EL PLANO CARTESIANO, UNA IDEA SENCILLA CUYO DESARROLLO LLEVÓ DOS MILENIOS

Héctor David Pinto

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá - Colombia

2016

EL PLANO CARTESIANO, UNA IDEA SENCILLA CUYO DESARROLLO LLEVÓ DOS MILENIOS

Héctor David Pinto

Código 2010140039

Cédula 1032399246

Monografía presentada como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Director:

Juan Carlos Ávila Mahecha

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá - Colombia

2016

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	El plano cartesiano, una idea sencilla cuyo desarrollo llevó dos milenios
Autor(es)	Pinto Chiquito, Héctor David
Director	Ávila Mahecha, Juan Carlos
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 2016, 63 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	GEOMETRÍA ANALÍTICA, HISTORIA, PLANO CARTESIANO, COORDENADAS

2. Descripción
Trabajo de grado que presenta una revisión alrededor de la historia del desarrollo de la noción de plano de cartesiano, indagando en sus orígenes y distintas concepciones a lo largo de su historia. Se pretende develar la aparición del plano cartesiano en distintos trabajos desde la geometría griega clásica, hasta Descartes, Fermat y posteriores. El documento muestra un análisis de tratados y escritos realizados por Apolonio, Oresme, Descartes y Fermat, entre otros, donde se pone énfasis en el uso de un sistema de coordenadas organizado, o en vestigios de ejes o sistemas de referencia a la ubicación de puntos. La investigación conlleva a refutar la idea del plano cartesiano como una idea simple y cuya creación fue exclusiva de Rene Descartes, y muestra cómo se requirió el trabajo de varios matemáticos importantes para su desarrollo como se le conoce actualmente.

3. Fuentes

Para la elaboración del presente trabajo de grado se consultaron un total de 25 fuentes bibliográficas físicas y virtuales, entre ellas se destacan:

Boyer, C. (2012).*History of analytic geometry*. New York, USA: Dover Publications.

Castelnuovo, E. (septiembre, 1995). *Las representaciones gráficas en matemáticas: un estudio histórico-crítico.* Conferencia inaugural en la VII Jornada para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Madrid, España. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=370&Itemid=75.

Descartes, R. (1996). *Discurso del Método. La dióptrica, Los meteoros y La geometría*. Madrid, España: Círculo de lectores. Traducción por Guillermo Quintás.

González, P. M. (s.f.). *Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica*. Recuperado de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf

González, P. M. (2003). *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Quintero, R. (noviembre, 2001). La Invención de Fermat de la Geometría Analítica. *Miscelánea Matemática 34, 43-58.*

Tannery, P. (1891). *Œuvres de Fermat*. Francia: Gauthier-Villars et fils.

4. Contenidos

El presente de grado contiene 6 capítulos, a continuación se presenta un resumen de ellos:

El primer capítulo presenta la importancia del plano de coordenadas en matemáticas y en otras áreas de estudio. Es una justificación de la realización de la investigación en torno a la noción de plano cartesiano o de plano de coordenadas. Se presentan aquí algunas señales del uso de coordenadas en la vida de griegos y romanos sin que el plano cartesiano tuviera relación directa con un trabajo matemático

El segundo capítulo es una revisión a los aportes de Apolonio y Pappus en sus documentos de una temprana geometría analítica, en busca de vestigios de sistemas de referencia, y en particular en búsqueda de un sistema de referencias rectangular. Se hacen comentarios sobre algunos elementos de la vida de Apolonio y de Pappus que pueden llevar a vislumbrar por qué no desarrollaron la geometría analítica desde su época. En este capítulo se hace un análisis breve de *Las cónicas* y de *La colección*, documentos en los cuales Apolonio y Pappus presentaron sus descubrimientos en torno a un desarrollo analítico de la geometría, para dar algunas muestras de su uso de las coordenadas.

El tercer capítulo presenta el aporte de Nicolás de Oresme al desarrollo de la noción de plano de coordenadas rectangulares. En su *Tractatus de latitudinibus formarum* Oresme expone algunas formas de representar la relación entre cualidades de fenómenos, en las cuales el uso de segmentos perpendiculares se puede tomar como el primer estadio en la creación de un sistema de coordenadas rectangulares, siendo antecedido solo por el uso de coordenadas oblicuas de Apolonio en sus *Cónicas*. El capítulo muestra la indagación en las ideas de Oresme que vislumbran la aparición del plano en relación con el desarrollo de funciones.

En el cuarto y quinto capítulo se presentan los descubrimientos de Descartes y Fermat que dieron paso a la posterior formalización de la noción de plano cartesiano. Se muestra una revisión de la *Geometría* y de *La introducción* en las cuales el uso de coordenadas no es tan evidente como se esperaba al principio de la investigación, pero sí se pueden ver las bases que permitieron su desarrollo más formal. De las representaciones realizadas por Descartes y Fermat se presentan algunas donde el uso de coordenadas es más evidente, cada representación se analiza para ser presentada con un lenguaje actual y tratar de comprender los elementos que ellos ponen en juego en el lenguaje de su época.

Finalmente, el capítulo sexto es un breve estudio de los avances hechos en épocas posteriores a la época de Descartes y Fermat en la formalización de la idea del plano de coordenadas. Muestra cómo después que Descartes y Fermat, grandes matemáticos utilizaron sus trabajos para desarrollar un plano que se pudiera emplear para realizar una geometría analítica con resultados más cómodos y representativos.

5. Conclusiones

La idea de plano de coordenadas o plano cartesiano, que en la educación básica se presenta como un elemento simple y poco elaborado, incluso en ocasiones se omite su presentación por considerarse elemental, es el fruto de siglos de evolución en la historia de las matemáticas.

Considerar que René Descartes es el único creador de la geometría analítica, y en particular del plano que lleva su nombre también es algo errado. Se puede constatar a lo largo de este trabajo que esta idea fue elaborada desde mucho antes que Descartes presentara su Geometría, y que se continuó desarrollando por mucho tiempo luego de su obra. Pero a pesar de que el plano de coordenadas era una idea intuitiva desde antes de Descartes y Fermat, su trabajo permitió concretar esta idea en un campo llamado geometría analítica.

Puede que Fermat y Descartes contaran con las herramientas, pero es su gran mérito vislumbrar dicha relación. Si bien en los documentos de Descartes y Fermat no aparece como tal el plano de coordenadas, ni la idea de ejes bien definida, matemáticos posteriores a ellos pudieron encontrar en sus escritos la forma de desarrollar este nuevo y tan importante concepto.

Elaborado por:	Héctor David Pinto Chiquito
Revisado por:	Juan Carlos Ávila Mahecha

Fecha de elaboración del Resumen:	09	06	2016

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Son muchos los temas que se enseñan a un estudiante en la educación básica, la mayoría de ellos estipulados por el profesor y en muchas ocasiones sin que se permita rebatir sobre el sentido de estudiarlos, sin embargo, algunos pocos estudiantes después de realizarse preguntas como ¿y si lo que mi profesor me enseña se pudiera cambiar? o ¿si se pensara de otra forma? Tal vez generarían en él la curiosidad de buscar una respuesta de lo que uno o varios cambios pudieran ocasionar; en este camino podría descubrir respuestas fascinantes y aprender conceptos nuevos que quizá no tengan relación aparente con el tema de partida, pero que enriquecen su intelecto con nuevos descubrimientos.

En matemáticas y en particular en geometría se ha hablado por mucho tiempo de algo llamado *Plano Cartesiano*. Lo presentan como una línea horizontal llamada $eje\ x$ y una línea perpendicular a esta llamada $eje\ y$, que se intersecan en un punto llamado *origen*. Luego, a partir del origen, se toma una medida que hace las veces de unidad y al repetir esta medida se obtiene una escala de medida. En general, se enseña que este plano cartesiano es útil para ubicar puntos sobre él para así graficar curvas generadas por ecuaciones algebraicas, haciendo uso de unas llamadas *coordenadas* que resultan de la intersección de rectas perpendiculares a los ejes. Esta idea la conoce la mayoría de las personas, jóvenes y adultos, a veces existen confusiones acerca de cómo ubicar los puntos en el plano, pero en general se sabe para qué sirve.

