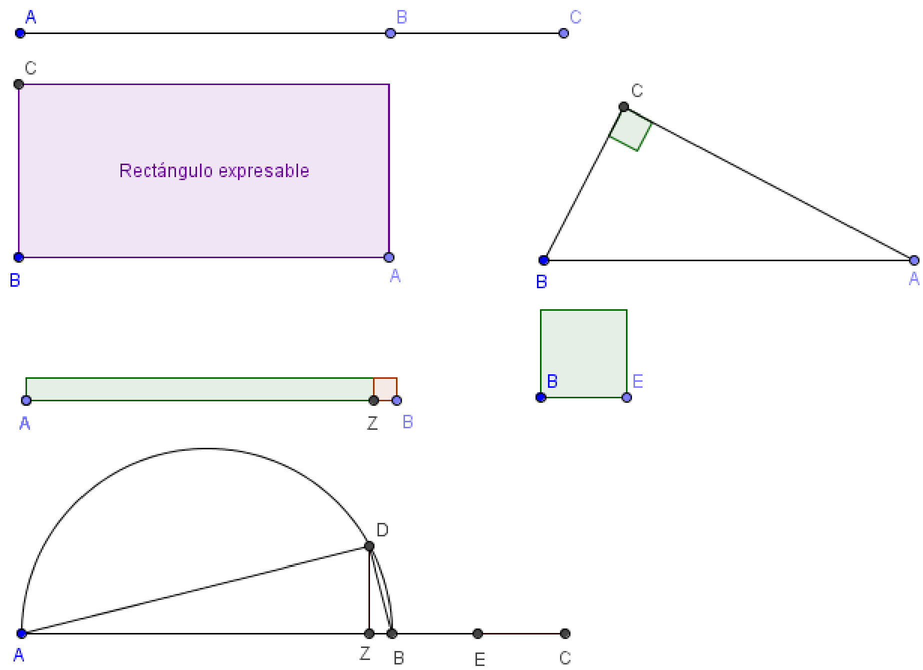

Z
Inconmensurables
Z
B
A
A
B

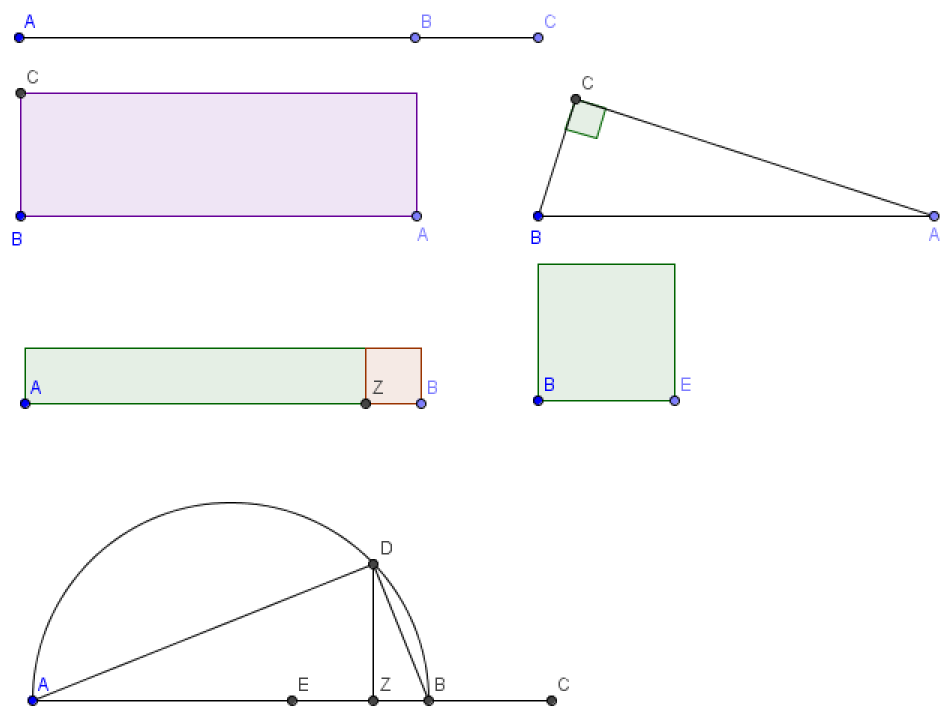

Inconmensurables
B
D
A
D

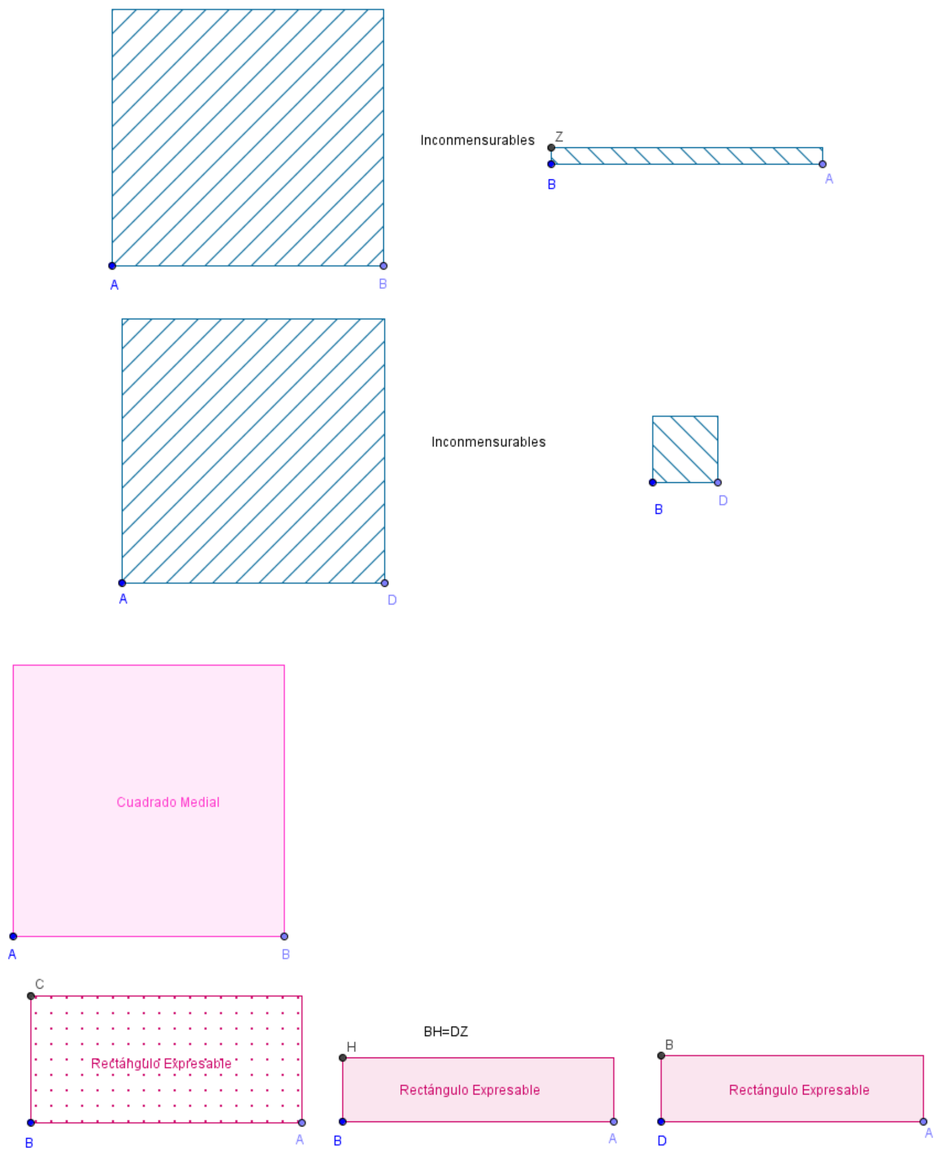

Cuadrado Medial
A
B


D
A
E
Z
B
C

Camino B


A
B
C
C
Rectángulo expresable
B
A
C
B
A
B
E
A
Z
B
D
A
Z
B
E
C


A
B
C
C
B
A
C
B
A
A
Z
B
B
E
D
A
E
Z
B
C



Proposición 35, Rectas inconmensurables en cuadrado - la suma de sus cuadrados medial - el rectángulo comprendido por ellas sea medial e inconmensurable con la suma de sus cuadrados.

Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas AD y DB tal que:

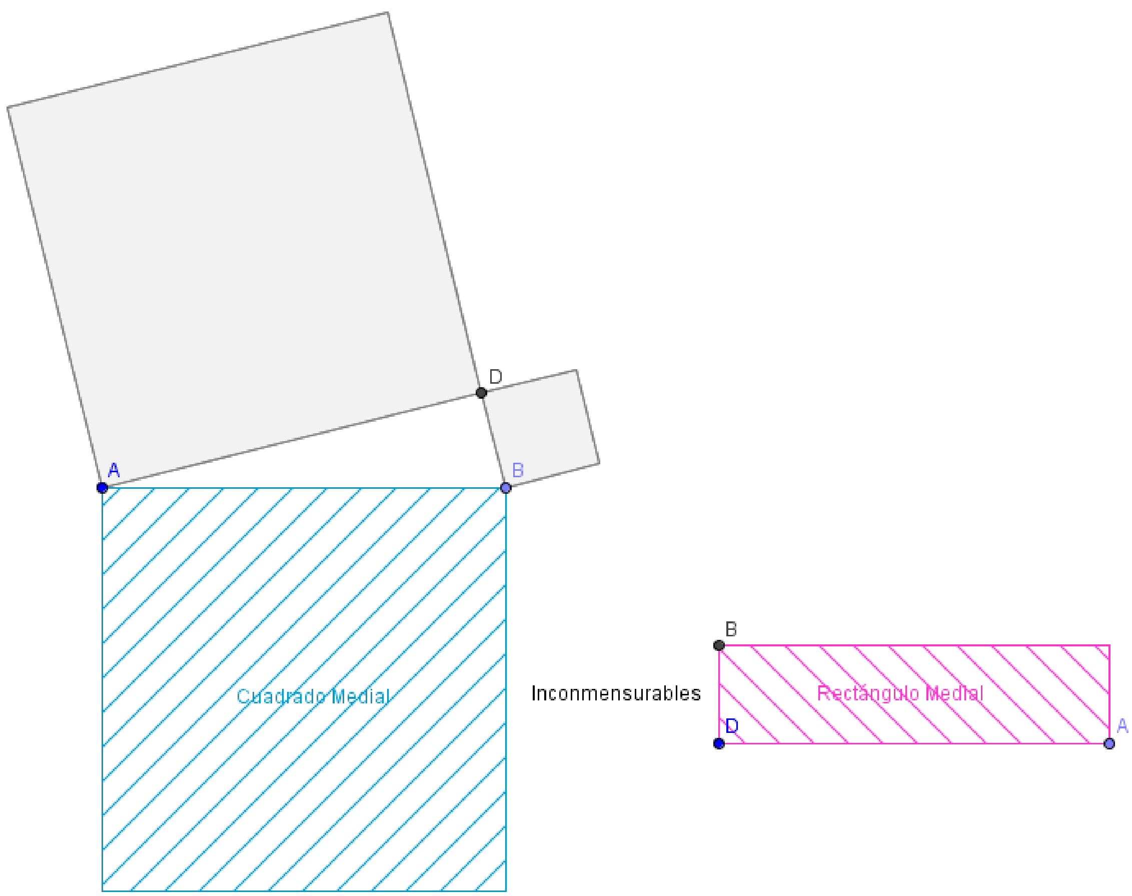
Uno. AD y DB inconmensurables en cuadrado[25]

Dos. La suma de sus cuadrados sea un cuadrado, en este caso el cuadrado de AB y AB es medial.

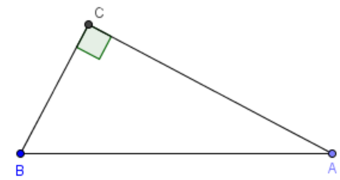
Tres. Comprenden un rectángulo medial e inconmensurable con el cuadrado AB

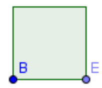
Una interpretación de este procedimiento es que se deben hallar las rectas AB y BC tal que:

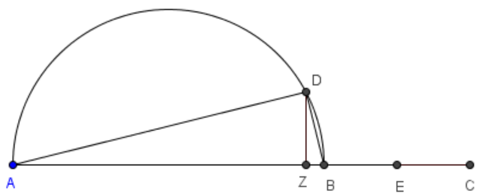
- La suma de sus cuadrados es medial, en este caso el cuadrado de AC
- AB y BC comprenden un rectángulo medial e inconmensurable con el cuadrado de AC

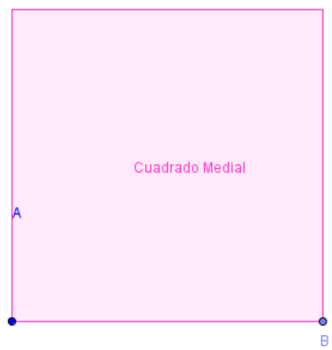


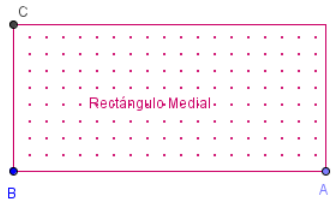
[25] Esto es, los cuadrados de las rectas AD y DB no guardan la misma razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

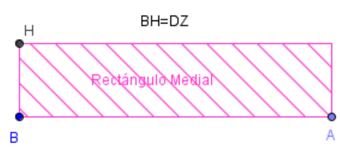


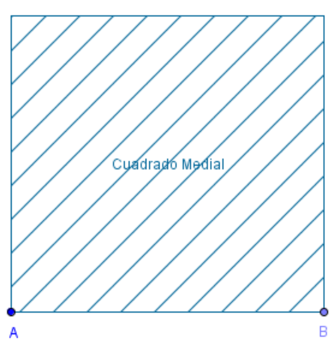




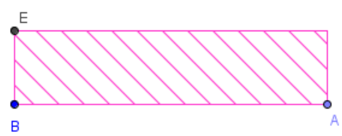






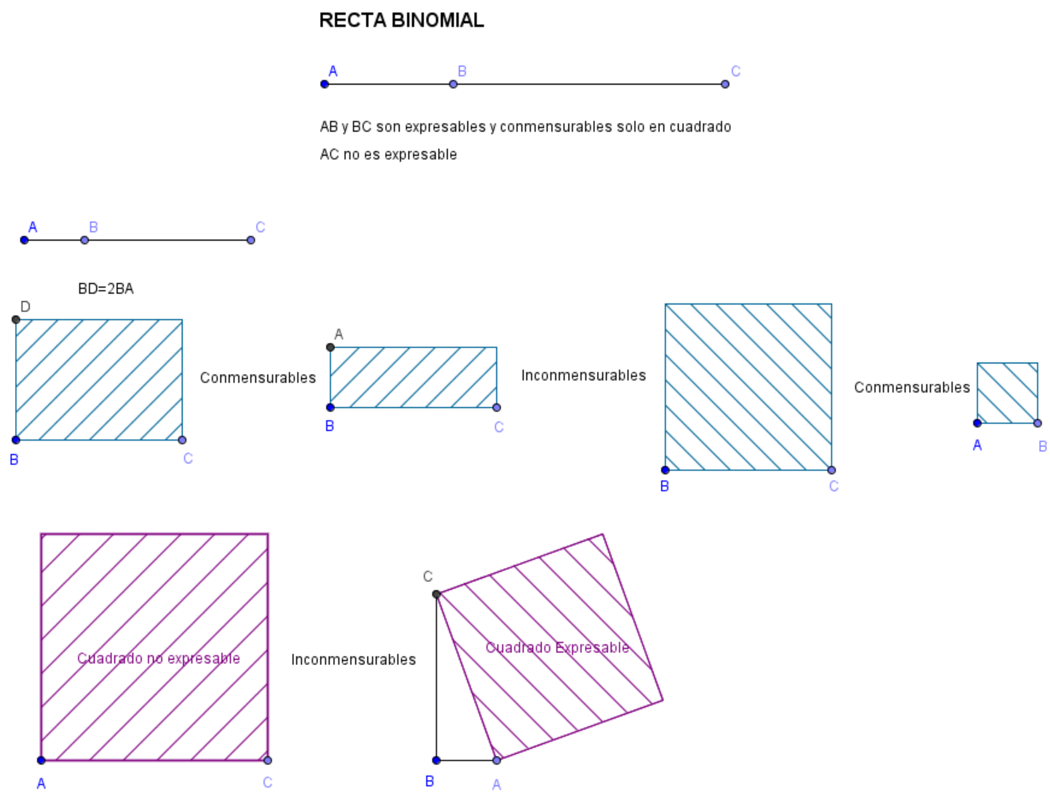


Inconmensurables



Proposición 36, Recta Binomial.

Aparece el término *recta binomial* que corresponde a la recta no expresable, que es suma de dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado.



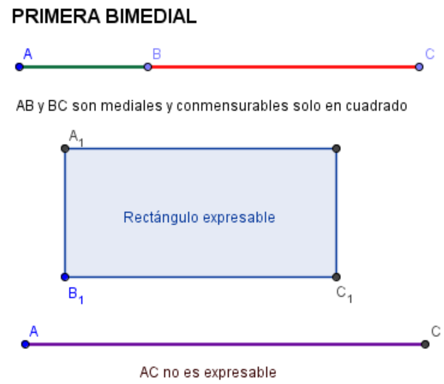
Proposición 37, Recta Primera Bimedial

Aparece el término *recta primera bimedial* (recta AC) que se genera a partir de las siguientes condiciones iniciales:

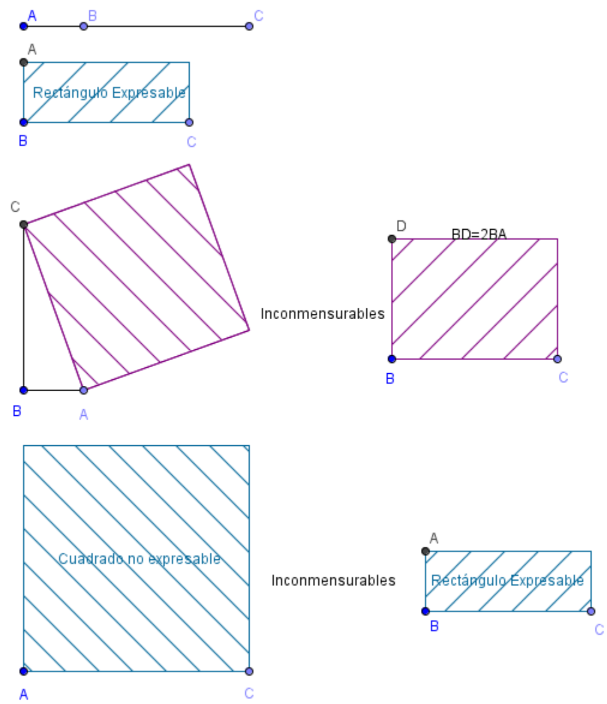
Uno. Se genera a partir de las rectas AB y BC que son mediales y conmensurables solo en cuadrado

Dos. La recta AC es la suma de las rectas AB y BC.

Tres. AB y BC comprenden un rectángulo expresable



Como las rectas AB y BC son inconmensurables en longitud la suma de sus cuadrados (el cuadrado de AC)



Proposición 38, Recta Segunda Bimedial

El término *recta segunda bimedial* corresponde a la recta no expresable, que es suma de dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprenden un rectángulo medial, siendo esta la cuarta de las trece rectas.

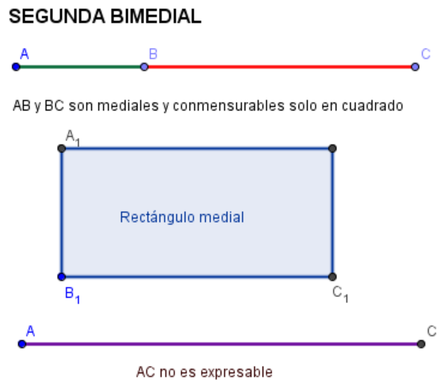


Figura 28. Gráfico proposición 38.

Proposición 39, Recta Mayor

La recta *Mayor* es una recta no expresable. Aquí se cumplen que AC es *mayor* si: $AB + BC = AC$, la suma de los cuadrados de AB y BC es expresable, en este caso el cuadrado de AC, AB y BC son inconmensurables en cuadrado y AB y BC comprenden un rectángulo medial.

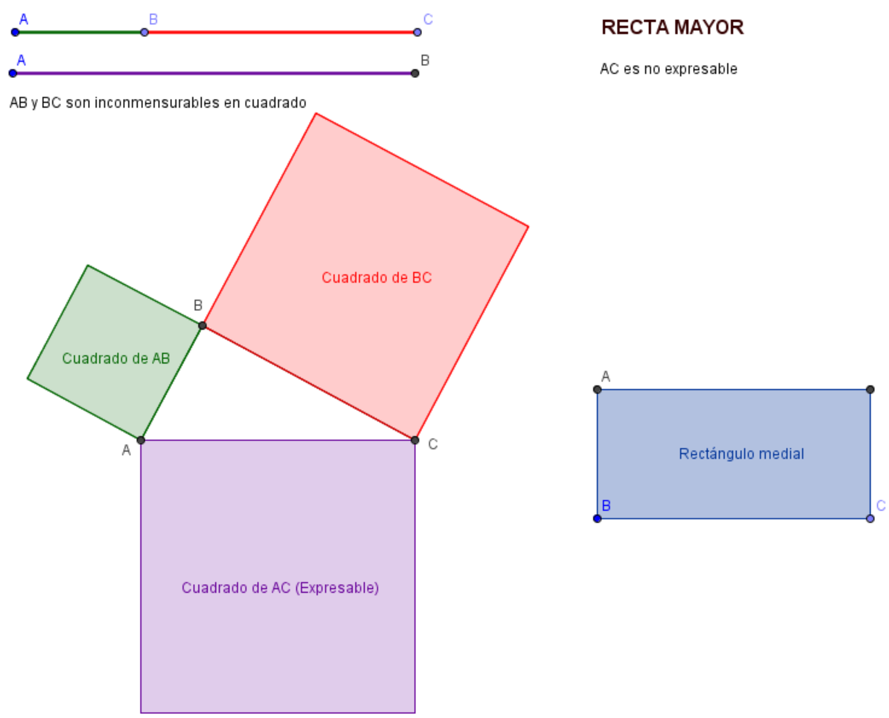


Figura 29. Gráfico proposición 39.

Proposición 40, Recta Lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

La recta *lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial* es una recta no expresable AC es *lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial* si: $AB + BC = AC$, la suma de los cuadrados de AB y BC es medial; en este caso los cuadrados de AC, AB y BC son inconmensurables en cuadrado y AB y BC comprenden un rectángulo expresable.

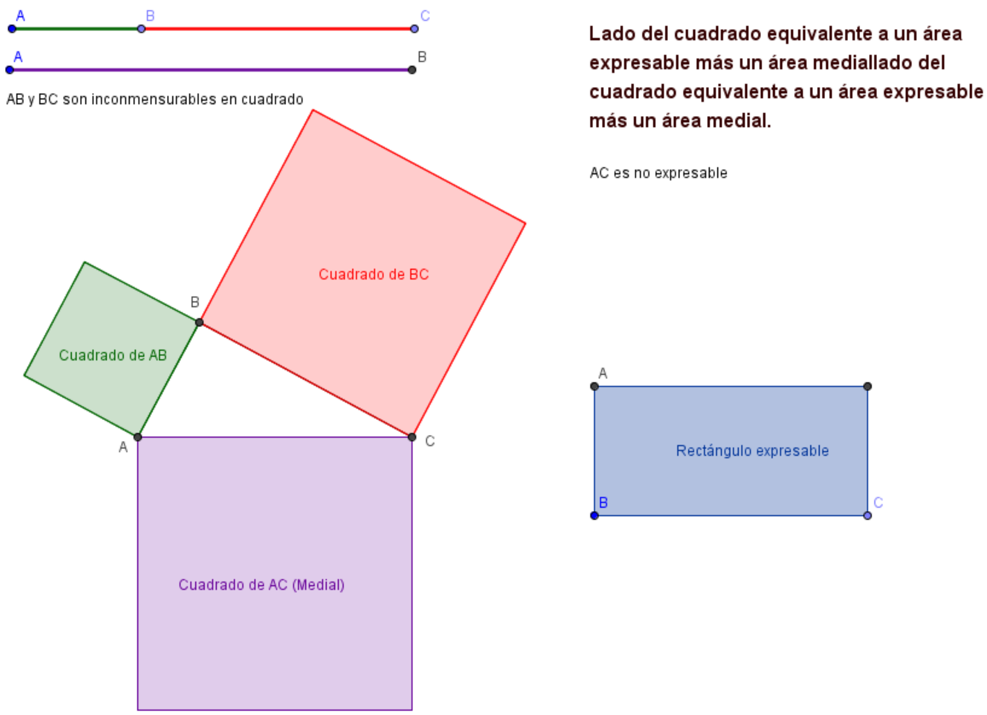


Figura 30. Gráfico proposición 40.

Proposición 41, Recta lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Es una recta no expresable AC es *lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales* si: $AB + BC = AC$, AB y BC son inconmensurables en cuadrado, AB y BC comprenden un rectángulo medial e inconmensurable con AC y la suma de los cuadrados de AB y BC es medial, en este caso el cuadrado de AC.

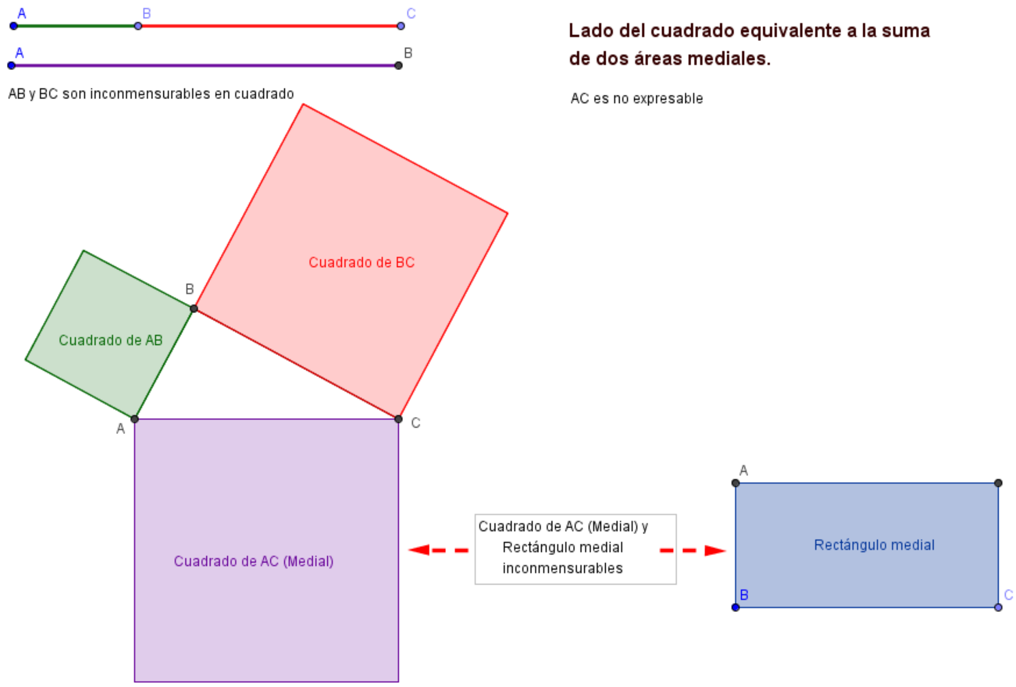


Figura 31. Gráfico proposición 41.

En la proposición 41 también aparece un lema importante cuya escritura es un poco confusa.

Lema

Dada la recta AB, la cortamos en partes desiguales por los puntos Γ y Δ y suponemos que AΓ > ΔB. Luego los cuadrados de AΓ y ΓB son mayores que los cuadrados de AΔ y ΔB.

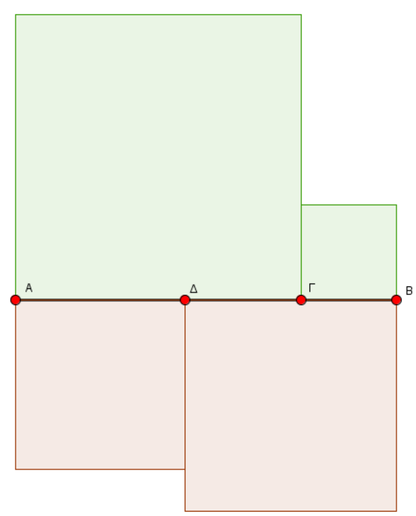


Figura 32. Cuadrados AΔ,AΓ,ΔB,ΓB.

Luego dividimos AB por E, de tal forma que $AE = EB$ y como $A\Gamma > \Delta B$ quitamos de ambos $\Delta\Gamma$, entonces $A\Delta$ es mayor que ΓB.

Figura 33. Punto medio

Pero como $AE = EB$, entonces $\Delta E < E\Gamma$, luego los puntos Γ y Δ no están a igual distancia de E. Como el rectángulo formado por $A\Gamma$ y ΓB mas el cuadrado de $E\Gamma$ es igual al cuadrado de EB y el rectángulo formado por $A\Delta$ y ΔB mas el cuadrado de ΔE es igual al cuadrado de EB [II 5], entonces el primer rectángulo mas el primer cuadrado es igual al segundo rectángulo mas el segundo cuadrado ($A\Gamma * \Gamma B + E\Gamma^2 = A\Delta * \Delta B + \Delta E^2$), pero $\Delta E^2 < E\Gamma^2$, entonces el primer rectángulo es menor que el segundo ($A\Gamma * \Gamma B < A\Delta * \Delta B$), entonces el doble de los rectángulos cumple las misma relación. De modo que la suma de los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ es mayor que la de los cuadrados de $A\Delta, \Delta B$. Q.E.D.

Las proposiciones 42 a 47 se encargan de demostrar que seis de los tipos de rectas hasta ahora vistos (exceptuando la recta medial) se dividen de una sola forma en las rectas que se componen.

Proposición 42, La recta binomial se divide en sus términos por un sólo punto.

Aparece la expresión “sea dividida en sus términos la recta binomial” que hace referencia a la división en las dos rectas que la formaron.

La demostración procede por reducción al absurdo, suponiendo que la recta se divide en sus términos por dos puntos diferentes y llegando así a que las áreas formadas por estas diferentes divisiones difieren entre sí en un área medial, lo cual es imposible.

Dada la recta binomial AB, el punto Γ la divide en sus términos y suponemos que se divide por otro punto Δ, en dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado. Entonces $A\Gamma \neq \Delta B$, porque de ser iguales, entonces $A\Delta = \Gamma B$ y $A\Gamma : \Gamma B :: B\Delta : \Delta A$ y AB será dividida por Δ igual que por Γ, lo que se ha supuesto que no. Luego $A\Gamma \neq \Delta B$, por eso los puntos Γ, Δ tampoco están a igual distancia del punto de medio. Luego la diferencia entre los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ y los cuadrados de $A\Delta, \Delta B$ es igual a la diferencia entre el doble del rectángulo comprendido $A\Delta, \Delta B$ y el doble del rectángulo comprendido por $A\Gamma, \Gamma B$ ($A\Gamma^2 + \Gamma B^2 - A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2 * A\Gamma * \Gamma B - 2 * A\Delta * \Delta B$) [II 4].

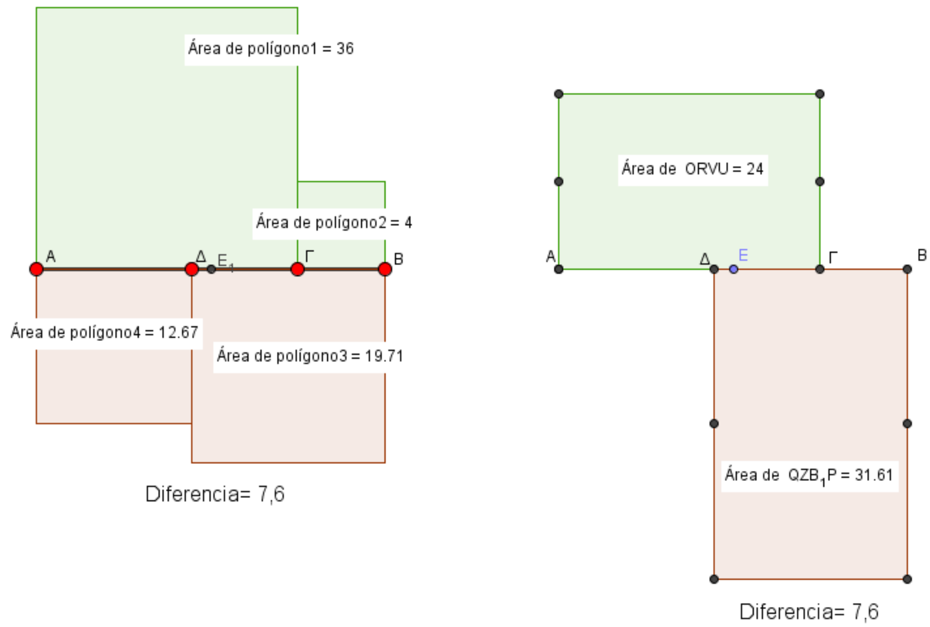


Figura 34. Gráfico proposición 42.

Pero los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ difieren de los cuadrados de $A\Delta, \Delta B$ es un área expresable, pues ambos son expresables, entonces el doble del rectángulo formado por $A\Delta, \Delta B$ también difiere del doble del rectángulo comprendido por $A\Gamma, \Gamma B$ en un área expresable, aun siendo medial [X 21] llegando así a una contradicción ya que la diferencia entre dos área mediales no puede ser un área expresable [X 26].

Proposición 43, La recta primera bimedial se divide por un sólo punto.

Esta demostración procede de forma similar a la anterior. Suponemos que la recta primera bimedial se puede dividir por otro punto diferente al punto que la divide en las dos rectas que la componen. Llegando así a que las áreas de cuadrados y rectángulos producidas por estas dos divisiones difieren entre sí en un área expresable aun siendo las rectas mediales, lo cual es absurdo.

Proposición 44, La recta segunda bimedial se divide por un sólo punto.

La demostración procede suponiendo que la recta segunda bimedial se puede dividir en sus términos por un punto diferente al que la forma, los puntos por los que queda dividida forman cuadrados y rectángulos, los cuales aplicamos a una recta expresable. Estas áreas aplicadas a la recta expresable forman una recta binomial dividida por dos puntos diferentes, lo cual contradice la proposición 42, es decir, es absurdo.

Suponemos que la recta segunda bimedial AB se puede dividir por un punto Δ diferente al Γ que la divide en las dos rectas que la componen, de modo que $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{\Delta B}$. Entonces los cuadrados de $\mathrm{A\Delta}, \mathrm{\Delta B}$ son menores que los de $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{\Gamma B}$.

Construimos la recta expresable EZ y aplicamos sobre ella el rectángulo de área igual a la del cuadrado de AB, luego quitamos el rectángulo EH de área igual a la de los cuadrados de $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{\Gamma B}$; entonces lo que sobra, $\Theta\mathrm{K}$ es igual al doble del rectángulo formado por $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{\Gamma B}$ [II 4]. También quitamos el rectángulo $\mathrm{E\Lambda}$ de área igual a la de los cuadrados de $\mathrm{A\Delta}, \mathrm{\Delta B}$[26], entonces el área del rectángulo MK es igual al doble del área del rectángulo formado por $\mathrm{A\Delta}, \mathrm{\Delta B}$.

[26] Al revisar la demostración se presentó una dificultad, pues en el libro está mal redactado un paso de esta, pero revisando el contexto se llegó a que había un cambio de de $\mathrm{A\Delta}, \mathrm{\Delta B}$ por $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{\Gamma B}$.

EZ, y aplíquese a EZ un paralelogramo rectángulo, EK, igual al (cuadrado) de AB; quítese, por otra parte, EH igual a los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ; entonces el resto ΘΚ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ [II 4]. Quítese, a su vez, ΕΛ igual a los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ que precisamente se ha demostrado que son menores que los de ΑΓ, ΓΒ [Lema]; enton-

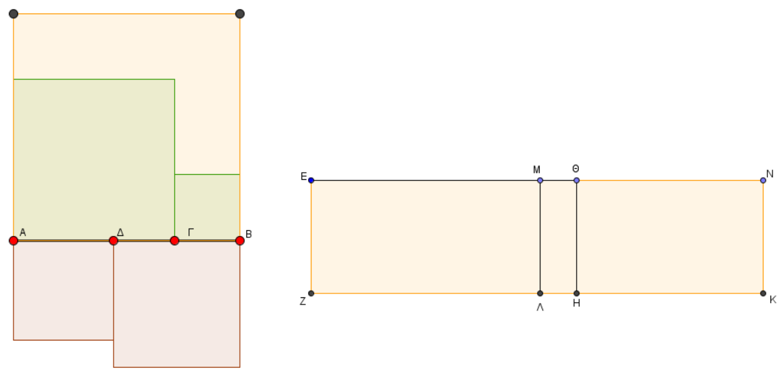


Figura 35. Gráfico proposición 44.

Y como los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ son mediales, entonces EH es medial y se aplicó a la recta EZ, entonces $E\Theta$ es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22] e igual ΘN es expresable e inconmensurable en longitud con EZ.

Como $A\Gamma, \Gamma B$ son mediales y conmensurables solo en cuadrado, entonces son inconmensurables en longitud. Pero $A\Gamma : \Gamma B :: A\Gamma^2 : (A\Gamma * \Gamma B\,)$ entonces el cuadrado de $A\Gamma$ es inconmensurable con el rectángulo formado por $A\Gamma, \Gamma B$ [X 11], pero los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ son conmensurables con el cuadrado de $A\Gamma$ porque los lados son conmensurables en cuadrado. Ahora el rectángulo formado por $A\Gamma, \Gamma B$ es conmensurable con el doble del rectángulo.

- Pero EH es igual a los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ y ΘK es igual al doble del rectángulo formado por $A\Gamma, \Gamma B$, entonces EH y ΘK son inconmensurables, también $E\Theta$ y ΘN son inconmensurables en longitud, pero también son expresables (son rectas expresables conmensurables solo en cuadrado) y si se suman dan una recta binomial, no expresable. Entonces EN es una recta binomial dividida por Θ.
- De la misma forma se demuestra que EM, MN son expresables y conmensurables solo en cuadrado y EN es una recta binomial dividida por dos puntos diferentes Θ, M.

Ahora $E\Theta \neq MN$ porque los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ son mayores que los de $A\Delta, \Delta B$ y a su vez estos son mayores que el doble del rectángulo formado por $A\Delta, \Delta B$; también los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ iguales a EH son mucho mayores que el rectángulo formado por $A\Gamma, \Gamma B$ igual a MK, de modo que $E\Theta$ es también mayor que MN y por consiguiente $E\Theta \neq MN$.[27]

Proposición 45, La recta mayor se divide por uno y el mismo punto.

Suponemos que la recta Mayor se puede dividir por un punto diferente al que la corta en las dos rectas que la forman (como en las anteriores). Luego el doble del rectángulo formado por $A\Gamma, \Gamma B$ excede al doble del rectángulo formado por $A\Delta, \Delta B$ en un área expresable, siendo mediales, lo cual es una contradicción.

Proposición 46, El lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial se divide sólo por un punto.

Suponemos que la recta lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial se puede dividir por un punto diferente al que la corta en las dos rectas que la forman (como en las anteriores). Llegamos a que la suma de los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ excede al doble de la suma de los cuadrados de $A\Delta, \Delta B$ en un área expresable, siendo medial, lo cual es una contradicción.[28]

Proposición 47, El lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales se divide por un sólo punto.