Ahora, estudiando Matemáticas en educación superior, al ver geometría analítica se estudia esta idea un poco más a fondo conociendo nuevos elementos y reforzando antiguos conceptos. Surgen preguntas como ¿por qué los ejes son perpendiculares entre sí? ¿Será que pueden no serlo? ¿Las coordenadas de un punto surgen de intersecar rectas perpendiculares a los ejes? ¿Quién determinó la forma en que se usa este plano? La respuesta a esta última pregunta parece ser obvia, quien dijo cómo usar el plano debe ser quien lo descubrió y por su nombre quien lo hizo parece ser René Descartes. Descartes fue un filósofo francés del siglo XVII quién hacia 1637, cuando buscaba probar su *Método*[1], estableció las bases de una nueva geometría que permitía relacionarla con el álgebra de la época para buscar solucionar problemas de estas dos disciplinas.

Luego de indagar en el tema se ha visto que la idea de un plano de coordenadas como se conoce en la actualidad no es una idea propia de Descartes. Se encuentran a lo largo de la historia diversos indicios del uso de sistemas coordenados más parecidos al que se emplea en la actualidad, sin que estos se relacionen con Descartes. Existen algunos elementos en trabajos realizados por Apolonio en el siglo III a.C. que dan muestra del manejo de un sistema de coordenadas en sus cónicas; a mediados del siglo XIV el francés Nicolás de Oresme representa la relación entre cualidades de ciertos fenómenos mediante diagramas que no se alejan demasiado de la representación actual del plano cartesiano. En el siglo XVII, Descartes compartiría su título de creador de la Geometría Analítica con Pierre de Fermat, un abogado francés que tenía por pasatiempo el estudio de los trabajos clásicos de la geometría griega. Fermat en su esfuerzo por presentar una propuesta para resolver los problemas que Apolonio exponía en sus Cónicas, logró al igual que Descartes descubrir los fundamentos de la Geometría Analítica, que sería uno de los principales avances de la geometría y las matemáticas de la época.

Comprender por qué la mayoría de las personas que estudian algo de matemáticas tienen la idea de que Descartes es el único creador del plano que lleva su nombre no es tan complicado; de los trabajos realizados por los demás corresponsables de bosquejar un plano de coordenadas similar al que usualmente se usa hoy día, el trabajo de Descartes es quizá el más divulgado en la actualidad.

[1] Se refiere al método empleado por Descartes para hallar la verdad de las cosas. El fundamento de su método consistía en que si se quería resolver un problema, debía considerarse éste como resuelto, y de ahí ir reduciendo el problema a proposiciones simples y conocidas que permitan dar un valor de verdad.

Los trabajos de Apolonio se conocen en su mayoría por menciones de historiadores y comentaristas, la mayor parte de los libros escritos por este genio griego se han perdido, algunos fueron reconstruidos durante la edad media, época en que uno de los pasatiempos favoritos en Europa era la restauración de textos de la Grecia clásica. En particular de su trabajo *Las cónicas* se recuperaron un poco más de la mitad de los ocho libros, de los otros se sabe por las menciones que hizo Pappus. Actualmente se conocen algunas traducciones al español, pero el lenguaje no permite que sea tan fácil de leer.

El *Tractatus de latitudinibus formarum* de Nicolás Oresme expone sus ideas frente a la relación existente entre algunas propiedades medibles de fenómenos como la variación de la velocidad, la variación del calor de un cuerpo, entre otras relaciones que él llama *cualidades*. En este texto Oresme esboza lo que serían los primeros indicios de un plano con coordenadas rectangulares, este texto originalmente fue escrito en latín y conseguir una copia en la actualidad es una labor bastante dispendiosa.

Fermat expone su geometría algebraica en *Ad locos planos et solidos isagoge* – *Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos*– la cual es una obra de alrededor de veinte páginas sin mayor divulgación. Por razones aún desconocidas, Fermat era reacio a publicar sus trabajos, éste y otros trabajos de su autoría fueron divulgados hasta después de su muerte. Actualmente se pueden encontrar copias en latín de la *Introducción*, pero comprender este texto no es una labor sencilla.

Este trabajo pretende indagar sobre la construcción del plano de coordenadas cartesianas hasta la época de Descartes, examinar los escritos relacionados con esta construcción y verificar si Descartes es el autor de dicho plano o saber si su creación fue anterior a Descartes. No se busca con este trabajo hacer una exposición como tal de la Geometría Analítica, ni determinar la paternidad de Descartes sobre ésta. El trabajo está enfocado únicamente en el plano de coordenadas rectangulares y se expondrán las consideraciones que se obtengan acerca de los documentos indagados.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Recopilar y organizar las ideas, descubrimientos y aportes de distintos matemáticos alrededor de la idea de plano de coordenadas, que incentivaron el surgimiento de la geometría analítica de Descartes y Fermat.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Recopilar documentos que den indicios del uso de planos de coordenadas anteriores a Descartes y Fermat.
- Indagar cómo a partir de los trabajos desarrollados por Apolonio, Pappus, Oresme, Fermat y Descartes se generó la idea de plano cartesiano y con ello la representación y estudio de objetos geométricos a través del álgebra.
- Estudiar cómo Descartes y Fermat relacionaron la geometría con el álgebra de la época.
- Presentar señales del uso de coordenadas en el trabajo de Descartes y Fermat.
- Exponer algunos aportes posteriores a los trabajos de Descartes y Fermat que permitan organizar la idea de plano de coordenadas como se conoce en la actualidad.

CAPÍTULO 1. PRIMEROS PASOS EN EL DESARROLLO DE UN SISTEMA DE COORDENADAS

Para combinar las disciplinas del álgebra y la geometría, los matemáticos necesitaron identificar un "puente" conceptual entre estas dos disciplinas en apariencia aisladas, y el sistema de coordenadas actuó como ese puente. Su desarrollo significó contar con un método analítico para expresar relaciones funcionales a través de trazos geométricos sobre un plano. El sistema de coordenadas permitió a los matemáticos considerar espacios geométricos como conjuntos cuyos elementos podrían ser manipulados algebraicamente.

El sistema de coordenadas es un conjunto de *parejas ordenadas* de números. La palabra *ordenada* sirve para enfatizar el hecho de que las coordenadas (1, 3) no son lo mismo que (3, 1). Un sistema de coordenadas permite a quien lo usa establecer una correspondencia entre un producto cartesiano, generalmente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y subconjuntos de puntos del espacio, esto debe hacerse de tal manera que cada punto en el espacio puede ser identificado por un conjunto de coordenadas y cada conjunto adecuado de coordenadas identifica un único punto en el espacio. El ejemplo más simple de un sistema de coordenadas es la recta numérica real, una línea cuyos puntos han sido colocados en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales. Cuando se extiende esta idea al plano, se toman como referencia dos rectas numéricas, una perpendicular a la otra generalmente, y se hace una correspondencia entre cada punto del plano con el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Esta idea también puede extenderse al espacio, pero en este trabajo se hará énfasis en coordenadas en el plano.

La necesidad de un plano o de un sistema de referencia para expresar información gráfica proviene desde mucho antes de Descartes. Apolonio de Perga (alrededor de 200 a.C.) estableció un sistema propio de coordenadas sobre el cono con el fin de estudiar las secciones cónicas, anticipándose a Descartes en su geometría analítica por casi 18 siglos. Los astrónomos Hiparco (alrededor de 150 a.C.) y Ptolomeo (alrededor de 150 d.C.) desarrollaron un sistema de coordenadas para designar lugares en la superficie de la Tierra indicando su longitud y su latitud (medidas de este a oeste y de norte a sur respectivamente). Los descubrimientos geográficos y la posibilidad de establecer nuevas rutas comerciales detonó el desarrollo de la cartografía, un primer gran sistema de referencia para ubicar posiciones, lugares y organizar exploraciones.

Modesto Sierra (1997) menciona que la idea de las coordenadas estaba también presente en los agrimensores egipcios y en los planificadores romanos, quienes dividían sus ciudades respecto de dos ejes, el *decumano* que iba de este a oeste y el *cardo* perpendicular al anterior, organizando las calles en un sistema de coordenadas rectangulares, como el que aparece hoy en algunas ciudades modernas. En el campo de la ciencias, la contribución a mediados del siglo XIV de Nicolás de Oresme permitió una interpretación de datos a través de una expresión gráfica, descubrió que había una relación muy ligada entre tabular y representar gráficamente datos, y propuso utilizar una gráfica para representar una magnitud variable cuyos valores dependen de los de otra magnitud.

El trabajo de René Descartes y Pierre de Fermat en el siglo XVII fue vital en el desarrollo de la idea del plano cartesiano actual. En su trabajo Descartes establece una necesidad de un sistema de coordenadas para relacionar el trabajo algebraico y el geométrico, particularmente persuade sobre la necesidad de usar coordenadas rectangulares. Por su parte, Fermat especifica la necesidad de usar un sistema de coordenadas rectangular para simplificar las operaciones y resultados obtenidos al trabajar en su geometría algebraica, aunque ni él ni Descartes usaron sistemáticamente dos ejes de coordenadas en la forma estándar actual. El desarrollo del plano de coordenadas rectangulares, o plano cartesiano como se conoce actualmente es un trabajo que continúa luego de Descartes y Fermat por varios matemáticos entre los que se incluyen a Euler, Lagrange y Jan de Witt, quienes desarrollaron la noción del plano de coordenadas entendiendo su importancia en la interpretación de múltiples conceptos matemáticos.

CAPÍTULO 2. COORDENADAS EN LOS TRABAJOS DE APOLONIO

La primera parte de esta investigación se sitúa en la Grecia clásica, con los trabajos realizados por los griegos Apolonio y Pappus. Hacia finales del siglo III a.C. El matemático griego Apolonio de Perga (262 – 190 a.C.) desarrolló su obra *Las Cónicas*, uno de los libros más importantes de matemáticas en la historia. Apolonio, conocido como *El Gran Geómetra*, describe en su libro las propiedades de curvas resultantes del corte de un cono con un plano, las conocidas parábola, elipse, hipérbola y circunferencia, y hace mención a ciertos elementos como los diámetros conjugados y los diámetros tangentes que juegan en estas curvas un papel de coordenadas casi como se conocen en la actualidad.

Apolonio fue un muy fructuoso matemático, pero muchas de sus obras se han perdido al paso de la historia. La mayoría de sus obras son conocidas sólo porque se mencionan en escritos de otros matemáticos, sin embargo el libro de *Las Cónicas* se ha podido conocer en gran parte hasta la época actual. La comprensión y el uso de coordenadas en este trabajo de Apolonio son muy diferentes de como se conoce en la actualidad. Hoy en día por lo general se comienza con un sistema de coordenadas, se trazan un par de líneas, los ejes de coordenadas, y sobre estas líneas se grafica la curva que interesa. En cambio, Apolonio comienza con la descripción de una sección cónica construida por medio de propiedades ya conocidas por los griegos y luego utiliza un sistema de líneas de referencia para resolver algunos problemas de la curva en sí.

En el estudio de *las cónicas*, Apolonio considera ciertas líneas de referencia, diámetros conjugados, diámetros secundarios y tangentes, que juegan un papel de coordenadas. Las define de la siguiente manera:

> Llamo *diámetro* de toda línea curva situada en un solo plano a la recta que, trazada en la curva, divide en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera en la curva; *vértice* de esta al extremo de esta recta situada en la curva y, por último, llamo *rectas trazadas ordenadamente al diámetro* a las paralelas (Figura 1).

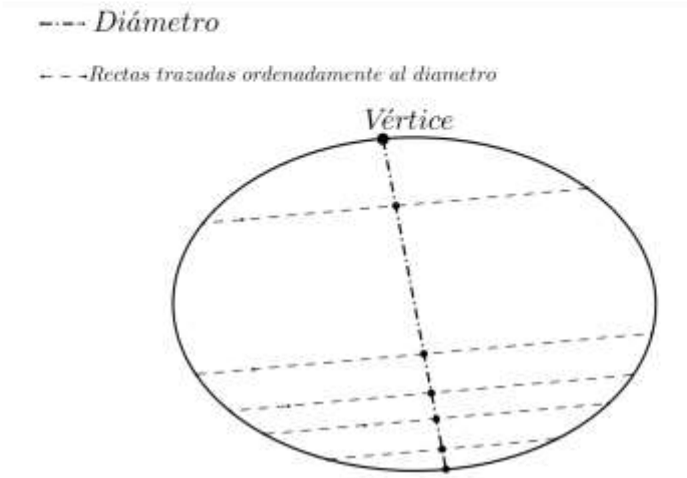

Figura 1. Diámetro de una curva

Llamo *diámetros conjugados* de una y de dos líneas curvas a las rectas cada una de las cuales es un diámetro que divide en dos partes iguales a las paralelas al otro (Figura 2).

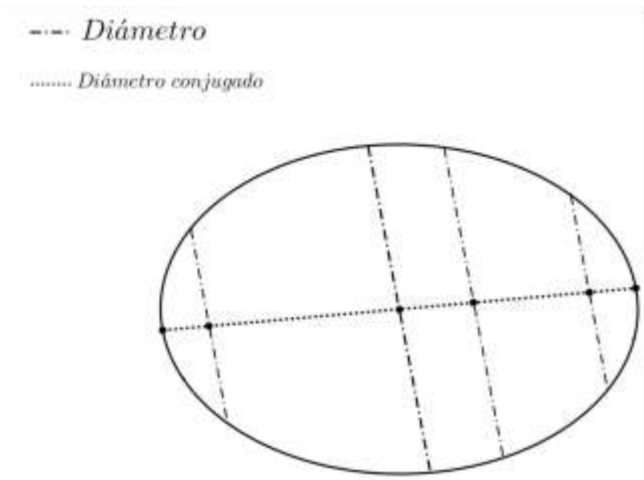

Figura 2. Diámetro conjugado

Llamo *eje* de una y de dos curvas al diámetro de esta o de estas curvas que corta a las paralelas en ángulo recto.

La paralela desde el centro a una recta dada trazada ordenadamente es media proporcional entre los lados de la figura y queda dividida en dos partes iguales por el centro, se llama *segundo diámetro*.

> …La paralela por el vértice a una trazada ordenadamente no caerá dentro, sino fuera de la sección cónica y será tangente a esta (Figura 3). (Vera, 1970, pp. 319, 320, 337)

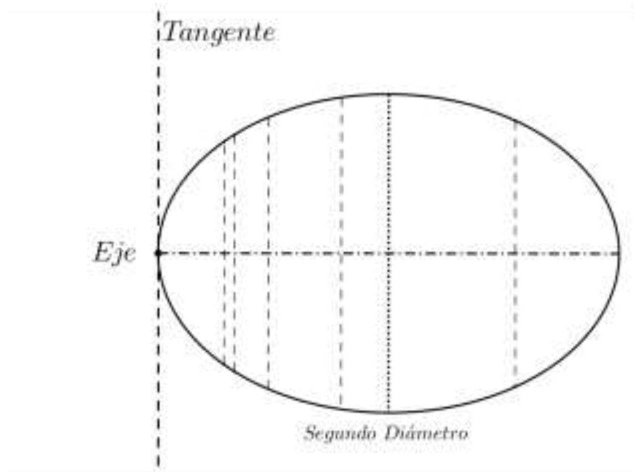

Figura 3. Eje, segundo diámetro y tangente

Al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como rectas de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia harían el papel de abscisas y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, jugarían el papel de ordenadas. La relación, expresada verbalmente, entre estas ordenadas y sus correspondientes abscisas es equivalente a una ecuación de las curvas. Este método por lo general resulta en un sistema oblicuo de coordenadas en el sentido de que los ejes resultantes no eran perpendiculares entre sí.

Un ejemplo de la construcción de la parábola de Apolonio se ve en la figura 4, da muestra del uso de los diámetros puestos en juego.

> Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección, equivale al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro del lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma

> que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros dos lados del triángulo. Llamaremos parábola a tal sección. (Vera, 1970, p. 326).