Esta última proposición de la primera parte del libro, procede de la misma forma que las 5 anteriores, suponiendo que existen dos puntos diferentes que dividen a la recta lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales en sus términos. Al final se llega a

---

[27] El análisis de la demostración de esta proposición se tornó algo tedioso debido a la forma en la cual Euclides escribía sus demostraciones (sin una estructura, como en la geometría moderna) sino de corrido.

[28] Aquí se vuelve a observar un error de redacción del libro, ponen $A\Gamma, \Delta B$ en donde debería ser $A\Gamma, \Gamma B$.

doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma, \Gamma B$; expresable [X 40] que las aplicaciones de las áreas forman una recta binomial dividida por dos puntos diferentes, lo cual es imposible.

Suponemos que $A\Gamma > \Delta B$. Trazamos una recta expresable EZ, le aplicamos un rectángulo EH igual a los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ y un rectángulo ΘK igual a igual al doble del rectángulo formado por $A\Gamma, \Gamma B$, siendo el rectángulo entero igual al cuadrado de AB.

Aplicamos luego a EZ el rectángulo $E\Lambda$ igual a los cuadrados de $A\Delta, \Delta B$, de modo que el resto (el doble del rectángulo formado por $A\Delta, \Delta B$ es igual al resto MK).

Como la suma de los cuadrados $A\Gamma, \Gamma B$ es medial, entonces EH es medial y se aplicó a una recta expresable EZ, entonces ΘE es expresable e inconmensurable en longitud con EZ. De igual forma ΘN es expresable e inconmensurable en longitud con EZ.

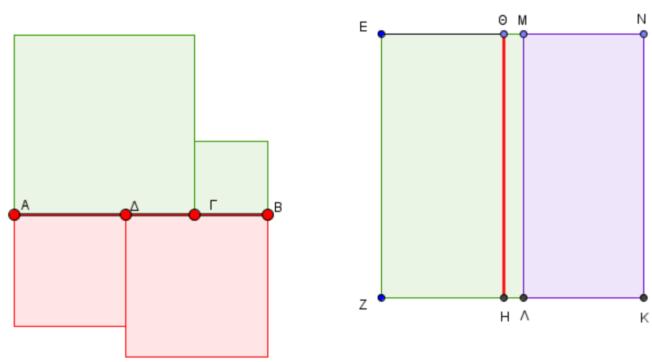


Figura 36. Gráfico proposición 47.

Y como la suma de los cuadrados de $A\Gamma, \Gamma B$ es inconmensurable con el doble del rectángulo formado por $A\Gamma, \Gamma B$, entonces EH y HN son inconmensurables y expresables, entonces $E\Theta, \Theta N$ son expresables, conmensurables solo en cuadrado. Entonces EN es una recta binomial dividida por el punto Θ y de manera análoga se demuestra que también se divide por el punto M pero la recta binomial solo puede dividirse por un punto. Llegamos así a una contradicción.

Inter-proposición

Se observa que hay una relación interna entre las proposiciones del Libro, la estructura desde la proposición cinco a la ocho es similar, al parecer se toma una proposición y se estudian los cuatro casos que se pueden presentar, esto es, si es una implicación directa, inversa, recíproca o contra recíproca.

p: Las magnitudes son conmensurables

q: Las magnitudes guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número

- **Implicación directa $\boldsymbol{p \rightarrow q}$: [X 5]** Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.
- **Implicación recíproca $\boldsymbol{q \rightarrow p}$: [X 6]** Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número (guarda) con un número, las magnitudes serán conmensurables.
- **Implicación contraria $\boldsymbol{\neg p \rightarrow (\neg q)}$: [X 7]** Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número.
- **Implicación contrarecíproca $\boldsymbol{\neg q \rightarrow (\neg p)}$: [X 8]** Si dos magnitudes no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán inconmensurables.

Durante al menos esta primea parte se evidencia que las cuatro definiciones expuestas inicialmente se relacionan con todas las proposiciones bien sea explícita o implícitamente, en su enunciado o en su demostración. Se podría pensar en redefinir una clasificación de las proposiciones de modo que muestre esa interconexión.

Solo hasta arribar y estudiar la proposición [X 18] se concluye que la finalidad de Euclides hasta ahora, es tener las herramientas para poder hacer demostraciones posteriores que estén relacionadas con magnitudes *racionalmente expresables* (o simplemente *expresables*) y magnitudes *no racionalmente expresables*; que fueron expuestas en [X Def. 3] y [X Def. 4]. En el momento de estudiar estas definiciones no se logró un comprensión total, pues incluso hubo confusión en sus enunciados, por ello se decidió esperar hasta que fueran utilizadas, y eso es en este punto, en dónde se logra una comprensión de las definiciones tres y cuatro. Esto reafirma la idea expuesta anteriormente de que en una teoría matemática los teoremas, definiciones y proposiciones no siempre son entendibles a partir de sus enunciados y a partir de su uso.

En el primer análisis se entendió que una recta no racionalmente expresable es una recta para la cual no existían conmensurables a ella y se pensó en los números irracionales, así pues, una recta o en este caso segmento *no racionalmente expresable* podría ser el segmento de magnitud π, que es un número irracional, pero siguiendo esta idea el segmento de magnitud π y el segmento de magnitud 2π no serían conmensurables y esto es falso.

Para entender la idea de *expresable* y *no expresable* se debe tener en cuenta la idea de una *recta expresable determinada* que sería una magnitud unidad. La siguiente figura mejora la comprensión de la idea.

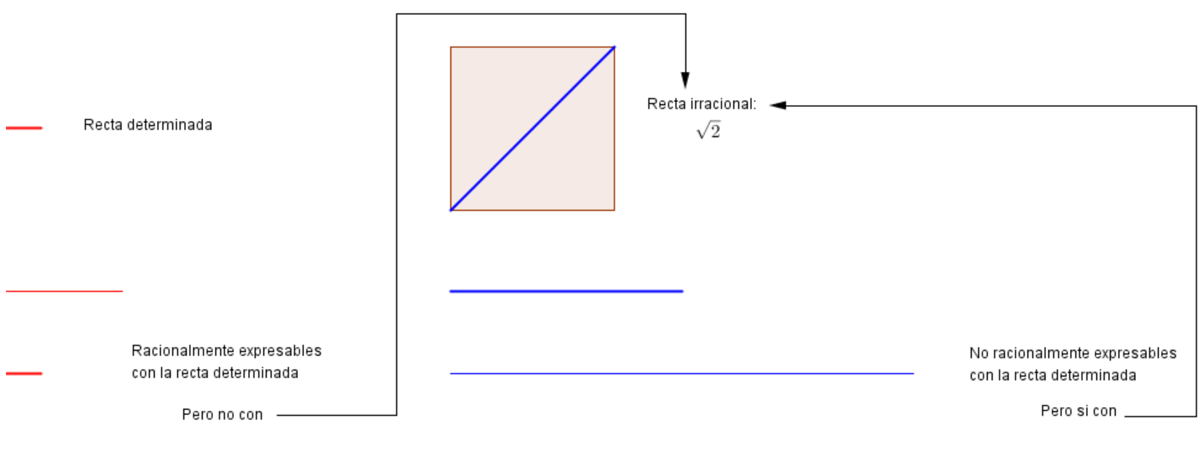


Figura 37. Relación Racionalmente Expresable y no racionalmente expresable

Podríamos decir que el ser racionalmente expresable podría interpretarse como una relación de equivalencia que parte un conjunto en dos clases, la que los elementos cumplen con la relación y la que los elementos no cumplen la relación. Por ejemplo, al tomar el conjunto de todos los segmentos y uno específico, se producirían dos clases, la de los segmentos que son racionalmente expresables con el dado y la clase en que los segmentos no son conmensurables con el dado.

Los conceptos más importantes que se desarrollan en el Libro, basándonos en nuestro propio estudio de la primera parte y la observación de las siguientes, son: conmensurabilidad e inconmensurabilidad, racionalmente expresable y no racionalmente expresable, rectas mediales, rectas binomiales y rectas apótomas. [29]

Se resalta que puede haber teoría que sea simplemente herramienta y no por ello esta teoría tiene que ser de segunda categoría. ¿Por qué se hace este libro? A la fecha ya podemos decir que tenemos respuesta (se realiza con el fin de clasificar tipos de rectas no expresables, algo así como clasificar la inconmensurabilidad). Luego de finalizar el estudio de la primera parte del Libro X volvemos a ampliar la postura y vemos que el Libro X no se limita a clasificación de rectas no expresables, sino que aborda el problema de la inconmensurabilidad, lo caracteriza y trabaja con él.

La primera parte del libro parece manejar dos cortes:

- Proposiciones 1 a 18: en donde se define y estudia la conmensurabilidad e inconmensurabilidad.
- Proposiciones 19 a 47: en donde se aclara el significado de ser racionalmente expresable y no racionalmente expresable y se estudia la teoría y relaciones entre rectas con estas características.

Algo que llama la atención en las construcciones de las proposiciones 29 y 30 las cuales parecen tener relación con las ternas pitagóricas. [30] Esto sugiere la pregunta ¿existen ternas de magnitudes conmensurables, es decir, ternas de racionales?

En cuanto a la teoría es necesario tener en cuenta algunos conceptos para entenderla:

[29] Solo serán mencionadas hasta la proposición [X 73] en la segunda parte del Libro.

[30] Ternas pitagóricas: son triplas de enteros positivos a, b, c que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$, estos números se asocian a los lados de un triángulo rectángulo y esta relación también se cumple en sentido contrario, ósea que cualquier terna pitagórica se puede asociar a un triángulo rectángulo.

Ternas pitagóricas primitivas (primos relativos)

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)	(9, 40, 41)
(11, 60, 61)	(12, 35, 37)	(13, 84, 85)	(15, 112, 113)	(16, 63, 65)
(17, 144, 145)	(19, 180, 181)	(20, 21, 29)	(20, 99, 101)	(21, 220, 221)

- Medir y comparar: aquí la medida no se refiere a números sino a magnitudes, específicamente a magnitudes lineales y de superficie; así para comparar dos magnitudes diferentes se tiene en cuenta una magnitud unidad cualquiera que mida a ambas y posteriormente comparar.
- Magnitudes conmensurables e inconmensurables.
- Líneas conmensurables e inconmensurables en cuadrado.
- Racionalmente expresable (queda pendiente ampliar este importante concepto ya que es mucho más de lo que se ha dicho y tiene dos significados).
- Recta medial.
- Recta binomial.
- Las primeras 7 de las 13 rectas no expresables.

¿Es el Libro X, cercano a la caracterización de números los reales? Es un tema muy discutido, se le ha relacionado un carácter algebraico a este libro que en realidad es geométrico. Pero si damos una mirada moderna hay muchas cosas que nos harían pensar que si es así, luego analizando todo el trabajo que hemos hecho vemos que no.

A lo largo del estudio de la teoría surgió la necesidad de realizar un diagrama que mostrara las relaciones entre las proposiciones, uno de los que surgieron se muestra en la Figura 38

PROPOSICIONES DEMOSTRADAS

PROPOSICIONES UTILIZADAS

	D1	D2	D3	D4	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27	P28	P29	P30	P31	P32	P33	P34	P35	P36	P37	P38	P39	P40	P41	P42	P43	P44	P45	P46	P47
D1		X	X	X		X	X	X	X	X	X	X			X	X	X		X	X	X	X																													
D2			X	X										X																				X			X	X	X												
D3				X									X	X				X			X						X	X	X		X									X				X							
D4																							X	X	X	X				X			X		X	X					X	X	X		X						
P1																																																			
P2							X																																												
P3								X																																											
P4																																																			
P5												X	X		X	X																																			
P6											X		X	X	X	X					X	X								X			X					X		X		X	X					X			
P7															X																																				
P8															X																																				
P9														X																			X	X																	
P10																																																			
P11														X				X					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X		X	X	X		X			X			X			X
P12																	X				X																														
P13																						X				X	X			X									X									X			
P14																																			X	X															
P15																					X																			X		X						X			
P16																						X								X										X			X	X							
P17																																																			
P18																																					X	X	X												
P19																													X																						
P20																														X												X									
P21																										X	X		X		X	X			X	X	X									X					
P22																											X		X	X												X			X			X			X
P23																																X			X	X															
P24																																																			
P25																																																			
P26																																														X	X		X	X	
P27																																																			
P28																																																			
P29																																			X	X															
P30																																			X		X														
P31																																						X													
P32																																							X												
P33																																											X								
P34																																												X							
P35																																													X						
P36																																									X	X			X	X					X
P37																																															X				
P38																																																X			
P39																																																	X		
P40																																																		X	
P41																																																			
P42																																																			X
P43																																																			
P44																																																			
P45																																																			
P46																																																			
P47																																																			

Figura 38. Diagrama deductivo de las proposiciones de la primera parte del libro.

Este esquema permite observar que las proposiciones que usan mayor cantidad de proposiciones para su demostración son las más complejas y que las proposiciones más usadas son las más importantes para la teoría hipotético – deductiva, así:

- A donde llegan muchas proposiciones son proposiciones de alta complejidad lógica.
- De donde salen muchas proposiciones son proposiciones muy importantes.

Las siguientes proposiciones fueron pieza clave para nuestra comprensión de la parte de la teoría estudiada:

- Proposición 9: cuadrados de rectas conmensurables e inconmensurables en longitud.
- Lema Proposición 18: nos permitió entender qué es racionalmente y no racionalmente expresable.
- Proposición 19: rectángulo expresable
- Proposición 21: recta medial
- Proposición 36: recta binomial
- Proposición 37: recta primera bimedial
- Proposición 38: recta segunda bimedial
- Proposición 39: recta mayor
- Proposición 40: recta lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.
- Proposición 41: recta lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

La estructura de la primera parte del Libro X, de acuerdo a nuestro estudio y a la hecha por Knorr (1983) se puede resumir en la siguiente figura, en donde como habíamos mencionado con antes, las cuatro primeras definiciones son utilizadas en todas las proposiciones siguientes y los primeros grupos de proposiciones son utilizados en los siguientes, no necesariamente se utilizan todas las proposiciones dentro de esta primera parte.

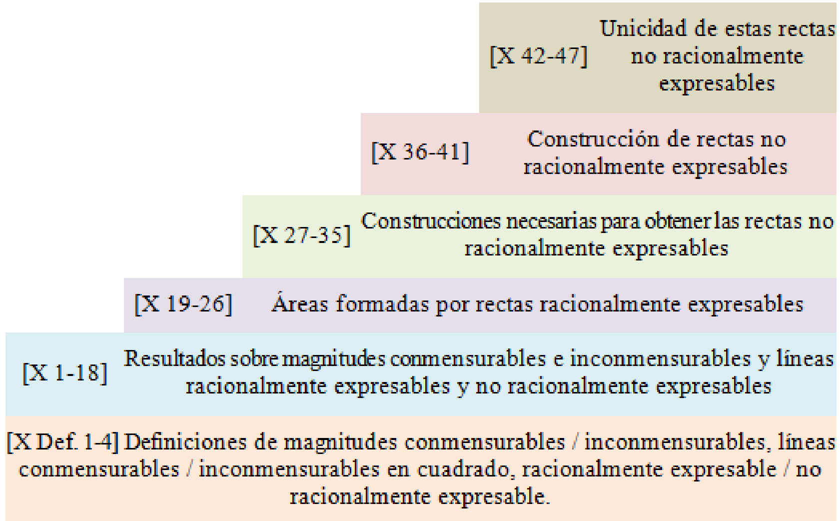


Figura 39. Estructura de la primera parte del Libro X

En el primer grupo se muestran algunos resultados sobre magnitudes conmensurables e inconmensurables y líneas racionalmente expresables y no racionalmente expresables; se constituye desde la proposición 1 a la 18 [X 1-18]. En la siguiente figura se muestra que a partir de los elementos de la izquierda se logra llegar a la demostración de las proposiciones de la derecha, en frente se muestras también los elementos con los cuales se relaciona cada proposición.

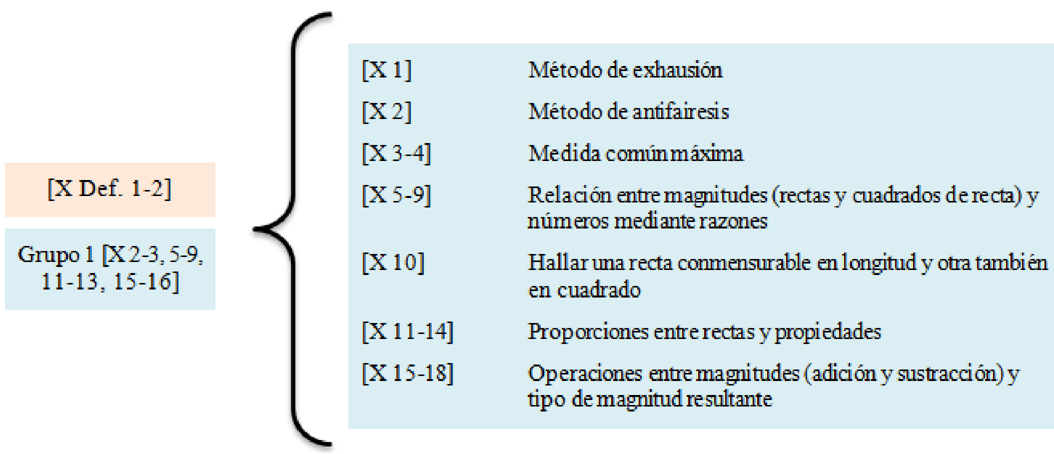


Figura 40. Grupo I. Resultados sobre magnitudes conmensurables e inconmensurables y líneas racionalmente expresables y no racionalmente expresables

Las proposiciones más esenciales de acuerdo a la cantidad de veces que son utilizadas son las proposiciones 6 y 11 que se tienen que ver con la relación entre magnitudes y números por medio de razones y con proporciones entre magnitudes respectivamente.

En el segundo grupo se hace un trabajo con áreas formadas por rectas racionalmente expresables; se constituye desde la proposición 19 a la 26 [X 19-26]. Las proposiciones más utilizadas en este grupo son las proposiciones [X 21-22] que tienen que ver con las rectas y áreas mediales y el procedimiento de aplicación de áreas.

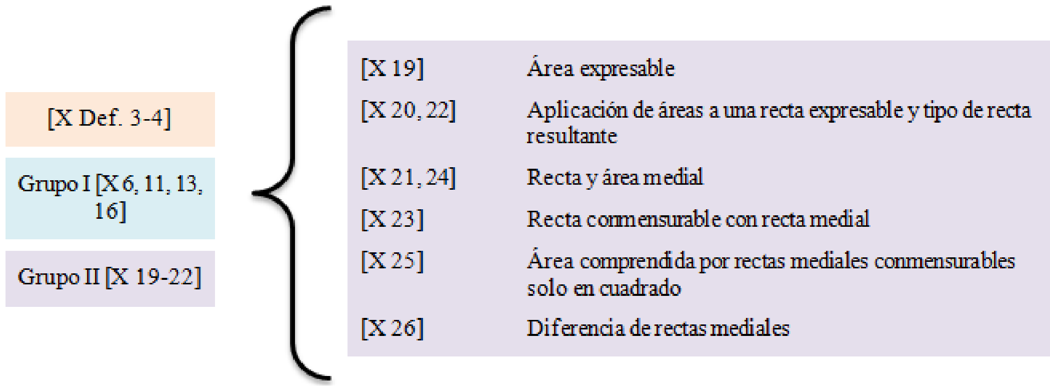


Figura 41. Grupo II. Áreas formadas por rectas racionalmente expresables

En el tercer grupo se hace una serie de construcciones que serán utilizadas para obtener las rectas no racionalmente expresables en el siguiente grupo. Está conformado por las proposiciones [X 27-35] de las cuales ninguna tiene mayor uso en la teoría, sin embargo son necesarias para la demostración de proposiciones importantes.

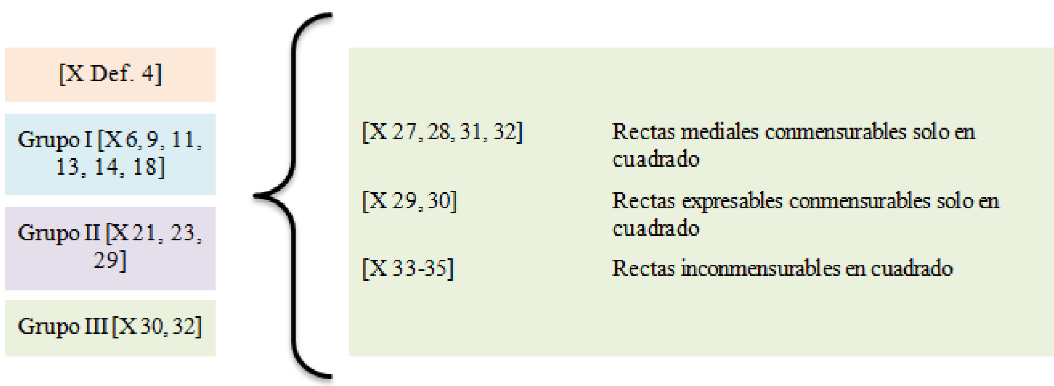


Figura 42. Grupo III. Construcciones necesarias para obtener las rectas no racionalmente expresables

En el siguiente grupo de proposiciones se construye la recta binomial [X 36] y a partir de ella se construyen las demás [X 37-41].

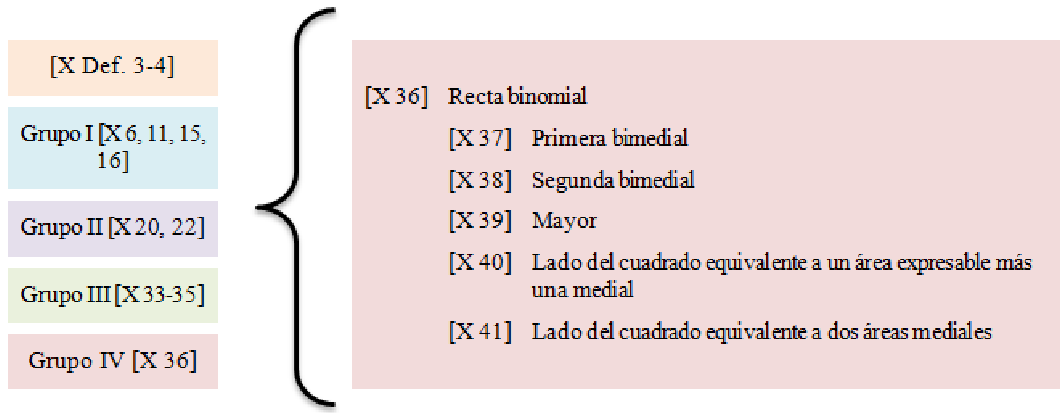


Figura 43. Grupo IV. Construcción de rectas no racionalmente expresables

El quinto grupo está conformado por la proposiciones [X 42-47] y se interesa por demostrar que las rectas no expresables halladas en el grupo anterior solo pueden dividirse por un único punto en dos rectas que cumplan las mismas condiciones de las dos rectas que las generaron; es decir, su unicidad.

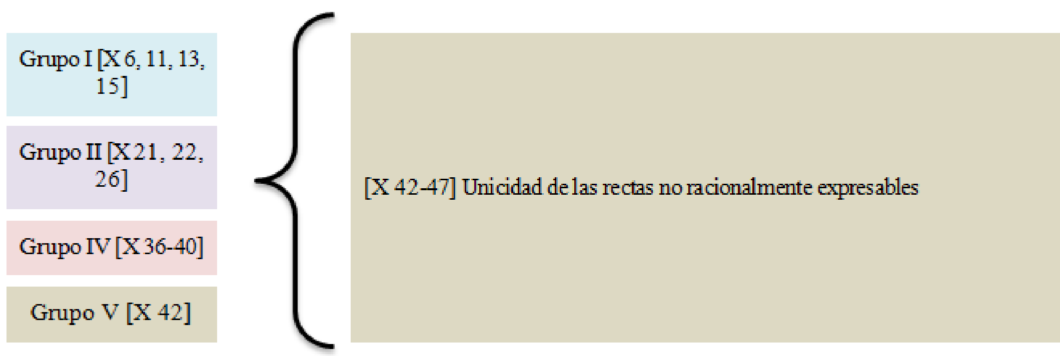


Figura 44. Grupo V. Unicidad

Trans-proposición

De la comprensión general del Libro X podemos comentar que al finalizar el análisis de toda la primera parte del libro se logró realizar además un análisis holístico (contrario al análisis individual). Miramos interrelaciones entre los fragmentos de manera holística para reconocer particularidades de la teoría.

Nuestro trabajo no se centra en la versión original de la obra de *Elementos,* sino que se trabaja sobre traducciones de traducciones. Se propuso un trabajo inicial que consista básicamente de dos actividades: La primera es la revisión del contexto para lograr una aproximación a la obra a partir de la introducción presente en la traducción de María Luisa Puertas de *Elementos*; se intenta identificar la hipótesis central inicialmente creímos que en el Libro X de *Elementos* se trabajaba la inconmensurabilidad, pero es mucho más que eso ¿el Libro X enseña a hacer o a deducir algo? ¿Qué? Luego identificamos los aportes y la trascendencia que tiene esta teoría para el docente de Matemáticas.
Inicialmente se revisa la introducción de (Vega, 1991) y se dejan presentes algunos asuntos a tener en cuenta durante el desarrollo de la investigación, sobre *Elementos* se tienen tres hipótesis

- La primera asegura que Euclides tan solo fue un recopilador de lo que se había hecho hasta el momento en Matemáticas (Geometría, Álgebra y Aritmética).
- La segunda dice que Euclides recoge todo lo posible de la matemática existente hasta entonces, reorganiza, crea y define nuevos conocimientos, mostrando una forma de expresión del conocimiento anterior.
- La última hipótesis es que seguramente Euclides recopila y organiza con fines educativos, por tanto *Elementos* sería una especie de libro de texto con cierto nivel de rigor dirigido para los intelectuales de la época.

Una de las características importantes a tener en cuenta es que en *Elementos* no se trabaja directamente con los objetos sino con las cualidades de los objetos. Por ello es necesario identificar, diferenciar y relacionar los objetos, las cualidades de los objetos y las cantidades de las cualidades de los objetos.

Se distingue el método de prueba enunciado por Proclo: enunciado, exposición, determinación o delimitación, preparación, demostración y conclusión. Este método de prueba se tuvo presente en el estudio de cada una de las proposiciones y definiciones del Libro X.

Ahora, saliéndonos un poco del Libro X en específico y su estructura se comentó que Euclides estructuró su pensamiento para desarrollar una teoría. Ello se evidencia en que recogió una serie de proposiciones matemáticas, buscó una estructura entre ellas y cuáles se pueden deducir de las demás, para finalmente formar una estructura que le diese a *Elementos* el carácter hipotético-deductivo. Un ejemplo de lo anterior se podría evidenciar en el Libro I en donde algunos teóricos afirman que todo lo plasmado hasta la proposición [I 46] es con el fin de demostrar el Teorema de Pitágoras correspondiente a las proposiciones [I 47,48]. Antes de *Elementos* el teorema de Pitágoras fue usado como una proposición Matemática no demostrada, es decir como una propiedad geométrica, y es así como surgen la mayoría de los teoremas.

En cuanto a los aportes que este estudio nos puede generar se ha evidenciado que se debe usar las definiciones en el marco de la teoría para que los estudiantes las entiendan. El aprendizaje no se da por acumulación de conceptos sino por la relación entre los mismos, esto lo evidenciamos durante nuestro estudio y comprensión del Libro.

En el estudio miramos las propiedades más importantes que se encuentran en el libro y de qué propiedades y construcciones se está hablando. También tuvimos que elevar la mirada de manera general, es decir realizar una mirada más general del libro (en cuanto a su estructura) y no concentrarnos tanto en los detalles (proposiciones) con el fin de estar en la capacidad de contestar ¿de qué trata el Libro X?

Observamos que hay dos formas que podemos identificar la relevancia de las proposiciones, una es las proposiciones que se usan mucho y otras son las proposiciones que utilizan muchas otras en su demostración. De las que son muy usadas vemos que son fundamentales y que contienen conceptos clave y en las que se usan muchas proposiciones para su demostración vemos que son muy importantes contiene una mayor complejidad en la comprensión de su demostración.

Elementos es un hito[31] en tanto constituye una nueva forma de hacer matemática teórica. Se resalta el reconocimiento de *Elementos* como un libro de Matemáticas y de Historia de las Matemáticas. Específicamente en la versión estudiada al estudiar la teoría se está estudiando

---

[31] Suceso o acontecimiento que sirve de punto de referencia

Matemáticas y al revisar los comentarios históricos de quien conoce la historia que enmarca la obra se está estudiando Historia de las Matemáticas; esto es un ejemplo claro de que la Matemática antigua es diferente a la Historia de las Matemáticas.

Revisamos también otras fuentes, como los videos de *História da Matemática para Professores*[32] el video *Matemática pré-euclideana* se refiere dos temas que son números figurados como resultado no necesariamente del Teorema de Pitágoras y el método de Antifairesis. El video toca el problema de la inconmensurabilidad y es en el Libro X en donde vemos cómo se enfrenta este problema. Con respecto a los demás videos de Historia Matemática para profesores solo el primero se relaciona en alguna manera con el asunto de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad. El video *Os Elementos de Euclides* el video cuatro, *Elementos* de Euclides habla sobre el libro en general, tomando algunos ejemplos de proposiciones, sin embargo el Libro X no es tratado en profundidad y en el video cinco, *Elementos de Euclides 2*, trata específicamente sobre los libros V y VII.

Al hacer una búsqueda en Google se habla del trabajo de Teeteto, supuestamente de números irracionales. Lo que en realidad trabajó fue con inconmensurabilidad y no con irracionalidad pues esta solo se comprende hasta la formalización de los números reales. En el Libro X aparece el fantasma de la irracionalidad debido a las interpretaciones hechas en las diferentes versiones por eso es importante saber lidiar con esto y no confundir la idea de irracionalidad con la condición de ser racionalmente expresable. El ser racionalmente expresable es: una condición sobre una magnitud; una propiedad de un objeto en relación con otros. Así, una magnitud puede ser racionalmente expresable en relación con otra magnitud, pero la medida de esa magnitud no es racionalmente expresable con la medida de otra magnitud.

En el Libro X, y en general en *Elementos*, no es posible encontrar información acerca de Euclides, sin embargo es posible identificar la estructura organizativa y su manera de trabajar con

[32] Disponibles en: https://www.youtube.com/playlist?list=PLxxuPLq9LHx5a_hliq6YPqlmop_2CWbr2

elementos que podrían considerarse un problema. Euclides no intenta solucionar el problema de la inconmensurabilidad sino que lo aborda y trabaja con él; por ello consideramos que el Libro X no es una simple clasificación de rectas sino un estudio de las mismas, trabaja con ellas y muestra su comportamiento; Euclides intenta dominar la inconmensurabilidad.

En diferentes momentos del estudio se obtuvo información sobre el contexto de la obra, a partir de este punto se identificaron insumos para el estudio del Libro revisando y comprendiendo las demostraciones y proposiciones, teniendo presente la teoría y organizando cuando fue necesario para una mejor comprensión.

Para comprender la teoría expuesta en el Libro X, es necesario estudiar todo lo que la compone, comprender la interacción de esos elementos entre sí y la finalidad de la teoría; este es un problema que se presenta cuando se estudia matemáticas, estudiar los elementos que componen la teoría sin lograr hacer una síntesis de la teoría, este debería ser el objeto de estudio de una teoría matemática; esta es una de las razones por las cuales no se entiende lo que se aprende. Cuando el profesor ha enseñado muchas veces una teoría, comienza a entender la teoría, o parte de la teoría; pero al entender la síntesis de la teoría, logra organizar mejor esos conocimientos para mostrar a los estudiantes la síntesis desde el principio y nuevamente luego del curso. Es necesario que el estudiante aprenda la síntesis de la teoría dentro del mismo curso y no que deba entenderla posteriormente. Se reitera que entender la globalidad es entender la teoría.

Consultamos en algunos documentos de contenido tanto teórico como histórico específicamente del Libro X, se encontró bibliografía específica del Libro X en Inglés; (Roskam, 2009), este documento es netamente teórico, se hojeó la parte de las conclusiones, ello no sugirió la importancia de hacer referencia al desarrollo de los números reales en las conclusiones del presente trabajo. También se volvió a recordar que la inconmensurabilidad es algo propio de dos magnitudes y la irracionalidad propia de un número y que existió una necesidad de clasificar la inconmensurabilidad. Finalmente el documento concluye resaltando la presentación sistemática del libro, su densidad y la importancia escolar del tema. De (Knorr W. , 1983) se puede decir que trata en su mayoría la parte teórica y nos permite entender el pasado el Libro X, el antes de.

(Knorr W. R., 1974) De este libro se revisó el índice, se observó que antes de Euclides, hubo un personaje en el cual no nos habíamos fijado que se ocupó del tema de la inconmensurabilidad, Teodoro. También observamos que se habla del diámetro del cuadrado, que es igual a la diagonal, pues una definición de diámetro de una circunferencia sería la mayor cuerda, que en un cuadrado es la diagonal.

Hablamos acerca de la relación de las rectas medial, binomial y apótoma con las medias geométrica, aritmética y armónica respectivamente. Pudimos darnos cuenta que ahora podemos ver la relación entre ello, pero en la antigüedad no había tal relación, esas son interpretaciones modernas.

Hay que tener cuidado a la hora de usar los términos racional e irracional, pues en los documentos, los autores hacen uso de estas palabras, no con el sentido moderno que tienen aplicadas a los números, sino como se trabajan en *Elementos*, aplicadas a las magnitudes y en un significado más amplio como racional y no racionalmente expresable. Tenemos que hacer claridad en que no estamos confundiendo el trabajo del Libro X con Aritmética de números reales. Roskam y Knorr cometen el error de hacer lecturas modernas del Libro X.

En el artículo de Roskam se entiende algo sobre la aparición de Álgebra en *Elementos*, pero durante la asesoría se evidenció que no hay tal álgebra en *Elementos*. Asumir lecturas desde lo algebraico es asumir lecturas **anacrónicas**. Por ejemplo en la actualidad podemos hacer una interpretación algebraica de la media geométrica, pero en la antigüedad no se contaba con esa notación.

La revisión de la bibliografía sugerida en Inglés nos aporta información acerca del problema (y solución) de la inconmensurabilidad, los documentos nos muestran otros autores y lo que dicen acerca del Libro X y de la inconmensurabilidad.

2.2.3 **Líneas argumentativas y cadenas deductivas**

El Libro X desarrolla toda una teoría de la inconmensurabilidad hasta donde se ha podido observar, define lo que es conmensurabilidad e inconmensurabilidad, luego realiza una relación mediante razones entre números y magnitudes extendido a las áreas, lo que le permite estudiar relaciones y particularidades de las rectas y áreas racionalmente expresables para finalmente llegar a una clasificación única de rectas no racionalmente expresables. Estos resultados son utilizados como argumentos en las demostraciones y construcciones presentes en los libros siguientes.

Parte de cuatro definiciones, y se pueden identificar cinco grupos de proposiciones, los primeros tres grupos son resultados necesarios para obtener las rectas no expresables (grupo 4) y posteriormente probar su unicidad (grupo 5):[33]

- Grupo I [X 1-18]: Resultados sobre magnitudes conmensurables e inconmensurables y líneas racionalmente expresables y no racionalmente expresables
- Grupo II [X 19-26]: Áreas formadas por rectas racionalmente expresables
- Grupo III [X 27-35]: Construcción necesarias para obtener las rectas no racionalmente expresables
- Grupo IV [X 36-41]: Construcción de rectas no racionalmente expresables
- Grupo V [X 42-47]: Unicidad de estas rectas no racionalmente expresables

2.3 Nuestra postura

El Libro X de *Elementos* está compuesto de tres partes, con un total de 115 proposiciones y 16 definiciones. Este libro refleja un tratamiento dado a la conmensurabilidad e inconmensurabilidad (propias de magnitudes geométricas como longitud, superficie, volumen y amplitud angular). Esta obra muestra que para Euclides la inconmensurabilidad no era un problema, sino que aquí él la enfrenta, la caracteriza y organiza de tal forma que se convierte en un concepto totalmente útil del cual se desencadena la particularidad del ser o no "racionalmente expresable"; posteriormente muestra unos tipos de líneas rectas (segmentos) no racionalmente expresables y demuestra unas

[33] En el Anexo 5. Definiciones y proposiciones se observa una síntesis de cada una de las proposiciones estudiadas.

propiedades de estas rectas, también definiéndolas, caracterizándolas y organizándolas para utilizarlas posteriormente en otros libros.

En la primera parte del libro desarrolla la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad, rectas racionalmente expresables, rectas y áreas mediales y rectas binomiales las cuales se clasifican en seis rectas[34]; En la segunda y tercera parte del Libro X se hace un tratamiento similar al de la primera parte a las rectas no expresables.

La segunda parte del libro consta de seis definiciones[35] y 37 proposiciones [X 48-84] dentro de las cuales se incluyen las rectas no expresables seis siguientes rectas no expresables y una subclasificación de seis rectas binomiales y la tercera parte está compuesta por otras seis definiciones (primera a sexta apótoma) y 31 proposiciones [X 85-115] dentro de las cuales se incluye una subclasificación de seis rectas Apótomas,[36] que son también rectas no expresables.

Durante el desarrollo de la parte estudiada de la teoría se pueden identificar proposiciones que se pueden asociar con objetos matemáticos o propiedades conocidas actualmente como se mostró con anterioridad.

Al revisar la conexión entre las proposiciones de la primera parte del libro se identifican cuatro proposiciones que son usadas con mayor frecuencia para demostrar las demás, estas son:

- Proposición 6: Ligada a la relación entre magnitudes que guardan o no la misma razón que un número con un número; en la proposición 9 se extiende este resultado a los cuadrados de dos rectas que guardan la misma razón que un número cuadrado con un número cuadrado.

[34] Rectas Binomiales: primera bimedial, segunda bimedial, mayor, lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial y lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales.

[35] Definiciones de las seis rectas binomiales

[36] Rectas apótomas:

- Proposición 11: Establece que al tener cuatro magnitudes en una proporción la relación de conmensurabilidad o inconmensurabilidad de la primera con la segunda, se cumple también para la tercera y la cuarta.
- Proposición 21: Aparece el término recta medial que es la recta cuyo cuadrado es un área no expresable, esta área no expresable está comprendida por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado.
- Proposición 22: Mediante la aplicación de un área medial a una recta expresable se produce un recta expresable inconmensurable en longitud con la primera.

Además de las definiciones, los procedimientos claves parecen ser, la razón entre magnitudes comparada con la razón entre números; las proporciones entre magnitudes; la recta medial, y la aplicación de áreas en una recta.

Sin embargo existen proposiciones que, por el contrario, no son utilizadas al menos en esta primera parte:

- Proposición 1: Utilizada para emplear el método de exhasión: es una proposición que muestra una operación entre magnitudes
- Proposición 4: Medida común máxima de rectas: como método para determinar tres o más magnitudes son inconmensurables entre sí, se considera una generalización de la proposición anterior, por lo que es necesario tener la anterior para poder demostrar esta.
- Proposición 10:Halla una recta conmensurable en longitud y otra también en cuadrado con una recta dada
- Proposición 17: Establece cuándo la diferencia de los cuadrados de dos rectas conmensurables produce un cuadrado de una recta conmensurable con recta mayor
- Proposición 24: Área medial: comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud
- Proposición 25: El área comprendida por rectas mediales conmensurables solo en cuadrado es medial o expresable
- Proposición 27: Rectas mediales, conmensurables solo en cuadrado que comprendan un área expresable.