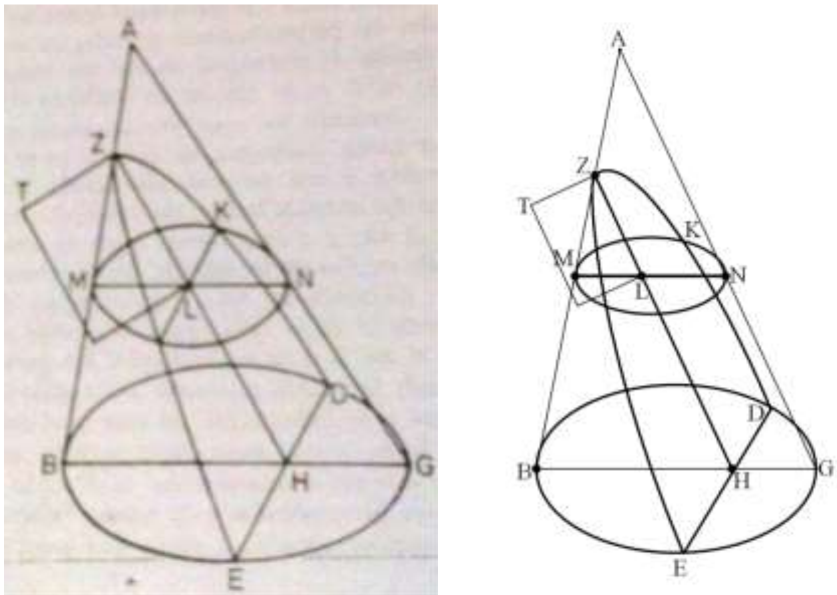

Figura 4. Construcción de parábola por Apolonio

Aquí Apolonio crea un cono de vértice A y cuya base es el círculo BEG, corta el cono por un plano que pasa por el eje, el cual produce el ΔABG, y por otro plano que corta la base del cono por $\overline{DE}$ perpendicular a $\overline{BG}$ y contiene la cónica DZE cuyo diámetro ZH es paralelo a $\overline{AG}$. Por el punto Z traza $\overline{ZT}$ perpendicular a $\overline{ZH}$ de manera que $\frac{ZT}{ZA} = \frac{BG^2}{AB \cdot AG}$. Finalmente escoge un punto Kde la sección y traza $\overline{KL}$ paralela a $\overline{DE}$. De esta manera se cumple que $KL^2 = ZT \cdot ZL$ Jugando el segmento KL las veces de coordenada x, y la coordenada y estaría relacionada de alguna manera con una sección del diámetro ZH.

De igual forma Apolonio usando un lenguaje casi que meramente verbal da las pautas para la construcción de la hipérbola y la elipse, mediante el apoyo de estas líneas definidas.

En la derivación de las tres cónicas de cualquier corte de un cono en la forma más general, Apolonio busca encontrar la relación entre las coordenadas de cualquier punto de la curva que se refiere al diámetro original y la tangente en su extremidad como ejes (en oblicuo general), y procede a deducir de esta relación, cuando se encuentra, las otras propiedades de las curvas. Su método no difiere esencialmente del de la geometría analítica moderna, excepto que en Apolonio operaciones geométricas toman el lugar de los cálculos algebraicos.

Hoy en día los ejes de coordenadas se eligen generalmente para ser perpendiculares entre sí por una razón práctica: ejes perpendiculares facilitan ciertos tipos de cálculos. Sin embargo, no hay ninguna necesidad teórica de que los ejes de coordenadas deban ser perpendiculares entre sí. Incluso cuando los ejes de coordenadas son asimétricos, cada punto en el plano puede ser identificado por un conjunto único de coordenadas relativas a los ejes asimétricos [2]. Por otra parte los cálculos que son facilitados por ejes perpendiculares son todavía posibles en planos oblicuos; sin embargo, resultan un tanto más incómodos.

En algunas de las construcciones de Apolonio se pueden observar rasgos de coordenadas rectangulares, como se ve en la figura 5.

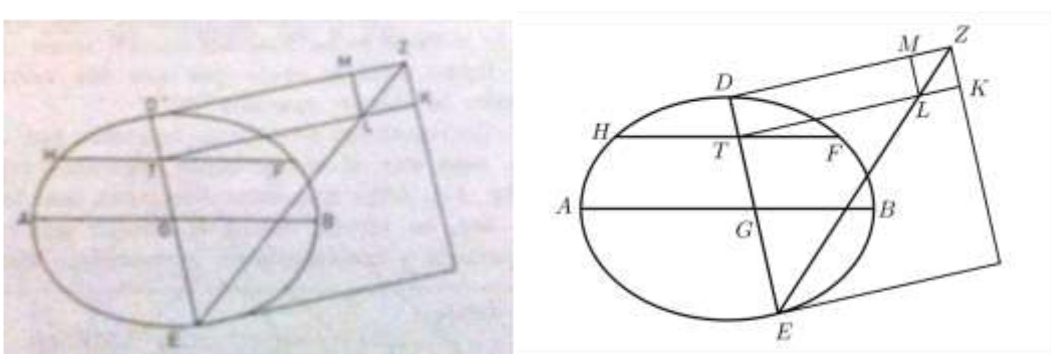

Figura 5. Coordenadas oblicuas en la elipse de Apolonio

Algunas de sus representaciones recaen en segmentos perpendiculares, pero no mantiene la idea de esta condición, figuras 6 y 7.

---

[2]Se puede consultar Chávez, J.M., Fernández, F. (2011) *Un estudio de las rectas en planos oblicuos perpendiculares* (Tesis de pregrado) dirigida por Ávila, J. C. y Ávila, J. C. (2014) *La ecuación de la recta en otro sistema coordenado: El caso del plano pe-pe*.

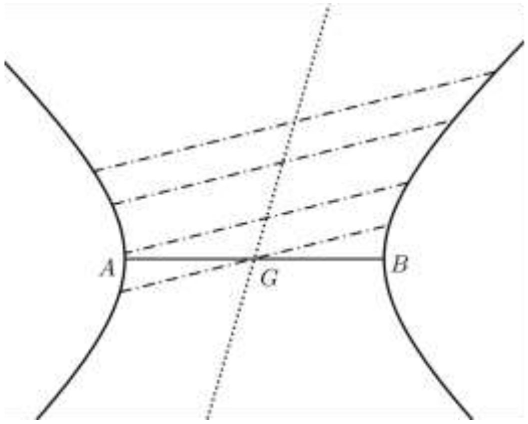

Figura 6. Diámetros en una hipérbola de Apolonio

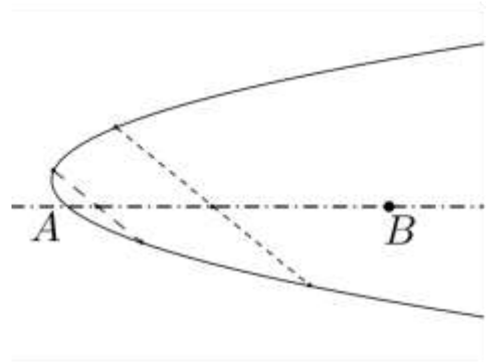

Figura 7. Coordenadas oblicuas en parábola de Apolonio

El cálculo de distancias y algunas propiedades se facilita con el uso de ángulos rectos, como se verá más adelante en el trabajo de Descartes y Fermat.

Se puede apreciar cómo en el trabajo de Apolonio existen indicios del uso de coordenadas, aunque él estuviera o no consiente de la importancia de éstas, su trabajo es clave en los inicios de la geometría analítica. Sin embargo, un limitante enorme que tuvo Apolonio es el carácter geométrico-sintético de la geometría griega y la ausencia de un álgebra simbólica en sentido algorítmico en aquella época, siendo ésta un componente ineludible de una verdadera geometría analítica general. Debido a esto, el sistema de coordenadas iniciado por Apolonio aparentemente tenía poca influencia sobre sus contemporáneos, hasta el mismo Apolonio encontró un uso limitado para esta idea. Es de recordar que los griegos conocían sólo alrededor de una docena de curvas. Una de las razones por las que la geometría de coordenadas es útil hoy en día es que ofrece una manera muy general de describir muchas curvas diferentes.

En el prólogo general de su obra *Cónicas* Apolonio refiere:

> …el tercero (de sus libros) comprende muchos y muy curiosos teoremas útiles para la construcción de los lugares sólidos; bastantes son bellos y nuevos, y al redactar este libro, he comprendido que la regla para construir

> el lugar de tres y cuatro líneas solo la dio Euclides en un caso particular y de una manera casual y poco feliz, porque la solución completa exige el conocimiento de los teoremas que yo he descubierto. (Vera, 1970, p. 317).

Este lugar de tres y cuatro líneas al que hace referencia Apolonio jugó un papel muy importante a lo largo de la historia de la matemática desde Euclides hasta Newton. En el siglo III d.C. Pappus de Alejandría (290 d.C. ca. – 350 d.C.) propuso una generalización del problema que enmarca este lugar geométrico de la siguiente forma:

> *Dadas tres (resp. cuatro) rectas en un plano, encuéntrese el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (resp. el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes.* (González, P. M. Mayo 2007, p. 210)

Y fue precisamente este problema generalizado el que sirvió a Descartes en 1637 para dar inicio a su *Geometría Analítica*.

En general, el tratamiento de un plano de coordenadas presentó poco avance durante los siguientes siglos. Sería hasta el siglo XIV cuando el matemático francés Nicolás de Oresme presentaría un valioso aporte en el desarrollo de un plano de coordenadas rectangulares.

CAPÍTULO 3: EL APORTE DE ORESME

Nicolás de Oresme (1325–1382) fue un filósofo, economista, matemático y físico francés. Fue uno de los principales fundadores de la ciencia moderna según señala Pierre Duhem, historiador y filósofo. Estudió teología y fue obispo de Lisieux, Francia. Sus contribuciones más importantes a las matemáticas están contenidas en el "*Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum difformitatum*", todavía en manuscrito. Un compendio de esta obra impreso como "*Tractatus de latitudinibus formarum*" ha sido hasta ahora la única fuente para el estudio de sus ideas matemáticas.

A mediados del siglo XIV, Oresme da el primer vestigio de la introducción de una representación gráfica de funciones en un sistema de coordenadas. En los trabajos realizados por Apolonio se observa cómo un sistema de coordenadas es empleado luego de ser generada una curva, pero en este nuevo trabajo, Oresme crea un sistema de coordenadas antes de realizar la representación de la curva y sobre este sistema representa las relaciones que obtenía. Como ya se mencionó, el hecho de que Apolonio diseñara un sistema de coordenadas sobre las curvas obtenidas tenía como propósito estudiar algunas propiedades de la curva y conocer luego de representada ésta, particularidades que la diferenciaran de otras y que la caracterizaran. En este nuevo trabajo Oresme considera la relación existente entre algunas magnitudes, genera un sistema coordenado para representarlas, y luego se enfoca en las propiedades que se observan en las variaciones de alturas de la curva obtenida y el área determinada por ésta.

En estudios acerca de la variación del calor interior de un cuerpo, de la variación de velocidad de un móvil y de distintas relaciones entre magnitudes físicas, Oresme diseña un sistema coordenado en el cual imagina una recta horizontal y un punto origen arbitrariamente fijado sobre ésta. Luego, para cada punto de la recta considera la longitud del segmento que le separa del origen y sobre él eleva un segmento perpendicular cuya altura es proporcional a la intensidad del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros (figura 8). Este proceso es muy similar al procedimiento que actualmente se sigue al usar un plano de coordenadas cartesiano, solo que tiene unas diferencias que se verán más adelante.

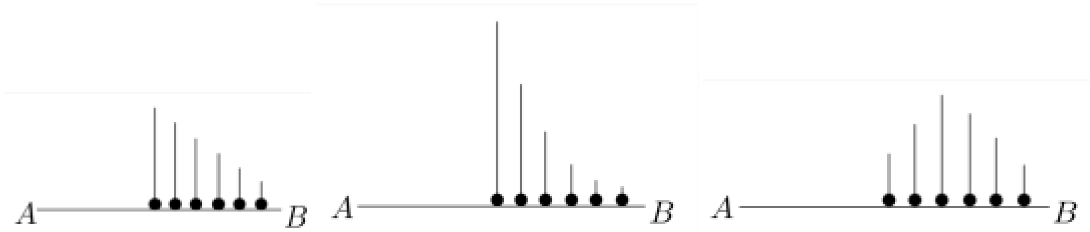

Figura 8. Representaciones de Oresme

En su *Historia de la Geometría Analítica* Boyer (2012) señala que, siguiendo la tradición griega de considerar el número como discreto y la magnitud geométrica como continua, Oresme dijo que las cantidades medibles pueden ser representadas por puntos, líneas y superficies. Para ilustrar esto, las intensidades han de ser representadas por las líneas trazadas perpendicularmente al intervalo o región en consideración. Si, por ejemplo, la velocidad de un objeto es representada como una función del tiempo, entonces el tiempo es medido a lo largo de una recta horizontal (Oresme llama a ésta una “longitud”) y las intensidades de la velocidad son dibujadas perpendiculares a dicha longitud (como representaciones de “latitud”) como se ve en la figura 9. Esto no marca el primer uso de coordenadas, pero parece ser el primer uso de la representación gráfica de funciones en un sistema de coordenadas. El trabajo de Apolonio puede ser interpretado como el primer estadio en el desarrollo matemático de coordenadas – en el cual presenta como ejes de coordenadas ciertas líneas auxiliares determinados por una figura o una curva dada anteriormente. El trabajo de Oresme representa un segundo estadio en el cual el sistema de coordenadas es establecido primero y los puntos de una curva se determinan luego con respecto a éste, sujeto a condiciones dadas expresadas verbalmente.

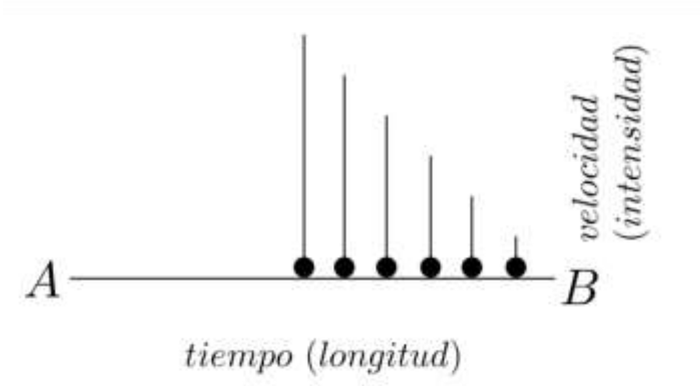

Figura 9. Gráfico velocidad en función del tiempo

El historiador alemán Siegmund Günther[3] plantearía la existencia de tres etapas en el desarrollo de la idea de coordenadas: (1) la introducción de dos ejes en la superficie a ser estudiada. (2) el trazado de una curva mediante la construcción de ordenadas para abscisas dadas y luego la conexión de los puntos finales; (3) el uso de ecuaciones que permiten ir de abscisas a ordenadas, o viceversa. Günther ubica a Oresme en la segunda etapa; pero parece que hay dudas de que esta etapa sea un paso necesario previo a la etapa tres. Históricamente, las tres etapas son fácilmente discernibles, pero parece probable que la tercera se desarrollara a partir de la primera, posiblemente, sin la influencia de la etapa intermedia.

Oresme estudia tanto el movimiento de los cuerpos que se desplazan con velocidad constante como el de los cuerpos que tienen una velocidad que varía en modo constante. Oresme en principio utilizó el método de representación gráfica para dar una prueba sencilla de la proposición de Richard Suisset, conocido como el Calculador, sobre intensidad media donde la tasa de cambio de la velocidad es uniforme. Como se puede ver en la figura 10, si un cuerpo, partiendo del reposo, se mueve con incremento de velocidad uniforme, las líneas que representan las intensidades o las velocidades formarán un área superficial en forma de un triángulo rectángulo:

[3] Se puede consultar en "*Le origini ed i gradi di sviluppo del principio delle coordinate*" de Siegmund Günther en *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, X* (1877), pp. 363-406.