- Proposición 28: Rectas mediales, conmensurables solo en cuadrado que comprendan un área medial.
- Proposición 41: La recta lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales
- Proposiciones 43-47: Unicidad de estas rectas no racionalmente expresable

Capítulo 3. APORTES PARA LA FORMACIÓN PERSONAL Y PROFESIONAL DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS

Como uno de los objetivos por cumplir y las actividades a realizar durante el desarrollo del trabajo planteamos el reconocimiento de aporte que contribuyan a la formación docente tanto personal como profesional, para tal fin nos basamos en el documento La Historia de las Matemáticas en la Educación de un Profesor: Razones e Intenciones (Guacaneme Suarez, 2011). Pretendemos dar respuesta a la pregunta; ¿qué lleva a un profesor a estudiar la historia y para qué?, reconociendo también aportes y aprendizajes que nos ha generado el estudio del Libro X.

Así pues, en el documento se plantea la cuestión del papel de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento de los profesores de matemáticas, la racionalidad o el por qué y las intenciones o el para qué. En el documento se reconocen una serie de artefactos proporcionados por la Historia de las Matemáticas que favorecen el conocimiento del profesor de matemáticas y que consideramos como las primeras tres categorías para identificar aportes y las otras tres categorías surgen de los instrumentos que se relacionan con los artefactos, estas categorías son: (i) V**isiones de la actividad matemática:** aquí se considera la tarea de hacer matemática que muchas veces se oculta en los resultados y su comunicación, se reconoce que esta ha estado ligada a diversas razones (utilitarias, recreativas, relacionadas con otras disciplinas, entre otras) y se ha visto afectada por otros (sociales, culturales). (ii) **Visiones de los objetos matemáticos:** la Historia de las Matemáticas permite reconocer asuntos relacionados con los objetos matemáticos como preguntas, problemas, formas de pensamiento, entre otros. Se sostiene que esta muestra relaciones de las matemáticas con otras disciplinas y la evolución de los conceptos, las representaciones y el lenguaje. (iii) **Competencias profesionales:** el estudio de la historia de las Matemáticas fomenta la adquisición de competencias profesionales que trascienden del conocimiento matemático como la capacidad de escucha, la indagación de fuentes, la forma de expresar ideas, entre otras. (vi) **Transformación de la manera de enseñar:** está relacionada con las visiones de la actividad matemática, se reconoce que incorporar una perspectiva histórica transforma la visión de la actividad más allá de sus resultados y se reconoce que el profesor de matemáticas debe tener una visión más amplia y diversa de lo que enseña. (v) **Historia como**

posible fuente de recursos para la enseñanza: la historia proporciona enfoques para la enseñanza de los conceptos, además permite ver de manera diferente a los estudiantes y comprender el porqué de la dificultad que se les presenta con algunos conceptos. (vi) **Fortalecimiento de la valoración y el papel de la profesión docente:** la historia contiene algunos materiales proporciona una reflexión del papel del profesor de matemáticas con respecto a su función y además permite comprender la evolución de la profesión docente.

3.1 Visiones de la actividad matemática

¿La historia permite cambiar la visión de las Matemáticas y de la actividad matemática?

Se reflexiona acerca de las concepciones de la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas, esto hace que se considere lo que es la actividad matemática y sus efectos en la enseñanza. La componente histórica es fundamental en la formación del docente de matemáticas, tanto para su propio aprendizaje y para posibilitar su desempeño profesional, dando una visión humana, pues muestra como el hombre transformó hechos y acciones en conocimientos, cómo fue su origen, sus dificultades, errores y el valor de estos errores.

El desarrollo de una teoría matemática afronta dificultades en el proceso de constitución y consolidación de saberes, aún hoy hay teorías matemáticas en continuo desarrollo, por lo que se debe tener conciencia del tiempo en el cual se logra consolidar un saber y reflexionar sobre el tiempo en el cual se pretende transmitir esos saberes a los estudiantes en el aula, y además del grado de apropiación de los mismos; específicamente en el trabajo del Libro X de *Elementos*, se revisa una parte de la teoría de la inconmensurabilidad en un momento histórico específico, la cual también hace parte del desarrollo de la idea de irracionalidad, fundamentada en otro momento histórico posterior con siglos de diferencia; en la misma obra *Elementos* también se evidencia, de manera más formal, cómo está teoría de inconmensurabilidad es sustentada por teorías anteriores como la teoría de la proporcionalidad, y además sustenta resultados en libros posteriores, mostrando un ejemplo de que las teorías matemáticas no son lineales.

Euclides recopila una serie de resultados y reconoce una serie de estructuras, jerarquías y dependencias para formalizar las teorías expuestas en *Elementos.* A pesar de lo estudiado, queda la curiosidad de cómo logra identificar estas estructuras y los objetos que necesitaba definir, cómo logra identificar que debe realizar un tratamiento análogo a las rectas binomiales y apótomas y en general cómo surge la necesidad del tratamiento de magnitudes inconmensurables. Para obtener estas respuestas, seguramente se tendría que realizar un estudio más profundo de *Elementos*, especialmente a los libros posteriores en los cuales aplica los resultados obtenidos en el Libro X.

3.2 Visiones de los objetos matemáticos

¿La historia permite cambiar la visión de los objetos matemáticos?

En cuanto a la visión de los objetos matemáticos, este proyecto nos ha permitido cuestionarnos acerca del tratamiento dado a la inconmensurabilidad, hemos podido caracterizarlo y reconocer que este ha sido cambiado con el paso del tiempo, ello debido a lecturas modernas; así pues pudimos darnos cuenta de que si estudiamos la historia de un objeto matemático logramos una comprensión más profunda y en ocasiones muy distinta a la que teníamos inicialmente.

En el planteamiento del proyecto nos cuestionamos acerca de cómo trataba Euclides la inconmensurabilidad, inicialmente creíamos que esta había sido un problema, por los antecedentes históricos que ya conocemos, pero finalizando el estudio del libro podemos concluir que la inconmensurabilidad no fue un problema para Euclides y que en el tratamiento que él le da la organiza, caracteriza y trabaja con ella, pues así se evidenció a lo largo del estudio.

Los objetos matemáticos que podemos identificar y de los cuales cambiamos nuestra visión durante el estudio son:

- Razón
- Proporción
- Inconmensurabilidad
- Irracionalidad

De los de razón y proporción podemos decir que los símbolos condicionan lo que uno entiende del objeto, hay pues una estrecha relación entre el símbolo y el significado. Por ejemplo el símbolo "=" se utiliza indistintamente para decir que dos es a cuatro como tres es a seis o que dos cuartos (0,5) es igual a tres sextos (0,5). Así pues concluimos que el significado se deja condicionar por el símbolo, entonces la forma en la cual pensábamos estos objetos cambió, pues ahora estamos en la capacidad de distinguir que son diferentes.

Y de los de irracionalidad e inconmensurabilidad reconocemos que durante mucho tiempo ha habido una confusión entre ellos, pero que son dos objetos muy distintos, pues la inconmensurabilidad es una característica propia de dos magnitudes geométricas y la irracionalidad es propia de un número. La irracionalidad surge posterior a la inconmensurabilidad, siendo esta propia de un número, que asociamos a una magnitud no racionalmente expresable.

3.3 Competencias profesionales

¿Qué competencias profesionales desarrolló nuestro trabajo de grado en nosotras?

El estudio de las Historia de las Matemáticas permite el desarrollo de ciertas competencias en los docentes, importantes no solo en el aula sino en su formación personal y profesional, pues estas trascienden del conocimiento matemático. Guacaneme (2011) menciona algunas de estas: leer, escribir, escuchar, buscar fuentes, discutir, analizar y hablar sobre las matemáticas; sensibilidad, tolerancia y respeto hacia maneras no convencionales de expresar ideas o resolver problemas; valoración de la persistencia y el ánimo ante la adversidad.

Arcavi menciona que el conocimiento de la Historia de las Matemáticas desarrolla en los docentes la capacidad de escucha desde los marcos de referencia del otro (el estudiante), esto se ha evidenciado en nuestro trabajo en tanto que en la fase inicial no teníamos conocimiento de la forma de proceder de los matemáticos antiguos y tratamos de algebraizar algunas de las proposiciones para entenderlas mejor, o en algunas ocasiones veíamos las proposiciones a la luz de hoy, con los objetos matemáticos con los que contamos actualmente, sin tener en cuenta que por ejemplo los números irracionales fueron muy posteriores a la inconmensurabilidad y que en la antigüedad no se contaba con ellos. Todo esto nos llevó a pensar que muchas veces en el aula no observamos las visiones de los estudiantes desde los conocimientos que ellos tiene, sino que pretendemos que ellos vean cosas que nosotros vemos, teniendo en cuenta que los conocimientos que se tienen de una y otra parte son totalmente distintos.

La teoría de Euclides está compuesta por enunciados retóricos, lo gráfico es un punto intermedio entre lo retórico y lo simbólico (que es como la lectura moderna que nosotros intentamos hacer a la hora de comprender alguna proposición). Por ejemplo para Euclides el cuadrado de un número era un cuadrado construido sobre un segmento de lado el número dado, para nosotros es simplemente elevar al cuadrado. Así pues, este trabajo también nos permitió reconocer asuntos de discusión en la investigación en Didáctica de las Matemáticas como simbolización y representación.

3.4 Transformación en la manera de enseñar

El enfoque histórico cambia la visión de las matemáticas y la actividad matemática, también trae efectos en su enseñanza, pues se promueven principios metodológicos que atiendan a la adquisición de procedimientos que movilicen el saber matemático en los individuos.

Al introducir el componente histórico-cultural, en particular la reconstrucción de problemas, también puede traer un impacto positivo en la actitud, motivación y comprensión por parte de los estudiantes acerca de los objetos matemáticos implicados. Por ejemplo, el procedimiento para hallar la medida común máxima de dos magnitudes, se relaciona con el procedimiento de hallar el máximo común divisor de dos números enteros positivos, y podría ser aplicado en el aula mejorando la comprensión de la idea central de los procesos análogos.

También podría ser posible el estudio de conceptos y definiciones en diferentes tiempos de su desarrollo, evidenciando las dificultades y alcances logrados en cada etapa de la historia promoviendo el aprendizaje de los estudiantes; sin embargo se debe tener conciencia que no todos los concepciones pueden ser abordadas en el aula, específicamente las condiciones de inconmensurabilidad no son abordadas en el aula, sin embargo la irracionalidad si, aunque con un cierto grado de profundización.

Al abordar los conceptos matemáticos a partir de sus diferentes momentos de desarrollo, se hace conciencia sobre el ritmo de aprendizaje en la historia, entendiendo que los estudiantes también tienen un ritmo de aprendizaje propio, en este proceso, el docente actúa como moderador de estos ritmos de aprendizaje, permitiendo involucrar al estudiante con el concepto a nivel histórico-cultural y logrando la comprensión más profunda en menos tiempo.

3.5 Historia como posible fuente de materiales o recursos para la enseñanza

Como aportes prácticos del estudio de la Historia de las Matemáticas en el aula están las aplicaciones de los objetos matemáticos, los procedimientos utilizados por antepasados, el tratamiento conceptual del momento histórico, el manejo de la crítica por parte de los estudiantes y el reconocimiento del valor cultural y humano de la actividad matemática. Al estudiar la historia nos damos cuenta también del porqué de muchos de los errores que cometen los estudiantes en su proceso de aprendizaje, pues históricamente hubo obstáculos epistemológicos que al ser superados aportaron al desarrollo de las Matemáticas y muchos de esos obstáculos son los mismos que se les presentan a los estudiantes. Si hubiésemos conocido los posibles errores cometidos por Euclides al formular la teoría de *Elementos*, tal vez esto se hubiera constituido en un recurso para la enseñanza.

Es responsabilidad del docente llevar estos aportes al aula mediante el diseño de actividades que incluyan los problemas que fueron en la antigüedad y permitir al estudiante abordarlo a partir de las herramientas temporales de la época del problema y mediante la mirada actual, de tal manera que se cree una conciencia en el mismo y comprenda de una manera más profunda los objetos matemáticos asociados.

3.6 Fortalecimiento de la valoración del papel como docentes

Debido a los aportes, tanto matemáticos, como pedagógicos y personales que nos ha proporcionado este trabajo reconocemos que como docentes necesitamos tener un conocimiento mayor al que vamos a enseñar, pues el profesor de matemáticas no debe poseer un simple conocimiento técnico, sino un conocimiento profesional, para en el momento en el que sea necesario, mostrar las Matemáticas desde diferentes perspectivas.

El desarrollo de este trabajo nos ha permitido aclarar y ampliar diferentes perspectivas del proceder de los matemáticos griegos antiguos, vemos pues que ellos poseían conceptos y lenguaje diferentes a con los que hoy contamos y por ello tuvimos que estudiar la teoría con una visión distinta a la que hoy tenemos de la geometría. Otros aportes que como docentes nos generó fue el reconocer cómo se trabaja una teoría de forma hipotético-deductiva y por último la importancia de las representaciones gráficas a la hora de entender una teoría.

Capítulo 4. CONCLUSIONES

Es este capítulo se identifican los asuntos más importantes atendiendo a los objetivos que se plantearon inicialmente

4.1 Tratamiento matemático que hace Euclides en *Elementos* a la inconmensurabilidad

El Libro X inicialmente hace un tratamiento matemático a las relaciones de conmensurabilidad e inconmensurabilidad sobre magnitudes, estos resultados sirven como sustento para desarrollar la idea de rectas (segmentos) y cuadrados de rectas (áreas) racionalmente expresables y no racionalmente expresables.

El Libro X consta de 4 definiciones y 115 proposiciones y se divide en tres partes, en la primera parte se hace un estudio de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad y algunas de sus propiedades, la construcción de rectas mediales y racionalmente expresables y el área comprendida por rectángulos cuyos lados son algún tipo de esas rectas; con estos resultados se dispone a construir seis rectas binomiales demostrando que no son racionalmente expresables y que para originar las rectas por las cuales se producen solo se puede dividir en un único punto, es decir, la unicidad de las rectas; en la segunda parte hace un estudio de las propiedades de estas rectas mediante construcciones; y en la tercera parte construye otros tipos de rectas, las apótomas, replicando y aplicando los resultados obtenidos con las binomiales aplicados a las apótomas. Esto es un ejemplo de que las teorías matemáticas no necesariamente son lineales y sus resultados se pueden obtener a partir de distintos casos con un cierto tratamiento en cada uno.

Identificamos que las proposiciones está agrupadas de acuerdo al tipo de resultados que arrojan, en el siguiente esquema mostramos cómo se relacionan de manera general los grupos de proposiciones soportando las primeras a las siguientes.

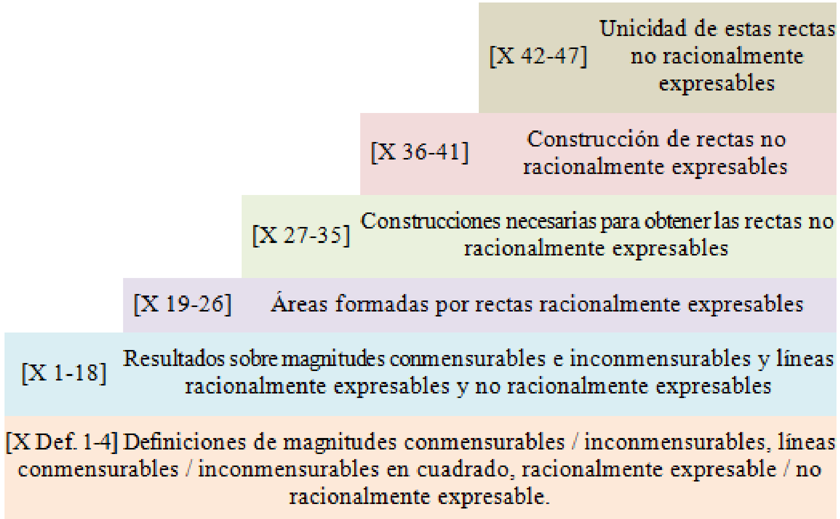


Figura 45. Estructura de la primera parte del Libro X

Es necesario aclarar que no todas las proposiciones son utilizadas en esta primera parte, seguramente algunas de ellas son utilizadas posteriormente o como lo señalan los comentarios de historiadores no son utilizadas al menos en este libro. Como podemos notar, no todas las proposiciones son teoremas también existen construcciones o problemas que se resuelven mediante el uso de los teoremas y construcciones anteriores.

Además de las proposiciones y definiciones se puede identificar el uso de porísmas y lemas. Los porísmas aparecen posterior a las proposiciones como casos específicos que se desprenden de ellas, mientras que los lemas generalmente son resultados necesarios para la demostración de la proposición, por lo cual son anteriores a esta.

Los trazos auxiliares en las demostraciones no identifican los objetos sino las convenciones necesarias para la demostración, por ejemplo se puede nombrar un segmento con una letra, igual que una recta o un número, puede disponerse en forma vertical u horizontal; las áreas pueden nombrarse con dos, tres o cuatro letras según sea necesario. Aquí lo importante es el objeto y no las características inherentes del objeto.

Para hablar de conmensurabilidad e inconmensurabilidad es necesario hablar de magnitudes geométricas (longitud, superficie, volumen y amplitud angular) pues es allí en donde se puede establecer esta relación; si dos magnitudes del mismo tipo se pueden medir con una tercera que es máxima, también del mismo tipo, entonces las dos magnitudes iniciales son conmensurables, de lo contrario son inconmensurables.

Euclides desarrolla su teoría a partir de magnitudes de longitud, llamadas rectas y de superficie, llamadas cuadrados de rectas; entonces cuando se tienen dos rectas se pueden obtener las siguientes relaciones:

- Conmensurables: las rectas son conmensurables y sus cuadrados son conmensurables
- Conmensurables solo en cuadrado: las rectas son inconmensurables y sus cuadrados son conmensurables
- Inconmensurables: las rectas son inconmensurables y sus cuadrados son inconmensurables

Siempre que dos rectas sean conmensurables se dice que son conmensurables en longitud y en cuadrado o solo en cuadrado; uno de los resultados de Euclides es que no pueden existir rectas inconmensurables en cuadrado pero conmensurables en longitud.

Como enunciamos anteriormente, a partir de los resultados sobre conmensurabilidad e inconmensurabilidad se desarrolla la idea de expresabilidad. Para ello es necesario tener una unidad de referencia cualquiera (recta o cuadrado de recta) y otra magnitud del mismo tipo, la segunda es racionalmente expresable si es conmensurable con la primera en longitud y cuadrado o solamente en longitud, y es no racionalmente expresable si es inconmensurable con la primera.

En la primera parte del Libro X identificamos cinco grupos de proposiciones que están en una relación interna.

El primer grupo de proposiciones que identificamos (1-18), muestra algunos resultados esenciales para el desarrollo de la teoría, y otros que al parecer no son tan importantes en esta parte de la teoría como se muestra en el siguiente gráfico.

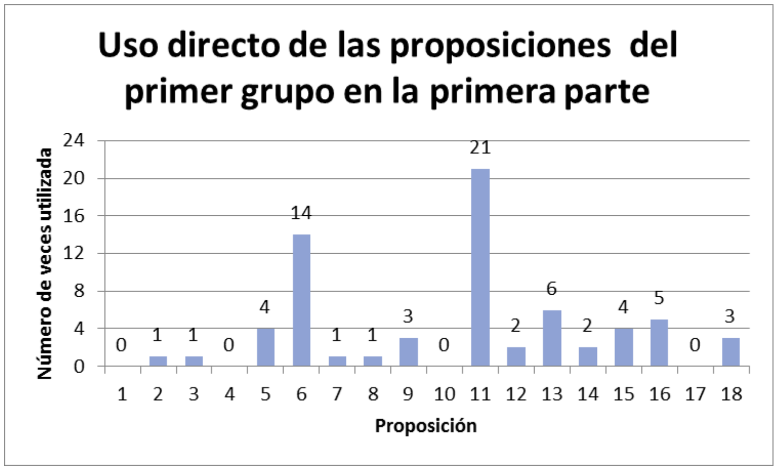


Figura 46. Uso directo de las proposiciones del primer grupo en la primera parte

Las proposiciones que sobresalen son las 6 y la 11 por lo cual podríamos decir que son proposiciones muy importantes en el desarrollo de la teoría, por el contrario la 1, 4, 10 y 17 no son utilizadas de manera directa en esta primera parte.

La proposición 6 relaciona la razón que guardan dos magnitudes con la razón que guardan dos números, así si dos magnitudes guardan la misma razón que un número con un número, entonces las magnitudes serán conmensurables.

La proposición 11 establece que al tener cuatro magnitudes en una proporción la relación de conmensurabilidad o inconmensurabilidad de la primera con la segunda, se cumple también para la tercera y la cuarta.

Al ser estas proposiciones las más utilizadas en esta primera evidenciamos que Euclides maneja el problema de la inconmensurabilidad basado en la teoría de las proporciones desarrollada en los libros V y VI. Esta parece ser la forma de trabajar de Euclides, desarrolla resultados dentro de una teoría para ser utilizados en otra, por cual no descartamos la posibilidad de que las proposiciones que no se utilizaron aquí, sean utilizadas en las otras dos partes del Libro X o en los libros XII y XIII en los cuales, según los historiadores, se pondrá en práctica la teoría.

En el segundo grupo de proposiciones (19-26) se trabaja con las áreas conformadas por rectas no racionalmente expresables, aquí las proposiciones más relevantes son las 21 y 22 y las que menos relevantes parecen son las 24 y 25 como se puede evidenciar en el siguiente gráfico.

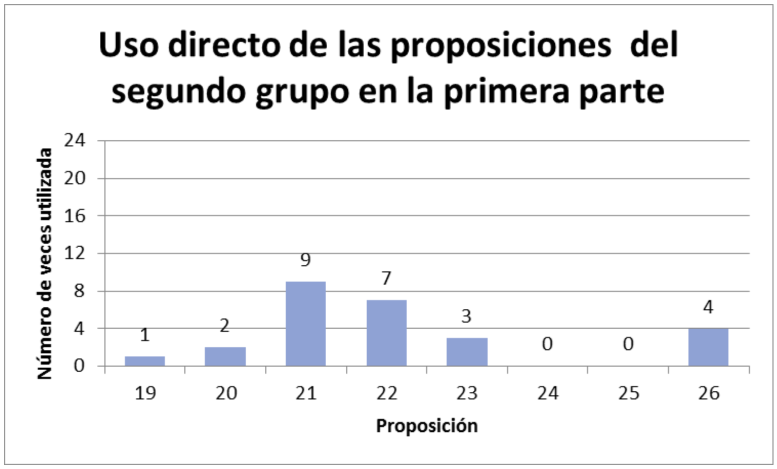


Figura 47. Uso directo de las proposiciones del segundo grupo en la primera parte.

En la proposición 21 aparece la primera recta no expresable, la recta medial que es la recta cuyo cuadrado es un área no expresable, esta área no expresable está comprendida por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado, en otras palabras es la media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado.

En la proposición 22 se establece que mediante la aplicación de un área medial a una recta expresable se produce una recta expresable inconmensurable en longitud con la primera. El método de aplicación de áreas a una recta es muy utilizado para las construcciones y la demostración de teoremas, consiste en tomar el área de un rectángulo y construir otro rectángulo que tenga la misma área y una recta específica como lado.

En el tercer grupo de proposiciones (27-35) se realizan unas construcciones adicionales utilizando los resultados anteriores, sin embargo no se destaca el uso de alguna proposición, pues como se muestra en el siguiente gráfico, cada una de ellas se utiliza máximo en dos proposiciones y las proposiciones 27 y 28 no son utilizadas.

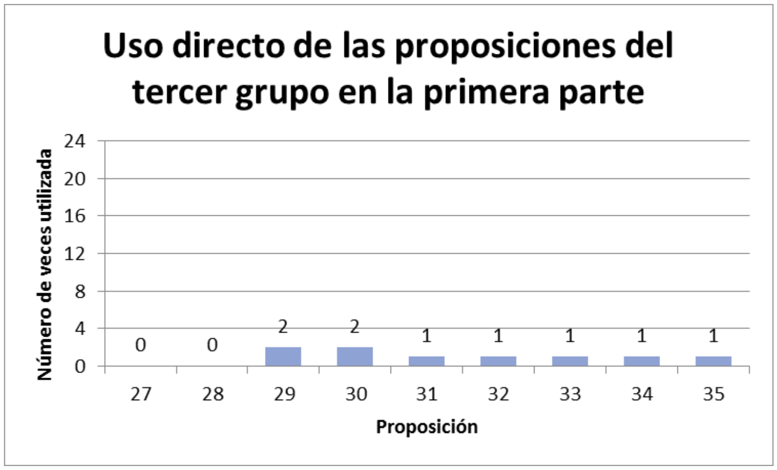


Figura 48. Uso directo de las proposiciones del tercer grupo en la primera parte.

En el cuarto grupo de proposiciones (36-41) construye las rectas binomiales: compuestas por sumas de rectas mediales o racionalmente expresables y conmensurables solo en cuadrado o inconmensurables. Aquí tampoco se destaca el uso de las proposiciones, pues en general la construcción de estas rectas no racionalmente expresables y la demostración de que son únicas en el quinto grupo de proposiciones (42-47) es la finalidad de esta primera parte del Libro X.

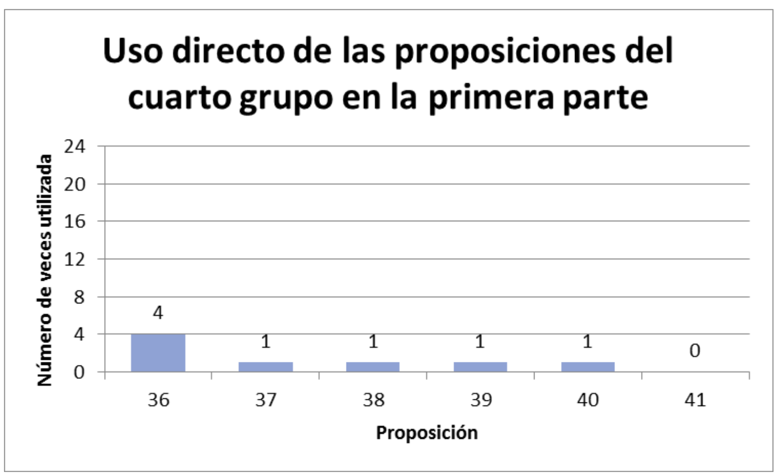


Figura 49. Uso directo de las proposiciones del cuarto grupo en la primera parte.

Las siguientes partes del libro no fueron estudiadas sin embargo se tiene idea de su contenido, como se mostró en diferentes momentos del estudio.

En el Libro X se desarrolla toda una teoría hipotético deductiva, que sirve como herramienta para el trabajo con sólidos en los libros posteriores, sin embargo eso no la hace menos importante o compleja, Euclides aborda y el problema de la inconmensurabilidad y la caracteriza

4.2 Asuntos centrales del Libro X de *Elementos* de Euclides sobre los que han versado los comentarios de los historiadores.

Acerca del Libro X de Euclides se encontró poca bibliografía en español, han sido pocos los autores que han estudiado este tema, algunos temas que se han trabajado se presentan a continuación

La finalidad del Libro X de *Elementos* según (Roskam, 2009) es la organización sistemática y clasificación de líneas irracionales, (segmentos no racionalmente expresables) a través de las ideas de conmensurabilidad e inconmensurabilidad en longitud o solo en cuadrado; la mayor parte del libro es una exploración entre las relaciones de líneas irracionales.

Euclides generaliza la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad en cuadrado y ordena las líneas irracionales binomial y apótoma en seis clases; otra consideración es que el Libro X es una investigación y recopilación hecha por Euclides de los trabajos de Teeteto y Eudoxo.

Los primeros indicios de las magnitudes inconmensurables se atribuyen a los pitagóricos y al estudio del pentágono regular y a la división de líneas de acuerdo con la sección áurea. Teeteto procede a partir de dos líneas conmensurables en cuadrado formando la media geométrica, la aritmética y la armónica que serían la medial, la binomial y la apótoma respectivamente, demostrando que son líneas irracionales. Eudoxo procede a partir de magnitudes, estudiando la diagonal y el lado de un pentágono inscrito en una circunferencia de radio racional, en donde resultan ser líneas irracionales y además la suma y diferencia respectivamente de dos líneas conmensurables solo en cuadrado

Algunos comentarios que han surgido al respecto del Libro X bajo la mirada de quienes han estudiado el libro se muestran a continuación:

- Hay un aparente cierre de la teoría con la proposición 111, por lo cual parece que las proposiciones siguientes fueron añadidas posteriormente por traductores y comentaristas, además no son proposiciones relevantes en la teoría; lo mismo sucede en varias proposiciones en sí, donde aparecen algunas inconsistencias en su demostración. Esta es una de las razones por las cuales el Libro X de *Elementos* se ha denominado como "un desastre pedagógico" o "la cruz de los matemáticos".
- Se resalta que es un ejemplo de un sistema deductivo que transforma las conclusiones geométricas en un sistema de conocimiento matemático.
- Existen grupos de proposiciones que parecen ser núcleos aislados que carecen de cohesión dentro de la teoría.

Las seis clases de cada recta se comprenden más fácilmente mediante el álgebra de magnitudes irracionales (Roskam, 2009), sin embargo esto puede considerarse un obstáculo para la compresión de la teoría. Es importante que cuando se estudia una teoría matemática se tenga en cuenta el contexto sociocultural en el cual se desarrolló y las concepciones matemáticas que se tienen. Al parecer esta es una de las razones por las cuales se genera la confusión entre la irracionalidad y la inconmensurabilidad, aclaramos que la conmensurabilidad es una relación entre dos magnitudes geométricas y la irracionalidad es una característica propia de un número,

4.3 Posibles aportes que contribuyen a la formación tanto personal, como profesional del docente de Matemáticas.

Se reconocen los aportes que trae al profesor de Matemáticas el estudio de la Historia de las matemáticas y el estudio de los objetos matemáticos en los diferentes periodos de su evolución; se hace una reflexión teniendo en cuenta el cambio en la visión de la actividad matemática, el cambio en la visión de los objetos matemáticos, las competencias profesionales desarrolladas, la transformación de la manera de enseñar, la historia como fuente de recursos para la enseñanza y el fortalecimiento de la valoración y el papel de la profesión docente.

El desarrollo de una teoría matemática afronta dificultades en su proceso de constitución; algunas veces esas dificultades por las cuales pasaron las personas que construyeron la teoría no se estudian, por lo cual es posible que en el proceso de enseñanza se presenten nuevamente. El conocer la historia y enseñar a través de ella cambia la manera de hacer matemáticas y nutre la enseñanza con procesos y procedimientos que pueden generar más interés para los estudiantes, pues puede ser considerada como un reto tanto para ellos como para el docente. Un ejemplo de ellos podría ser la solución de un problema de otra época con las herramientas que se tenían en el momento, para luego comparar su solución con las herramientas actuales, así se puede ver cómo han evolucionado las concepciones matemáticas o si es que no lo han hecho, generando una visión crítica por parte de los estudiantes, valorando el arduo trabajo de los matemáticos en la constitución de sus teorías y promoviendo la continuación de las que aún siguen en construcción.

Es necesario que el docente identifique esos asuntos centrales a enseñar, pues no es posible que el estudiante entienda una teoría en el mismo tiempo en el cual la teoría fue desarrollada. En cuanto a las notaciones utilizadas en los diferentes momentos de la historia debemos ser conscientes de no crear confusiones pues por ejemplo, en el caso de la *relación guardar la misma razón que* y la *relación de igualdad* al utilizar el mismo símbolo $(=)$ se confunden los objetos y se empiezan a tratar indistintamente.

Reconocemos que el profesor de Matemáticas debe poseer un conocimiento más profundo sobre los objetos matemáticos que enseña, no debe quedarse solo con lo que se va a enseñar en sí, pues como vemos la historia trae muchos aportes que pueden ser aprovechables en el aula. Además de los recursos de enseñanza, el estudiar historia de las matemáticas desarrolla en el docente ciertas competencias personales y profesionales, Guacaneme (2011) menciona algunas de estas: leer, escribir, escuchar, buscar fuentes, discutir, analizar y hablar sobre las matemáticas; sensibilidad, tolerancia y respeto hacia maneras no convencionales de expresar ideas o resolver problemas; valoración de la persistencia y el ánimo ante la adversidad.

BIBLIOGRAFÍA

De la Torre, A. (2006). El método cartesiano y la geometría analítica. *Matemáticas: Enseñanza universitaria, 8*(1).

Euclides. (1991). *Elementos* (Vol. 1). (M. L. Castaños, Trad.) Madrid, España: Gredos.

Euclides. (1996). Libro X. En Euclides, *Elementos* (M. L. Puertas Castaños, Trad., Vol. 3, págs. 9-197). Madrid: Gredos.

Fowler, D. H. (1992). An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements. *Historia Mathematica*, 233 - 264.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Gómez, H. A. (2014). La Historia de las Matemáticas en la Formación de Profesores: un Ejemplo de su Transposición Didáctica. *(Tesis de Maestría)*, 88 - 103. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma, 33*, 101-129.

Guacaneme Suarez, E. A. (2011). La Historia de las Matemáticas en la Educación de un Profesor: Razones e Intenciones. Bogotá, Colombia.

Guacaneme, E. (2012). Teoría euclideana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para el profesor? *Tecné, Episteme y Didaxis, 31*.

Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Divulgación Matemática, XIII*(1).

Knorr, W. (07 de 1983). "LA CROIX DES MATHÉMATICIENS": THE EUCLIDEAN THEORY OF IRRATIONAL LINES . *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY , 9*(1).

Knorr, W. R. (1974). *THE EVOLUTION OF THE EUCLIDEAN ELEMENTS A Study of the Theory of Inconmensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Boston, U.S.A.: D. REIDEL PUBLISHING COMPANY.

Navarro Loidi, J. (s.f.). Recuperado el 09 de 04 de 2015, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=504

Parra, E., & Vargas, E. (2012). *¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad? (Tesis de Pregrado).* Bogotá: Universidad Pegagógica Nacional.

Real Academia de Ciencias. (s.f.). Recuperado el 02 de Octubre de 2014, de http://www.rac.es/ficheros/doc/00182.pdf

Roskam, J. (2009). Book X of The Elements: Ordering Irrationals. *The Mathematics Enthusiast, 6*(1).

Urbaneja, P. M. (febrero de 2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*(45), 17 - 28.

Vasco, C. (1991). ¿Hay revoluciones o rupturas epistemológicas en las matemáticas? *Revista de la Facultad de Ciencias de la Universidad Javeriana*.

Vega, L. (1991). Introducción General. En Euclides, *Elementos* (M. L. Puertas Castaños, Trad., Vol. 1, págs. 7 - 184). Madrid, España: Gredos.

ANEXOS

Anexo 1. Resumen Introducción de *Elementos* por Luis Vega

ELEMENTOS

Traducción y notas de María Luisa Puertas

INTRODUCCIÓN GENERAL – LUIS VEGA

1. "Euclides", un nombre para la geometría

Elementos fue desde aproximadamente el siglo III a.C. hasta mediados del siglo pasado la obra de geometría más importante, la cual suprimía cualquier trabajo anterior a ella, e inspiraba a los siguientes; se consideraba que cualquier otro sistema geométrico se apartaba de ella, ya no eran digno de considerarse. Esta obra se constituyó en una disciplina científica y fue responsable de la fundación de la geometría y del *método axiomático*. Lo maravilloso de esta obra se relaciona con lo poco que se conoce sobre su autor y sobre la composición de sí misma y establece a dicho autor, por sí mismo, como una rama del saber.

1.1. Oscuro autor, incierto personaje

Mucho se especula acerca de la vida de Euclides, pero hay dos referencias que merecen crédito, la primera que fue discípulo de Platón (quien murió en 347), mayor que Arquímedes (quien nació en 287), y contemporáneo con Tolomeo Sóter (367/6-283). Y la segunda que enseñó en la escuela de Alejandría. En los comentarios de Proclo, se dice que Euclides compiló los *Elementos* poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados de Teeteto y dando pruebas incuestionables de aquellos que sus predecesores habían probado con escaso rigor. En un comentario al Libro X hecho por Pappo se destaca a Euclides por dar criterios para la conmensurabilidad e inconmensurabilidad en general, establecer varias clases de magnitudes irracionales y mostrar su campo de aplicación. Redondeando las fechas de las cuales se dispone se estima que Euclides alcanzó su adultez alrededor del año 300 a. C. Esta es la fecha que se indica por convención para *Elementos*.

También se han presentado varios malentendidos en cuanto Euclides y sus *Elementos*, por ejemplo en las ediciones entre 1482 y 1566 se generalizó como autor a Euclides de Mégara, un filósofo socrático; en el siglo XVI se consideraba que los enunciados de *Elementos* eran autoría de Euclides mientras que las pruebas eran hechas por Teón, un editor alejandrino y finalmente nace la pregunta de si Euclides, en lugar de un hombre fue una escuela (hecho que aunque no es imposible no tiene bases documentales).

1.2. Obras

Euclides escribió varias obras (por lo menos una decena), pero hoy se dispone de dos de ellas: *Elementos* y *Datos*, esta última puede ser un texto auxiliar de *Elementos*, relacionada con los libros I-VI. Se tienen reseñas de otras dos obras: *Fenómenos*, que es una obra sobre astronomía teórica sobre la base de la geometría esférica, y *Óptica*, que es un tratado acerca de la perspectiva y la visión directa.

Para las demás obras se cuenta con referencias; de *Sobre divisiones de figuras* hay una versión árabe y una versión moderna de R.C. Archibald (1915) alimentada también por *Practica geometriae* de Leonardo de Pisa (1220); no hay restos de *Porismas*, el cual al parecer trataba cuestiones de matemática superior; *Sobre Cónicas* trataba las secciones cónicas; *Sobre Superficies* trataba acerca de conos, cilindros, esferas; los árabes atribuyen a Euclides algunos tratados mecánicos como *Sobre lo ligero y lo pesado* y *Sobre la palanca*, esta última podría ser muestra de que antes de Arquímedes, la mecánica aristotélica no era la única posible.

1.3. Los "*Elementos*"

En la versión actual los *Elementos* están compuestos por 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros, además han aparecido libros apócrifos que complementarían al Libro XIII, pero estos son de inferior calidad.

Los métodos utilizados son las construcciones por reglas y compás, el método de exhausión y la axiomática.

Comprende diversos campos temáticos de la matemática elemental:

- teoría de la geometría plana (libros I al IV)
- teoría de la geometría del espacio (Libros XI a XIII)
- teoría generalizada de la proporción (Libros V y VI)
- teoría de la aritmética (Libros VII al IX)
- conceptualización de la inconmensurabilidad y una clasificación de las variedades de rectas irracionales (Libro X)

2. Los "*Elementos*", una escritura que hizo historia

Para los griegos era importante la composición de *Elementos Matemáticos*. Pues como dijo Proclo, si se cuenta con unos elementos de geometría, cabe entender el resto de esta ciencia, mientras que sin ellos no será posible comprender su complejidad y las demás partes resultarán inalcanzables. Lo anterior se extiende a las matemáticas en general. "Matemática" (viene de aprender, instruirse, llegar a ser).

2.1. La tradición de los tratados de *Elementos*

Algunos tratados anteriores a *Elementos* de Euclides son el de Hipócrates de Quíos (470-400 a.C.), el de León (ubicado entre Eudoxo y Platón), y el de Teudio de Magnesia. Se menciona a Hermótimo de Colofón, quien fuese más joven que Euclides, como descubridor de muchos de los elementos.