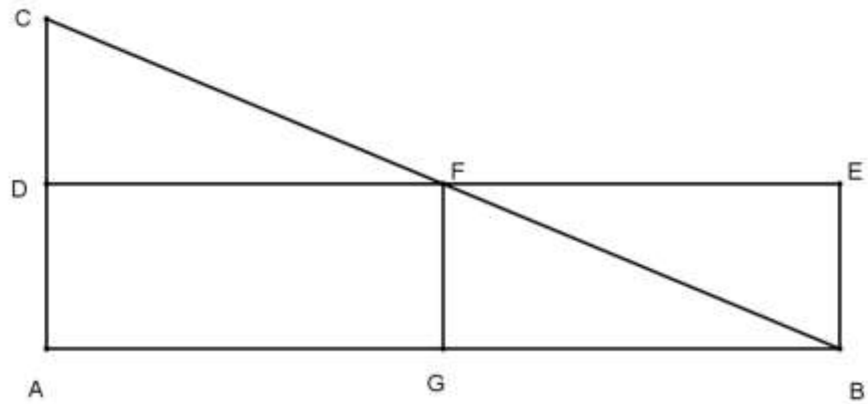

Figura 10. Movimiento de un cuerpo con incremento de velocidad uniforme. Oresme

Así, el ΔABC de la figura 10 es la representación del movimiento de un cuerpo en un intervalo de tiempo, el área de éste es exactamente igual al área del rectángulo $ABED$ (donde D biseca a AC), y este rectángulo es la representación gráfica de un movimiento para el mismo intervalo de tiempo, pero con una velocidad uniforme igual a la media de las velocidades inicial y final. Oresme no establece explícitamente el hecho, demostrado en el cálculo integral, que las áreas $ABED$ y ABC representan en cada caso la distancia recorrida; pero esta parece haber sido su interpretación en la medida en que deriva la igualdad de las distancias de la congruencia de ΔDFC y ΔEFB.

Oresme procedía a representar gráficamente las relaciones funcionales en las que puso en correspondencia la física con la geometría trazando un segmento $\overline{AB}$ que representaba el tiempo, donde B era el origen, a cada tiempo le correspondía un punto y la distancia del punto al origen era la *longitud* (figura 11).

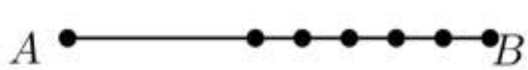

Figura 11. Segmento inicial trazado por Oresme

En seguida representaba las velocidades con segmentos perpendiculares a $\overline{AB}$, para indicar la longitud de estos segmentos utilizaba la palabra *latitud* (figura 12).

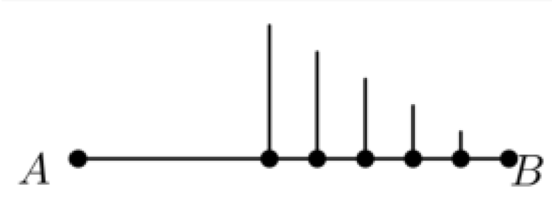

Figura 12. Latitudes representadas por Oresme

Luego, si la velocidad del cuerpo es constante su representación correspondería a un rectángulo (figura 13).

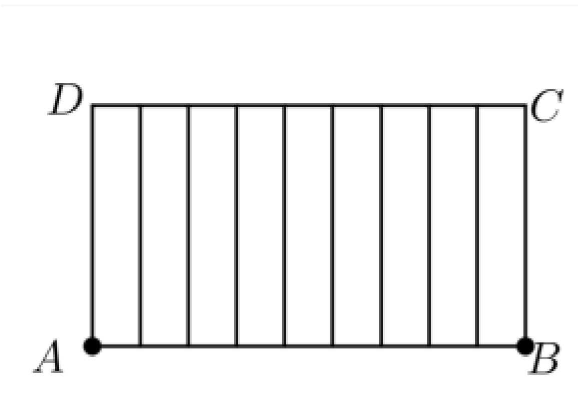

Figura 13. Representación velocidad constante. Oresme

Si la velocidad cambia uniformemente partiendo de cero su representación correspondería a un triángulo rectángulo (figura 14).

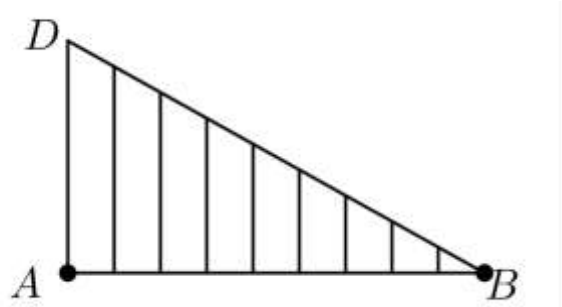

Figura 14. Representación velocidad cambiando uniformemente partiendo de cero. Oresme

Si la velocidad cambia uniformemente pero no parte de cero, la representación correspondía a un trapecio rectángulo (figura 15).

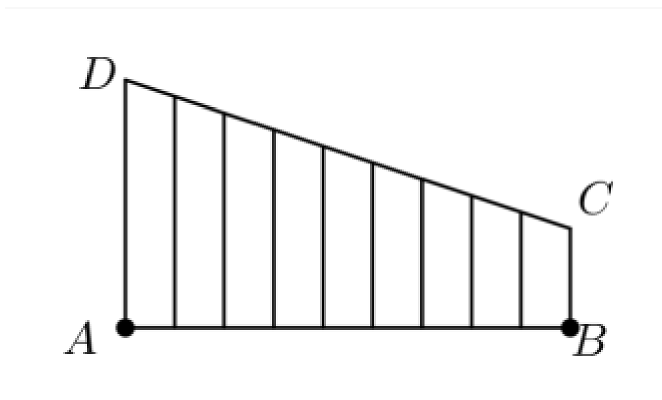

Figura 15. Representación velocidad cambiando uniformemente sin partir de cero. Oresme

Él unía los puntos extremos de las latitudes formando así lo que hoy sería el gráfico de la curva o función.

Oresme dice que a cada punto de la curva corresponden dos números: la *longitud* y la *latitud*, es decir un tiempo y una velocidad, de forma que su trabajo ha sido aclamado por algunos historiadores como equivalente a la Geometría Cartesiana. Pierre Duhem, en un artículo para la Enciclopedia Católica en 1911, afirma que Oresme "da la ecuación de la recta, y por lo tanto se anticipa a Descartes en la invención de la geometría analítica.” (Duhem 1911) Siendo esta afirmación un poco entusiasta, puesto que Oresme representó cambios relacionados con magnitudes en el plano de coordenadas, pero sus descubrimientos no pudieron extenderse mucho más allá de representaciones lineales o de línea quebrada, a pesar de sus significantes observaciones, por las deficiencias en el conocimiento geométrico y la técnica algebraica. En el trabajo de Oresme, se encuentran constantemente asociaciones no sistemáticas de álgebra y geometría en las cuales una ecuación en dos variables determina una curva específica y viceversa.

Las representaciones gráficas de Oresme diferían en varios aspectos, aunque de menor importancia, de la geometría de Descartes, entre ellos en el principio fundamental de que el álgebra y la geometría se pueden asociar, en el hecho de que carecía de una idea clara de origen y que su eje longitudinal era un intervalo de tiempo finito y no infinito en extensión, esto además de que no hace referencia a las coordenadas negativas. Algo para tener en cuenta del trabajo de Oresme es que en sus representaciones se veía a la figura plana como el área de ésta, por ejemplo, una forma con intensidad uniforme no era una línea horizontal, sino un rectángulo o como se veía anteriormente las líneas que representan las intensidades o las velocidades forman un área superficial en forma de un triángulo rectángulo y no una línea recta. La línea de límite superior sólo desempeñó un papel secundario, mientras que en la geometría analítica es precisamente el lugar geométrico de los puntos extremos de las líneas de latitud que se asocia con la ecuación o ley de variación. Oresme señaló en relación con estos gráficos la propiedad constante de la pendiente; y es en gran parte en este aspecto que Duhem basa su argumento de que "la geometría analítica de dos dimensiones fue creada por Oresme", cabe señalar, sin embargo, que la pendiente de la recta representada por él es la velocidad de cambio de la velocidad de cambio (la segunda derivada en lugar de la primera) de la función con respecto a la variable independiente. Es decir, lo que ahora se considera como una gráfica velocidad-tiempo fue para Oresme una gráfica distancia-tiempo.

Oresme extendió su punto de vista a una geometría analítica sólida, representando un volumen formado por todas las ordenadas erigidas sobre una porción del plano tomada como referencia. También buscó la forma de extender constantemente su idea a la concepción gráfica de una cuarta dimensión, pero para una dimensión Oresme necesitaba representar la intensidad de la forma de un volumen, y en esto obviamente la representación pictórica falló, puesto que lo que necesitaba era una geometría algebraica que no poseía.

La falta de uso de métodos empíricos así como la debilidad de la técnica matemática dificultaron el desarrollo de la ciencia medieval, impidiendo la construcción en ese momento de una geometría analítica eficaz o una teoría de curvas y superficies. El siglo XIV fue apenas familiarizado con las secciones cónicas o con otras curvas más allá de la línea o el círculo. Los gráficos de Oresme se debatieron más en términos de variación física que en el estudio de la geométrica. La relación de la latitud de las formas en el desarrollo posterior de la geometría analítica es difícil de determinar. El trabajo de Oresme era muy admirado por los hombres de los siglos XV y XVI, y varias ediciones impresas del *Tractatus de Latitudinibus formarum*, aparecieron en el intervalo de 1477 a 1520. El interés inicial de Descartes en las matemáticas estaba relacionado con las leyes de la caída de los cuerpos, y aquí hizo uso de diagramas similares a los de Oresme y Galileo. Descartes evitó cuidadosamente cualquier referencia a sus predecesores y por lo tanto no se puede decir con seguridad que estaba familiarizado con el trabajo de Oresme, pero esto parece bastante probable. Sin embargo, las diferencias (en la motivación y propósito, así como en cuanto al fondo) entre su geometría analítica y la representación gráfica de la latitud de las formas son grandes y generan serias dudas sobre una influencia decisiva de Oresme en Descartes.

En el caso de Fermat sucede igual, aunque el interés de Fermat estaba en los escritos clásicos, es poco probable que tuviera un interés significativo en la matemática medieval. Boyer (2012) señala que varios autores difieren acerca de la influencia de Oresme en la invención de esta nueva Geometría Analítica, entre ellos C.R. Wallner, Edward Stamm, Curtze, Cantor y Weileitner, unos afirmando una indudable influencia, otros determinando diferencias de fondo. Lo que es irrefutable es la existencia de varios predecesores a Descartes y Fermat que pudieron influenciar en la invención de su geometría analítica, y particularmente en la idea del plano de coordenadas, los trabajos de Apolonio y Pappus y estas representaciones de Oresme muestran la existencia de una idea bastante clara de plano de coordenadas anterior al descubrimiento de Descartes y Fermat.

CAPÍTULO 4: COORDENADAS EN EL TRABAJO DE DESCARTES

En el ámbito matemático se conoce a Descartes como el inventor de la Geometría Analítica. Mientras buscaba probar su *Método*, Descartes estableció las bases de una nueva geometría que al relacionarse con el álgebra simbólica propuesta por Viète años antes permitía solucionar problemas de la geometría, en particular fue empleado en problemas clásicos, de una manera sencilla y eficiente. Gran parte de esta nueva geometría es trabajo de Descartes, su organización y su Método es algo novedoso, pero como se ha visto, algunas de sus ideas fueron trabajadas por predecesores suyos y por contemporáneos sin aparente conexión. El plano de coordenadas en particular, es una idea que ya se había bosquejado en épocas anteriores, como se ha mostrado en anteriores capítulos. Ahora se verá cuál fue el aporte de Descartes en cuanto a este aspecto, tratando de vislumbrar en sus documentos una idea formal del plano de coordenadas como se conoce actualmente.

René Descartes (1596–1650) fue un filósofo francés, figura entre las cumbres del pensamiento universal, como menciona José Manuel Sánchez Ron (Sánchez J. M. 1996). Su geometría cartesiana, sus análisis filosóficos y algunas de sus contribuciones a la física forman parte importante de la base de la ciencia y pensamiento contemporáneos. Descartes gozaba de una modesta fortuna que le permitió dedicarse con bastante libertad a estudiar en “el gran libro del mundo”, viajando libremente y estudiando matemáticas, filosofía, física, astronomía y fisiología. Después de varios años de apartarse de las interrupciones que le impedían dedicarse a la reflexión filosófica, publicó su *Discurso del método* (1637) que, aunque en principio se trató de un prólogo a tres ensayos: Dióptrica, Meteoros y Geometría, terminó convirtiéndose en una de las obras más famosas de la historia. En particular su obra Geometría establece los principios de una nueva rama de la matemática, la Geometría Analítica, o Geometría Cartesiana.

Esta nueva geometría surgió como una prueba de que su Método funcionaba para resolver problemas de la geometría, haciendo un análisis profundo de los elementos puestos en juego, empleando el recién propuesto simbolismo algebraico de Viète y dejando a un lado el estudio sintético de la geometría que se llevaba hasta el momento. En 1650, luego de cinco meses de ejercer como tutor de la reina Cristina de Suecia, Descartes murió de una enfermedad pulmonar producida por las jornadas de labor con la reina.

Descartes en su obra no propone como tal un plano de coordenadas rectangulares como se ve en la actualidad, pero sí genera un sistema coordenado sobre el cual construirá distintos tipos de curvas, que él clasifica en tres distintos grupos. Descartes presenta su obra Geometría en tres libros, el primero *Sobre los problemas que pueden construirse empleando solamente círculos y líneas rectas*, el segundo *Sobre la naturaleza de las líneas curvas*, es donde se encuentra el aspecto más moderno de su trabajo a pesar de que Descartes lo describe como un estudio preliminar al tercer libro, y el tercer libro *Sobre la construcción de problemas sólidos y supersólidos*. En esta obra él indica la forma de proceder para resolver problemas geométricos clásicos, como el propuesto por Pappus de las tres y cuatro líneas y la trisección del ángulo usando su nueva geometría algebraica y establece, aunque sin darle mucha importancia en su momento, el principio fundamental de la geometría analítica, que toda ecuación en dos incógnitas representa una curva o lugar en el plano y viceversa.

En el primer libro de la Geometría, Descartes describe problemas con líneas rectas y círculos, relaciona las cinco operaciones básicas de la aritmética con relaciones entre segmentos, presenta una idea fundamental de su trabajo que es asignar algunas letras a los segmentos para trabajar con ellos de manera más fácil; esto es quizá simple notación, pero fue un elemento de suma importancia en su trabajo. Descartes muestra cómo estos problemas con rectas y círculos se pueden llevar a ciertas ecuaciones de segundo grado en particular y, finalmente, presenta una forma de generar ecuaciones de segundo grado para dar solución al problema de Pappus de las tres y cuatro líneas. En este momento, cuando presenta el problema de Pappus, Descartes da muestra de un primer paso en el trabajo con geometría coordenada, con una pequeña pero significativa propuesta de utilizar las letras x y y para determinar dos segmentos muy particulares, él presenta a uno de ellos como dado y otro que se pretende hallar.

Para demostrar el problema de Pappus, Descartes hace uso de la representación expuesta en la figura 16:

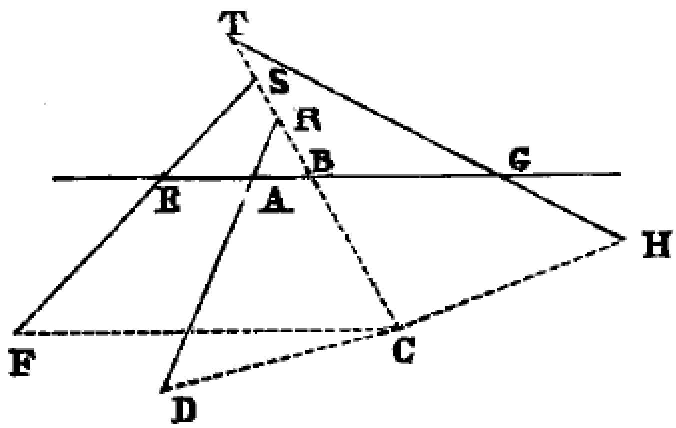

Figura 16. Representación problema de Pappus

Con $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, líneas (segmentos) dadas, debiendo hallar un punto como C, desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas, como $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CH}$, de modo que los $\angle CBA$, $\angle CDA$, $\angle CFE$, $\angle CHG$ sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada.