El término "elementos" tenía diferentes usos. Recibían este nombre las compilaciones que reunían conocimientos primordiales y básicos, también se llamaban "elementos" las proposiciones que jugaban un papel primordial en la obtención u organización deductiva de otros resultados. Así pues, lo que sirve para deducir un resultado posterior puede considerarse un elemento de este resultado.

En un sentido más propio y restringido, "elemento" se denomina un grupo de principios dentro de una disciplina, sobre los cuales se fundamenta un cuerpo sistemático de conocimientos. Señala Proclo que este significado más riguroso es el que mejor se ajusta a los *Elementos* de Euclides.

Según Proclo, algunas de las virtudes que enaltecen los *Elementos* son: El acierto y la discriminación que gobiernan la selección de los teoremas y problemas considerados; la riqueza de los métodos empleados, y; la continuidad de las pruebas y el hecho de proceder conforme al orden de consecuencia debido. Afirma también Proclo que el sistema de *Elementos* supera a todos los demás.

En *Elementos* se visualiza que Euclides no solo se preocupó por enseñar, sino porque sus lectores pudieran aprender y construir lo enseñado.

2.2. El lugar del tratado de Euclides en la tradición de "*Elementos*"

Se puede realizar una distinción entre los sentidos genérico y estricto de "elemento", en el primero hablamos de un núcleo deductivo (organización parcial) y en el segundo de una teoría deductiva (tratado).

Elementos es el primer tratado que distingue un conjunto determinado de primeros principios y el único que los distingue en definiciones, postulados y nociones comunes; debido a su magnitud hicieron desaparecer tratados anteriores como:

- Los primeros *Elementos* son de Hipócrates de Quíos, los cuales respondían a un sentido amplio o genérico y a su empleo como principios instrumentales, como proposiciones capitales dentro de núcleos deductivos ordenados a la solución de problemas.
- Allí mismo se sitúan los *Elementos* de León, al cual se le atribuye el descubrimiento de diorismos, cuya finalidad es investigar cuándo un problema es susceptible de solución o no.
- Sobre los *Elementos* de Teudio no se tiene información.

Para Aristóteles son elementos "las proposiciones geométricas cuyas demostraciones están contenidas en las pruebas de otras proposiciones, de todas o de la mayoría" y "las demostraciones primeras e implícitas en otras se llaman elementos".

Tradicionalmente los *problemas* se refieren a la construcción de un objeto geométrico y los *teoremas* se refieren a una proposición a establecer acerca de alguna característica esencial de los objetos matemáticos construidos. En *Elementos* de Euclides tanto problemas como teoremas se presentan como proposiciones con un patrón de prueba común. Proclo señala los siguientes pasos, aunque no siempre se presentan todos, nunca han de faltar el enunciado, la demostración y la conclusión:

- Enunciado: en términos generales lo dado y lo que se espera probar o la proposición del objeto a construir.
- Exposición: presentación de lo dado o introducción de un caso determinado (Sea…).
- Determinación o delimitación (diorismós): especificación del objeto de la prueba por referencia al caso expuesto; en los problemas se hace mediante la fórmula "lo que se requiere es…" y en los teoremas con la fórmula "digo que…"
- Preparación: disposición de construcciones y relaciones a partir de lo dado.
- Demostración: derivación de consecuencias sobre la base de conocimientos previos.
- Conclusión: confirmación de que el objeto de la prueba ha sido establecido.

2.3. La institucionalización de los *Elementos*

Los *Elementos* marcaron un hito en la tradición matemática griega. Esta obra recopiló muchos conocimientos de los geómetras alejandrinos. Se puede señalar algunos aspectos importantes acerca de los *Elementos* como que debido a lo magnífico de esta obra, se hizo innecesario cualquier tratado anterior de las mismas características y trazó una ruta para las investigaciones siguientes. Los *Elementos* se convirtieron en una autoridad en geometría y a ellos se recurría para cualquier consulta o referencia, esta obra sentó un precedente en cuanto a su estructura y dejó una huella no solo en geometría sino en el resto de las Matemáticas.

Lo anterior no quiere decir que de *Elementos* en adelante todas las obras se basen en estos, por el contrario existieron objeciones al tratado de Euclides por parte de algunos filósofos. Por ejemplo Apolonio quiso demostrar algunas de las nociones comunes, Herón solo admite tres nociones comunes, corrige demostraciones y evita el uso de la reducción al absurdo; Pappo añade axiomas; Teón añade demostraciones propias; Tolomeo intenta demostrar el postulado de las paralelas y hasta Proclo se suma a la tradición. La composición de *Elementos* no es una obra completa y terminada, con el paso del tiempo ha sido permeada por sus comentadores y editores.

Elementos fija una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia en la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos como en el rigor informal de la prueba matemática, luego se transformó en el texto obligado de geometría. Es Teón de Alejandría quien realiza su edición estándar en el siglo IV, posteriormente se realiza una traducción árabe y luego escolástica. El libro se utiliza como texto escolar hasta finales del siglo pasado. Así Euclides se convierte en el símbolo del método axiomático.

Finalmente cabe anotar que los *Elementos* de Euclides no eliminaron los tratados geométricos anteriores a estos, sino que contribuyeron a su supervivencia e integración.

3. La constitución de los "*Elementos*"

3.1. El "pórtico axiomático"

Aquí se describe el libro I, este consta de 23 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes.

La definición 1 del libro VII transmite la idea de unidad, aquí Euclides sienta las bases tradicionales de la aritmética, Euclides se refiere a esta noción no como punción o marca, sino como signo o señal convencional. En el libro I se encuentran varias nociones, en la definición 3 relaciona los puntos con líneas, en la 4 elabora una definición de línea recta como rayo óptico o visual; la definición 15 hace referencia la equidistancia como noción de redondo o circular, aclarando que el centro es punto interior. La definición 23 declara una noción de paralela con un criterio de no intersección.

3.2. Teoría elemental de la geometría plana (Libros I – IV)

El libro I contiene las definiciones, postulados, nociones comunes, 48 proposiciones de las cuales 14 son problemas y 34 son teoremas.

- Las proposiciones hablan sobre triángulos, desarrollan la teoría euclidea de las paralelas, la determinación de áreas de paralelogramos, triángulos y cuadrados

- Se entiende por igualdad a la congruencia geométrica y a la equivalencia geométrica (áreas).
- Emplea el procedimiento geométrico de aplicación y transformación de áreas.
- Se muestra la capacidad de Euclides para reconstruir de modo sistemático un legado antiguo y forjar nuevas pruebas adecuadas.

El libro II consta de 14 proposiciones de las cuales dos son problemas y las demás teoremas.

- Parece mostrar problemas haciendo uso del método de aplicación de áreas. Hoy en día la aplicación de áreas se conoce como álgebra geométrica. Por ello es posible leer varios resultados de este libro en términos algebraicos.

El libro III parte de 11 definiciones y contiene 37 proposiciones de las cuales 5 son problemas y las demás teoremas.

- Presenta la geometría del círculo incluyendo sus segmentos, intesecciones y tangencias.
- Hay varios resultados que no dependen de los resultados anteriores del libro

El libro IV parte de 7 definiciones y 16 proposiciones, todas problemas.

- Estudian inscripciones y circunscripciones e figuras regulares rectilíneas y círculos; y la construcción de polígonos regulares como el pentágono y el hexágono. Se dice que es descubrimiento de los pitagóricos.

3.3. La teoría generalizada de la proporción (Libros V – VI)

El libro V tiene 18 definiciones y 25 proposiciones, todas teoremas:

- La teoría de la proporción se refiere a las magnitudes como términos de la relación de proporcionalidad
- Las magnitudes son abstracciones o idealizaciones de objetos geométricos que únicamente consideran la cantidad.

El libro VI tiene 4 definiciones y 33 proposiciones de las cuales 8 son problemas y las demás teoremas:

- Aplica la teoría de la proporción a la geometría plana desarrollando una teoría de polígonos semejantes y generalizando el procedimiento de la aplicación de áreas.
- Los núcleos que componen el libro son: las condiciones de semejanza entre dos triángulos, las contrapartidas geométricas de ecuaciones cuadráticas, las construcciones del Libro XIII

3.4. Teoría de la aritmética (Libros VII – IX)

Los libros VII al IX comprenden 102 proposiciones de las cuales no se reconoce ningún problema, 23 definiciones en el libro VII.

- Presenta y desarrolla la aritmética de *Elementos*.
- Considera que los números son unos objetos susceptibles de hallazgo, no de generación o producción.
- El libro VII es una reconstrucción del legado aritmético de raíces pitagóricas.
- El libro VIII se ocupa de series de números en proporción continua y en progresión geométrica.
- El libro IX es una especie de miscelánea aritmética.

3.5. El Libro X: "La cruz de los matemáticos" (pp. 88-96)

Stevin usa esta definición para recordar que muchos matemáticos renacentistas solo veían en este libro dificultades sin provecho, se genera la pregunta si aún para los historiadores matemáticos representa una cruz. No recibe este apelativo por los problemas que causa su interpretación, sino también porque representa una encrucijada dentro de *Elementos*. En este libro confluyen desarrollos de la teoría generalizada de la proporción y motivos aritméticos y de él parten nuevas formas de construir figuras planas y sólidas. Consta de 16 definiciones y 115 proposiciones, todas ellas teoremas[37], aunque algunas de ellas se proponen construir o hallar algo. Está dedicado al estudio de tipos y criterios de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y a la clasificación de

[37] A lo largo del estudio de la teoría se verá que no todas son teoremas.

rectas irracionales. Se subdividen las rectas conmensurables/inconmensurables en dos clases, las que lo son en longitud y las que lo son en cuadrado (dándose estos de forma natural); se distingue entre líneas o áreas racionales e irracionales (ya no naturalmente sino por convención, con respecto a la recta designada como racional).

Entre los muchos resultados que se exponen a lo largo del libro, se da la base para el método de exhausión (X 1). La proposición 2 hace referencia a que dos magnitudes son inconmensurables si la búsqueda de su medida común máxima (antifairesis) nunca tiene fin. Las proposiciones 3 y 4 proporcionan un algoritmo para determinar la medida común máxima de dos o tres magnitudes conmensurables. X, 5 establece una relación entre las magnitudes conmensurables y los números (guardar relación). 6 a 8 mantienen la idea de X, 5, para desembocar en X, 9 (resultado atribuido a Teeteto).

El Libro X recoge investigaciones de Teeteto, Eudoxo y posiblemente Hermótimo, se mueve en una línea de categorización de resultados de diversos tipos de conmensurabilidad/inconmensurabilidad y de clases posibles de rectas racionales/irracionales, aun así mantiene cierta oscuridad y ambigüedad. Su estructura deductiva carece de cohesión interna, las proposiciones 27-35, 42-47, 66-70, 79-84, 85-90, 103-107 representan núcleos aislados en el conjunto del libro, las proposiciones 2-4, 24-25, 112-115 no cumplen ningún cometido en *Elementos.* Se ha dicho que el Libro X es un desastre pedagógico, pero vale reconocer en él ciertos valores disciplinarios y metódicos, logra una clasificación de líneas irracionales en 13 géneros distintos y enseña a construir ejemplos de ellas.

3.6. Geometría del espacio. (Libros XI – XIII)

Los libros XI a XIII contienen la geometría del espacio de *Elementos*. Consta de 28 definiciones (ubicadas en el Libro XI), y 75 proposiciones de las cuales 63 son teoremas y las demás proposiciones

- Se plantea la posibilidad de transferir los resultados acerca de un plano a la solución de problemas que envuelven más de un plano.
- Reside en el estudio de los cinco poliedros regulares.

Luego de *Elementos*, Hypsicles añadió un libro apócrifo, el Libro XIV que se nutrió del tratado de Aristeo del que también se valió Euclides para elaborar estos tres últimos libros.

Se propone una diferenciación entre la cohesión deductiva de *Elementos*, tanto interna como externa. La interna es mayor o menos, según la relación entre las proposiciones de cada libro y la externa según la relación entre determinado libro y otros del mismo campo teórico. A continuación se presenta un esquema de lo anterior.

		MATERIAL RECOGIDO	
		Más antiguo	**Más reciente**
COHESIÓN INTERNA	**Mayor:**	I, VII	V, XIII
	Menor:	III, IV, IX	VI, X
COHESIÓN EXTERNA	**Mayor:**	I, VII	V, X, XIII
	Menor:	III, IX	XII
COHESIÓN TEÓRICA	**Mayor:**	I	XIII
	Menor:	IV, IX	VI, XII

4. Sobre la significación axiomática de los "*Elementos*"

Los *Elementos* sobreviven gracias a la calidad de arquetipo del método axiomático y a la pedagogía como la ilustración cabal de una axiomática determinada.

La "cuestión axiomática" es una de las que determinan nuestra comprensión y valoración histórica de la contribución de Euclides.

¿Qué significa "axiomatización" aplicada a *Elementos*?, no es esta cuestión la que determina la percepción del aporte realizado por Euclides. Se plantean tres hipótesis que agrupan las opiniones habituales.

4.1. Hipótesis 1.

Se consideran dos hipótesis descentralizadas.

- La hipótesis mínima señala a Euclides como un recopilador; esta hipótesis no tiene base documental.

- La hipótesis máxima dice que *Elementos* fundan la ciencia del espacio geométrico y son la expresión del método axiomático de prueba que caracteriza la madurez de la demostración matemática griega, pero la misma historia muestra que esto no es cierto, sino que *Elementos* es tomado como una referencia de lo que más adelante se fue logrando en este sentido.

Con *Elementos* culmina la tendencia hacia la abstracción conceptual y la autonomía racional de la demostración.

Los primeros pasos para la axiomatización son la determinación de un dominio de discurso y la relación de las relaciones estructurales entre los elementos dentro de este dominio.

Elementos tiene una composición teórica y metódica heterogénea mientras que generalmente en un supuesto en la axiomatización de un cuerpo de conocimientos es homogenización como un conjunto de enunciados cerrados bajo la relación de consecuencia lógica. En *Elementos* tiene la intención didáctica no solo de *hacer saber* sino también de *saber hacer*.

4.2. Hipótesis 2

La sistematización de *Elementos* es una axiomatización "original" que consiste en la materialización de la teoría de la ciencia demostrativa propuesta por Aristóteles.

Elementos es la mejor muestra de siguiente concepción:

- Los griegos crean la primer ejemplo de ciencia que estudia axiomáticamente sus elementos
- Aristóteles da la primera descripción general de esta ciencia.
- Aristóteles representa las concepciones griegas de la "demostración axiomática" y la "sistematización axiomática".

4.3. Hipótesis 3

La comparación entre el trabajo de Euclides y de Aristóteles da la clave del significado de la sistematización de Euclides, esta clave consiste en la diferencia de pretensiones que tenía el trabajo de los personajes antes mencionados, aunque la idea de demostración propuesta en los Analíticos se extiende en *Elementos* a todo cuerpo de conocimientos.

5. El texto de los "*Elementos*", versiones y ediciones

Se dice que ninguna obra científica, filosófica o literaria ha sido tantas veces editada. *Elementos* es considerada como un patrimonio de tradición viva en constante mejora, en su mayoría de orden didáctico que hace de *Elementos* un manual básico de geometría.

Se distinguen cuatro fases características de la historia de la obra

5.1. El Euclides griego

La primera normalización de *Elementos* es la de Teón de Alejandría, un matemático, hacía el 370 d.C., de allí en adelante vienen comentarios y adiciones. De esta edición procede la tradición de las versiones, exposiciones y comentarios de Euclides.

Se tienen referencias de ediciones que toman en cuenta distintos comentarios realizados a la obra (por ejemplo los de Teón) o manuscritos que fueron apareciendo. D. Gregory (Oxford, 1703) realizó la primera edición completa de las obras de Euclides, en griego y en latín.

El texto más apropiado al original hoy en día es la edición crítica de Heiberg la cual tiene en cuenta los comentarios y referencias de Pappo, Sexto Empírico, Proclo, Simplicio y bastantes escolios.

Heiberg tiene en cuenta siete manuscritos teónicos principales[38] para complementar, coordinar y conciliar en su edición dando poca relevancia a las fuentes de la tradición árabe.

5.2. El Euclides árabe

La fase de transmisión árabe diversa y desde el punto de vista matemático, muy fructífera.

---

[38] Florentino XXVIII (siglo X con revisión en el siglo XVI), Bodleiano (siglo IX), Vienés (siglo XII), Boloñés (siglo XI), Parisino (siglo XII), Parisino (siglo XII-Independiente de la edición de Teón) y Vaticano (siglo X)

Elementos constituye una literatura euclidiana que incluye traducciones, compendios, recensiones, enmiendas y comentarios.

Quizá la primera versión árabe es de Al-Hajjãj (que vive hacia 786-833); él mismo realiza otra versión de la cual solo se conservan algunos manuscritos.

Otra versión es de Ishãq b. Hunain (muerto en 910) hizo una traducción desaparecida, la cual es revisada por Thãbit b. Qurra (826-901) conservada en 20 manuscritos considerada fiel a una fuente griega.

5.3. El Euclides latino

Aquí se conocen tres etapas principales:

5.3.1. Cultura romana

El aporte romano a las traducciones de *Elementos* fue mínimo, especialmente porque los ilustrados sabían griego o tenían traductores. Sin embargo se tiene referencia por extractos de otras fuentes de una traducción de Boecio.

5.3.2. Cultura medieval escolástica

- Hay una versión directa del griego, de la cual se tiene algunos fragmentos en manuscritos y una traducción anónima de *Elementos* I-XV compuesta alrededor de 1170 a partir de un manuscrito teonino.
- También hay traducciones latinas a partir de versiones árabes del siglo XII, las cuales se difundieron por la traducción adelardiana a través de manuscritos. Éstas constituyen la vía principal de incorporación de Euclides en la cultura medieval escolástica.
    - Adelardo I es la primera versión latina conocida en ella se consideraban como propias las definiciones, postulados, nociones comunes y enunciados de Euclides pero sus demostraciones a otros personajes, como Teón o Al-Nayrizi.
    - Adelardo II es más bien una versión abreviada tomada posiblemente de Adelardo I u otras fuentes árabes. Aquí no se recogen las demostraciones de Euclides sino da indicaciones sobre el camino para llegar a ellas.

- Adelardo II es una paráfrasis de *Elementos.* Parte de los enunciados de Adelardo II para desarrollar una demostración, incluye una introducción, comentarios de definiciones.

- Otra versión se atribuye a Hermann de Carinthia la cual comparte similitudes con Adelardo II aunque con sus demostraciones completas, tiene una introducción con los fundamentos de toda disciplina: el enunciado de la proposición, el caso considerado en particular, la apertura de una prueba indirecta o reducción al absurdo, confrontación, disyunción de las cuestiones, prueba, conclusión en la que todos convienen.
- La traducción de Gerardo de Cremona (1114-1187) difiere tanto de Hermann como de la tradición adelardiana; posiblemente compuesta bajo un texto de tradición de Ishãq Thãbit, sin embargo es la versión más acorde con la tradición griega entre las arábigo-latinas.

5.3.3. Cultura renacentista y académica superior

La historia de *Elementos* posterior al siglo XV en el latín de los humanistas y universitario se refleja en cuatro fases:

- Últimas décadas del siglo XV y primeras del siglo XVI. Durante este periodo se destaca la primera edición impresa de *Elementos,* versión reelaborada de la versión adelardiana hecha por Campano a mediados del siglo XIII. Aparece también otra traducción a partir del griego por B. Zamberti quien usa un manuscrito teonino no identificado; en su traducción atribuye las pruebas a Teón.
- Una traducción muy importante realizada en 1572 fue la de F. Commandino, esta sirvió por mucho tiempo de base para versiones posteriores, hasta la aparición de la de Peyrard (1814-1818). La versión asumida como latina es la de Gregory (Oxford 1703).
- Aparte de las versiones y ediciones de *Elementos* están los comentarios y las añadiduras, como ejemplo de ello está la edición de C. Clavio.
- Es distinta la suerte de *Elementos* cuando lo pedagógico prima sobre el rigor, el latín académico traza un camino en el cual se reduce la obra para que sea mas sencilla y es introducido al currículo de la Edad Media.

5.4. El Euclides de las lenguas vernáculas

A continuación se mencionan algunas versiones y traducciones en algunas lenguas próximas.

- Versiones Italianas: N. Tartaglia (Venecia, 1543), F. Enriques y colaboradores (Roma-Bolonia, 1925-1935), A. Frajeste y L. Maccioni (Turin, 1970).
- Versiones Francesas: P. Forclade (París, 1564), C.F. Milliet de Chales (Lyon, 1672), J. Itard (París, 1961), G. Kayas (1978).
- Versiones Alemanas: J. Scheuble (Tubinga, 1558), W. Holtzmann (Basilea, 1562), E. S. Unger (Basilea, 1833), M. Simo (Berlín, 1901), D. Hilbert (Leipzig, 1899), C. Thaer (Leipzig, 1933-1937).
- Traducciones Inglesas: H. Billingsley (Londres, 1570), R. Simson (Glasgox, 1756).

6. Los "*Elementos*" en España

Hasta ahora no ha aparecido en español alguna traducción completa de *Elementos*, la primera traducción que se conoce fue realizada en 1574 e impresa en 1576. Algunas versiones en español son:

- Rodrigo Carmona (Sevilla 1576).
- Cristoval de Rojas (Madrid, 1598).
- Rodrigo de Porras (finales del siglo XVI o principios del XVII).
- Manuscrito anónimo sin título y sin fecha. Contiene los libros I-IV (parece ser de finales del siglo XVI o principios del XVII).
- Nicolas Vibario (Amberes, 1616).
- Juan Cedillo Diaz (1620).
- Lvis Cardvchi (Alcalá, 1637).
- Lorenzo de San Nicolás (vol. I, Madrid, 1633; vol. II, Madrid, 1665).
- Sebastian Fernandez de Medrano (Bruselas, 1668).
- Jacobo Kresa (Bruselas 1698).
- Francisco Larrando de Mauleón (Barcelona, 1698).
- Manuscrito anónimo sin título ni fecha, situado en el siglo XVIII.
- Antonio Joseph Deu y Abella (Zaragoza, 1723).
- Gaspar Álvarez (Madrid, 1739).

- Blas Martinez de Velasco (obra póstuma, Santa María, 1747).
- Roberto Simson (Madrid, 1774).

Las ediciones actuales antes de las presente son:

- F. Enriques y colaboradores (España, 1954).
- J. David García Bacca (México, 1944).
- Francisco Vera (Madrid, 1970).

Anexo 2. Traducción: "Book X of The Elements: Ordening Irrationals"

LIBRO X DE LOS *ELEMENTOS*: Ordenando los Irracionales

Jade Roskam[39], Universidad de Montana

Resumen: el Libro X de Los Elementos contiene más de tres veces el número de proposiciones que cualquiera de los otros libros de Euclides. Con extensión como un factor, cualquiera que trate de entender Geometría euclidiana puede estar esperando un tema manejable, algo comparable a la investigación del libro VII de la teoría de números. En su lugar, se enfrentan a una serie vertiginosa de nueva terminología dirigida a la comprensión de magnitudes irracionales sin un análogo numérico que ayude a la comprensión. La verdadera belleza de Libro X se ve en su investigación sistemática y clasificación de líneas irracionales. Este trabajo investiga la teoría temprana de los irracionales, la metódica presentación y la interacción de estas magnitudes presentadas en Los Elementos, y la aplicación de la teoría euclidiana hoy.

Palabras clave: Libro X; Euclides; Elementos de Euclides; Geometría; Historia de las matemáticas; racionales e irracionales; Números irracionales

1. ANTECEDENTES

El Libro X de los *Elementos* de Euclides está dirigido a la comprensión de las líneas racionales e irracionales utilizando las ideas de longitudes y cuadrados conmensurables e inconmensurables. Desafortunadamente, la falta de documentación del estudio inicial de los inconmensurables conduce a la especulación sobre su origen exacto y quién los descubrió. Wilbur R. Knorr en un artículo de 1998 de The American Mathematical Monthly data del conocimiento original, pero no necesariamente la comprensión, de las cantidades irracionales a la Dinastía Mesopotámica Antigua Babilónica. Las tablas matemáticas de estos pueblos, que datan 1800-1500 a.C., supuestamente muestran conocimiento del hecho de que algunos valores no pueden ser

[39] jade.Roskam@umontana.edu

expresados como cocientes de números enteros. Sin embargo, muchas fuentes no están de acuerdo con el artículo de Knorr y atribuyen el conocimiento original de las magnitudes irracionales a la escuela Pitagórica alrededor de 430 aC (Fett, 2006; Greenburg, 2008; Robson, 2007; Posamentier, 2002). Dado que el logro más conocido viene de los pitagóricos, el teorema de Pitágoras, parece inevitable que este grupo de gente descubriría valores irracionales en forma de diagonales de triángulos rectángulos. Tomemos por ejemplo la longitud de la hipotenusa de un triángulo isósceles de lado 1. Esto da una de las cantidades irracionales más estudiadas, $\sqrt{2}$. Antes de este inexorable descubrimiento, los pitagóricos veían los números como cocientes de números enteros y por lo tanto no pudieron incorporar cantidades irracionales en su teoría de los números. Los Irracionales, considerados como un desafortunado descubrimiento y el resultado de un error cósmico, fueron tratados como meras magnitudes inexpresables en forma numérica (Fett, 2006; Greenburg, 2008). Se continuaron Estas ideas durante la redacción de Los Elementos, y permanecieron hasta el matemático islámico al-Karaji que tradujo la terminología euclidiana en raíces cuadradas irracionales de números enteros, aproximadamente 13 siglos después de lo que Euclides escribió (Berggren, 2007).

La actitud de los pitagóricos hacia los irracionales retrasó cualquier estudio de las magnitudes más allá de la inconmensurabilidad del lado de un cuadrado con su diagonal. Afortunadamente, la superstición que rodeó los irracionales no alcanzó el campamento de Platón. Teodoro, alumno de Platón, y uno de los estudiantes de Teodoro, Teeteto, se encargaron de estudiar magnitudes irracionales en longitud y poner adelante la primera teoría conocida de líneas irracionales (Knorr, 1975). Teodoro se cita como el primero en producir diferentes clases de líneas inconmensurables a través de métodos aritméticos argumenta Knorr (1975). Sin embargo, los descubrimientos de Teodoro se limitaron a casos específicos, como las líneas cortadas en relación de extrema-y-media, y él era incapaz de generalizar sus hallazgos. Fue su estudiante, Teeteto, que generalmente se considera como el primero que extendió una teoría organizada, rigurosa de irracionales, una obra que se inició de manera intuitiva con su amo pero que en última instancia Teodoro no pudo probar (Knorr, 1975; 1983). Los resultados reunidos de Teodoro y Teeteto fueron publicados por Platón en el diálogo titulado en honor al matemático más joven. Desafortunadamente gran parte de Teeteto se ha perdido con el tiempo y lo poco que se sabe acerca de la teoría temprana Teeteto de irracionales viene de Eudemo, alumno de Aristóteles. Eudemo vivió entre los tiempos de Platón y Euclides y se le acredita el haber pasado la primera teoría de líneas irracionales a la generación de Euclides, que fue examinada con toda su fuerza en el Libro X de Los Elementos (Knorr, 1975; Euclides, 2006). Si no fuera por Teeteto de Platón y las cuentas de Eudemo, atribuiríamos la totalidad de las ideas de magnitudes conmensurables e inconmensurables a Euclides (Knorr, 1983).

De Teeteto es el mérito de haber clasificado raíces cuadradas como las conmensurables en longitud frente a las inconmensurables (Knorr, 1983; Euclides, 2006). Las tres clases principales de magnitudes irracionales son la medial, binomial, y apótoma. La línea medial se define como ela lado de un cuadrado cuya área es igual a la de un rectángulo irracional. La binomial y la apótoma se oponen entre sí, la binomial se forma por la adición de dos líneas conmensurables en cuadrado únicamente y la apótoma se define como la diferencia entre dos líneas conmensurables solamente en cuadrado. Cada clase de magnitud se discutirá con mayor detalle mas adelante. También se dice que Teeteto ligó cada clase de magnitud con una media única: la medial está ligada a la media geométrica, la binomial a la aritmética, y la apótoma a la media armónica (Euclides, 2006). Sin embargo, estos términos pueden haber sido una sustitución de Eudemo al ligar líneas irracionales a métodos euclidianos, en lugar de las correlaciones originales que Teeteto pudo haber utilizado (Knorr, 1983). La historia detrás del avance de la teoría de la irracionalidad no puede excluir de su discusión a Euclides. Fue Euclides quien generaliza la idea de conmensurables e inconmensurables en cuadrado, y también ordenó las líneas irracionales binomial y apótoma en seis clases distintas cada una (Knorr, 1983). La mayor parte del avance post-euclidiano de la teoría de líneas irracionales es encontrado en las proposiciones 111-114 del Libro X, que se consideran en general que han sido añadidas debido a la falta de contigüidad entre éstas y las propiedades anteriores de los irracionales presentados. Es importante señalar que el Libro X detalla una teoría de las magnitudes irracionales y no una teoría de números irracionales (Grattan-Guinness, 1996). La teoría original de Teeteto de los irracionales puede tener incluidos los números, pero la teoría euclidiana ofrece únicamente líneas irracionales y longitudes geométricas. Las seis clases de binomial y apótoma ahora se comprenderán más fácilmente utilizando el álgebra como ordenación de las magnitudes irracionales se explica a través de soluciones de una fórmula cuadrática general. La base de este desarrollo es algo controvertido. Knorr (1975) atribuye alguna del "Álgebra geométrica" a Teodoro. La mayoría de las fuentes creen que esta comprensión de la geometría a través de álgebra se originó en el siglo octavo a través de los enormes avances logrados por muchos matemáticos islámicos en el área de álgebra (Gratten-Guinness, 1996; Berggren, 2007). Algunos ahora argumentan que mucho, si no la mayoría, de Los Elementos son en realidad el álgebra disfrazada de geometría (Gratten-Guinness, 1996). Sin embargo, como se verá más adelante, esta idea es un obstáculo para la comprensión Teoría euclidiana. Durante el uso de las soluciones de una ecuación cuadrática general es una buena manera de ayudar a entender cómo se deriva cada orden de binomial y apótoma, aunque ignora todos los irracionales que no están en la forma de una raíz cuadrada y trata a los irracionales como valores en lugar de magnitudes (Burnyeat, 1978).

2. EUCLIDES EN LOS IRRACIONALES

Al comienzo del Libro X Euclides (2006) proporciona definiciones para conmensurabilidad y racionalidad. Para conmensurabilidad Euclides afirma que "se dice que las magnitudes son conmensurables cuando son medidas por la misma medida, y las inconmensurables que no puede tener ninguna medida común" y que" Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando los cuadrados de ellas son medido por la misma área, e inconmensurable en cuadrado cuando los cuadrados de ellas no pueden tener cualquier área como medida común "(p. 693). Euclides (2006) y luego se traslada a la racionalidad que define como:

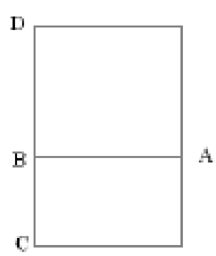
Vamos entonces a llamar racional a la línea recta determinada, y esas líneas rectas que son conmensurable con ella, ya sea en longitud y en cuadrado, o sólo en cuadrado, racionales, pero las que son inconmensurables con ella irracionales... Y luego dejar que el cuadrado de la recta determinada sea llamado racional, y aquellas áreas que son conmensurables con el racionales, pero las que son inconmensurables con él irracionales, y las líneas rectas que los producen irracionales (p. 693). Para simplificar, dada una longitud racional (o número), todas las longitudes (números) que tienen común medida con lo racional y / o con el cuadrado de lo racional son también racionales. Esas longitudes que no tienen una medida común con la línea dada son irracionales. El cuadrado de una longitud racional produce un área racional, y aquellas áreas que son conmensurables con el área racional son racionales y las inconmensurables con el área racional son irracionales. Si un área es irracional, la longitud que se cuadró para crear el área irracional también es irracional.

En total, hay 13 líneas rectas irracionales distintas. Además de la medial, Euclides establece seis órdenes de binomiales y seis órdenes de apótomas. Los Elementos también definen un subgrupo de líneas irracionales que se pueden construir a partir de las trece irracionales distintas que incluyen línea bimedial de primer y segundo orden, primero y segundo orden de apótoma de una línea medial, mayor y menor, la primero de las cuatro se discutirán brevemente.

Según Euclides (2006), se forma una medial cuando un rectángulo comprendido por dos líneas rectas racionales conmensurables sólo en cuadrado es irracional y el lado del cuadrado igual es irracional. El lado del cuadrado se llama la media (X 21).[40]

Libro X. Proposición 21

En el siguiente diagrama, las líneas AB, BC se supone que son las longitudes racionales que son conmensurables solo en cuadrado. Es decir, el cuadrado de AB y el cuadrado de BC tienen la relación de un número entero a un número entero, pero las longitudes AB, BC no tienen una medida común. Ahora la construcción del cuadrado de AD tal que $AB = BD$.



[40] Notese que por facilidad, voy a denotar las proposiciones de los *Elementos* por (Libro. Número de Proposición). Por ejemplo, la Proposición 47 del Libro I será citada como (I. 47).

A continuación, el cuadrado AD es racional desde $AD = AB^2$ y AB es racional. Sabemos que AB y BC son inconmensurable de longitud, lo que implica que BD, BC también son inconmensurables en longitud. Tenga en cuenta que

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BD * AB}{BC * AB} = \frac{AD}{AC}$$

Como BD, BC son inconmensurables, esto implica que AD, AC también son inconmensurables. Pero nosotros sabemos que AD es racional, por lo AC debe ser irracional. Como AC es un área irracional, un cuadrado con igual área también será irracional y, por definición, tendrá un lado de longitud irracional. Esta longitud del lado irracional es conocida como un medial.

Por otro lado se forman Binomiales cuando dos rectas racionales conmensurables solo en cuadrado se suman, haciendo todo irracional. La siguiente es una adaptación de <u>Los Elementos</u> (X. 36):

Deje que líneas x, y sean racionales y conmensurables sólo en cuadrado, lo que significa que no miden a x ni a y, pero x^2 y y^2 tienen una medida común. Se propone que su suma, $x + y$, serán irracional y, según <u>The Elements</u>, esta es llamada Binomial.

i. Como x es conmensurable sólo en cuadrado con y, x y y son inconmensurables en longitud. Por lo tanto, donde

$$\frac{x}{y} = \frac{x^2}{x * y}$$

ii. Se deduce que x^2 y $x * y$ también son inconmensurables.

   Pero como x^2 y y^2 tienen una medida común, a, entonces

$$n * a = x^2$$

$$m * a = y^2$$

   donde m, n son números enteros.

   Por sustitución,

$$x^2 + y^2 = n * a + m * a$$

iii. Así que un x^2 medidas y unas medidas (x^2 $+y^2$), lo que implica que x^2 y $x^2 + y^2$ son conmensurables.

iv. Es obvio que $x * y$ es conmensurable con $2 * (x * y)$.

v. Puesto que (iii) x^2 y $x^2 + y^2$ son conmensurables, (iv) $x * y$ y $2 * (x * y)$ son conmensurables, pero (ii) x^2 y $x * y$ son inconmensurables, se deduce que $x^2 + y^2$ y $2 * (x * y)$ son inconmensurables. Desde esto, vemos que $\left(x^2 + y^2 + 2 * (x * y)\right)$ debe ser inconmensurable con $(x^2 + y^2)$. Reorganizar el primer término, $(x + y)^2$ y $(x^2 + y^2)$ son inconmensurables. Dado que x, y son racionales, entonces x^2, y^2 también son racionales y deduce que $x^2 + y^2$ es racional. Esto implica que $(x + y)^2$ es irracional, y por lo tanto $(x + y)$ es irracional.

Euclides define un apótoma en la proposición 73 del Libro X como el resto de dos líneas rectas racionales, la menor restada de la mayor, que son conmensurables sólo en cuadrado. En esencia, la contrapartida de la binomial. La demostración de Euclides de que el apótoma es irracional sigue los mismos pasos lógicos como los que se utilizan para demostrar la irracionalidad de la binomial. Empezamos haciendo el mismo supuesto básico, que las líneas x, y son racionales y conmensurables sólo en cuadrado. Se propone que el apótoma, $x - y$, es irracional. Las etapas (i) a (v) son idénticos a la demostración de la Proposición 36. Para el apótoma, tenga en cuenta que

$$x^2 + y^2 = 2 * x * y + (x - y)^2$$

Puesto que (v) $x^2 + y^2$ y $2 * (x * y)$ son inconmensurables, se deduce que $x^2 + y^2$ y $(x - y)^2$ son también inconmensurables.

Pero como x, y son racionales por construcción, $x^2 + y^2$ debe ser racional. Esto implica que $(x - y)^2$ es irracional, de la que se deduce que $x - y$ es irracional. Así, hemos demostrado que si una línea recta racional se resta de una línea recta racional, y los dos son conmensurables en cuadrado solamente, el resto será irracional.

Se dijo anteriormente que Teeteto empató los tres tipos conocidos de los irracionales en el a unas únicas medias: la medial con la geométrica, la binomial con la aritmética y la apótoma con la armónica. Los dos primeros de estos emparejamientos siguen algo simple. La medial está ligada a la media geométrica, que se puede encontrar utilizando la siguiente fórmula general.

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{(x_1 * x_2 * \dots * x_n)}$$

La medial se define como la longitud del lado de un cuadrado cuya área es igual a la de un rectángulo irracional formado por dos líneas racionales conmensurables sólo en cuadrado. Usando nuestro diagrama anterior, el cuadrado de la media, vamos a llamarlo MN por simplicidad, es igual al área del rectángulo AC.

Algebraicamente,

$$MN^2 = AC = AB * BC$$

$$MN = \sqrt{AB * BC}$$

Por lo tanto las mediales pueden representarse simbólicamente como la media geométrica

$$\sqrt{x * y}$$

Para dos magnitudes racionales dadas x y y conmensurables sólo en cuadrado.

Como se dijo anteriormente, la binomial se define como la suma de dos líneas rectas racionales conmensurables sólo en cuadrado y está estrechamente relacionada con la media aritmética, de la que la siguiente es la fórmula general.

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} * (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Es evidente cómo la representación de la binomial $(x + y)$ está estrechamente relacionada con esta fórmula. Sin embargo, el acoplamiento de la apótoma y la media armónica es más complejo. Para explicar, la media armónica de dos números x y y, es

$$\frac{2 * x * y}{x + y}$$

Si se tiene en cuenta las proposiciones X.112-4, se puede ver que si un área racional tiene una binomial para uno de sus lados, el otro lado será una apótoma conmensurable con la binomial y de orden correspondiente. Usando nuestro conocimiento de la forma general de un apótoma y un binomio, podemos ver que esta área sería

$$(x + y) * (x - y) = x^2 - y^2$$

Con $x * y$ representando área medial y la ecuación anterior para el área racional dada, vemos que

$$\frac{2 * x * y}{x^2 - y^2} * (x - y)$$

con $(x - y)$ que representa la forma básica de un apótoma. Una vez más, esto parece una extensión dada la facilidad con la que la binomial y la medial están atadas a sus respectivas medias. Cabe señalar que esta relación entre el apótoma y la media armónica se explica en el comentario por Woepcke en una traducción al árabe del Libro X de <u>Los Elementos</u> (Euclides, 2006). Si este fue el razonamiento original de Teeteto para emparejar la apótoma y la media armónica es desconocido. Una vez más, estas explicaciones algebraicas no son originales del trabajo de Euclides, sino teorías impuestas a su trabajo por los matemáticos posteriores. Esto es importante tenerlo en cuenta porque la teoría euclidiana se refería únicamente a magnitudes irracionales y no a los números irracionales. Dado que la mayoría de la teoría original de Teeteto está perdida, no se puede determinar de forma concluyente si los matemáticos platónicos describe las relaciones anteriores. Los lazos entre tres tipos de cantidades euclidianas y el quadrivium aristotélico se ven en otras partes de los <u>Elementos</u>. Según el artículo Ivor Gratten-Guinness de 1996, los tres tipos de cantidades Euclidianas, número, magnitud y proporción, se correlacionan con la aritmética, la geometría y la armonía, respectivamente. Estas relaciones ciertamente siguen más fácilmente que las magnitudes irracionales a las medias correspondientes, y las últimas asociaciones pueden haber sido formadas en respuesta a la primera.

3. ORDENANDO LOS IRACIONALES

Una clase se define como un conjunto de objetos relacionados en la mente debido a características comunes y propiedades similares (Forder, 1927). Todas las magnitudes de la clase bonimial son de la forma $(x + y)$ donde x, y son las líneas conmensurables sólo en cuadrado. Todos las binomiales comparten características comunes, que veremos más adelante. Lo mismo es cierto para las apótomas. Todas son de la forma $(x - y)$ donde x, y son las líneas conmensurables sólo en cuadrado, y comparten propiedades comunes. Estas representan dos de las tres clases propuestas en la teoría temprana Teeteto de los irracionales. Dentro de cada una de estas clases, Euclides define seis órdenes, o sub-clases, de cada una. Cada miembro de una subclase contiene toda la propiedades comunes a la clase en su conjunto, pero tiene diferentes propiedades de los miembros de otra subclases (Forder, 1927). Teeteto se acredita con ideas de la medial, binomial, y apótoma, pero no hace referencia a los seis órdenes de binomiales y apótomas que aparecen en Los Elementos. Por lo tanto era a discreción de Euclides sobre cómo ordenar mejor las subclases. La dificultad en la teoría euclidiana de los irracionales reside en la superposición de propiedades entre subclases. Como se discutirá en detalle, los seis órdenes de cada clase están emparejados en tres grupos, uno de cada par representa conmensurabilidad y uno de cada par representa inconmensurabilidad. La lucha surge de lo que es más importante en la clase, la conmensurabilidad o la vinculación con otra subclase. A pesar de la comprensión algebraica de Irracionales de Euclides que hacen el emparejamiento de subclases más fácil de seguir, Euclides decidió romper primero cada clase de línea irracional en conmensurables frente inconmensurables, y luego vincular los miembros en cada una.

Euclides define cada una de las seis órdenes de binomial y apótoma en las Definiciones II y III, respectivamente, del Libro X y la introducción al Libro X proporciona una comprensión algebraica de cómo se obtiene cada tipo. Para aclarar las definiciones dadas por Euclides, vamos a representar una binomial utilizando la forma general $(x + y)$ con x siendo el segmento mayor y siendo y el menor segmento y un apótoma utilizando la forma general $(x - y)$ con x siendo el todo y siendo y el anexo (o lo que se resta de la totalidad).

Considere la fórmula cuadrática en general

$$x^2 \pm 2 * a * x * p \pm b * p = 0$$

donde p es una línea recta racional y a, b son coeficientes. Sólo raíces positivas de la ecuación serán consideradas pues x debe ser una línea recta. Esas raíces incluyen

$$x_1 = p * \left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)$$

$$x_1^* = p * \left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)$$

$$x_2 = p * \left(\sqrt{a^2 + b} + a\right)$$

$$x_2^* = p * \left(\sqrt{a^2 + b} - a\right)$$

En primer lugar, considerar las expresiones para x_1 y x_1^*. Supongamos que a, b no contienen irracionales. Es por ejemplo, son enteros o de la forma $\frac{m}{n}$, Donde m, n son números enteros. Si este es el caso, ya sea

i. $b = \frac{m^2}{n^2} * a^2$, o
ii. $b \neq \frac{m^2}{n^2} * a^2$

Si (i), entonces x_1 es una primera binomial y x_1^* es una primera apótoma. Euclides define el primera orden en las Definiciones II, para la binomial, y III, para la apótoma, en el Libro X como:

Dada una recta binomial/apótoma... el cuadrado en el mayor término/conjunto [x] es mayor que el cuadrado de la menor/anexo [y] en el cuadrado de una línea recta *conmensurable* (énfasis agregado) de longitud con la mayor/el todo... el mayor término/todo conmensurable en longitud con la línea recta racional se establece a continuación, todo el segmento se conoce como una primera binomial/primera apótoma. (P. 784, 860). Esta definición prolija es traducida por Charles Hutton en su 1795 en dos volúmenes edición de un diccionario matemático y filosófico a la terminología más comprensible: el término mas grande, x, es conmensurable con una racional y es por tanto una misma racional y $x^2 - y^2 = z^2$, donde z es conmensurable en longitud con x, de modo que z también debe ser racional. Usando esta nueva definición y ejemplos numéricos proporcionados por el matemático islámico al-Karaji en el siglo 10, podemos entender mejor lo que Euclides estaba representando geométricamente (Berggren, 2007). Por ejemplo, 3+$\sqrt{5}$ sería considerado una primera binomial y 3-$\sqrt{5}$ sería considerado un primer apótoma. El término mayor (3) es racional y

$$3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 5 = 4 = 2^2$$

Si (ii), a continuación, x_1 es cuarta binomial y x_1^* es una cuarta apótoma.

El cuarto orden de binomial y apótoma se definen como opuesta al primer orden. La definición de Euclides para el cuarto fin de cada clase de estados irracionales:

Si el cuadrado en el mayor término/conjunto [x] sea mayor que el cuadrado en el menor/anexo [y] por el cuadrado en la línea recta *inconmensurable* (énfasis añadido) en longitud con la mayor/conjunto, entonces, si el mayor término/todo sea conmensurable en longitud con la línea recta racional que se propuso entonces todo el segmento se llama cuarta binomial/cuarta apótoma (p. 784, 860). Al igual que la primera binomial y primera apótoma, el mayor término, x, será racional. Sin embargo, a diferencia del primer orden, la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los dos términos, z, será inconmensurable con x, lo que significa que z no tendrá una relación racional con x. Tomar por ejemplo $4 - \sqrt{3}$. El mayor término (4) es un número racional, y

$$\frac{\sqrt{4^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{16-3}}{4}\frac{\sqrt{13}}{4}$$

que no es una relación racional.

Ahora mira a las posibilidades de las expresiones x_2, x_2^*. Si nos atenemos a nuestra suposición de que a, b no contienen irracionales, entonces o bien

$(i) b = \frac{m^2}{n^2 - m^2} * a^2$, o

$$(ii) b \neq \frac{m^2}{n^2 - m^2} * a^2$$

Si (i), entonces x_2 es una segunda binomial y x_2^* es una segunda apótoma.

Al igual que la primera orden, la segunda extensión de binomios/apótomas tiene la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los dos términos (z) conmensurables con el mayor término/conjunto (x). La diferencia entre el primer y segundo orden es que el menor término/anexo (y) es el segmento que es conmensurable con la recta racional establecida. Esto indica que el término menor, y, es racional, y que la relación entre la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los dos términos, z, y el mayor término, x, es una relación racional expresable en números enteros. Una vez más, una definición prolija se explica fácilmente con valores reales, como $\sqrt{18} \pm 4$. El término menor (4) es un número racional y

$$\frac{\sqrt{\left(\sqrt{18}\right)^2 - 4^2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18 - 16}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

que es una relación racional expresada en números enteros.

Si (ii), a continuación, $x_2$es quinta binomial y x_2^* es un quinta apótoma. La quinta orden de binomial y apótoma es una combinación de la segunda y tercera definiciones de orden. Al igual que el segundo orden, el menor de los dos términos (y) es conmensurable con la recta racional establecida. Sin embargo, la raíz cuadrada de la diferencia entre los dos términos (z) es inconmensurable en longitud con el mayor término/conjunto (x). Esto significa que de nuevo el menor término es racional y que la relación entre la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de dos términos, z, y el término mayor, x, no es una relación racional. Por ejemplo $\sqrt{6} \pm 2$. 2 es un número racional y

$$\frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 2^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6 - 4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

que no es una relación racional.

Para obtener las últimas dos órdenes de binomial y apótoma, debemos considerar el caso en

$$a = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

donde m, n son números enteros. Para abreviar, dejar. $\lambda = \frac{m}{n}$, Por lo tanto

$$x_1 = p * \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - b}\right)$$

$$x_1^* = p * \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - b}\right)$$

$$x_2 = p * \left(\sqrt{\lambda + b} + \sqrt{\lambda}\right)$$

$$x_2^* = p * \left(\sqrt{\lambda + b} - \sqrt{\lambda}\right)$$

"Si $\sqrt{\lambda - b}$ en x_1, x_1^* no es irracional, sino de la forma $\left(\frac{m}{n}\right)$, y si $\sqrt{\lambda + b}$ en x_2, x_2^* no es irracional, sino de la forma $\left(\frac{m}{n}\right)$, las raíces se componen de las formas que se muestran "(X. Introducción). Para explicar, en nuestras ecuaciones originales para $x_1\ y\ x_1^*$, $x_2\ y\ x_2^*$, se asumió un ser racional (que no contiene irracionales) y $\sqrt{a^2 \pm b}$ entonces sería irracional. En nuestras nuevas ecuaciones, se define una como irracional. La cita anterior indica que si $\sqrt{\lambda \pm b}$ es racional (que no contiene irracionales) entonces bien otra vez obtenemos la 1º, 2º, 4º y 5º orden de binomiales o apótomas. El x_1 original, x_1^* y los nuevos x_2, x_2^* están tomando una magnitud racional más (binomial) o menos (apótoma) un irracional para obtener el 1er y 4to órdenes. El x_2 original, x_2^* y x_1 recién formado, x_1^* Inició con una magnitud irracional y añadió (binomio) o restó (apótoma) una magnitud racional, formando las órdenes 2ª y 5ª de binomial y apótoma. Por lo tanto, el único caso que necesita ser investigado es el caso en el que se añade o se resta de otra magnitud irracional una magnitud irracional.

Si $\sqrt{\lambda - b}$ en x_1, x_1^* es irracional, entonces, o bien

$$(i) b = \frac{m^2}{n^2} * \lambda$$

o

$$(i) b \neq \frac{m^2}{n^2} * \lambda$$

Si (i), a continuación, x_1 es tercera binomial y x_1^* es tercera apótoma.

En el caso de la tercera orden de cada tipo de irracional, volvemos a tener una conexión con el lenguaje de descripción de primer orden. El cuadrado en el mayor término/conjunto (x) es mayor que el cuadrado en el menor término/anexo (y) por el cuadrado de una recta conmensurable con el mayor/conjunto. Sin embargo, en este orden ninguno de los términos, x o y, son conmensurables con la recta racional establecida. En términos de números reales, tanto x como y deben ser irracionales y la relación entre la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los términos, z, y el mayor término, x, es una relación racional expresable en números enteros. Para explicar por ejemplo, mirar a la tercera orden binomial $\left(\sqrt{24}+\sqrt{18}\right)$ o el tercer orden de apótoma $\left(\sqrt{24}-\sqrt{18}\right)$. Ambos términos son irracionales y

$$\frac{\sqrt{\left(\sqrt{24}\right)^2-\left(\sqrt{18}\right)^2}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{24-18}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

con $\frac{1}{2}$ siendo una relación racional expresable en números enteros.

Si (ii), a continuación, x_1 es una sexta binomial y x_1^* es una sexta apótoma.

Al igual que la tercera, en una sexta orden de binomial y apótoma ni el término menor (y) ni el mayor término (x) son conmensurables en longitud con la recta expresable establecida, pero el cuadrado en el mayor/todo es mayor que el cuadrado en el menor/anexo por el cuadrado en una línea recta inconmensurables en longitud con el mayor término/conjunto. Esto se traduce en la sexta apótoma que tiene la forma de dos términos irracionales con la relación entre la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los dos términos, z, a la mayor plazo, x, siendo una relación irracional. Mira el sexto orden binomial/apótoma $\sqrt{6} \pm \sqrt{2}$. Ambos términos son irracionales y

$$\frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6-2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

que no es una relación racional.

En el cuadro adjunto se resumen las seis órdenes de binomial y apótoma.

Euclides también designa dos órdenes de líneas bimedial y dos órdenes de apótoma de líneas rectas mediales. Líneas Bimediales son la suma de dos líneas mediales que son conmensurables sólo en cuadrado. La Proposición 37 muestra cómo construir una primera línea bimedial (dos líneas mediales conmensurables sólo en cuadrado y que contiene un rectángulo racional pueden sumarse). La construcción de una segunda línea de bimedial se discute en la proposición 38, donde por las mismas condiciones que se solicitan en la primera bimedial, se acepta que las dos líneas mediales forman un rectángulo medial en lugar de un rectángulo racional. Una apótoma de un medial se define como la diferencia entre dos líneas mediales, la menor de las que es conmensurable con el todo solo en cuadrado. Si un rectángulo racional está contenido con el cuadrado de la totalidad, a continuación, el resto es un primer apótoma de una recta medial (X. 74). Si un rectángulo medial está contenido con el cuadrado de la totalidad, el resto es conocido como una segunda apótoma de una línea recta medial (X. 75). Una conexión obvia puede ser trazada entre líneas bimedial y apótoma de líneas mediales. Todos los cuatro tipos se construyen mediante la manipulación de dos líneas mediales, con los primeros órdenes de cada uno se hace referencia a un rectángulo racional contenido y las segundas órdenes de cada uno que tiene un rectángulo medial contenido por las dos líneas mediales. El nombre apótoma de un medial es apropiado de una manera obvia: la línea está formada por la diferencia de dos mediales $(x - y)$. Lo que es confuso es la denominación de la bimedial. Con la conexión entre el bimedial y apótoma de un medial mencionado anteriormente y la definición de la bimedial como la suma de dos líneas mediales $(x + y)$, es interesante que Euclides no usó el título más evidente de binomial de una línea medial. Es posible que la terminología original el binomial de una línea medial y través de la traducción fue acortado a bimedial, pero esto es mera especulación.

4. PROPIEDADES E INTERACCIONES

Una de las cosas más fascinantes sobre los tres tipos principales de líneas irracionales está estudiando las formas en que interactúan entre sí. Un ejemplo de esto es la representación algebraica de binomiales y apótomas. Las Binomiales pueden entenderse como un proceso de adición representado por $(x + y)$. Lo contrario es cierto en el apótoma que se representa como $(x - y)$. Estos a su vez tienen un producto de $(x^2 - y^2)$. Es obvio que existen numerosas relaciones que mantiene cada línea con cada otra, y sin embargo, para todos sus similitudes, cada una de las categorías de líneas irracionales son mutuamente excluyentes. Euclides va tan lejos como para decir, "La apótoma y las líneas rectas irracionales siguientes que no son ni lo mismo con la línea recta medial ni con las otras" (X. 111). Sin embargo, estas líneas no son solo categorías mutuamente excluyentes, sino que también son únicas en su división en partes. La Proposición 42 demuestra que si AB es una binomial, a continuación, sólo hay un punto C entre A y B de tal manera que AC, BC son racionales y conmensurable sólo en cuadrado. Esto demuestra que para una binomial dada, sólo hay una manera de separar su longitud en segmentos mayores y menores. Lo mismo se demuestra de una primera bimedial (X 43) y una segunda bimedial (X 44). Del mismo modo, a partir de una apótoma dada, sólo una longitud puede restarse de tal manera que ambos segmentos seas racionales y conmensurables sólo en cuadrado (X 79). Una vez más, Euclides va a demostrar en las proposiciones 80 y 81 la singularidad de la primera y segunda apótoma de una línea medial.

En primer lugar debemos mirar las principales propiedades de mediales, binomiales y apótomas antes de que podamos profundizar en las interacciones entre estas líneas.

Común a todos los tipos de líneas irracionales es el hecho de que las líneas conmensurables con la longitud dada son del mismo tipo y orden cuando sea aplicable (X. 23 (medial), 66 (binomial), 67 (bimedial), 103 (apótoma) , 104 (apótoma de un medial)). Algo único en las mediales son las ideas de que si contiene rectángulos con líneas mediales conmensurables en longitud son mediales (X 24), que los rectángulos contenidos por líneas mediales conmensurables sólo en cuadrado son áreas ya sea racional o mediales (X 25), y que la diferencia entre dos áreas mediales nunca serán un área racional (X 26). Es tal vez el asunto más importante del Libro X, Euclides demuestra que un número infinito de líneas irracionales únicas surgen de una línea medial (115). Curiosamente, optó por hacer de esta la última propuesta en el libro, posiblemente con la esperanza de que los futuros estudiantes usaran esta propiedad de mediales para investigar más a fondo la teoría de los irracionales, posiblemente dar con nuevas formas desconocidas de líneas irracionales o un nuevo sistema de clasificación. Hay algunas propuestas que tienen que ver sólo con binomiales o apótomas, pero éstos se toman generalmente en conjuntos con las proposiciones siguientes utilizando una bimedial o apótoma de una medial, y por lo tanto se discutirán más adelante. Sin embargo, las proposiciones 48 a 53 no tratan estrictamente de binomiales, en que cada una describe cómo encontrar una binomial de orden particular. Las Proposiciones 85-90 realizan la misma acción para las apótomas.

¿Por qué Euclides optó por clasificar apótomas y binomiales de tal manera que la primera y cuarta, segunda y quinta, y la tercera y sexta órdenes fueron emparejadas? no se explica. Podemos observar que los tres primeros órdenes tratar con longitudes conmensurables entre las diferencias de cuadrados como se ha explicado anteriormente y los segmentos mayores mientras que los últimos tres órdenes tienen mayores términos que son inconmensurable con la diferencia de cuadrados. También podemos observar que cada uno de los emparejamientos se basa en que término (mayor, menor o ninguno) es racional. A partir de esto, es plausible asumir que el orden de Euclides se basa primero en la conmensurabilidad de los aspectos dados de la línea, y segundo en base a qué parte de la línea dada es racional, que conduce a los dos sistemas de clasificación vistos en la actualidad. Si esto fue el razonamiento o no de Euclides, parece que no estaba particularmente preocupado por el orden funcional a través de los Elementos. Por ejemplo, la primera vez que un lector encuentra un corte de línea en relación de extremo y media es en el principio del libro II. Sin embargo, no es hasta el Libro X de que las propiedades de dicha línea (con mayor longitud es una apótoma y menor longitud la primera apótoma) se explican y no es sino hasta el Libro XIII que este tipo de línea se aplica, se discutirá con más detalle luego. También es interesante observar que Euclides dedica libros VII, VIII y IX, a los números que investiga y la teoría de números, pero ciertas propiedades de los números aparecen en muchos de los otros diez libros, incluso abordando proposiciones de números en el libro V antes de sacar adelante una teoría de números (Grattan-Guinness, 1996).

A pesar de lo que puede o no puede ser un sistema de orden defectuoso, la gran mayoría del Libro X está dedicado a la exploración de las interacciones entre las clases de líneas irracionales. Cabe señalar que para cada característica de líneas binomiales, la misma propiedad se demuestra sólo treinta y siete proposiciones más tarde para líneas apótomas. A partir de proposiciones 54 y 91, Euclides demuestra que si un rectángulo está formado por una línea racional y una línea de primer orden binomial o apótoma, el "lado" o diagonal del rectángulo será una binomial o apótoma. Como mencioné antes, las proposiciones que describen las interacciones de líneas irracionales a menudo vienen en conjuntos. Así como la 54 y la 91 por probar su veracidad, las proposiciones 55, 56 y 92, 93 demuestran una situación similar que ocurre con la bimedial y la apótoma de líneas mediales. Un área formada por una racional y una binomial de segundo orden tiene por su lado una bimedial de primer orden (X 55). Para una racional y una tercera binomial, la segunda bimedial es la diagonal (X. 56). Cambiando "apótoma" para binomial y "apótoma de un medio" para bimedial, tenemos las declaraciones de las proposiciones 92 y 93. Nos enteramos de que si un rectángulo se forma con una longitud racional y área igual a un cuadrado de la binomial, el ancho del rectángulo será una primera binomial en la proposición 60. Del mismo modo ocurre con las apótomas (X. 97). Las proposiciones 61-62 y 98-99 se dedican a probar una declaración similar: que si una línea recta AB es una primera bimedial o apótoma de un medio (o segundo fin de que la proposición 99), y un CD recta expresable es el lado de rectángulo CE de tal manera que el área de la CE es igual al cuadrado de AB, entonces el otro lado de la CE rectángulo, el lado CF, es una segunda binomial o apótoma (tercer orden proposición 99). Por último, como se ha indicado anteriormente, las proposiciones 112-113 demuestran que si un área racional tiene una binomial para uno de sus lados, el otro lado será una apótoma conmensurable con la binomial y de orden correspondiente, en 114 demuestra que si una binomial y apótoma de un rectángulo son conmensurables y del mimo orden, la misma forma, la longitud y anchura, la diagonal será racional.

5. REPERCUSIONES MODERNAS

"El diálogo de Euclides en líneas irracionales no se limita al Libro X. De hecho ha sacado una aplicación importante de la apótoma en el Libro XIII. La proposición 6 establece que si una línea es cortada en extrema y media razón (primero introducido en II. 11), entonces el segmento mayor será un apótoma y el segmento menor de una primera apótoma. Esta proposición tiene enormes implicaciones para la teoría de las magnitudes irracionales. La proporción de oro, una de las áreas de matemáticas más aplicables y bien estudiados, se crea una línea de corte en relación extrema y media. Este es un tema importante de entender debido a la gran cantidad de propiedades en poder de los objetos que contienen esta relación. Un ejemplo es la espiral logarítmica que se forma a través de la construcción de los dos rectángulos áureos, cuyos lados, cuando se toma en proporción, igual al cociente de oro, y el triángulo de oro, cuyos ángulos son de 72 °, 72 °, 36 °. Espirales logarítmicas se ven en toda la naturaleza. Cuernos Ram, colmillos de elefante, conchas nautilus, piñas, flores del sol y muchos otros seres vivos crecen de acuerdo con la proporción áurea (Fett, 2006). Esta proporción se dice que es estéticamente la mas agradable a la vista, por lo que muchas grandes pinturas y esculturas contienen la proporción áurea. El Partenón de Atenas, que no sólo alberga esculturas que contienen la proporción áurea, en realidad puede ser inscrita en un rectángulo de oro, y cinco de las obras de Leonardo da Vinci, incluyendo dos de su más famosa "Virgen de las Rocas" y "Mona Lisa", también se dice que contienen la proporción áurea (Fett, 2006). Muchos cirujanos plásticos siguen utilizando la proporción áurea en varias ocasiones durante la construcción de lo que se cree que es un estándar universal de la belleza (Fett, 2006).

Cada uno de los cinco sólidos platónicos, los únicos sólidos existentes que tienen caras idénticas y equiláteras y vértices convexos, incorpora la proporción áurea en su construcción. El tetraedro, el octaedro y el icosaedro se basan en triángulos equiláteros, mientras que el cubo y el dodecaedro se basan en el cuadrado y pentágono. Estas formas se discuten en detalle en el Libro XIII de <u>Los Elementos</u> después de la introducción de la línea de corte en la relación de extrema y media. De particular interés son el dodecaedro y el icosaedro. Eudoxo de Cnido, que vivió después de Teeteto, tiene en su existir haber descubierto la irracionalidad de una línea dividida en relación extrema y media después de trabajar con el problema de la inscripción de un pentágono regular en un círculo dado (Knorr, 1983). El pentágono está formada en realidad por tres triángulos de oro, y la relación entre el lado más corto al más largo es igual a la proporción áurea. Esto implica la construcción de la icosaedro depende de la proporción áurea. El coeficiente de oro también está presente en el cálculo del área de superficie y el volumen del dodecaedro, así como el volumen del icosaedro (Fett, 2006). Desde Teeteto se le atribuye el descubrimiento del primer icosaedro, Libro XIII, junto con el Libro X, se basa firmemente en el trabajo del ateniense. De hecho, M.F. Burnyeat cita a B.L. Van der Walden en su artículo de revista de 1978 diciendo "El autor del

Libro XIII sabía los resultados de Libro X, pero... por otra parte, la teoría del Libro X fue desarrollado con miras a sus aplicaciones en Libro XIII. Esto hace inevitable la conclusión de que los dos libros se deben a un mismo autor... Teeteto".

El coeficiente de oro también se observa en la comparación de los valores secuenciales en la secuencia de Fibonacci también estudiada. Los números de Fibonacci se definen por la fórmula recursiva

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

para $f_n > 2$ con $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$ (Fett, 2006; Posamentier, 2002; Rosen, 2005). Al comparar el n-ésimo número de Fibonacci con el n-ésimo, la relación se aproximará a la proporción áurea a medida que n aumenta. No es de extrañar dada su relación con la proporción áurea, que la secuencia de Fibonacci se encuentra a menudo en el crecimiento de los objetos naturales. Por ejemplo, el número de espirales en las plantas que crecen en un patrón phyllotaxis siempre será un número Fibonacci (Rosen, 2005). Otra secuencia relacionada con los dos, los números de Fibonacci y la proporción áurea es los números de Lucas. Estos se definen mediante la misma fórmula recursiva como los números de Fibonacci y todavía comienza la secuencia con 1, pero 2 = 3 en lugar de 1 (Posamentier, 2002; Rosen, 2005). Curiosamente, existe la misma relación entre los números de Lucas y la proporción áurea como los números de Fibonacci y la proporción áurea (Posamentier, 2002).

6. CONCLUSIONES

Es lamentable que se sabe muy poco acerca de la teoría de los principios de los irracionales avanzando nuestra comprensión de lo que es hoy. Lo que también es lamentable es la falta de progreso que hemos hecho desde los tiempos de Euclides. Por el lado positivo, podemos estar agradecidos por la presentación sistemática minuciosa de magnitudes irracionales y sus propiedades e interacciones demostradas en Libro X de Los Elementos. Mientras que este capítulo de la geometría euclidiana no se ha desarrollado hasta el punto de que la mayor parte de su obra, la multitud de Libro X nos deja con un montón de información sobre los irracionales.

Sabemos que hay 13 tipos de líneas irracionales, cada categoría mutuamente excluyente. También sabemos que por cada línea de irracional, sólo hay una manera de dividir la línea para cumplir con los criterios de su categoría y el orden, lo que demuestra la singularidad de cada una. Tal vez lo más importante, sabemos de la proposición 115 que hay un número infinito de líneas irracionales. Euclides nos proporciona la aplicación de esta teoría en el Libro XIII, que muestra cómo el pentágono y el icosaedro utilizan magnitudes irracionales en la construcción de cada uno. Esta aplicación de la relación extrema-media ha dado lugar a importantes descubrimientos en el campo de la estética, el arte y la música a través de la apótoma conocida como la proporción áurea.

Tal vez esta información es suficiente para satisfacer a los matemáticos de la historia. O, posiblemente, nuestra comprensión de Euclides de los irracionales es completa. Dudamos altamente de esto último, pero creemos que se dedica mucho tiempo simplemente tratando de entender la teoría ya gravosa de líneas irracionales que poco queda para el avance de la teoría. Muchos matemáticos han dedicado tiempo a ayudar a los futuros estudiantes en la comprensión de la clasificación de las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Esperemos que esto eventualmente conduzca a una teoría más fácilmente comprensible, un paso punto a un punto de partida más innovador, la mejora de la teoría de líneas irracionales se puede desarrollar.

N. Sirotić y R. Zazkis (2005) llevaron a cabo un proyecto de investigación para averiguar cuánto retenemos de la teoría euclidiana de longitudes irracionales. Ellos pidieron a un grupo de estudiantes universitarios que estudian para ser profesores de secundaria si era posible localizar $\sqrt{5}$ en una recta numérica. Los resultados fueron un tanto aterradores. Menos del 20% de los participantes utilizó una construcción geométrica para encontrar $\sqrt{5}$ en la recta numérica, la mayoría de los que han utilizado el Teorema de Pitágoras, aproximadamente el 65% utiliza algún tipo de aproximación decimal en diversos grados de exactitud, y un abismal 15% o bien no responder, o peor aún, argumentó que no era posible encontrar exactamente dónde $\sqrt{5}$ caía en una recta numérica. La mayoría de los que argumentó que era imposible razonó que desde entonces $\sqrt{5}$ era irracional, la aproximación decimal es infinita y no repetitiva y que por eso no se puede colocar con precisión. Sin embargo, estos mismos participantes creían que un decimal infinito repetitivo, como 1/3, podrían ser colocado en su posición exacta, pero no pudieron explicar por qué si el decimal repite o no se hace una diferencia. Esto significa que el 80% de los futuros profesores de secundaria no podía pensar más allá de nuestra comprensión de las aproximaciones decimales a utilizar una idea conocida y altamente practicado (el Teorema de Pitágoras) para encontrar dónde $\sqrt{5}$ cae en una recta numérica. Para estas personas, parece que el número de línea es realmente una línea de números racionales y los números irracionales no se puede colocar con exactitud, ya que "debido a que [el decimal] nunca termina nunca podemos saber el valor exacto" (Sirotić, 2005). Este es un efecto secundario desafortunado del trabajo de Teodoro "y al' Karaji para ayudar a los estudiantes en la comprensión de los irracionales. El entendimiento original de líneas irracionales utilizando la geometría se pierde en el álgebra geométrica más fácilmente comprensible presentada en casi todas las ediciones actuales de Los Elementos. Mientras que el uso del álgebra es integral para ayudar a los estudiantes a entender este tema denso, un retorno a las raíces geométricas de magnitudes irracionales parece ser tan importante para los estudiantes para adquirir una verdadera comprensión del Libro X.

7. AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial a Steve Williams para la asistencia inicial en la investigación de este tema muy amplio y con el Dr. Bharat Sriraman de la Universidad de Montana por su valioso aporte en varios borradores y para mí un reto con un tema tan complejo.

Anexo 3. Traducción: “La croix des mathématiciens” The Euclidean theory of irrational lines

"LA CRUZ DE LOS MATEMÁTICOS": LA TEORÍA DE LÍNEAS EUCLIDIANA IRRACIONALES

Por Wilbur KNORR

Para el lector moderno del Libro Décimo de Euclides es de lejos la más intimidante porción de los *Elementos*, en virtud de su enorme longitud y la oscuridad de sus técnicas y motivos. Para acercarse a este material, se requiere una clave, del tipo del flamenco matemático-ingeniero Simon Stevin se jactó de poseer Hace casi cuatro siglos:

> Después de haber visto y examinado el Libro Décimo de Euclides el tratamiento de las magnitudes inconmensurables, y también había leído y releído varias comentaristas en el mismo, de los cuales unos juzgados por el asunto más profundo e incomprensible de las matemáticas, otros que se trata de proposiciones más oscuros y la cruz de los matemáticos, y más allá de esto me convenció a mí mismo (qué locura no la opinión de causa a los hombres a cometer?) para entender este asunto a través de sus causas, y que hay en él ninguna de las dificultades, como se supone comúnmente, I han tomado sobre mí para describir este treatise.[41]

Estratagema de Stevin, por el cual "todo este asunto es fácil y sin problemas", consistió en la expresión de las proposiciones de Euclides a través de un cálculo de cantidades irracionales, y comentarios más recientes, como las de Heath y por Junge, seguir su ejemplo en la aplicación de algebraica modos para explicar este material.[42] Pero para el lector históricamente mente el tema

[41] Mi traducción del *Arithmétique*, 1585, p 161;.. Cf. p 164 y el "Apéndice" agrimensura el contenido del libro X, pp 187 y ss.. Heath [1926, III, 8f] cita de una edición posterior (*Oeuvres*, 1634, pp 218-222.) Una observación a efecto similar (mi traducción del francés): "La dificultad del Libro Décimo de Euclides se ha convertido para muchos en horror, incluso llamándolo la cruz de los matemáticos, un tema muy difícil de digerir y en el que se percibe ninguna utilidad ". Stevin (1548-1620) se observó como ingeniero y escritor en las matemáticas. Sus *obras principales* han sido editadas por DJ Struik (4 vols, Amsterdam, 1955-1964.); y su tracto influyente en el cálculo decimal, De Thiende, se ha publicado en una edición alemana por H. Gericke y K. Vogel (Frankfurt am Main, 1965).

[42] Heath [1926, III, 4f] cita la "observación valiosa" de H.G. Zeuthen, que desde los Griegos resolvieron ecuaciones geométricamente, y "en la medida en una línea recta se parece a otra… era necesario llevar a cabo una clasificación de las magnitudes irracionales que se había llegado a una solución por sucesiva de ecuaciones de segundo grado ". Menciona varios otros tratamientos de naturaleza análoga (ibid., P. 8) y hace hincapié en este enfoque en su propio relato del libro (véase la nota 32 infra). G. Junge [1930, 17-26] parece mucho más a una interpretación viable cuando,

de la interpretación se ha visto complicada por el presente, por los autores de esta teoría no pueden haber tenido tales modos algebraicos a la mano en su formulación. El proyecto de dilucidar los motivos que subyacen a la forma geométrica de Euclides de la teoría ha eludido en gran medida incluso el mejor de los relatos modernos.

Yo aquí propongo ofrecer una visión de los problemas geométricos en los que se construye la estructura de la teoría de Euclides. Este punto de vista se llena en los detalles de un boceto que presenté en mi estudio de la geometría preeuclidiana hace unos años y complementa el tratamiento práctico dado antes que por B.L. van der Waerden.

Voy a mostrar cómo la idea esencial de la teoría surge a través de la consideración de las construcciones euclidianas de plano regular y figuras sólidas, luego trazar el desarrollo de esta idea en la teoría del Libro X, y cerrar con algunas reflexiones sobre la naturaleza dl proyecto formal abarcado este libro. Será primero ser necesario introducir algunas nociones básicas extraídas de las primeras fases del estudio de las magnitudes inconmensurables.

1. PRIMEROS PASOS.

Cuándo y cómo los antiguos griegos los primeros en descubrir la existencia de magnitudes inconmensurables es una cuestión controvertida. Bajo la autoridad de los escritores legendrios muy tarde se podría asignar este descubrimiento a Pitágoras a principios del siglo V, a. C, o incluso al propio Pitágoras un poco más temprano todavía. Pero la evidencia extraída de los presocráticos desalienta una datación antes de la mitad del siglo V. Aunque el contexto de los estudios del pentágono regular y la división de la líneas de acuerdo con la "sección áurea" se ha propuesto como el contexto inicial del reconocimiento de líneas inconmensurables, testigos del siglo IV, como Platón y Aristóteles, tratan el lado y el diámetro de la cuadrado como paradigmático de los inconmensurables, mientras que una forma geométrica de la prueba

---

después de la vista de Chasles, en su intento de romper esta "Gordischer Knote" (Pág. 19) a través del proyecto de simplificar expresiones Surd. Este punto de vista, tan refinado por van der Waerden (ver nota 4), no es muy diferente de la que voy a pasar a presentar.

conocida de su inconmensurabilidad, fundada en la distinción entre pares e impares enteros, ofrece una manera perfectamente factible para el descubrimiento y la primera demostración de este resultado. De hecho, las dificultades computacionales especiales que surgen en la evaluación de $\sqrt{2}$ ya tenían entonces una historia de más de mil años. En percibir que tal cantidad era, en principio, inexpresable como una relación de números enteros, los geómetras griegos estarían inyectando un característicamente elemento teórico en la investigación de una cuestión técnica.

Por alrededor de 400 a. C. otras construcciones fueron reconocidas para dar lugar a líneas inconmensurables a través de los esfuerzos de Teodoro de Cirene y de Arquitas de Tarento, y el resultado general de la incorporación de éstos era conocido, y tal vez primero enunciadas por Teeteto de Atenas a principios del siglo IV. Platón da una declaración suelta de ella en el diálogo el nombre de este matemático:

> Tales líneas como cuadrada del número equilátero y el plano que hemos definido como "longitud", pero tal como cuadrada del número oblonga como "potencias", para estos no son conmensurables con el anterior en relación con la longitud, sino más bien con respecto a los planos que se produce. Y en cuanto a los sólidos otra cosa semejante sostiene.

La aritmética que sostiene esta formulación es templada en el estado de la condición más general dentro de la teoría euclidiana:

> Los cuadrados de las líneas conmensurables en longitud tienen entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y [por el contrario], cuadrados que tienen entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado también tendrá los lados conmensurables en longitud...

En esta extensión, la condición abarca no sólo el caso en que una de las líneas o cuadrados es un múltiplo entero de la otra, sino también cuando la relación de la una a la otra es la de un entero a un número entero. Platón a un lado en el caso sólido es de interés, ya que deja claro que la condición para la conmensurabilidad de líneas formadas como las raíces cúbicas de términos enteros o racionales se entiende bien. A medida que el último no tiene nada que ver con las construcciones en la teoría euclidiana, no recibirá su declaración allí. Pero por los principios por los cuales Euclides afecta el caso plano aparecen con sus correlatos sólidos en los libros VI, VII y XI de los *Elementos*, por lo que podemos suponer fácilmente que los antiguos conocían la extensión al caso sólido también. En cuanto a los autoridades superiores, la imposibilidad de una representación geométrica plantea una dificultad. Sin embargo, para cualquier matemático preparado para manipular tales términos en la forma flexible del Diofanto, tanto la afirmación y la prueba de la condición general de conmensurabilidad de las facultades que estarían en la mano.

Un defecto en la formulación euclidiana es digno de mención en este punto: tal como está, que no cede un criterio completo para conmensurabilidad de longitud o en (segundo), sólola potencia, ya que no indica cómo se conoce una relación de números enteros a la igualdad o no ser igual a una relación de números enteros cuadrados. Un lema adjunto a la presente propuesta intenta suplir esta brecha al señalar que "los números planos semejantes ", y sólo ellos, tendrá la relación entre un número cuadrado de un número cuadrado; este lema es reconocible como una adición posterior a Euclides. Si llega el caso, se puede obtener el resultado necesario de la teoría de los números de Euclides, para mostrar, por ejemplo, que si una relación es igual a una relación de números enteros cuadrados, sus mínimos términos son números enteros cuadrados. Quizás Euclides ve esto obvio o algún equivalente. Pero estaríamos más cómodos en nuestra evaluación de la precisión formal de su teoría de los irracionales, de haber incluido la afirmación y prueba apropiada de esta condición.

Tenemos el siguiente testimonio importante para la teoría de los irracionales desde el comentario sobre el Libro X por Pappus de Alejandría Teeteto:

> Teeteto distingue las potencias conmensurables en longitud de los inconmensurables, y distribuye la muy conocida entre las líneas Surd según los medios, por lo que él le asigna la línea media a la geometría y el binomio de la aritmética y la apótoma de armónicos, como Eudemo informó la peripetica.

La interpretación de este pasaje debe tener en cuenta que el informante, Eudemo, fue discípulo de Aristóteles, por lo tanto, posicionado entre los tiempos de Teeteto y Euclides. Los términos "medial", "binomio" y "apótoma" son básicos dentro de la clasificación de Euclides de las líneas irracionales, pero aprendemos de otro tratado aristotélico de que estos nombres eran "sólo recientemente" introducido. Por lo tanto, podemos inferir de informe Eudemo "no es que Teeteto había establecido una correlación entre las clases euclidianas y de los medios, sino más bien que Teeteto formado sus propias clases de los irracionales como el medio de líneas dadas. La correlación con las clases euclidianas es, pues, de manera Eudemo de caracterizar lo que Teeteto hizo en términos más familiares para los estudiosos de la teoría más tarde. Curiosamente, la distinción inicial entre lineal y cuadrado de sólo conmensurables se habla aquí como una de las potencias, en lugar que de líneas. En esto, Eudemo adhiere más estrechamente a la designación que leemos en el relato de Platón, en lugar de la de Euclides.

De esto se puede inferir qué el procedimiento Teeteto 'fue: a partir de dos líneas conmensurables en cuadrado, pero no en longitud, se forma a partir de ellas, a su vez sus medias geométricas, aritméticas y armónicas y demostró que cada una de ellas dio lugar a una línea irracional. Queremos suponer que el tratamiento de los dos primeros de estos no fue significativamente diferente de la manipulación de Euclides de las correspondientes líneas medial y binomial. Por ejemplo, deje que las líneas dadas sean a y b, de manera que $a: b$ no es una relación de números enteros, pero es $a^2: b^2$. Si designamos como g su media geométrica (por lo que $g^2 = ab$), entonces nos dicen que g es irracional; es decir, g^2 es inconmensurable con el cuadrado de cualquier línea racional. Es suficiente para mostrar que "$g^2: a^2$ (o $g^2: b^2$) no pueden igualar una relación de números enteros. Porque si lo hiciera, a continuación, ya que $g^2: a^2 = ab: a^2 = b: a$, las líneas b y a serían conmensurables en longitud, contrario de haber sido tomadas como inconmensurables. Si siguiente partimos de su media aritmética $e = \frac{1}{2}(a + b)$, se deduce que e también es una línea irracional. Porque si no, se seguiría que $(a + b)^2: a^2$ es una relación de números enteros. Dado $(a + b)^2: a^2 = a^2 + b^2 + 2ab: a^2$ y, por supuesto, b^2 es conmensurable con a^2, se deduce que $2ab$ es conmensurable con a^2 o b es conmensurable con a. Esto contradice nuestra suposición inicial de que a y $b$son inconmensurables.

En el tratamiento del tercer caso, la media armónica h de las líneas inconmensurables dadas a, b, se podría utilizar la relación $a - h: h - b = a: b$ por el cual se define la media; esto es equivalente a la relación $h = 2ab/(a + b)$, es decir, $h: b = a: e$, por la media aritmética e. Entonces, si h fuera racional $h^2: b^2$ sería igual a una relación de números enteros, por lo que e sería racional; este último contradice la irracionalidad de e, como se acaba de demostrar. Ahora, se puede observar otra relación derivada de la utilizada para h anteriormente, a saber, $h: a - b = 2ab: a^2 - b^2$. A partir de esto, se puede consultar los resultados relativos a la h a otros que se ocupan de $a - b$. En la teoría euclidiana, la *apótoma* irracional se define como $a - b$, y su irracionalidad se demuestra a través de la consideración de la relación $(a-b)^2 : a^2$ paralela a la manera dada anteriormente para la media aritmética. Por lo tanto, ocurre que Euclides trata la apótoma independientemente de la binomial y relega a un epílogo la propiedad de que cualquier binomial $(a+b)$ y su apótoma asociada $(a - b)$ tienen un producto racional (es decir, $a^2 - b^2$). Por el contrario, el análogo de esta propiedad sería el principal instrumento para la reducción de la armónica al caso aritmética dentro de la teoría de Teeteto.

En ausencia de documentación adicional, no tiene sentido especular sobre los detalles de la teoría de Teeteto. Presumiblemente, trabajó a cabo ciertos análogos a los resultados presentados por Euclides, por ejemplo, la unicidad de la representación de una línea irracional como una media entre los términos inconmensurables. Pero una cosa está del todo claro: Teeteto no podría haber alcanzado ningún resultado sobre la irracionalidad de estas líneas sin uso de la condición completa conmensurabilidad en cuadrado como sostuvo en la teoría euclidiana. El comentarista Pappus contrasta con razón la afirmación platónica restringido de esta condición con la afirmación de Euclides en general, observando, por ejemplo, que los términos $\sqrt{8}$ y $\sqrt{18}$, cada una inconmensurable con un término unidad supone, pueden ser reconocidas como conmensurables entre sí sólo a través de referencia a la formulación de Euclides. Pero Pappus parece asignar esta limitación de la definición platónica de Teeteto también. Se percibe que aquí hay que sacar conclusiones del diálogo platónico, sin ninguna base independiente en las fuentes matemáticas o históricas. Por su afirmación es incompatible con una teoría de los irracionales incluso del tipo más rudimentario.

Un vistazo al Libro X de Euclides Tabla I: Algunas definiciones y resultados básicos
Dos magnitudes son *conmensurables* si y solo si tienen una medida común (Def. 1; cf. Porp.2-4); por lo tanto, las magnitudes conmensurables tienen entre sí la relación de un entero en un entero (prop. 5-8). Escribiremos "aCb" cuando las magnitudes a, b son conmensurables entre sí, y aIb cuando no.
Dos líneas a, b son conmensurables *en longitud* siempre que aCb; son conmensurables *en cuadrado* siempre que a^2Cb^2 (Def. 2). Si aCb, entonces $a^2 : b^2$ es una relación de enteros cuadrado (prop. 9). Tenga en cuenta que son conmensurables *solo en cuadrado*, siempre que a^2Cb^2pero aIb.
Postulamos un cierta línea r como "la racional;" entonces cualquier otra línea r' es *racional* siempre que $r^2Cr'^2$, pero de lo contrario *irracional* (Def. 3). Tenga en cuenta que r' puede ser racional, sin embargo rIr'; este es un sentido crítico en el que la noción de Euclides de "racional" difiere de la habitual en la teoría de números moderna.

Llamamos a un área A *racional* siempre que ACr^2, pero *irracional* de lo contrario (Def. 4). Por lo tanto, la noción de áreas racionales de Euclides está de acuerdo con lo moderno.
Siempre el producto de dos líneas racionales r, r' forman un área racional, rCr' (prop. 20). Sean a, b líneas racionales, conmensurables entre sí solo en cuadrado; entonces el área irracional formada como ab es llamada *medial*, y su “lado” (es decir, la línea c tal que $c^2 = ab$) es una *línea medial* y es irracional (prop. 21; cf. 23, porisma). La diferencia entre áreas mediales no puede ser un área racional (prop. 26). Sean a, b líneas racionales, conmensurables entre sí solo en cuadrado; entonces $a + b$ es llamada una línea *binomial* y es irracional (porp. 36), y $a - b$ es llamada *apótoma* y es irracional (prop. 73).

2. AVANCES POR EUDOXO.

Distinguido entre los geómetras de la generación posterior a Teeteto fue Eudoxo de Cnido. Él es mejor conocido por su invención de un método de los límites para la medición rigurosa de planos curvilíneos y figuras sólidas, la base del Libro XII de *Elementos*, y por su elaboración de una técnica general de proporciones igualmente válidas para las magnitudes conmensurables e inconmensurables, la base de *Elementos* V. Este último ya establece un vínculo con la obra de Teeteto, pero algunos testimonios indican una conexión adicional. El comentarista Proclo relata que Eudoxo contribuyó al estudio de los medios y que "avanza a través del uso de análisis de la cantidad de cosas conocidas acerca de la sección, que tuvo su inicio a partir de Platón." La asociación aquí con Platón es oscura, y puede ser nada más que un poco de Proclo 'neo-platonizante; pero la sugerencia de que él se refiere aquí a algún estudio de la "sección áurea" parece más fructífero, ya que permite una conexión con los materiales sustanciales sobre este tema en los *Elementos* de Euclides. La construcción de la "sección" en sí ya debe haber sido familiar dentro de la geometría mayor, ya que es crucial para resolver el problema de la inscripción de un pentágono regular en un círculo dado. Sin embargo, otros aspectos de este estudio podrían haber sido descubiertos en el momento posterior de Eudoxo, por ejemplo, la prueba de que los segmentos de una línea dividida son irracionales. Uno puede ver cómo estos mismos resultados forman un puente entre la teoría de los irracionales de Teeteto, como se acaba descrito anteriormente, y la estructura más elaborada en el Libro X. Vamos a considerar la construcción de la "sección" y dos resultados en la irracionalidad de sus segmentos, con el fin de revelar su importancia para el desarrollo de la teoría de los irracionales.

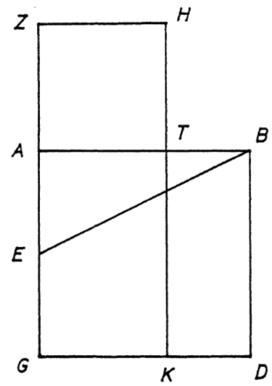


Figura 1

El proyecto de la división es determinar los segmentos de x y y de una línea dada a de manera que $y^2 = xa$ o $x: y = y: x + y$. En la terminología de Euclides, la línea se dice que está dividida en "extrema y media razón". Siguiendo el método más simple en II, 11, en lugar del método algo más complejo en el VI, 30, nos basamos en la recta dada AB su cuadrado $ABDG$, bisecar su lado AG a E y unir a BE. A continuación, extendemos GA a Z tal que $ZE = EB$ y completar el cuadrado $AZHT$. A continuación, T divide AB de tal manera que los segmentos AT, TB tienen la propiedad requerida; es decir, si ponemos $AT = y$ y $TB = x$, entonces $y^2 = xa$.

Sin entrar en los pasos de la prueba, podemos observar la función crítica de la construcción, que BE es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos iguales $a, \frac{1}{2}a$, respectivamente; es decir, $\left(y + \frac{1}{1}a\right)^2 : \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 5: 1$. Por lo tanto, se deduce que $y + \frac{1}{2}a: \frac{1}{2}a = \sqrt{5}: 1$, donde $y: \frac{1}{2}a \left(= x: \frac{1}{2}y\right) = \sqrt{5} - 1: 1$. Uno ve lo que no sólo que x y y son inconmensurables, tanto con respecto a a y el uno al otro, pero también que y es una apótoma irracional (de los términos $\sqrt{5}$ y 1). A partir de la relación $x = \frac{1}{2}a = 3 - \sqrt{5}: 1$, también es claro que x es también una apótoma irracional. Este es el procedimiento que Euclides sigue en el establecimiento de la irracionalidad de estos segmentos en XIII, 6. Pero uno podría suponer que un geómetra trabajando dentro de la teoría de Teeteto trató de mostrar cada uno de estos segmentos como un medio entre dos lineas inconmensurables. Podemos encontrar estos a través de un método de "falsa posición" sobre la base de la expresión de la media armónica dada anteriormente. Porque si h, h' son los respectivas medias de armónicos de los términos α, β y α', β', donde $\alpha: \alpha' = \beta: \beta'$, luego $h: h'$ tiene el mismo valor. Pongamos $\alpha': \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{5}: 1$ y $\beta': \frac{1}{2}\alpha = 1: 1$, para que $h': \frac{1}{2}\alpha(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}: 2$. Desde $h: \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{5} - 1: 1$, se deduce que $\alpha': \alpha = \beta': \beta = \sqrt{5}: 2$, de donde $\alpha: \frac{1}{2}\alpha = 2: 1$ y $\beta: \frac{1}{2}\alpha = 2: \sqrt{5}$. Del mismo modo, ya que el menor segmento x es tal que $x: \frac{1}{2}\alpha = 3 - \sqrt{5}: 1$, será la media armónica de los términos α, β donde $\alpha: \frac{1}{2}\alpha = 2: \sqrt{5}$ y $\beta: \frac{1}{2}\alpha = 2: 3$.

En este caso, la expresión de los segmentos de mayor y menor a través de las diferencias $\sqrt{5} - 1$ y $3 - \sqrt{5}$, respectivamente, es tan natural que su expresión alternativa como medios de armónicos es difícil para suponer que no sea a través del medio de la relación de $h: \alpha - \beta$. Esto sugiere que los problemas de este tipo eventualmente llevaron geómetras de reconocer la mayor eficiencia de tratar con esta clase de los irracionales en la forma de la apótoma más que como una media armónica, y así para reformular la teoría de la Teeteto en la forma euclidiana.

Si buscamos entre los resultados euclidianas relativos a la sección extrema y media, sin embargo, sólo uno emerge como de interés suficiente para merecer la atención especial de un geómetra del calibre de Eudoxo. Esta es la expresión del lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio racional dado como una línea irracional (XIII, 11), por el cual Euclides expresa como un irracional el lado de la icosaedro regular inscrito en una esfera de determinado radio racional (XIII, 16). Desde la forma de inscribir el pentágono (en IV, 10-11) depende del hecho de que su diagonal y el lado son los segmentos mayor y menor, respectivamente, de una línea dividida en extrema y media razón, sabemos de lo anterior que se serán inconmensurables entre sí, y también que será apótoma irracionales en el caso de que su suma es la línea racional dado. Pero en el contexto del problema inscripción, es el radio del círculo que es la línea racional, de modo que el lado y la diagonal se enfrentará a nuevas expresiones relativas a la misma. Consideremos cómo un geómetra de trabajo dentro de la teoría anterior sería abordar el problema de expresar estas líneas como irracionales. En lo que sigue, voy a simplificar mediante la sustitución de las medias aritméticas y armónicas con la suma y la diferencia, respectivamente, de sus términos. Euclides investiga solamente el lado del pentágono en la construcción del XIII, 11.

Mientras yo sigo su método, será conveniente para desarrollar junto con ella la expresión de la diagonal.

Sea el pentágono regular $ABGDE$ inscrito en la circunferencia de centro Z y diámetro racional. Dibujar el diámetro AZK encontrando el lado GD en ángulo recto en H, encontrando diagonal EB, encontrando AK en ángulo recto en T, y unirse a la diagonal AG y el radio ZG. Denotemos ZG como r, una línea racional, y $GD = s$, $AG = BE = d$, $TZ = x$ y $ZH = y$. Como $AB^2 = TA \cdot AK$ y $AG^2 = HA \cdot AK$, tenemos que $s^2 = 2r(r - x)$ y $d^2 = 2r(r + y)$. Además, como los triángulos BTZ, AGH son semejantes (porque ellos tienen razón y los ángulos en B y en A son iguales), $x{:}\, r = \frac{1}{2}{:}\, d$ y como los triángulos ZGH, BAT son semejantes, $y{:}\, r = \frac{1}{2}d{:}\, s$. Como además d, s son en extrema y media razón, $d{:}\, s = d + s{:}\, d$, por consiguientes $\left(s + \frac{1}{2}d\right)^2 : \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = 5{:}\, 1$, como se vio anteriormente. Resulta que $s{:}\frac{1}{2}d = \sqrt{5} - 1{:}\, 1$, o que $\frac{1}{2}s{:}\, d = x{:}\, r = \sqrt{5} - 1{:}\, 4$. Igualmente, $y{:}\, r = \frac{1}{2}d{:}\, s = 1{:}\, \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5} + 1{:}\, 4$. Por lo tanto, $s^2{:}\, r^2 = 2(r - x){:}\, r = 5 - \sqrt{5}{:}\, 2$, mientras $d^2{:}\, r^2 = 2(r + y){:}\, r = 5 + \sqrt{5}{:}\, 2$.

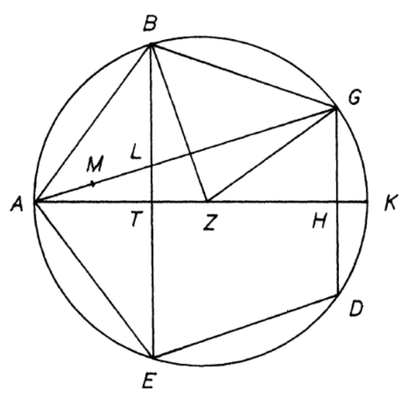


Figura 2

Este resultado pone de manifiesto que d y s son líneas irracionales, porque d^2 y s^2 son cada inconmensurable con r^2. Pero en cuanto a qué tipo de irracional cada uno es, no se puede decir todavía, ya que cada uno viene no como la suma o diferencia de los inconmensurables, pero como la raíz cuadrada de una suma o diferencia. Por lo tanto tenemos que indagar en la naturaleza de los términos γ, δ de manera que $d = \gamma + \delta$, mientras que $s = \gamma - \delta$. El argumento se hará en forma de lo que los griegos llamaban "análisis", en el que el resultado deseado es en un primer momento asumió como se conoce y se reduce entonces a otro resultado dentro de la serie de "dados", es decir, de los resultados que ya han sido establecidos o que pueden ser estipulados. En este caso, asumimos que d y s son, respectivamente, la suma y diferencia de términos racionales γ y δ, conmensurables entre sí solo en cuadrado –esto es, d es una binomial (o aritmética) irracional, mientras s es una apótoma (o armónica) irracional—y desde esta visualización son los términos γ y δ. Primero debemos demostrar que estos dos supuestos son compatibles: esto es que $d = \gamma + \delta$ implica $s = \gamma - \delta$. Para ello, debemos suponer que el cuerpo de la teoría euclidiana de las líneas y áreas mediales ya estaba disponible dentro de la teoría anterior. En particular, que un área que es suma (o diferencia) de un área racional y una medial es tan expresable de una cola manera (cf.X, 26, 42, 79). Como $d^2 = (r^2/2)(5+\sqrt{5}) = (\gamma+\delta)^2$, uno tiene que $\gamma^2 + \delta^2 = \frac{5}{2}r^2$ y $2\gamma\delta = (\sqrt{5}/2)r^2$. Restando, encontramos que $(\gamma-\delta)^2 = (r^2/2)(5-\sqrt{5}) = s^2$, o $s = \gamma - \delta$ como se reivindica. Observe cómo los términos γ, δ que están aquí se establece en dos formas relacionadas: una vez a través de la suma de sus cuadrados se administra junto con su producto; y otra vez a través de su suma y su diferencia está dada por separado. Desde estas últimas relaciones lineales se deduce que $\gamma^2 = (r^2/4)(5+2\sqrt{5})$ y $\delta^2 = (r^2/4)(5-2\sqrt{5})$.

Así, hemos mostrado d y s explícitamente como la suma y diferencia de términos inconmensurables. Pero también resulta evidente que no es una línea irracional de la clase estándar supuesta inicialmente. Para las líneas γ, δ son irracionales, conmensurables entre sí solo en cuadrado. Claramente ninguna es conmensurable en cuadrado con r^2, así, que ellas no son racionales; por otra parte, si $\gamma^2 : \delta^2 = m : n$, una razón de enteros, seguiría que $m + n : m - n = 10 : 4\sqrt{5}$, y esto es imposible dado que $10, 4\sqrt{5}$ son términos inconmensurables. sí, hemos encontrado que d y s son ejemplos de un nuevo tipo de irracional.

Dado que d es el mayor y s el menor de los segmentos formados vía la extrema y media división de una línea, voy a llamar al primero un "mayor" irracional y el último un "menor" irracional. Creo que el descubridor de este resultado introdujo estos mismos nombres; en la teoría euclidiana, las clases de los irracionales para los que d y s pueden ser vistos como los casos paradigmáticos se llaman, respectivamente, el "mayor" (o "major", $meiz\bar{o}n$) y el "menor" (o "minor", $elass\bar{o}n$). Los nombres euclidianas han de otro modo completamente eludido los esfuerzos de los comentaristas, antiguos y modernos por igual, para encontrar una explicación.

En cuanto a la identidad del descubridor, ya he indicado Eudoxo. Como se ha señalado, se dice que han avanzado el estudio de "la sección" por medio del método de análisis. Ese es un resumen acertado de la cuenta que acabamos de dar, si bien es difícil concebir cómo cualquier otro de los resultados euclidianos en la extrema y media división podría haber contratado los esfuerzos de alguien como Eudoxo, si es que eso es lo que se entiende por "La sección". Por otra parte, este resultado particular, pasa a tener importancia crucial para la elaboración de la teoría de los irracionales. Esto ya empieza a emerger de lo que hemos visto y se convertirá totalmente clara de lo que sigue.

3. EXTENSIÓN DE LA TEORÍA

Aunque la diagonal y el lado del pentágono no resultaron ser unas sencillas binomial y apótoma, respectivamente, cada una fue, de hecho, producida como la raíz cuadrada del producto de una línea racional por una binomio o una apótoma. Esto nos lleva a considerar el problema de especificar las condiciones bajo las cuales una raíz cuadrada de hecho, será una simple binomial o apótoma. La solución de este problema es la clave para entender el motivo y la razón de ser de toda la teoría euclidiana.

<table>
<tr><td colspan="2">Un vistazo al Libro X de Euclides
Tabla II: Definiciones y Relaciones de Irracionales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dada la línea irracional r, denotamos las binomiales / apótomas “de orden k” como $a_k \pm b_k$ y la correspondiente adición / sustracción irraciona “de clase k” como $c_k \pm d_k$. Se obtienen las siguietes relaciones
$$\sqrt{r(a_k \pm b_k)} = c_k \pm d_k \qquad \text{(tomar los signos en el mismo orden);}$$
$$c_k^2 = \frac{1}{2} r(a_k + s_k), \qquad d_k^2 = \frac{1}{2} r(a_k - s_k), \qquad \text{para } s_k = \sqrt{s_k^2 - b_k^2};$$
$$ra_k = c_k^2 + d_k^2, \qquad rb_k = 2c_k d_k.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construcción de orden y clases</td></tr>
<tr><td>Binomiales / Apótomas</td><td>Adición / Sustracción irracional</td></tr>
<tr><td>$k = 1$ $a_1 \boldsymbol{C} s_1$
$a_1 \boldsymbol{C} r$</td><td>c_1, d_1 racionales
$c_1 \boldsymbol{I} d_1$ (por lo tanto, $c_1^2 + d_1^2$ es racional, $c_1 d_1$ es medial)</td></tr>
</table>

	$b_1\boldsymbol{I}r$	
$k = 2$	$a_2\boldsymbol{C}s_2$ $a_2\boldsymbol{I}r$ $b_2\boldsymbol{C}r$	c_2, d_2 medial, $c_2\boldsymbol{I}d_2$ $c_2^2\boldsymbol{C}d_2^2$ (por lo tanto $c_2^2 + d_2^2$ es medial, c_2d_2 racional
$k = 3$	$a_3\boldsymbol{C}s_3$ $a_3\boldsymbol{I}r$ $b_3\boldsymbol{I}r$	c_3, d_3 medial, $c_3\boldsymbol{I}d_3$ $c_3^2\boldsymbol{C}d_3^2$ (por lo tanto $c_3^2 + d_3^2$ es medial, c_3d_3 medial
$k = 4$	$a_4\boldsymbol{I}s_4$ $a_4\boldsymbol{C}r$ $b_4\boldsymbol{I}r$	$c_4^2\boldsymbol{I}d_4^2$ $c_4^2 + d_4^2$ racional $c_4^2d_4^2$ medial
$k = 5$	$a_5\boldsymbol{I}s_5$ $a_5\boldsymbol{I}r$ $b_5\boldsymbol{C}r$	$c_5^2\boldsymbol{I}d_5^2$ $c_5^2 + d_5^2$ medial $c_5^2d_5^2$ racional
$k = 6$	$a_6\boldsymbol{I}s_6$ $a_6\boldsymbol{I}r$ $b_6\boldsymbol{I}r$	$c_6^2\boldsymbol{I}d_6^2$ $c_6^2 + d_6^2$ medial $c_6^2d_6^2$ medial

Comencemos con el producto $r(a + b)$, para r racional y para a, b raciona, pero conmensurable entre sí solo en cuadrado. Pretendemos de que el "lado", o la raíz cuadrada, de esta zona ser un binomio $c + d$; esto es, que c, d también son racionales, conmensurables entre sí, Como antes, se deduce que $ra = c^2 + d^2$ y $rb = 2cd$.

Por lo tanto, $r\ (a\ -\ b)\ =\ (c\ -\ d)^2$ 2, de modo que podemos combinar los casos para $a\ +\ b$ y $a\ -\ b$. Tenga en cuenta que una de las condiciones que ya ha aparecido: que uno de los términos del binomio dado, a, debe ser conmensurable con r, mientras que el otro, b, puede ser conmensurable con ella sólo en cuadrado. Resolviendo para c y d, nos encontramos con que $c^2 = (r/2)(a + (a^2 - b^2)^{1/2})$, mientras $d^2 = (r/2)(a - (a^2 - b^2)^{1/2})$. Para c y d líneas racionales, como se requiere en el problema, es necesario que c^2, d^2 cada ser conmensurable con r^2. Como a es conmensurable con r, también tenemos que tenemos que $(a^2 - b^2)^{1/2}$ es conmensurable con r. Por lo tanto, resulta que la condición necesaria y suficiente que el lado del $r\ (a\ \pm\ b)$ sea, respectivamente, el binomio o apótoma $c\ \pm\ d$ es que tanto a como $(a^2 - b^2)^{1/2}$ sean conmensurables con r

En la terminología de Euclides, los términos $a \pm b$ se llaman la "primera" binomial y apótoma, respectivamente. Si, alternativamente, $(a^2 - b^2)^{1/2}$es conmensurable con a, pero ni ellos ni b son conmensurables con r, resulta la "segunda" binomial y apótoma; si de nuevo $(a^2 - b^2)^{1/2}$ y a son conmensurables entre sí, pero ni ellos ni b son conmensurables con r, entonces resulta la "tercera" binomial y apótoma. Quedan tres casos más, donde $(a^2 - b^2)^{1/2}$ y a son inconmensurables entre sí, pero a es conmensurable con r (la "cuarta" binomial y apótoma), o b es conmensurable con r (la "quinta"), o ni a ni b es conmensurable con r (la "sexta"). Claramente, este esquema agota en una manera obvia las binomiales y apótomas de acuerdo con la solución del problema anterior. Por otra parte, para la "primera" clase, pero para ninguna de las derivadas, que sostiene que el "lado" es un binomio o apótoma irracional.

Es obvio que las "partes" en cada una de estas clases derivadas son líneas irracionales. Porque si $c \pm d$ eran racionales, entonces $(c \pm d)^2$sería conmensurable con r^2, de donde $a \pm b$ sería conmensurable con r; pero esto está excluido, ya que $a \pm b$ se introduce en todos los casos como un binomio o apótoma irracional. La teoría euclidiana tiene otras características que esta era la manera en que los irracionales más allá del apótoma y binomial se establecieron primero en salir. Si tenemos en cuenta los casos particulares de la diagonal y el lado del pentágono inscrito, presentados anteriormente, ya que estos se encuentran para ser los "lados" de los productos de la racional $r / 2$ por los irracionales $r(5 \pm \sqrt{5})$, respectivamente, este último cae bajo el "cuarto" orden de binomios y apotomes, todas esas irracionales formados como los "lados" de líneas en este orden se llama "mayor" y "menor", respectivamente. El "lado" correspondiente al binomio "quinto" se llama "que cuyo cuadrado es un ser racional, más una medial" (por aquí, rb es una zona racional, mientras que ra es un área medial); del mismo modo, el lado de la "sexta" binomio se llama "que cuyo cuadrado es dos mediales" (para ambos ra y rb son áreas mediales). Estos tienen los análogos evidentes en los casos de la "sexta" y "quinta" apótoma. Ahora, la misma nomenclatura se podría aplicar también a la clases de "terceros" y "segundo". Uno por lo tanto necesita una característica de identificación adicional para estos, y Euclides le resulta al referirse a los términos c, d que forman sus "lados". Desde

c^2, d^2 respectivamente iguales $\frac{1}{2}ra \pm \frac{1}{2}r(a^2+b^2)^{1/2}$, como se ha visto anteriormente, y dado que en la "segunda" y los casos de "terceros" las líneas a, $(a^2+b^2)^{1/2}$ son conmensurables uno con el otro y al mismo tiempo tanto inconmensurable con r, se deduce que c^2 y d^2 son cada uno un área medial, de donde c y d son cada una líneas irracionales mediales. En consecuencia Euclides designa la segunda y tercera clases de los irracionales aditivos la "primera" y "segunda bimedial", con los nombres correspondientes a la segunda y tercera clases de los irracionales sustractivos. Tenga en cuenta que esta designación no verdaderamente distingue entre la segunda y tercera clases por un lado, y el quinto y sexto en el otro. Porque en las últimas clases, las líneas a, $(a^2-b^2)^{1/2}$ serán inconmensurables entre sí, de modo que su suma o diferencia será un binomio o un apótoma irracional, respectivamente, pero nunca una línea racional. Por lo tanto, para estos c^2, d^2 puede no ser zonas mediales, ni c, d ser líneas irracionales mediales.

Cerramos esta sección con la consideración de una propiedad importante dentro de la teoría euclidiana: la unicidad de la representación de cualquier línea irracional, o en palabras de Euclides, "una línea irracional se divide en sus términos de una sola manera". Es posible ver cómo este resultado se deduce en el caso general de su prueba de la binomial y apótoma. Este último aparecen en (X, 42 y 79), de los cuales lo siguiente es una adaptación. Supongamos la línea binomial $a + b$, donde a, b son números racionales, conmensurables entre sí en un solo cuadrado; y supongamos otro par de líneas a' y b', tal que $a + b = a' + b'$: se afirma que $a = a', b = b'$. Porque si no, ya que $(a + b)^2 = (a' + b')^2$, la diferencia $a'b' - ab$ será un área racional, ya que los cuadrados de a, a', b, b' son todos racionales. Por lo tanto, si ponemos $aa" - a'b' - ab, a"$ será racional y conmensurables con a (cf. X, 20); si ponemos $ab" = a'b'$, entonces $b"$ será racional, pero conmensurables sólo en cuadrado con a (cf. X, 22). Tenemos así $a" = b" - b$, de modo que $b" - b$ es una línea racional, por lo que $b"$ es conmensurable con b (de lo contrario, su diferencia sería una apótoma irracional). Por lo tanto, b es conmensurable con $a"$, y por tanto también con a; Esto contradice nuestra suposición de $a + b$ como un binomio. Se deduce entonces que $ab = a'b'$, donde también $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$. Por lo tanto, $a^2 + b^2 - 2ab = a'^2 +$

$b'^2 - 2a'b'$ de modo que $a - b = a' - b'$. También $a + b = a' + b'$, que tienen $a = a'$ y $b = b'$. Tenga en cuenta que el argumento, modificado de la manera obvia, conduce a una prueba de la singularidad de la apótoma también.

Consideremos ahora el caso de cualquier adición irracional $c + d$, y suponer que $c + d = c' + d'$; se afirma que $c = c'$, $d = d'$. Podemos expresar $(c + d)^2 = r(a + b)$ y $(c' + d')^2 = r'(a' + b')$ de acuerdo con nuestras construcciones básicas de los irracionales, de manera que $r(a + b) = r'(a' + b')$. Set $r'a' = ra"$, $r'b' = rb"$; entonces $a + b = a" + b"$, una igualdad de binomios, de modo que $a = a"$ y $b = b''$ justo como se muestra. Por lo tanto, $ra = r'a'$ y $rb = r'b'$, de modo que $c^2 + d^2 = c'^2 + d'^2$ y $2cd = 2c'd'$. Tomando las diferencias, tenemos que $(c - d)^2 = (c' - d')^2$ de modo que $c - d = c' - d'$. También $c + d = c' + d'$ se deduce que $c = c'$ y $d = d'$. Como antes, el teorema compañero para los irracionales sustractiva $c - d$ fluye de manera similar.

Por tanto, es claro como la derivación de los irracionales de la forma $c \pm d$ como los "lados" de las áreas de la forma $r\ (a + b)$, para $a \pm b$ uno de los seis tipos de binomial o apótoma, respectivamente, proporciona una instrumento eficaz para las pruebas de la irracionalidad y la singularidad de $c \pm d$. Hemos visto cómo esta misma derivación de los irracionales podría haber surgido en el curso natural de las primeras investigaciones sobre este tema. Además, su elaboración completa dentro de la teoría euclidiana, como proposiciones X, 48-65, 85-102 debe indicar seguramente que Euclides y sus predecesores eran muy conscientes de estas aplicaciones de este esquema de las derivaciones. Ahora podemos recurrir a tratamiento formal de Euclides de estos materiales en *Elementos* X.

4. LA FORMULACIÓN EUCLIDEANA

Uno podría suponer que cualquier cuenta que proporciona una motivación natural para el contenido y la nomenclatura de una teoría como la de Euclides en líneas irracionales, y que produce pruebas directas de la totalidad de sus principales resultados, podría tener una demanda fuerte para la captura de la forma de la génesis histórica de esa teoría. La cuenta que acabamos de dar, sin embargo, debe hacer frente a la dificultad central que Euclides de hecho no presentan estos materiales en la forma que hemos propuesto. Por tanto, es necesario considerar brevemente orden de presentación de Euclides, y luego tratar de explicar cómo y por qué se aparta de lo que deberíamos haber esperado.

La sección de apertura del Libro X está dedicada a los resultados generales sobre magnitudes conmensurables y Unes racionales. El conjunto de teoremas X, 19-26 trata de áreas formado como productos de líneas racionales. Esto incluye el resultado de que cuando el área es racional, sus generadores son conmensurables entre sí de longitud (20), la definición de la línea "medial", como el "lado" de un área cuyos generadores son conmensurables sólo en cuadrado, y la prueba de que el "medial" es irracional (21), y las propiedades en las zonas mediales y racionales, tales como que la diferencia de las zonas mediales no puede ser un área racional (26). Sigue una sección de construcciones especiales (X, 27-35) por medio del cual Euclides va a construir las seis clases de líneas $c + d$ y demostrar su irracionalidad (X, 36 a 41), y más tarde para construir las seis clases $c - d$ con su irracionalidad (X, 73-78). Por ejemplo, el "mayor" irracional (39) se construye como la suma de las líneas de c, d que se toma como inconmensurables entre sí en la cuadrado, pero para los que $c^2 + d^2$ es racional y cd es medial; cómo en realidad para producir tales líneas c, d se conoce a través del problema anterior X, 33. Se observa que el problema de la determinación de las líneas de condiciones satisfactorias de este tipo es de serie en el campo más antiguo de la "aplicación de las áreas" geométrica, que abarca porciones de *Elementos* I, II y VI, a la que las construcciones en X continuamente hacen referencia. implícita una característica destacada de las pruebas de la irracionalidad es que cada uno es tratado como un caso especial, con sus propias características particulares. Mientras que uno percibe fácilmente la similitud técnica de un caso a otro, no es decididamente en realidad ningún esfuerzo para derivar cualquier caso de cualquier precedente.

En la siguiente serie de teoremas X, 42-47 Euclid establece la singularidad de la expresión para cada clase de aditivo irracional, mientras que los análogos de los irracionales sustractivos aparecen en 79-84. Una vez más los tratamientos son en particular, por lo que ningún caso se coloca en la dependencia de cualquier otro. Si llega el caso, la forma de la prueba para el tercero y el sexto dentro de cada conjunto (es decir, 44, 47 y 81, 84) es comparable con el método general ofrecimos anteriormente. Pero incluso con este, Euclides no hace ningún intento de explotar, o incluso señalar sus similitudes.

Sólo en este punto no Euclid introducir la división en seis partes de los binomios y apotomes (en las definiciones anteriores, X, 48 y 85). Tras ellas se define en el orden que seguimos arriba, presenta sus construcciones seriatim en los problemas X, 48-53 y 85-90. En la siguiente serie de teoremas X, 54-59 que muestra que la línea formada como el "lado" de una superficie generada por una racional y cada uno de los binomios resulta ser uno de los irracionales aditivos ya especificados; por ejemplo, el "lado" asociado a la "primera" binomial es en sí binomial (54), que se asocia con el "segundo" del binomio es una primera bimedial (55), y así sucesivamente. Los análogos de las apótomas y los irracionales sustractivos aparecen en X, 91-96. Los teoremas converse aparecen en X, 60-65 y 97-102; por ejemplo, que el cuadrado de la "mayor" irracional, cuando se aplica a una Une racional, produce como anchura una "cuarta" binomio Une (63). Aunque estos teoremas sobre las órdenes de binomios y apótomas en relación con el aditivo y sustractivo irracionales representan casi una tercera parte del libro, Euclides trata claramente estas relaciones como las propiedades de los irracionales, en lugar de como elementos principales en su definición y construcción. Es en este sentido que su orden de presentación difiere más sorprendente de la que hemos trabajado anteriormente.

Euclides siguiente muestra que una línea conmensurables con uno de los irracionales aditivos o sustractivos es en sí misma del mismo tipo, teniendo cada uno de sus términos conmensurables con los términos correspondientes de dicho irracional (X, 66-69, 103-107 de). Aquí de nuevo el tratamiento es particular. Sin duda, los dos bimedials se presentan juntos (67), al igual que las dos diferencias bimedial (104); pero son, de hecho, casos separados de una construcción que comienza de la misma manera, la toma de dos líneas mediales. Un reconocimiento débil de la posible interdependencia de estos teoremas surge con el pasado en cada conjunto, en que partes de las pruebas pueden ser admitidos sobre la base de etapas equivalentes en el teorema anterior. Pero el hecho de que todos estos teoremas "son fáciles y no requieren aclaración", que conduce Heath omitir ningún comentario más sobre ellos, no disuadir Euclides de proporcionar una solución completa, y en la mayoría de los casos bastante largas, de demostración para cada uno. Ahora, en los teoremas que se abren cada conjunto Euclid establece no sólo que las líneas conmensurables con un binomio o un apótoma son ellos mismos binomial o apótoma, respectivamente, sino también de que caigan dentro de la misma una de las seis órdenes de binomial o apótoma como que a la que se supone conmensurables (X, 66, 103). Sobre la base de este resultado, se puede establecer todos los resultados restantes como meros corolarios a través de la representación de los irracionales como "lados". Para dejar z sea conmensurable con la línea irracional $c + d$ nos propusimos $(c + d)^2 = r(a + b)$ para una línea racional r y un binomio $a + b$ en una de las seis órdenes. Entonces si tomamos $r'\colon r = a' + b'\colon a + b = z\colon c + d,$ se deduce $z^2 = r'(a' + b')$, donde r' es racional y conmensurable con r y $a' + b'$ es un binomio del mismo orden que $a + b$ (fromX, 66); por lo tanto, z es un irracional de la misma clase que $c + d.$ Claramente, el mismo argumento se aplica en los casos de sustracción $c - d.$ Una vez más, Euclides no ha logrado aprovechar la ventaja considerable en la eficiencia de la prueba es posible a través del "lado" en representación de los irracionales.

En la siguiente serie de teoremas, Euclides asume la suma primero de una racional y una zona medial (71) y después de dos áreas mediales (72), que muestran cómo en el primer caso el "lado" es uno de cuatro de los tipos de irracionales aditivos, mientras que en este último es uno de los dos tipos restantes. Ya hemos comentado cómo esta propiedad está implícito en el nombre de la quinta y sexta irracionales (es decir, "lo que produce en la plaza de un racional y una zona medial", y "lo que produce en la plaza dos áreas mediales", respectivamente). En todos estos casos, la propiedad es evidente a partir de las representaciones de los irracionales como "lados" asociados con los diversos binomios, y Euclides de hecho aquí enmarcar las pruebas en torno a esas representaciones. Las relaciones análogas para las diferencias entre áreas racionales y medial se dan en la X, 108-110; donde sólo dos casos surgieron en relación con los irracionales aditivos, tres ocurren aquí, debido a la asimetría en la instancia de la diferencia entre un racional y una zona medial. Cada uno de los tres casos corresponde a dos de las clases de los irracionales.

La sección sobre los irracionales aditivos termina en un escolio después X, 72, en el sentido de que cada tipo de irracional es diferente de los demás; es decir, hay una línea puede pertenecer a más de una de las seis clases de aditivos. Esto se propuso, como es evidente, ya que cada uno es un secundarios asociados con uno de los órdenes de binomial, mientras que los segundos son obviamente distintas unas de otras en virtud de la forma de su definition. La observación paralelo se hace para los irracionales sustractivos en una escolio después X, 111. eso sí teorema establece que ningún apótoma puede igualar un binomio, de modo que se obtiene la base para la reclamación de resumen que las trece clases -el mediales, los seis aditivos y los seis sustractivo- forman una división disyuntiva del líneas irracionales.

Esto es claramente un buen lugar para poner fin a la teoría. Pero Euclides añade cuatro teoremas más. Tres de ellos (X, 112-114) se refieren a los productos de la binomial afines y apótoma líneas; por ejemplo, que si $a+b$ es un binomio y $a'+b'$ un apótoma tal que a es conmensurable con la a', b con b' y $a: a' = b: b'$, entonces su producto es racional (X, 114). Esto debería plantear ninguna dificultad en absoluto.

Por $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (cf. II, 5, 6), que es racional, siendo la diferencia de las áreas racionales. Por otra parte, $a' - b' : a - b : a$, de modo que $(a+b)(a'-b') : (a+b)(a-b) = a' : a$. Desde los últimos son conmensurables, $(a+b)(a'-b')$ serán conmensurables con el área racional $(a+b)(a-b)$ por lo tanto, será a su vez racional, como se reivindica. Pruebas de Euclides son monstruosamente complicada; se deja como ejercicio para el lector de averiguar por qué. Pero su fracaso para hacer frente a los casos de los productos de las otras irracionales afines es más fácil de entender. Si consideramos el caso sencillo de $(c+d)(c-d) = c^2 - d^2$, las relaciones que hemos desarrollado anteriormente para c^2, d^2, muestran que $c^2 - d^2 = r(a^2 - b^2)^{1/2}$. Ahora, en la primera clase (el binomio y apótoma), el radical se toma conmensurable con a, siendo este último conmensurable con r, por lo que el radical también es conmensurable con r, de donde el producto es racional. En la segunda y tercera clases, el radical es también conmensurable con a, pero a es inconmensurable con r; por lo tanto, el producto es medial. En la cuarta clase, el radical es inconmensurable con a, siendo este último conmensurables con r, de modo que el producto es nuevo medial. En cuanto a los últimos dos clases, el radical aquí es inconmensurable con a, mientras que a es inconmensurable con r, pero esto no permite una determinación general de si el radical es conmensurable con r o no. Estamos por lo tanto no podemos decir que aquí si el producto es racional o medial. En efecto, a continuación, se carece de un teorema clara declarar para el caso general de los productos de los irracionales afines. Esto sería suficiente razón, supongo, que Euclides no trató de plantear la cuestión.

En el último teorema (X, 115) Euclides muestra que el procedimiento de formación de líneas mediales y mediales de mediales y así sucesivamente da lugar a una secuencia interminable de nuevas clases irracionales. Este resultado fue posteriormente generalizó por Apolonio, quien demostró que la interpolación de cualquier número de medias proporcionales entre dos líneas racionales dados, conmensurables sólo en cuadrado, rendimientos irracional Unes. Recordamos que esta extensión está prefigurada en la obra de Teeteto; para la nota que él consideraba la inconmensurabilidad de las raíces cúbicas, mientras que resulten de la construcción de dos medias proporcionales entre rectas dadas. Está claro que el teorema de cierre de Euclides repente lanza abrir el campo de la investigación, después de que el cuerpo principal de la teoría había sido cuidadosamente atado y sellado en el Escolio a X, 111 sólo cuatro teoremas antes. Esto puede ser una buena razón para ver el resultado como una adición posterior a la euclidiana, como los editores prominentes Heiberg y Heath hicieron. Heath resiste sospechas similares de Heiberg sobre los teoremas de productos de 112 a 114, y creo que con razón. Más bien bronceado con ganas de una nueva investigación, que me impresiona como un remanente de la primera etapa de la teoría, donde las líneas irracionales se formaron como geométrica, aritmética y medios armónicos. Teoremas de productos de Euclides son análogos de la proporcionalidad que une los medios (es decir, $a: g = g: h$), siendo este último un instrumento indispensable para la teoría de Teeteto, pero posteriormente relegado a una situación de subordinación en el curso de la revisión y ampliación de la teoría. En particular, cuando el comentarista Pappus retoma la cuestión de la expresión general de los irracionales aditivos como medios la aritmética y la sustracción como medios armónicos, con el fin de completar los resultados de Teeteto para la binomial y apótoma, hace uso continuo tanto de la proporcionalidad de los medios y de los teoremas de productos para los irracionales afines. Este último se reconoce para mantener no sólo para el binomio y apótoma, como en X, 112-114, pero para las otras clases, así, por mucho que les propusimos anteriormente. Por lo tanto, cualquiera que sea la procedencia real de este conjunto de clausura de teoremas en el Libro X, su relevancia para la teoría, incluso en sus fases pre-euclidianas es inconfundible.

Esta revisión de la teoría euclidiana expone una característica notable: que el imponente y cuidadosamente funcionó estructura de teoremas en el Libro X desmiente la simplicidad inherente de este tema a través de su presentación de construcciones oscuramente motivados y pruebas innecesariamente engorrosos. En particular, el hecho de no explotar las representaciones "secundarios" de los irracionales obliga Euclides para producir tratamientos separados de una docena de casos especiales para cada uno de los principales resultados en la irracionalidad, la singularidad y el cierre (términos linealmente conmensurables con relación a) del clases irracionales. Estos defectos de ejecución técnica debe haber sido tan obvio para cualquier participante en el desarrollo de la teoría, que debemos suponer que su presencia en la obra de Euclides eran de alguna manera las consecuencias necesarias de las decisiones tomadas sobre la organización de la teoría. Es un aspecto notorio de la geometría clásica, y seguramente de otros períodos de la historia de las matemáticas, que el orden de presentación formal de los resultados con frecuencia, si tal vez no siempre, altera el orden de descubrimiento. De hecho, los "síntesis" formales que aseguraban las soluciones encontradas a través de "análisis", de acuerdo con la técnica estándar de la geometría antigua, por lo general invierten el orden del tratamiento inicial. De manera similar, un editor de la teoría de los irracionales, así podría ver la deducción de las formas de los irracionales, a través de sus construcciones como los "lados" de áreas asociadas con los seis tipos de binomios y apotomes, como si se tratara de una analítica preliminar a la manera formalmente preferible de su construcción: a saber, como líneas formadas directamente como las sumas o diferencias de términos c, d dada su propia construcción detallada. En efecto, la definición de las líneas de forma implícita a través de las formas de sus cuadrados podría considerarse menos satisfactoria que las últimas construcciones explícitas de las propias líneas, incluso si esto resulta ser un procedimiento más complicado. Una vez que la decisión ha sido tomada en el ordenamiento de las construcciones formales, sin embargo, las dificultades en la técnica de la prueba siguen casi inevitablemente.

El paso de análisis heurístico para síntesis formal transforma sutilmente el objetivo motivar a la presentación de la teoría. En el primer caso, se podría incluir el descubrimiento de las formas de los irracionales y la gestión eficiente de las técnicas de su aplicación como metas importantes. Pero en este último caso, se apunta a una exposición exhaustiva de un tema conocido, cada resultado para ser asegurado a través de una prueba totalmente detallada. El ideal de la integralidad establece una nueva carga sobre determinados aspectos de la presentación. Desde el matemático danés e historiador HG Zeuthen proponen la tesis de hace casi un siglo, uno ha visto comúnmente los problemas de construcción geométrica, tal como se encuentra a lo largo de los *Elementos* y otros tratados antiguos en la geometría, como género de pruebas de existencia de justificar la introducción de las entidades especiales requeridos en pruebas posteriores. En consecuencia, a veces se sostiene que los problemas de la construcción que Euclides resuelve en X, 27-35, 48-53 y 85-90 (por ejemplo, 27: "para encontrar líneas mediales conmensurable sólo en cuadrado que contienen una zona racional"; 48 : "para encontrar el primer binomio"; 85: "para encontrar la primera apótoma") pretenden ser pruebas de existencia de apoyo a las construcciones y pruebas del aditivo y líneas irracionales sustractivos (36-41; 73-78) y los teoremas sobre su relaciones con las órdenes de binomios y apótomas (54-65, 91 a 102). Pero sin duda este punto de vista es incorrecto. Si Euclides deseaba simplemente para demostrar que existen líneas de la satisfacción de las condiciones especificadas, él sólo tiene que haber proporcionado un ejemplo particular de la construcción en cuestión. Por ejemplo, la diagonal y el lado del pentágono regular inscrito serviría fácil y admirablemente para demostrar la existencia de "grandes" y "pequeños" las líneas y los "cuartos" binomios y apótomas asociados. En su lugar, Euclides afecta a las construcciones en general, obteniendo así un procedimiento explícito para la producción de cada término en todas las clases de los irracionales. Creo que nada de esto podría responder a las necesidades de su sistema formal de la teoría.

En vista de esto, hay un lapso sorprendente en relación con una de las construcciones, que, hasta donde yo sé, no ha sido hasta ahora señalado por los estudiosos en la materia. Los problemas en X, 29-35 en la que las construcciones de las líneas irracionales dependen remiten a su vez a dos construcciones que figuran en lemas solo precedente X, 29. Su objetivo es encontrar dos números cuadrados (enteros) cuya suma, en el primero caso, es también un número cuadrado, pero en el segundo caso no lo es. Ahora, si Euclides deseaba sólo para establecer la existencia de "triples enteros pitagóricas," se necesita sólo han señalado que 32 + 42 = 52 y se ha hecho con él. En cambio, se establece la forma que todos esos triples enteros deben satisfacer. Su construcción se inicia con un par arbitrario de "números planos semejantes" m, n (es decir, admitiendo de una factorización $m = ab, n = cd$ de manera que $a: b = c: d$, de donde $m: n = a^2: c^2$, una relación de números enteros cuadrados; cf. VIII, 26 y su uso en el lema después de X, 9), donde m, n son ya sea tanto par o ambos impares, y luego forma $p = \frac{1}{2}(m + n), q = \frac{1}{2}(m - n)$. A continuación, muestra que $p^2 = q^2 + mn$; y puesto que mn es igual a un número cuadrado (es decir, a^2d^2) esto asegura lo que se pide en el primer lema. En corolario, se observa que si m, n no son de la clase especificada, la diferencia $p^2 - q^2$ no será un número entero cuadrado (porque si m, n no son números planos semejantes su producto no va a ser cuadrado; cf. IX, 2). Por lo tanto Euclides ha proporcionado las condiciones necesarias y suficientes de que la suma de los números cuadrados haber un número cuadrado.

Es en el segundo lema surge esa dificultad. Aquí se busca números cuadrados cuya suma no es cuadrada. Al igual que antes, Euclides tiene números plano semejantes m, n, tanto par o dos, incluso, las formas p y q, pero considera la suma $(q - 1)^2 + mn$; en una prueba complicada, muestra que cada una de las tres posibilidades-de que la suma sea mayor que, igual a o menor que $(p - 1)^2$ se reduce a una contradicción; Por lo tanto, la condición deseada del lema es satisfecho. Ahora, por el contrario, con el lema anterior, éste no afecta la construcción en general; Así, para los estrictos requisitos de lógica de la teoría es apenas mejor que simplemente observando que $2^2 + 4^2 = 20$", de donde al menos uno sabe ese tipo existen números de la especificada. No sólo es la construcción inadecuada para sus propósitos, pero aún más desconcertante, por toda su complejidad no es necesario. Para la condición general puede ser fácilmente deducido del lema anterior. Sólo necesitamos elegir un número cuadrado arbitraria r^2 y considerar todas sus factorizaciones $r^2 = mn$, de manera que m, n son ambos impares o ambos incluso (nótese que IX, 2 implica que m, n son números planos semejantes); es obvio que para cualquier r^2 sólo hay un número finito de factorizaciones diferentes.

En correspondencia con cada uno de los pares m, n formamos el valor $q = \frac{1}{2}(m - n)$ y luego tomamos q' cualquier número entero diferente de todos estos valores de q. De ello se desprende que $r^2 + q'^2$ no puede ser un número entero cuadrado. Porque si, por ejemplo, $r^2 + q'^2 = p'^2$, la construcción en anteriores lema de Euclides demuestra que $q' = \frac{1}{2}(m - n)$ para ciertos enteros m, n de manera que $mn = r^2$. Por lo tanto, q' debe asumir uno de los valores excluidos explícitamente en la construcción. Por tanto, esta contradicción estabhshes que r^2, q'^2 a cumplir la condición del lema. En esta forma alternativa, entonces, la construcción da la condición completa necesaria para la teoría, y lo hace sin ningún tipo de elementos técnicos más allá de los que ya están trabajando en el primer lema. Manejo de Euclides del segundo lema es, pues, otro recordatorio inquietante que las pruebas en el Libro X no siempre son así concebidos como comúnmente se pretendía ser.

5. EVALUACIÓN.

Aunque me he referido continuamente a la teoría en el Libro X como de Euclides, la cuestión de la procedencia queda por examinar. Por supuesto, es posible que el libro es la propia composición de Euclides, la consolidación de los resultados de dos generaciones de la investigación sobre los irracionales. Pero parece igualmente posible que no es más que su propia edición de un tratado completo de los irracionales escritos por un geómetra antes. Hemos visto que las concepciones que iniciaron el estudio de la Unes irracionales se debieron a Teeteto en el primer tercio del siglo IV aC Pero si mi punto de vista de su enfoque es correcto, y si de hecho los importantes conocimientos sobre la irracionalidad de la diagonal y el lado del pentágono se deben a Eudoxo, entonces difícilmente puede asignar a Teeteto la teoría completa del Libro X. Por otra parte, en vista de los defectos formales que desfiguran que el tratamiento de la teoría, tendríamos seguramente dude en asignarlo a Eudoxo o un discípulo dotado comparable. Aprendemos a través del comentarista Proclo los nombres de algunos geómetras activos en el período entre Eudoxo y Euclides. Entre estos, uno Hermótimo de Colofón se dice que ha "avanzado aún más las cosas ya están bien proporcionadas por Eudoxo y Teeteto y descubierto muchos de los elementos [sc. Las cosas que se presentan en los *Elementos* de Euclides] y compuesto algunas cosas referentes a loci". Si esta declaración puede ser aceptada por su valor nominal, se ajusta bien con la asignación de la composición formal de la teoría de los irracionales en el Libro X de Hermótimo; por una supone la dificultad que cualquier otra parte de los *Elementos* se mantuvo por descubrir en el período posterior a Eudoxo. Pero en vista de la meagerness de nuestra información en este período, tenemos que admitir la posibilidad de que ni siquiera el nombre de la persona responsable ha sido transmitida en nuestras fuentes.

La cuestión relevante, entonces, es si se debe asignar la autoría del Libro X a Euclides sí mismo ni a colocar con un poco de geómetra como Hermótimo en la generación anterior. Nuestra decisión sólo puede hacerse a través de un examen de los motivos y el carácter del autor, ya implícita en el propio libro, y de si ese retrato es compatible con nuestra imagen de Euclides. La característica más llamativa para tener en cuenta, como hemos visto, es el hecho de que el autor de explotar las representaciones "secundarios" de los irracionales, para que grava innecesariamente las pruebas. Podríamos descartar las otras fallas que hemos señalado, como las manifestaciones difíciles de manejar de los teoremas de productos en X, 112-114 y la solución adecuada al problema de la construcción en el lema prefacio X 29, con el argumento de que éstos podrían ser adiciones torpes por interpoladores-Post euclidiana. Pero esta otra cuestión de la manipulación de los irracionales como "partes" se Pero esta otra cuestión de la manipulación de los irracionales como "partes" se encuentra en el corazón de la concepción y organización de la teoría. ¿Es posible que Euclides podría ser culpable de tales defectos en la técnica de la prueba? Alas que es. Porque con respecto a otro (ahora perdido) el trabajo de Euclides, los *Porismas*, Pappus encuentra permitido consolidar diez de enunciaciones de Euclides en una sola propuesta y de esta manera reconocer una configuración aún más general, de la que son casos especiales. El mismo hecho de que Euclides eligió para transmitir Libro X en su forma existente parece dar testimonio de su simpatía básica con el enfoque adoptado en ella.

Sin embargo, percibo un factor atenuante que justifica la responsabilidad alejándose de Euclides. En pocas palabras, Libro X es un desastre pedagógico. Puede haber un cierto interés en ver cómo una construcción general admite tratamiento modificado en cada uno de sus casos particulares; a veces (aunque rara vez en el Libro X) el resultado es una forma más elegante de tratar el caso que el procedimiento general sería. Pero sin duda esto es una preocupación para el expositor formalista de una teoría, no el maestro de técnicas matemáticas. En vista de la génesis probable de la teoría, podemos estar seguros de que el autor conocía bien, por ejemplo, que el lado del pentágono regular ejemplifica el "menor" irracional. Pero de hecho no nos informan de tales configuraciones "reales" que podría remediar la aparente artificialidad de su investigación. Las ideas matemáticas esenciales están cubiertas con detalle, mientras que el interés de desarrollar habilidades en la aplicación de estas técnicas en contextos geométricos se fija en el momento remove. La historia del estudio del Libro X proporciona evidencia de estas debilidades. Entre los antiguos, Pappus sabe de otras dos configuraciones que dan lugar a una línea irracional, y esboza algunas extensiones hechas por Apolonio, la generalización de la línea media a través de la interpolación de cualquier número de medias proporcionales, el otro considerando trinomio y expresiones quadrinomial, etc., sobre el modelo del binomio y la apótoma. Pero Pappus otras observaciones sobre la construcción de los irracionales euclidianas como medios no son de gran profundidad, mientras que otros comentaristas no pueden reportar ningún resultado más desarrollo de esta theory.51 En este sentido, una sentencia moderna de la obra como "un bund matemática callejón " es bastante apt. Ciertos potencialidades de la materia están perdidas por completo, por ejemplo, una idea de cómo los productos de la forma $(a \pm b\sqrt{N})(c \pm d\sqrt{N})$ llevan en el hallazgo de soluciones a las relaciones integrales de la forma $x^2 - Ny^2 = \pm m$. de hecho, la tarea de mera comprensión de la propia teoría euclidiana parece exigir que uno abandona su modo de exposición, y en su lugar, en la frase de Stevin, para buscar "a través de sus causas." Si el sujeto es intrínsecamente "fácil y sin dificultad," su tratamiento en el Libro X se encontrará "incomprensible" o "desconocido" o calculó mal como "profundo" por el comentarista que intenta un asalto frontal directo en la teoría formal.

El estudiante que se acerca de Euclides Libro X con la esperanza de que su longitud y la oscuridad ocultan tesoros matemáticos es probable que se decepcione. Como hemos visto, las ideas matemáticas son pocos y capaz de exposición mucho más perspicaz que ellos se da aquí. El verdadero mérito de Libro X, y creo que no es pequeño, está en ser un ejemplar único de un sistema deductivo totalmente elaborado por el estilo que las filosofías antiguas de las matemáticas prized. consistentemente Constituye los resultados de una académica detallada ejercicio para codificar las formas de las soluciones de un problema geométrico específico y para demostrar un conjunto básico de propiedades de las líneas determinadas en estas soluciones. Uno puede por lo tanto rentable estudiar Libro X para aprender cómo su autor trató de convertir un cuerpo de conclusiones geométricas en un sistema del conocimiento matemático.

Pero nuestro Euclides no es el autor de monografías de investigación oscuros; él es el maestro pedagogo, autor sobre todo de los *Elementos*, el libro de texto técnica más efectiva jamás escrito. Si nos atenemos a este estereotipo (¿qué otra opción tenemos?), Entonces es difícil para él ver como teniendo realidad compuesta X. libro Basta difícil incluso imaginar cómo pudo haber permitido que esta sujeta a ser transmitida en una forma tan poco manejable , salvo tal vez como un desafío formal para los estudiantes que habían completado sus cursos de introducción a la geometría plana (Libros I-VI) y la teoría de números (libros VII-IX). Pero uno podría seguramente prefieren suponer que ningún esfuerzo de su parte para aclarar la teoría de los irracionales habría dado lugar a una exposición más clara que Libro X. O podría Euclid quizá haber pensado que la experiencia de enfrentarse a un tratamiento tan densa estimularía a sus estudiantes para descubrir alternativas a través de un recurso a las fundamentales ideas, en efecto, para responder como Stevin y otros comentaristas harían mucho más tarde?, al menos podemos entretener, de paso, esta noción un tanto romántico, a pesar del toque de perversidad que parece proyectar sobre Euclid . Pero si pasó a ser verdad, era un secreto bien guardado por (o de) los antiguos comentaristas, que por todos sus esfuerzos no pudo discernir una alternativa más conveniente.

Parece mucho más probable que Euclides solamente incorporado en los *Elementos* de un tratado completo de los irracionales preparados por un geómetra no mucho antes que él. Esto explicaría la omisión en el Libro X de uno de los resultados necesarios para el Libro XIII (véase la nota 38); para toda la concepción del Libro X sólo requiere un conocimiento de los valores de la diagonal y el lado del pentágono regular inscrito, como paradigmas, respectivamente, de los "grandes" y los irracionales "menores", en relación con las clases básicas de "binomio" y "apótoma." Por lo tanto, la aplicación específica del régimen de los irracionales hacia las construcciones de los sólidos regulares, como en el Libro XIII, podría venir más adelante y por lo tanto poner en práctica los resultados no incluidos en esta síntesis particular de la teoría. Por supuesto, es un lapso de parte de Euclides no haber capturado y corregido esta incoherencia entre los dos libros; pero sin duda es más difícil imaginar que podría haberles compuesta de esta manera defectuosa. Este punto de vista indica, además, que el Libro X no tiene por qué ser tomado como la medida llena del conocimiento de los irracionales en el momento de Euclides. Tenga en cuenta que cuando Pappus Obras a través de sus teoremas generalizar sobre la formación de los irracionales sustractivos como medios armónicos, a veces habla como si fuera en realidad un teorema de Theaetetus. los teoremas en sí no son propensos a haber atraído el interés de investigación muy poco después de la definiciones especiales de la teoría de Teeteto habían retrocedido en la distancia histórica. Pero son bastante adecuada a las preocupaciones que surgen cuando se introdujeron las clases de los irracionales "euclidiana" y sus propiedades resueltos. Por lo tanto, Pappus de ambigüedad en cuanto a lo Teeteto no podría estar transmitiendo una falta de claridad en la parte de su fuente, Eudemo, para separar Teeteto resultados de sus extensiones posteriores. El tratado real tomado por Euclides omitirse algunas de estas extensiones, sin duda, por su aún no siendo completamente familiares en el momento de su composición. Uno espera un intervalo entre el descubrimiento de los resultados y su incorporación a una literatura de libros de texto. Pero la característica más llamativa del Libro X es sin duda la forma en que su autor grava las pruebas a través de sus intereses en el sistema. Al establecer esta "cruzada matemáticos" demuestra con eficacia extrema cuán grandemente los rigores de la exposición sintética pueden estar en conflicto con los objetivos de análisis heurísticos.

Anexo 4. Presentación Jornada del Educador Matemático

¿VIVEN LA RACIONALIDAD Y LA IRRACIONALIDAD EN AMBIENTES GEOMÉTRICOS?

1. Introducción

La presente propuesta surge como uno de los asuntos resultantes del estudio del *Libro X* de los *Elementos* de Euclides.

A la hora de enseñar Matemáticas poco se tiene en cuenta su historia, se subestima todo el esfuerzo que ha hecho la humanidad por romper diferentes paradigmas y lograr estructurar el pensamiento matemático actual. Actualmente en la escuela se estudia la irracionalidad como una propiedad de algunos números, no se tiene en cuenta y muchas veces se confunde ésta con la inconmensurabilidad (que se estudia, si es que se estudia en la educación superior), no se hace una diferenciación en la aparición de estos dos conceptos a lo largo del desarrollo de las Matemáticas.

Euclides no contaba con los números reales ya que estos solo fueron formalizados hasta siglo XIX, solo contaba con las nociones de conmensurabilidad e inconmensurabilidad, atribuidas a los pitagóricos cinco o seis siglos antes de Euclides, aunque sabemos que no existe documentación exacta acerca de su descubrimiento.

Mostraremos entonces una especie de evolución histórica del concepto de número irracional, partiendo del descubrimiento de la inconmensurabilidad y las diferentes ideas que fueron teniendo los distintos matemáticos a lo largo del tiempo para que se pudieran formalizar los números irracionales, luego desarrollaremos la idea central, mostrando la comprensión que hemos logrado del Libro X, en donde la inconmensurabilidad es protagonista, para al final concluir un por qué de la confusión entre los conceptos ya mencionados y algunas ideas que nos deja el estudio de X.

2. Tesis o proposición

En la antigüedad se descubrió la inconmensurabilidad, la irracionalidad es muy posterior a Euclides, que fue quien reunió en el Libro X lo respectivo a la inconmensurabilidad. Por ejemplo se descubrió la inconmensurabilidad del lado del cuadrado con su diagonal y no la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y la diagonal del pentágono regular con su lado y no el número áureo.

3. Análisis del tema objeto de estudio

3.1. Descubrimiento de la inconmensurabilidad y Desarrollo histórico de la teoría de la inconmensurabilidad

Knorr (1998) menciona que originalmente los números irracionales fueron conocidos por el Imperio Babilónico, cuyas tablillas datan de 1800-1500 a.C. en donde plasmaron que algunos valores no pueden ser expresados como cocientes de números enteros, aunque ello no implique que los comprendieran (números irracionales). Pero otras fuentes contradicen a Knorr y atribuyen el conocimiento original de estos números a la escuela Pitagórica, alrededor de 430 a.C, esto debido a que el Teorema de Pitágoras hace inevitable que esta escuela descubriera valores irracionales como longitudes de diagonales de triángulos rectángulos, sin embargo no pudieron incorporarlos a su teoría de números por no poder expresarlos como cocientes de números enteros. Aunque sabemos que lo que realmente descubrieron los pitagóricos no fue irracionalidad, como característica propia de un número, sino inconmensurabilidad, como característica de dos magnitudes, pues así se ha evidenciado en la obra de Euclides.

Kurt von Fritz, en su artículo *The discovery of inconmensurability by Hippasus of Metaponto* (Ann. Math. (2) 46 (1945), 242-264), ofrece serios argumentos para afirmar que el descubrimiento de la inconmensurabilidad fue hecho por Hipaso de Metaponto alrededor del año 450 a.de C. En otras palabras, von Fritz piensa que los primeros dos segmentos inconmensurables descubiertos en la historia de la humanidad, no fueron la diagonal y el lado de un cuadrado, sino la diagonal y el lado de un pentágono regular, lo cual equivale a que el primer número irracional no fue $\sqrt{2}$, como suele creerse, sino el número áureo ϕ =

$(1+\sqrt{5})/2$. Según Von Fritz, el pentágono regular era, para los pitagóricos, una figura más misteriosa que el cuadrado.[43]

Teodoro, alumno de Platón y Teeteto alumno de Teodoro, estudiaron y divulgaron la primer teoría conocida de líneas irracionales (segmentos no racionalmente expresables) (Knorr, 1975), sin embargo los descubrimientos de Teodoro se limitaron a casos específicos como las líneas cortadas en extrema y media razón[44] y nunca los pudo generalizar, aunque su discípulo Teeteto extendió la teoría, clasificando raíces cuadradas conmensurables e inconmensurables en longitud (es lo que idce en algunos lugares, y se afirma que esto está plasmado en el Libro X, pero sabemos que no es así, ahí no hay nada de irracionales). Luego, Eudemo que vivió entre Platón y Euclides pasó esta teoría a la generación de Euclides; si no fuera por Teeteto y Eudemo se le atribuiría todo el trabajo de líneas conmensurables e inconmensurables a Euclides (Knorr, 1983).

Pero fue Euclides quien generalizó la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad en cuadrado y ordenó las líneas irracionales (líneas no racionalmente expresables) binomial[45] y apótoma en seis clases distintas.

3.2. Desarrollo histórico del concepto de número irracional

[43] Tomado de: http://www.saberesyciencias.com.mx/sitio/component/content/article/10-portada/484-el-descubrimiento-de-la-inconmensurabilidad-de-la-irracionalidad

[44] [VI Def 3]: Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor.

Es importante para el libro XIII saber que el punto de intersección de dos diagonales de un pentágono regular divide a ambas en la razón áurea (o en media y extrema razón).

[45] Las seis clases de rectas binomiales aparecen en la primera parte del libro X.

PERIODO HISTÓRICO	ECE
Edad Antigua *Origen de los inconmensurables.*	El irracional asociado a una aproximación entre razones. **$ECME_1$**
Edad Media *Hacia el reconocimiento del irracional como número.*	El irracional asociado a lo aritmético. **$ECME_2$**
Renacimiento *Reconocimiento del irracional como número mediante aproximaciones a un número racional cercano.*	El irracional asociado a una aproximación de un número racional cercano. **$ECME_3$**
Edad Moderna y Contemporánea *El irracional como un número.*	El irracional asociado a un número. **ECE_1**

TABLA 1: Esquemas Conceptuales Epistemológicos (ECE_n) por período.

En la cultura mesopotámica se observó en tablillas de texto cuneiforme el uso una figura cuadrada con sus diagonales, cuyo valor del lado es 30 y aparecen los números 42; 25, 35 y 1,24, 51, 10 a lo largo de la diagonal que en fracciones sexagesimales se representa $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$. Números que evidencian, según Boyer (2003) la “razón del lado y su diagonal y que muestran una exactitud bastante fiel de $\sqrt{2}$ como número irracional” (p. 52). π

En la cultura china se intenta encontrar valores cada vez más exactos de Entre estos se encuentran el indicado en la obra de Tsu Ch’ung-Chih (430 a.C.), el cual dio para π el valor de 3,1415927 como un valor por exceso y 3,1415926 como valor por defecto. Finalmente, en la cultura griega, se llevó a cabo el descubrimiento de los segmentos inconmensurables, lo cual se le atribuye a Hipaso de Metaponto (450 a.C.). Lo logra al resolver la Sección Áurea. Al descubrirse estos segmentos se devasta según Boyer, (2003) la filosofía pitagórica. Los matemáticos Teodoro de Cirene (390 a.C.), Eudoxo de Cnido (355 a.C.) y Arquímedes de Siracusa (287 a.C.) ofrecen aportes importantes en el estudio de segmentos inconmensurables. Teodoro de Cirene (390 a.C.) "contribuyó al desarrollo temprano de la teoría de las magnitudes inconmensurables, pues demostró la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos (desde el 3 hasta el 17 ambos incluidos)" Boyer (2003; p. 123). Por su parte, Eudoxo de Cnido (355 a.C) presentó una teoría general de proporciones que “permitió resolver uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por el descubrimiento de los segmentos inconmensurables” (Edwards, 1979, p. 13; Berge y Sessa, 2003, p. 175). Finalmente, Arquímedes de Siracusa (287 a.C.) obtuvo una aproximación de la razón de una circunferencia y su diámetro mediante el cálculo de perímetros de polígonos inscritos. Su aproximación al valor de π es expresado por la desigualdad $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Así pues parece que lo que se hacía en la antigüedad era que se tenía una idea intuitiva de los números irracionales.

Los estudios de los matemáticos Brahmagupta (628 d.C.), Omar Khayyam (1050 d. C), Al-Kashi (1436 d.C.) y Leonardo de Pisa (1180 d.C.) revelan nuevos aportes en el estudio intuitivo del número irracional. Determinan valores más exactos para el número irracional π y φ. Es importante resaltar, que para este período, en la cultura hindú "se utilizaron los números enteros y racionales, además del número irracional, introduciendo nuevas reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir con estos números" (Boyer, 2003; p. 285).
Leonardo de Pisa (1180 d.C.), mostró una de las "aproximaciones más precisa de una raíz irracional de una ecuación algebraica en Europa hasta ese momento e incluso durante los 300 años siguientes". Otra contribución fue la sucesión de Fiboncci: 1, donde y su límite es igual a la razón que define la sección áurea 1,2,3,5,8,13,21,..., u_n donde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ y su límite es igual a la razón que define la sección aurea$\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ (Boyer, 2003, p.329).
Según Edwards (1979), Omar Khayyam (1050 d.C) reemplazó la teoría de proporciones geométricas de Euclides, por un planteamiento numérico. Omar se acercó al concepto del número irracional y trabajó de hecho con el concepto de número real en general. Por su parte, para Al-Kashi (1436 d.C.) su "aproximación de π fue 3,14159265358979" (Boyer, 2003; p. 316). Consideró además que "cualquier razón, constituida o no por segmentos conmensurables, debía poder expresarse como un número" (Edwards, 1979, p. 81).

En el renacimiento se da el "reconocimiento del irracional como número mediante aproximaciones a números racionales". Jerónimo Cardano (1501 d.C) y Chuquet (1450 d.C) aceptaron los números irracionales con naturalidad, "a pesar de que no estaban fundamentados de una manera rigurosa, puesto que se les podía aproximar a un número racional" (Edwards, 1979; p. 94).

Se acepta y se define el irracional como número a través de las contribuciones de Méray (1836 d.C), Weierstrass (1815 d.C), Dedekind (1831 d.C) y Cantor. Méray "consideraba que una sucesión convergente determinaba o bien un número racional como límite o un número ficticio" (Boyer, 2003; p. 694). Para Weierstrass los números irracionales eran conjuntos de racionales y no meras sucesiones ordenadas de racionales (Edwards, 1979; Cantoral y Farfán, 2004). Por su parte, Dedekind, define la construcción de un sistema numérico completo (conjunto de los números reales) a través del concepto de cortadura. Este estudio de las cortaduras permite "definir formalmente al número irracional" (Boyer, 2003, p. 695; Edwards, 1979, p. 331; Berge y Sessa, 2003, p. 182). De igual forma Cantor presenta una construcción de un sistema numérico completo (conjunto de los números reales). Cantor presenta una construcción de los números reales mediante el estudio de sucesiones regulares, lo cual permite definir el número irracional.

3.3. Confusión entre irracionalidad e inconmensurabilidad

Tal vez la confusión entre la irracionalidad y la inconmensurabilidad se da por los comentarios de muchos autores acerca de este tema.

Por ejemplo estudiamos los documentos de Knor (1983) y Roskam (2009), quienes afirman que el Libro X cumple el propósito de clasificación de rectas irracionales: Roskam y caracterización de irracionales: Knorr. Estos autores no hacen diferencia entre el ser irracional y el ser racionalmente expresable, que a la luz de la actualidad son confundidos, peor aunque se piense que son lo mismo y sean conceptos que están ligados, definitivamente no son la misma cosa.

Roskam comenta en la introducción de su artículo que la temática del Libro X es la organización sistemática y la clasificación de líneas irracionales[46], esto a través de la comprensión de lo que son las líneas racionales e irracionales, por medio de las ideas de longitudes y cuadrados conmensurables e inconmensurables. Allí mismo menciona que las

[46] Cuando hablamos de líneas Irracionales, no nos estamos refiriendo a la irracionalidad como una característica propia de los números. Cuando Roskam y Knorr hablan en sus artículos acerca de líneas Irracionales, en realidad hacen referencia a segmentos no racionalmente expresables.

magnitudes inconmensurables (los números irraiconales) fueron vistas como un descubrimiento desafortunado hasta casi 13 siglos después de Euclides, cuando el matemático islámico Al-Karaji tradujo la terminología euclidiana en raíces cuadradas irracionales de números enteros. Además afirma que seis de las 13 clases de rectas no racionalmente expresables, que se comprenden más fácilmente utilizando el álgebra para ordenar magnitudes irracionales; aunque se afirma que la comprensión de la geometría a través del álgebra se originó en el siglo VIII debido a los avances logrados por muchos matemáticos islámicos, se podría llegar a argumentar que la mayoría de los *Elementos* son algebra disfrazada de geometría (Gratten-Guinness, 1996), aunque este se podría constituir en un obstáculo para la comprensión de la teoría euclidiana (y estaríamos incurriendo en lecturas modernas). Comenta además que Euclides basa su clasificación primero en la conmensurabilidad de la línea y luego en la racionalidad. Y por último hace la observación de que gran parte del Libro X está dedicado a la exploración entre las relaciones de las líneas irracionales (rectas no racionalmente expresables).

Un Matemático importante, de los matemáticos Árabes que contribuyeron a esta confusión fue Al-Karaji, él se preguntó cómo aplicar las operaciones aritméticas elementales a cantidades algebraicas irracionales, el deseaba extender estas aplicaciones con el fin de mostrar que mantenían sus propiedades, algo que solo intuía. Este matemático tomó simultáneamente las definiciones de los libros VII (definición de número como un todo compuesto de unidades, y de unidad como…califica por un conjunto existente) y X (inconmensurabilidad e “irracionalidad” no racionalmente expresable equívocamente) de los *Elementos* y las mezcló, aunque las definiciones que tomó de X son conceptos que se aplican solo a objetos geométricos y ni inconmensurabilidad ni no expresabilidad (no racionalmente expresable) pueden existir para los números. El álgebra se ocupa de ambos segmentos y números, las operaciones de álgebra se pueden aplicar a cualquier objeto, ya sea geométrica o aritmética. Irracionales, así como racionales, pueden ser la solución a lo desconocido en las operaciones algebraicas precisamente porque están preocupados por los dos números y magnitudes geométricas. Un salto injustificado, que ayudó al desarrollo del álgebra, es el dado por Al-Karaji cuando escribe: "Yo te mostraré cómo se transponen estas cantidades [inconmensurables, irracionales] en números." Una de las consecuencias de este proyecto, y no el menos importante, es la reinterpretación del Libro X de los *Elementos*. Este había hasta entonces considerado por la mayoría de los matemáticos simplemente como un libro de geometría. Para al-Karaji sus conceptos preocupados por magnitudes en geométricas, que pueden interpretarse para magnitudes en general, clasifican la teoría en este libro en lo que más tarde se conocería como la teoría de los números.

3.4. Acerca del Libro X de los *Elementos* de Euclides

A continuación se exponen algunos spectos generales y específicos del Libro X.

3.4.1. Interpretaciones

Luis Vega[47] (1991): Muchos matemáticos renacentistas solo veían en este libro dificultades sin provecho, se genera la pregunta si aún para los historiadores matemáticos representa una cruz. No recibe este apelativo por los problemas que causa su interpretación, sino también porque representa una encrucijada dentro de *Elementos*. En este libro confluyen desarrollos de la teoría generalizada de la proporción y motivos aritméticos y de él parten nuevas formas de construir figuras planas y sólidas. Consta de 16 definiciones y 115 proposiciones, todas ellas teoremas[48], aunque algunas de ellas se proponen construir o hallar algo. Está dedicado al estudio de tipos y criterios de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y a la clasificación de rectas irracionales. Se subdividen las rectas conmensurables/inconmensurables en dos clases, las que lo son en longitud y las que lo son en cuadrado (dándose estos de forma natural); se distingue entre líneas o áreas racionales e irracionales (ya no naturalmente sino por convención, con respecto a la recta designada como racional).

[47] Profesor de la universidad del País Vasco.

[48] Sabemos que algunas proposiciones son construcciones, pues así nos lo ha mostrado el estudio que hemos realizado al libro. Cuando Euclides se refiere a "hallar" así nos lo sugiere, aunque ninguna de las proposiciones posee la terminación Q.E.F.

Entre los muchos resultados que se exponen a lo largo del libro, se da la base para el método de exhausión (X 1). La proposición 2 hace referencia a que dos magnitudes son inconmensurables si la búsqueda de su medida común máxima (antifairesis) nunca tiene fin. Las proposiciones 3 y 4 proporcionan un algoritmo para determinar la medida común máxima de dos o tres magnitudes conmensurables. X, 5 establece una relación entre las magnitudes conmensurables y los números (guardar relación). 6 a 8 mantienen la idea de X, 5, para desembocar en X, 9 (resultado atribuido a Teeteto).

El Libro X recoge investigaciones de Teeteto, Eudoxo y posiblemente Hermótimo, se mueve en una línea de categorización de resultados de diversos tipos de conmensurabilidad/inconmensurabilidad y de clases posibles de rectas racionales/irracionales, aun así mantiene cierta oscuridad y ambigüedad. Su estructura deductiva carece de cohesión interna, las proposiciones 27-35, 42-47, 66-70, 79-84, 85-90, 103-107 representan núcleos aislados en el conjunto del libro, las proposiciones 2-4, 24-25, 112-115 no cumplen ningún cometido en *Elementos*. Se ha dicho que el Libro X es un desastre pedagógico, pero vale reconocer en él ciertos valores disciplinarios y metódicos, logra una clasificación de líneas irracionales en 13 géneros distintos y enseña a construir ejemplos de ellas.

Jade Roskam[49] (2009): Comenta en la introducción de su artículo que la temática del Libro X es la organización sistemática y la clasificación de líneas irracionales, esto a través de la comprensión de lo que son las líneas racionales[50] e irracionales, por medio de las ideas de longitudes y cuadrados conmensurables e inconmensurables.
Este autor comenta acerca de las dos posturas del descubrimiento de la irracionalidad, esto es por el imperio babilónico y por los pitagóricos.

[49] Profesor de la universidad de Montana en Estados Unidos.

[50] Entendemos como Racionalmente expresables y no racionalmente expresables a lo que este autor llama racionales e irracionales.

Teodoro, alumno de Platón y Teeteto alumno de Teodoro, estudiaron y divulgaron la primer teoría conocida de líneas irracionales (Knorr, 1975), sin embargo los descubrimientos de Teodoro se limitaron a casos específicos como las líneas cortadas en extrema y media razón y nunca los pudo generalizar, aunque su discípulo Teeteto extendió la teoría, clasificando raíces cuadradas conmensurables e inconmensurables en longitud. Luego, Eudemo que vivió entre Platón y Euclides pasó esta teoría a la generación de Euclides; si no fuera por Teeteto y Eudemo se le atribuiría todo el trabajo de líneas conmensurables e inconmensurables a Euclides (Knorr, 1983).

Teeteto estudio las tres clases principales de magnitudes irracionales, que son la medial, binomial, y apótoma (sin embargo estos nombres pudieron no haber sido los originales, sino puede que Eudemo los haya cambiado), ligando cada clase a una única media, la medial a la media geométrica, la binomial a la aritmética y la apótoma a la armónica (Euclides, 2006). Pero fue Euclides quien generalizó la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad en cuadrado y ordenó las líneas irracionales binomial y apótoma en seis clases distintas. Las seis clases de cada recta se comprenden más fácilmente utilizando el álgebra para ordenar magnitudes irracionales; aunque se afirma que la comprensión de la geometría a través del álgebra se originó en el siglo VIII debido a los avances logrados por muchos matemáticos islámicos, se podría llegar a argumentar que la mayoría de los *Elementos* son algebra disfrazada de geometría (Gratten-Guinness, 1996), aunque este se podría constituir en un obstáculo para la comprensión de la teoría euclidiana.

Roskam comenta que Euclides basa su clasificación primero en la conmensurabilidad de la línea y luego en la racionalidad. Dice además que si ese fue su razonamiento, este no se preocupa por el orden funcional de los *Elementos*; por ejemplo la línea cortada en relación extrema y media aparece inicialmente en la definición 3 del libro VI, luego esta se relaciona con la línea apótoma en el Libro X (el corte de mayor longitud es una apótoma y el de menor longitud es la primera apótoma) y se viene a aplicar hasta el Libro XIII. Y por último hace la observación de que gran parte del Libro X está dedicado a la exploración entre las relaciones de las líneas irracionales.

Wilbur Richard Knorr[51] (1983): En (Knorr W. , 1983) se considera que esta investigación sobre los irracionales es una recopilación hecha por Euclides su procedencia viene a partir de la concepciones de Teeteto en el primer tercio del siglo IV a.C. sobre las líneas irracionales y los conocimientos de Eudoxo sobre la irracionalidad de la diagonal y el lado del pentágono; sin embargo se considera que las líneas irracionales han sido estudiadas también por geómetras en el periodo de Eudoxo y Euclides, según el comentarista Proclo, sin embargo no se conocen los trabajos precisos. El procedimiento de Teeteto fue a partir de dos líneas conmensurables solo en cuadrado formando medias geométricas, aritméticas y armónicas y demostrando que cada una de ellas da origen a una línea irracional; el tratamiento dado a las dos primeras es similar al tratamiento de Euclides a las líneas medial y binomial. Eudoxo realiza su trabajo a partir magnitudes, de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio racional, en el cual demuestra que el lado y la diagonal son irracionales y además que son la suma y diferencia respectivamente de términos racionales conmensurables entre sí solo en cuadrado.

El Libro X expone inicialmente los resultados generales sobre magnitudes conmensurables y rectas expresables [Def. 1-4 y X, 1-18]; las áreas formadas como productos de rectas expresables [X. 19-26]; construcciones especiales [X. 27-35] con las cuales construye las seis clases de rectas binomiales [X. 36-41] y las rectas apótomas [X. 73-78] demostrando que son no expresables; la unicidad de esas rectas [X. 42-47 y X.79-84]; construcciones [X. 48-53 y X. 85-90]; si una recta es conmensurable con un tipo de rectas construidas, también será del mismo tipo [X. 66-69 y X. 103-107]; la suma de una medial y una expresable es una de las cuatro primeras rectas binomiales [X. 71]; la suma de dos mediales es una de las dos rectas binomiales restantes [X. 72]; las relaciones análogas para las apótomas [X.108-110]; ninguna apótoma puede igualar a una binomial [X. 111]; productos especiales entre binomiales y apótomas [X. 112-114] y finalmente el procedimiento para hallar rectas mediales y mediales de mediales y sucesivamente [X. 115], dando lugar a nuevas clases de

[51] Fue un historiador de las Matemáticas y profesor de la Universidad de Stanford en Estados unidos.

no expresables. Al interior de cada conjunto de proposiciones, a partir de [X. 19] no se tiene algún orden específico pues ninguna es prerrequisito de otra.

Parece que estos últimos teoremas hubieran sido posteriores a Euclides, debido al aparente cierre de la teoría en [X. 111] y la relevancia de los mismos para la teoría.

Knorr se refiere al Libro X como un "desastre pedagógico" esto debido a algunas inconsistencias en el tratamiento de las demostraciones presentadas en el Libro X. Si bien no se conoce la obra original de Euclides, se atribuye a traductores posteriores. Una construcción general admite tratamiento diferente para cada uno de los casos particulares.

Considera que el Libro X tiene pocas ideas matemáticas y que su verdadero mérito está en ser un ejemplar único del sistema deductivo, trata de convertir un cuerpo de conclusiones geométricas en un sistema del conocimiento matemático.

Postura personal: El Libro X de *Elementos* está compuesto de tres partes, con un total de 115 proposiciones y 16 definiciones. Este libro refleja un tratamiento dado a la conmensurabilidad e inconmensurabilidad (propias de magnitudes geométricas como longitud, superficie, volumen y amplitud angular). Esta obra muestra que para Euclides la inconmensurabilidad no era un problema, sino que aquí él la enfrenta, la caracteriza y organiza de tal forma que se convierte en un concepto totalmente útil del cual se desencadena la particularidad del ser o no "racionalmente expresable"[52]; posteriormente

---

[52] Recta racionalmente expresable: recta determinada; Rectas racionalmente expresables: rectas conmensurables con la recta determinada solo en cuadrado o en longitud y cuadrado; Rectas no racionalmente expresables: rectas inconmensurables con la recta determinada (en longitud y cuadrado).

El ser racionalmente expresable podría interpretarse como una relación de equivalencia que parte los elementos de un conjunto en dos clases, el de los que cumplen la propiedad y el de los que no; ya que dentro el conjunto de todos los segmentos, cualquiera de ellos es una recta expresable, pero si vamos a tomar los que son expresables con una recta específica, se producirían dos clases, el de las rectas que son racionalmente expresables con la dada y el de las que no.

Una recta define dos conjuntos en relación con la conmensurabilidad, esta me define un criterio para realizar una partición. Por ejemplo tomando la recta o segmento $\overline{AB}$ tenemos:

muestra unos tipos de líneas rectas (segmentos) no racionalmente expresables y demuestra unas propiedades de estas rectas, también definiéndolas, caracterizándolas y organizándolas para utilizarlas posteriormente en otros libros, así concluye.
La primera parte del Libro X consta de 4 definiciones y 47 proposiciones, en ella se desarrollan los siguientes conceptos fuertes: Magnitudes Conmensurables e Inconmensurables, Líneas rectas Conmensurables en Cuadrado e inconmensurables en Cuadrado, Rectas y Áreas Racionalmente Expresables y no Racionalmente Expresables; a partir de las rectas No Expresables trabaja Rectas y Áreas Mediales y Binomiales. De estos conceptos fuertes se desprenden algunas propiedades importantes, ya conocidas en la actualidad con nombres específicos, como por ejemplo: Proposición 2: Antanairesis, Proposiciones 3 y 4: Máximo Común Divisor, Lema Proposición 13: Criterio para restar cuadrados, Proposición 21: Media proporcional, entre otras.

Según lo que hemos visto hasta ahora Euclides trató de desarrollar sistemáticamente la teoría para llegar a la siguiente clasificación (en la primera parte):

- Medial
- Binomial
    - Primera Bimedial
    - Segunda Bimedial
    - Mayor
    - Lado del cuadrado equivalente a un área expresable mas una medial
    - Lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales.

$\overline{AB}$	Múltiplo	Racionalmente expresable con $\overline{AB}$
	Múltiplo de un divisor	Racionalmente expresable con $\overline{AB}$
	Ninguna de las anteriores	No racionalmente expresable con $\overline{AB}$

Inicialmente en el libro se desarrolla la idea de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y a partir de ello se despliegan una serie de propiedades de las rectas que permiten clasificarlas.

Se parte de las definiciones de magnitudes conmensurables e inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado, líneas conmensurables e inconmensurables; se hace un desarrollo sobre la conmensurabilidad e inconmensurabilidad, exponiendo propiedades de transitividad, propiedades heredadas luego de operar con magnitudes conmensurables e inconmensurables, procedimientos como el método de Antifairesis o Antanairesis para hallar la medida común máxima de dos o más rectas que está relacionado con la forma de hallar el máximo común divisor en números enteros desarrollado en la escuela, hallar rectas conmensurables e inconmensurables en longitud y cuadrado y solo en cuadrado y relaciones de razón entre magnitudes que guardan la misma razón entre números. Lo anterior es válido algunas veces para cualquier tipo de magnitud, otras solo líneas y cuadrados de las líneas. Al parecer el tratamiento hecho hasta la proposición 18 es con el fin de trabajar lo que sigue en las proposiciones 19 en adelante, en donde se empieza a desarrollar todo un estudio fundamentado en las definiciones 3 y 4 y a aclarar a qué hace referencia la expresabilidad; el desarrollo de lo racionalmente expresable y no racionalmente expresable se realiza a partir de las definiciones de línea y cuadrado racionalmente expresable, líneas y cuadrados racionalmente expresables, y líneas y cuadrados no racionalmente expresables, estas proposiciones tratan acerca de rectas y áreas expresables y las distintas rectas no expresables que se forman a partir de dichos términos.

La intensión final del Libro X parece ser la definición y estudio de trece rectas sin razón expresable que serán utilizadas posteriormente, en esta primera parte se hace referencia a las siete primeras: medial, binomial, primera bimedial, segunda bimedial, mayor, lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial y lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales.

Aparece la idea de rectángulos y áreas expresables para definir la recta medial que es la media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado y el área medial hace referencia al área igual al cuadrado de una recta medial (Euclides, 1991).

Las proposiciones 36-41 definen las siguientes rectas producidas por la suma o diferencia de dos rectas expresables inconmensurables:

- La recta binomial que es la suma de dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado
- La recta primera bimedial es la suma de dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable.
- La recta segunda bimedial es la suma de dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial.
- La recta mayor es la suma de dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el rectángulo comprendido por ellas medial.
- La recta lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial es la suma de dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas expresable.
- La recta lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales es la suma de dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas también medial e inconmensurable además con la suma de sus cuadrados.

Posteriormente presenta algunas propiedades de estas rectas y las áreas que forman y la última parte (proposiciones 42 a 47) se encarga de mostrar que estas siete rectas encontradas solo se pueden dividir por un único punto para hallar las dos rectas que las originaron.

Al revisar la conexión entre las proposiciones de la primera parte del libro se identifican cuatro proposiciones que son usadas con mayor frecuencia para demostrar las demás, estas son:

- Proposición 6: Ligada a la relación entre magnitudes que guardan o no la misma razón que un número con un número; en la proposición 9 se extiende este resultado a los cuadrados de dos rectas que guardan la misma razón que un número cuadrado con un número cuadrado.
- Proposición 11: Establece que al tener cuatro magnitudes en una proporción la relación de conmensurabilidad o inconmensurabilidad de la primera con la segunda, se cumple también para la tercera y la cuarta.
- Proposición 21: Aparece el término recta medial que es la recta cuyo cuadrado es un área no expresable, esta área no expresable está comprendida por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado
- Proposición 22: Mediante la aplicación de un área medial a una recta expresable se produce un recta expresable inconmensurable en longitud con la primera

Además de las definiciones, los procedimientos claves parecen ser, la razón entre magnitudes comparada con la razón entre números; las proporciones entre magnitudes; la recta medial, y la aplicación de áreas en una recta.

Sin embargo existen proposiciones que, por el contrario, no son utilizadas al menos en esta primera parte:

- Proposición 1: Utilizada para emplear el método de exhasión: es una proposición que muestra una operación entre magnitudes
- Proposición 4: Medida común máxima de rectas: como método para determinar tres o más magnitudes son inconmensurables entre sí, se considera una generalización de la proposición anterior, por lo que es necesario tener la anterior para poder demostrar esta.
- Proposición 10:Halla una recta conmensurable en longitud y otra también en cuadrado con una recta dada
- Proposición 17: Establece cuándo la diferencia de los cuadrados de dos rectas conmensurables produce un cuadrado de una recta conmensurable con recta mayor
- Proposición 24: Área medial: comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud

- Proposición 25: El área comprendida por rectas mediales conmensurables solo en cuadrado es medial o expresable
- Proposición 27: Rectas mediales, conmensurables solo en cuadrado que comprendan un área expresable.
- Proposición 28: Rectas mediales, conmensurables solo en cuadrado que comprendan un área medial.
- Proposición 41: La recta lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales
- Proposiciones 43-47: Unicidad de estas rectas no racionalmente expresable

La segunda y tercera parte de X, hacen un tratamiento similar al de la primera parte a las rectas no expresables. La segunda parte del libro consta de 6 definiciones (rectas primera a sexta binomial) y 37 proposiciones (proposiciones 48 a 84) dentro de las cuales se incluyen las rectas no expresables seis siguientes rectas no expresables y una subclasificación de 6 rectas binomiales y la tercera parte está compuesta por otras seis definiciones (primera a sexta apótoma) y 31 proposiciones (proposiciones 85 a 115) dentro de las cuales se incluye una subclasificación de seis rectas Apótomas, que son también rectas no expresables.

Ahora resaltaremos ciertos conceptos que son necesarios para entender la teoría:

- Medir y comparar. En nuestra teoría la medida es un segmento y no un número.
- Magnitudes conmensurables e inconmensurables.
- Líneas conmensurables e inconmensurables en cuadrado.
- Racionalmente expresable, racionalmente expresables y no racionalmente expresables.
- Recta medial.
- Recta binomial.
- Las primeras 7 de las 13 rectas no expresables.

En la identificación de proposiciones que contienen conceptos claves, importantes para la comprensión de la teoría y de su intención, identificamos las que son pieza clave. Así pues tenemos:

- Proposición 9: cuadrados de rectas conmensurables e inconmensurables en longitud.
- Lema Proposición 18: nos permitió entender qué es racionalmente y no racionalmente expresable.
- Proposición 19: rectángulo expresable
- Proposición 21: recta medial
- Proposición 36: recta binomial
- Proposición 37: recta primera bimedial
- Proposición 38: recta segunda bimedial
- Proposición 39: recta mayor
- Proposición 40: recta lado del cuadrado equivalente a un área expresable mas un área medial.
- Proposición 41: recta lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

3.4.2. Tratamiento

Definiciones

Def. 1: Magnitudes conmensurables e inconmensurables.

Def. 2: Líneas conmensurables e inconmensurables.

Def. 3: Línea racionalmente expresable, líneas racionalmente expresables y no racionalmente expresables.

Def. 4: Cuadrado racionalmente expresable, cuadrados (y áreas) racionalmente expresables, cuadrados (y áreas) no racionalmente expresables.

Proposiciones

Grupo 1: Resultados sobre magnitudes conmensurables e inconmensurables y líneas racionalmente expresables y no racionalmente expresables. Proposiciones 1 – 18.

Grupo 2: Áreas formadas por rectas racionalmente expresables. Proposiciones 19 – 26.

Grupo 3: Construcción necesarias para obtener las rectas no racionalmente expresables. Proposiciones 27 – 35.

Grupo 4: Construcción de rectas no racionalmente expresables. Proposiciones 36 – 41.

Grupo 5: Unicidad de estas rectas no racionalmente expresables. Proposiciones 42 – 47.

Clasificación de las rectas no racionalmente expresables

1. Medial.
2. Binomial.
    a. Primera Binomial
    b. Segunda Binomial
    c. Tercera Binomial
    d. Cuarta Binomial
    e. Quinta Binomial
    f. Sexta Binomial
3. Primera Bimedial.
4. Segunda Bimedial.
5. Mayor.
6. Lado del cuadrado equivalente a un área expresable mas una medial.
7. Lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales.
8. Apótoma.[53]
    a. Primera apótoma
    b. Segunda apótoma
    c. Tercera apótoma
    d. Cuarta apótoma

[53] Aparece por primera vez en la proposiciones 73 del libro X. En la proposición 74 aparece primera apótoma de una medial pero solo hasta la tercera parte se define primera apótoma ¿Qué es la primera apótoma de una medial? ¿Hay otra subclasificación?

e. Quinta apótoma

f. Sexta apótoma

9. Primera Apótoma de una Medial.
10. Segunda Apótoma de una Medial.
11. Menor.
12. La que hace con un área expresable un área entera media.
13. La que hace con un área medial un área entera medial

Así pues las rectas no expresables se encuentran distribuidas de la siguiente forma a lo largo de X:

Partes	**Rectas**	**Subclasificaciones de rectas**
Primera parte	1. Medial 2. Binomial 3. Primera Bimedial 4. Segunda Bimedial 5. Mayor 6. Lado del cuadrado equivalente a un área expresable mas una medial 7. Lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales	
Segunda parte	1. Apótoma 2. Primera Apótoma de una Medial 3. Segunda Apótoma de una Medial 4. Menor 5. La que hace con un área expresable un área entera media 6. La que hace con un área medial un área entera medial	1. Primera Binomial 2. Segunda Binomial 3. Tercera Binomial 4. Cuarta Binomial 5. Quinta Binomial 6. Sexta Binomial

Tercera parte		1. Primera apótoma 2. Segunda apótoma 3. Tercera apótoma 4. Cuarta apótoma 5. Quinta apótoma 6. Sexta apótoma

Estructuras

Durante el desarrollo de nuestro trabajo de grado, específicamente en el estudio del Libro X nos encontramos con una serie de definiciones y proposiciones, hemos identificado algunas que son las mas importantes, bien sea porque dan un carácter hipotético-deductivo a la teoría (son muy utilizadas en las diferentes demostraciones) o porque construyen teoría (muestran algo estructurante de la teoría).

- A donde llegan muchas proposiciones → son proposiciones de alta complejidad lógica.
- De donde salen muchas proposiciones → son proposiciones muy importantes para la estructura hipotético-deductiva.

Hemos hecho especial énfasis en los siguientes conceptos:

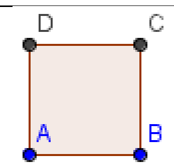
- Definición 3: Línea racionalmente expresable, líneas racionalmente expresables y no racionalmente expresables.

> Dados estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada. Llámese entonces racionalmente expresable la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien solo en cuadrado, racionalmente expresables y las inconmensurables con ella llámense no racionalmente expresables.

Euclides llama racionalmente expresable la recta determinada lo cual se interpreta como un segmento cuya longitud es una unidad de medida tomada como referencia y establece que a partir de esta inicial existen infinitos segmentos tanto conmensurables como inconmensurables con ella.

Las líneas racionalmente expresables son las que son conmensurables en longitud y cuadrado o solo en cuadrado con esa unidad. Las líneas inconmensurables con la unidad son las que no son racionalmente expresables.

Al interpretar esta definición, se puede decir que para que las magnitudes sean no racionalmente expresables existe el caso en el cual son conmensurables en longitud pero inconmensurables en cuadrado

	Casos	**Longitud**	**Cuadrado**
Unidad de referencia			
Racionalmente expresables	1.	Conmensurables con la unidad de referencia	Conmensurables con la unidad de referencia
	2.	Inconmensurables con la unidad de referencia	Conmensurables con la unidad de referencia
No racionalmente expresables	3.	Conmensurables con la unidad de referencia	Inconmensurables con la unidad de referencia
	4.	Inconmensurables con la unidad de referencia	Inconmensurables con la unidad de referencia

En los comentarios de María Luisa Puertas se menciona que según un porísma de la proposición 9 de este mismo libro, todas las rectas conmensurables en longitud, también lo son en cuadrado, por tanto el tercer caso no sería posible.

Para la comprensión de esta definición, se quiere destacar la complejidad de la lectura en matemáticas más que en literatura.

- Definición 4: Cuadrado racionalmente expresable, cuadrados (y áreas) racionalmente expresables, cuadrados (y áreas) no racionalmente expresables.

  Y el cuadrado de la recta determinada (llámese) racionalmente expresable, y los cuadrados conmensurables con éste racionalmente expresables; pero los inconmensurables con él llámense no racionalmente expresables; y las rectas que los producen (llámense) no racionalmente expresables, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas (rectas) que construyan cuadrados iguales a ellos.

Esta definición resulta ser algo tediosa de leer, consideramos que no se captura el concepto de la mejor manera lo que la hace difícil de leer, por lo que pensamos que se podría entender mejor el concepto no precisamente en esta definición sino en su uso y por ello se tendrá presente el tratamiento de esta definición a lo largo del libro.

En las definiciones anteriores se hace referencia a las líneas y sus cuadrados, ahora se extiende a figuras rectilíneas que se pueden transformar en cuadrados y por tanto obtener la línea correspondiente al lado.

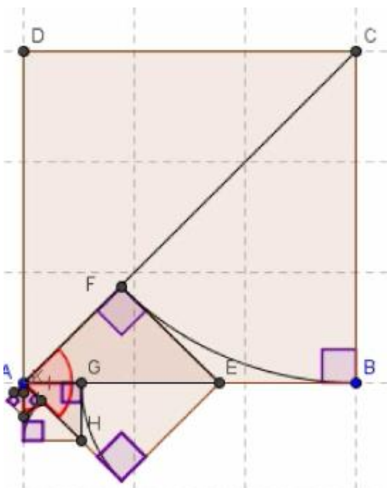
Para lograr transformar una figura rectilínea en un cuadrado de igual área se utiliza el método de aplicación de áreas y la media geométrica.

El método de aplicación de áreas consiste en descomponer figuras rectilíneas en triángulos y posteriormente en paralelogramos.

Por ejemplo $\sqrt{2}$ es irracional pero su cuadrado no lo es.

A continuación presentamos dos demostraciones que se confunden pero que muestran propiedades diferentes.

Inconmensurabilidad del lado	**Irracionalidad de $\sqrt{2}$**

del cuadrado con la diagonal	
 	Para demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional suponemos que es racional. Entonces se tiene que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $(m, n \in \mathbb{Z}), (m, n) \equiv 1$ $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ $2 = \frac{m^2}{n^2}$ $2n^2 = m^2$ Como $2n^2$ es par entonces m^2 es par. Como m^2 es par, entonces m es par Usando la proposición $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ Si m es impar entonces m^2 es impar Luego $m = 2k + 1$ $m^2 = (2k + 1)^2$ $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ $m^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ De lo que se concluye que m^2 es impar. Lo que es una contradicción por tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

En *Elementos* se daba nombre a las figuras, por ejemplo el rectángulo de lados a y b, pero luego con el avance del álgebra se le ha dado un carácter diferente a los nombres de las figuras y entonces ya no tendríamos el rectángulo de lados a y b, sino que aparte de nominalizar (dar nombre) podríamos asociar los nombres de los lados a longitudes y operar con esas letras que ahora cobran otro carácter. Así pues el álgebra comienza no solo a nombrar, sino a representar cantidades y a ser objeto de operación. El álgebra dio entonces una nueva significación a las letras, estas pasaron de ser nominativas a cuantitativas, siendo estas lecturas anacrónicas; un contenido geométrico leído a la luz de hoy.

Actualmente en la escuela se estudia la irracionalidad como una propiedad de algunos números, no se tiene en cuenta y muchas veces se confunde ésta con la inconmensurabilidad (que se estudia, si es que se estudia en la educación superior), no se hace una diferenciación en la aparición de estos dos conceptos a lo largo del desarrollo de las Matemáticas.

4. Conclusiones

- En la antigüedad se descubrió la irracionalidad que es una característica propia de dos magnitudes; la irracionalidad es un concepto posterior como una característica propia de un número.
- El reconocimiento de que las matemáticas pueden tener lecturas anacrónicas que llevan a interpretaciones descontextualizadas.
- Cuando se enseña Matemáticas poco se tiene en cuenta su historia, se subestima todo el esfuerzo que ha hecho la humanidad por romper diferentes paradigmas y lograr estructurar el pensamiento matemático actual.
- El estudio de la historia de las matemáticas en la Licenciatura amplia la visión de los objetos matemáticos, además de generar competencias en los profesores, que son importantes en el aula.

5. Bibliografía

Knorr, W. (07 de 1983). "LA CROIX DES MATHÉMATICIENS": THE EUCLIDEAN THEORY OF IRRATIONAL LINES . *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* , *9*(1). Recuperado el 19 de 08 de 2015

http://www.saberesyciencias.com.mx/sitio/component/content/article/10-portada/484-el-descubrimiento-de-la-inconmensurabilidad-de-la-irracionalidad. Recuperado el 06 de 10 de 2015

Juan Carlos Sanchez & Carmen Valdivé. (S.f.) El número irracional: una visión histórico-didáctica recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/52%20Sanchez.pdf

Anexo 5. Definiciones y proposiciones

DEFINICIONES Y PROPOSICIONES DEL LIBRO X

Definición 1. Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.

Definición 2. Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común.

Definición 3. Dados estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada. Llámese entonces racionalmente expresable la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien solo en cuadrado, racionalmente expresables y las inconmensurables con ella llámense no racionalmente expresables.

Definición 4. Y el cuadrado de la recta determinada (llámese) racionalmente expresable, y los cuadrados conmensurables con éste racionalmente expresables; pero los inconmensurables con él llámense no racionalmente expresables; y las rectas que los producen (llámense) no racionalmente expresables, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas (rectas) que construyan cuadrados iguales a ellos.

Proposición 1. Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Proposición 2. Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Proposición 3. Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

> **Porisma.** A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a dos magnitudes, medirá también a su medida común máxima.

Proposición 4. Dadas tres magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

> **Porisma.** A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a tres magnitudes, medirá también a su medida común máxima. De manera semejante se hallará la medida común máxima de más magnitudes y se extenderá el Porisma.

Proposición 5. Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Proposición 6. Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número (guarda) con un número, las magnitudes serán conmensurables.

> **Porisma.** A partir de esto queda claro que, si hay dos números como A, E, y una recta, como A, es posible hacer una recta [Z] que sea a la recta como el número Δ es al número E. Pero, si se toma una media proporcional de A, Z, como B, como A es a Z, así el cuadrado de A será al cuadrado de B, es decir que como la primera es a la tercera, así la (figura) construida sobre la primera es a la figura semejante y construida de manera semejante sobre la segunda [VI 19 Por.]. Pero como A es a Z, así el número Δ es al número E; entonces como el número Δ es al número E, así también la figura construida sobre la recta A a la figura construida sobre la recta B.

Proposición 7. Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número.

Proposición 8. Si dos magnitudes no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán inconmensurables.

Proposición 9. Los cuadrados de rectas conmensurables en longitud guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y los cuadrados que guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tendrán también los lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados de las rectas inconmensurables en longitud no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y los cuadrados que no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tampoco tendrán los lados conmensurables en longitud.

> **Porisma.** Y a partir de lo demostrado quedará claro que las rectas conmensurables en longitud también lo son siempre en cuadrado, mientras que las conmensurables en cuadrado no lo son siempre en longitud.
>
> **Lema.** Se ha demostrado en los libros de aritmética que los números planos semejantes guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [VIII 26], y que si dos números guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, son números planos semejantes [VIII 26 conversa]. Y es evidente que a partir de esto que los números planos no semejantes, es decir los que no tienen los lados proporcionales, no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; pues, si la guardan, serán planos semejantes; lo cual precisamente se ha supuesto que no; luego los números planos no semejantes no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Proposición 10. Hallar dos rectas inconmensurables, una sólo en longitud, otra también en cuadrado, con una recta determinada.

Proposición 11. Si cuatro magnitudes son proporcionales y la primera es conmensurable con la segunda, también la tercera será conmensurable con la cuarta, y si la primera es inconmensurable con la segunda, la tercera será también inconmensurable con la cuarta.

Proposición 12. Las magnitudes conmensurables con una misma magnitud son también conmensurables entre sí.

Proposición 13. Si hay dos magnitudes conmensurables y una de ellas es inconmensurable con una otra magnitud cualquiera, también la restante será inconmensurable con ella.

Lema. Dadas dos rectas desiguales hallar en cuánto el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor.

Proposición 14. Si cuatro rectas son proporcionales, y el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta conmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una (recta) conmensurable con la tercera. Y si el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta inconmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la tercera).

Proposición 15. Si se suman dos magnitudes conmensurables, la (magnitud) total también será conmensurable con cada una de ellas; y si la (magnitud) total es conmensurable con cada una de ellas, también las magnitudes iniciales serán conmensurables.

Proposición 16. Si se suman dos magnitudes inconmensurables, la magnitud total también será inconmensurable con cada una de ellas; y si la magnitud total es inconmensurable con una de ellas, las magnitudes iniciales serán también inconmensurables.

Lema. Si se aplica a una recta un paralelogramo deficiente en la figura de un cuadrado, el (paralelogramo) aplicado es igual al (rectángulo) producido por los segmentos de recta que resultan de la aplicación.

Proposición 17. Si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) conmensurables en longitud, el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor), y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables en longitud.

Proposición 18. Si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) inconmensurables, el cuadrado de la mayor será mayor que el cuadrado de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (la mayor), y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) inconmensurables.

> **Lema.** Puesto que queda demostrado que las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre en cuadrado, mientras que las que lo son en cuadrado no lo son siempre también en longitud, sino que pueden ser en efecto, conmensurables o inconmensurables en longitud, queda claro que, si una recta es conmensurable en longitud con una recta expresable determinada, se llama expresable y conmensurable con ella no solo en longitud sino también en cuadrado, porque las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado. Ahora bien, si una recta es conmensurable en cuadrado con una (recta) expresable determinada, entonces, si lo es también en longitud y en cuadrado; pero si una recta, siendo a su vez conmensurable en cuadrado con otra recta expresable determinada, es inconmensurable en longitud con ella, en este caso también se llama expresable pero conmensurable solo en cuadrado.

Proposición 19. El rectángulo comprendido por rectas expresables conmensurables en longitud, según alguna de las formas antedichas, es expresable.

Proposición 20. Si se aplica un (área) expresable a una (recta) expresable, produce como anchura una (recta) expresable y conmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado.

Proposición 21. El rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables solo en cuadrado no es racionalmente expresable y el lado del cuadrado igual a él tampoco es racionalmente expresable, llámese (este último) medial.

> **Lema 5.** Si hay dos rectas, como la primera es a la segunda, así el cuadrado de la primera al rectángulo comprendido por las dos rectas.

Proposición 22. El (cuadrado) de una (recta) medial, si se aplica a una recta expresable, produce una anchura expresable e inconmensurable en longitud con aquella a la que se aplica.

Proposición 23. La recta conmensurable con una (recta) medial es medial.

> **Porisma.** A partir de esto queda claro que un (área) conmensurable con un área media es medial.

Proposición 24. El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud según alguna de las formas antedichas, es medial.

Proposición 25. El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado o es expresable o es medial.

Proposición 26. Un (área) medial no excede a otra medial en un (área) expresable.

Proposición 27. Hallar rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Proposición 28. Hallar (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial.

> **Lema.** Hallar dos números cuadrados tales que su suma sea también un cuadrado.
> **Lema.** Hallar dos números cuadrados tales que su suma no sea un cuadrado.

Proposición 29. Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella (la mayor).

Proposición 30. Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable en longitud con la mayor.

Proposición 31. Hallar dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable, de manera que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con la mayor.

Proposición 32. Hallar dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial, de manera que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con la mayor.

Proposición 33. Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable, pero que el rectángulo comprendido por ellas sea medial.

Proposición 34. Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial, pero que el rectángulo comprendido por ellas sea expresable.

Proposición 35. Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial, y que el rectángulo comprendido por ellas sea medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados.

Proposición 36. Si se suman dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, la recta entera no es expresable; se la llama binomial.

Proposición 37. Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable, la recta entera no es expresable; se la llama primera bimedial.

Proposición 38. Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial, la recta entera no es expresable; se la llama segunda bimedial.

Proposición 39. Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el rectángulo comprendido por ellas medial, la recta entera no es expresable; se la llama mayor.

Proposición 40. Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas expresable, la recta entera no es expresable; se la llama lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

Proposición 41. Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas también medial y inconmensurable además con la suma de sus cuadrados, entonces la recta entera no es expresable; se la llama lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

> **Lema.** Y que las antedichas rectas no expresables se dividen de una sola manera en las rectas de las que se componen dando lugar a los tipos propuestos lo demostraremos enseguida, después de adelantar el siguiente lema.

Proposición 42. La recta binomial se divide en sus términos por un sólo punto.

Proposición 43. La recta primera bimedial se divide por un sólo punto.

Proposición 44. La recta segunda bimedial se divide por un sólo punto.

Proposición 45. La recta mayor se divide por uno y el mismo punto.

Proposición 46. El lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial se divide sólo por un punto.

Proposición 47. El lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales se divide por un sólo punto.

DEFINICIONES Y PROPOSICIONES DE LIBROS ANTERIORES[54]

I-Pro.44. Dado un segmento construir con un ángulo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.

I-Pro.47. En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

II-Pro.4. Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

II-Pro.5. Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

II-Pro.9. Si se corta una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de los segmentos desiguales de la (recta) entera son el doble del cuadrado de la mitad más el cuadrado de la (recta situada) entre los (puntos) de sección.

II-Pro.10. Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta, el cuadrado de la (recta) entera con la (recta) añadida y el (cuadrado) de la añadida, tomados conjuntamente, son el doble del (cuadrado) de la mitad y el cuadrado construido a partir de la (recta) compuesta por la mitad y la (recta) añadida, tomadas como una sola recta.

---

[54] Para hacer referencia a las definiciones, proposiciones, porismas y lemas de otros libros utilizaremos la siguiente notación:

<table>
<tr><td rowspan="4">Número del libro
(en romano)</td><td rowspan="4">-</td><td>Def
(si son definiciones)</td><td rowspan="4">.</td><td rowspan="4">Número de la definición, proposición, porisma o lema
(en el caso de los porismas y lemas llevaran el número de la proposición al final de la cual aparecen).</td></tr>
<tr><td>Pro
(si son proposiciones)</td></tr>
<tr><td>Por
(si son porismas)</td></tr>
<tr><td>Lem
(si son lemas)</td></tr>
</table>

II-Pro.11. Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

II-Pro.12. En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

II-Pro.13. En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende el ángulo agudo es menor que los cuadrado de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular hasta el ángulo agudo

II-Pro.14. Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

III-Pro.31. En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el ángulo en el segmento mayor es menor que un ángulo recto, el ángulo en el segmento menor es mayor que un ángulo recto; y además el ángulo del segmento mayor es mayor que un ángulo recto y el ángulo del segmento menor es menor que un ángulo recto.

IV-Pro.1. Adaptar a un círculo dado una recta igual a una recta dada que no sea mayor que el diámetro del círculo.

V-Def. 4. Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra.

V-Def. 9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que guarda con la segunda.

V-Def. 13. Una *razón por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.

V-Por.7. A partir de esto queda claro que, si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión.

V-Pro.9. Las magnitudes que guardan con una misma magnitud la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las cuales una misma magnitud guarda la misma razón, son iguales.

V-Pro.11. Las razones que son iguales a una misma razón son iguales también entre sí.

V-Pro.16. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.

V-Pro.17. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también serán proporcionales por separación.

V-Por.19. A partir de esto queda claro que si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales.

V-Pro.22. Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.

VI-Pro.1. Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

VI-Pro.8. Si en un triángulo rectángulo se dibuja una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo entero y entre sí.

VI-Pro.11. Dadas dos rectas, encontrar una tercera proporcional.

VI-Pro.13. Dadas dos rectas, encontrar una media proporcional.

VI-Pro.14. En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y los paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.

VI-Pro.16. Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales.

VI-Pro.17. Si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales.

VI-Pro.19. Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes.

VI-Por(1).20. De manera semejante, en el caso de los cuadriláteros se demostraría también que guardan una razón duplicada de la de los lados correspondientes. Pero se ha demostrado que también en el caso de los triángulos; de modo que, en general, las figuras rectilíneas guardan entre sí una razón duplicada de la de sus lados correspondientes.

VI-Por(2)20. Y si tomamos la tercera proporcional Ξ de los lados AB, ZH, BA guardan con Ξ una razón duplicada de la que (guarda) AB con ZA. Pero un polígono guarda con otro polígono, o un cuadrilátero con otro cuadrilátero, una razón duplicada de la que (guarda) el lado correspondiente con el lado correspondiente, es decir, AB con ZH; pero se ha demostrado esto también en el caso de los triángulos; de modo que, en general, queda claro que, si tres rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera así será la figura construida sobre la primera a la figura semejante construida de modo semejante sobre la segunda.

VI-Pro.21. Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.

VI-Pro.22. Si cuatro rectas son proporcionales, les figures rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si, las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias rectas serán también proporcionales.

VI-Pro.28. Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelogramo semejante a una dada; pero es necesario que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.

VII-Def. 20. Y un número cubo el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales.

VIII-Pro.4. Dadas tantas razones como se quiera en sus menores números, hallar los números continuamente proporcionales menores en las razones dadas.

VIII-Pro.11: Entre dos números cuadrados hay un número que es media proporcional y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda con el lado.

VIII-Pro.26. Los números planos semejantes guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

IX-Pro.1. Si dos números planos semejantes, al multiplicarse entre sí, hacen un número, el producto será cuadrado.

IX-Pro.24. Si de un número par se quita un número par, lo que queda será par.

IX-Pro.26. Si de un número impar se quita un número impar, lo que queda será par.