Descartes aplica aquí su *Método* considerando solamente una de las líneas dadas y una de las que precisaba calcular, en este caso $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, como las principales y con las que relaciona las otras. Al $\overline{AB}$ lo llama x y al $\overline{BC}$ lo llama y. Haciendo uso de distintas operaciones llega a los resultados:

$$CR = \pm y \pm \frac{bx}{z}$$

$$CD = \pm \frac{cy}{z} \pm \frac{bcx}{zz}$$

$$CS = \frac{zy \pm dk \pm dx}{z}$$

$$CF = \frac{ezy \pm dek \pm dex}{z}$$

$$CT = \frac{zy \pm fl \pm fx}{z}$$

$$CH = \frac{gzy \pm fgl \pm fgx}{zz}$$

Mostrando con esto que sea cualquiera el número de líneas dadas en posición, cuantas líneas sean trazadas desde el punto C formando ángulos dados, siguiendo el enunciado del problema, pueden siempre ser expresadas por tres términos: uno estará compuesto por una cantidad desconocida y, multiplicada o dividida por alguna otra cantidad conocida; el otro estará integrado por la cantidad desconocida x, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida; el tercero, por una cantidad conocida. Los signos $+$ y – que se unen a estos términos pueden ser combinados de todos los modos imaginables.

Finalmente muestra que, tomando una de las cantidades desconocidas, por ejemplo *y*, y buscando la otra por esta ecuación, se obtiene

$$x^2 = \pm ax \pm b^2$$

Por tanto se podrá encontrar la cantidad *x* mediante la regla y el compás.

Ahora, en este ejemplo, se vislumbra ya una luz acerca de la forma de uso de coordenadas por parte de Descartes en la forma en que relaciona estos segmentos y sus valores dados. No es muy concreta la relación existente entre los valores x y y en cuanto a un sistema de coordenadas organizado, pero se puede observar que la posición particular de los segmentos permite distinguir el origen de un sistema de coordenadas, que si bien aún no es rectangular, sí cuenta con los elementos de un nuevo sistema de referencia.

No se pretende en este documento asegurar que Descartes haya buscado este hecho, pero en la elección particular de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se buscará organizar la clave para la creación de un sistema coordenado. Al elegirlos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ como x y y, la prolongación del $\overline{AB}$ jugará el papel de eje de abscisas; el punto B, común a los dos segmentos, tomará el lugar del origen de este sistema de coordenadas, esto según un punto de vista propio, como se muestra en la figura 17:

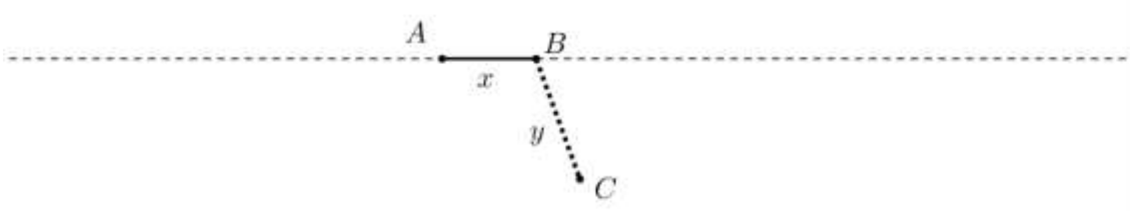

Figura 17. Prolongación del eje $\overline{AB}$ en el problema de Pappus bosquejado por Descartes

No estaría bien afirmar que la recta que resulta de la prolongación de $\overline{BC}$ vendría a jugar el papel de eje de ordenadas, puesto que los demás puntos no son relacionados con esta recta como tal, sino únicamente con el punto C, como se ve en la figura 18.

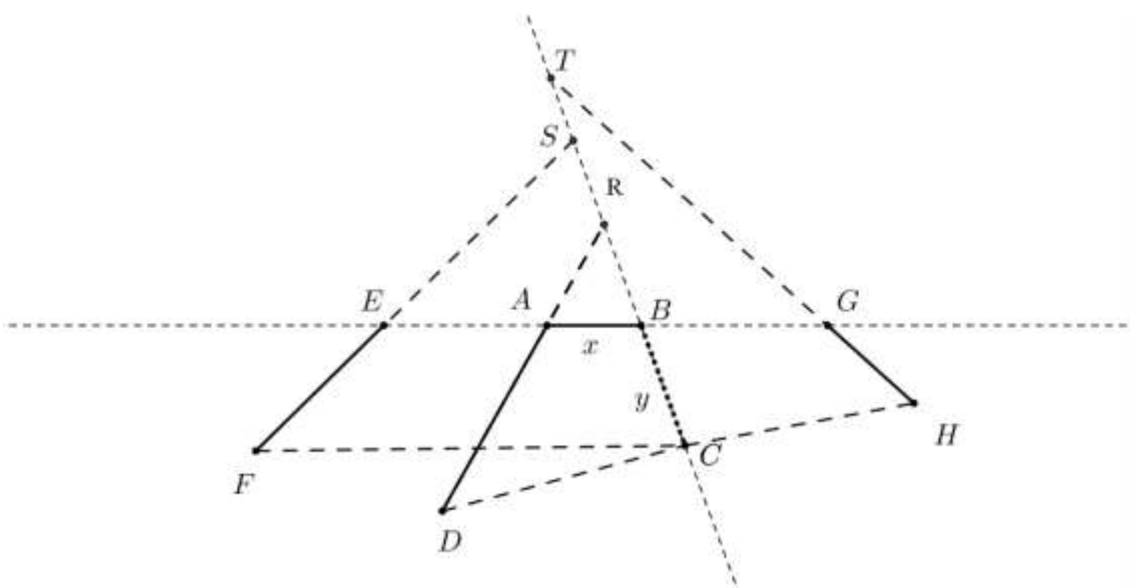

Figura 18. Representación del problema de Pappus por Descartes

Aún así, esto es un sistema de coordenadas, a pesar de no ser rectangular.

El interés de Descartes estaba enfocado un poco más en la consecución de las ecuaciones que representaran estos puntos que en el lugar geométrico que estos generaran, por esta razón no se ve como tal un par de ejes que generen curvas como las conocemos actualmente, o un punto al que se le llame Origen y que sea el foco o un valor de referencia hacia la curva en la manera en que actualmente se observa. Puede ser que en la curva solución al problema de Pappus, como la veía Descartes, no se interpretara fácilmente, como en la actualidad un foco o un centro, pero la propuesta de Descartes se fundaba en decir cuál era la ecuación de dicha curva.

Ya en el segundo libro de la Geometría se pueden ver más elementos que distinguen las ideas de Descartes en cuanto a su sistema de coordenadas. Al dar una clasificación de las curvas que se pueden estudiar en el plano, Descartes presenta en particular una que se puede construir mediante un instrumento móvil, (figura 19).

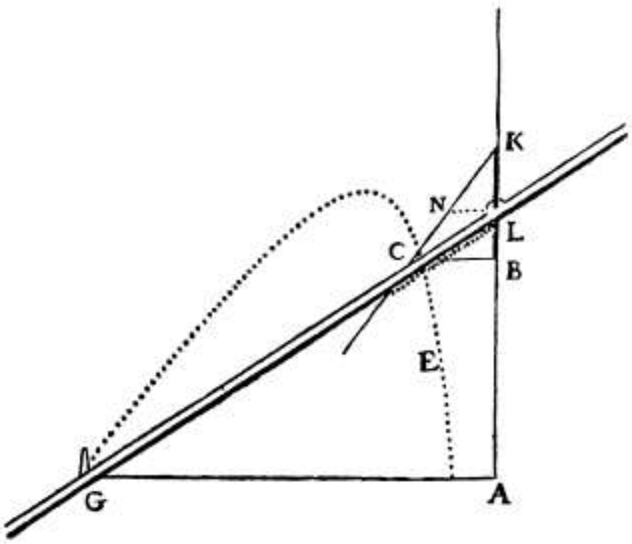

Figura 19. Construcción de parábola por Descartes

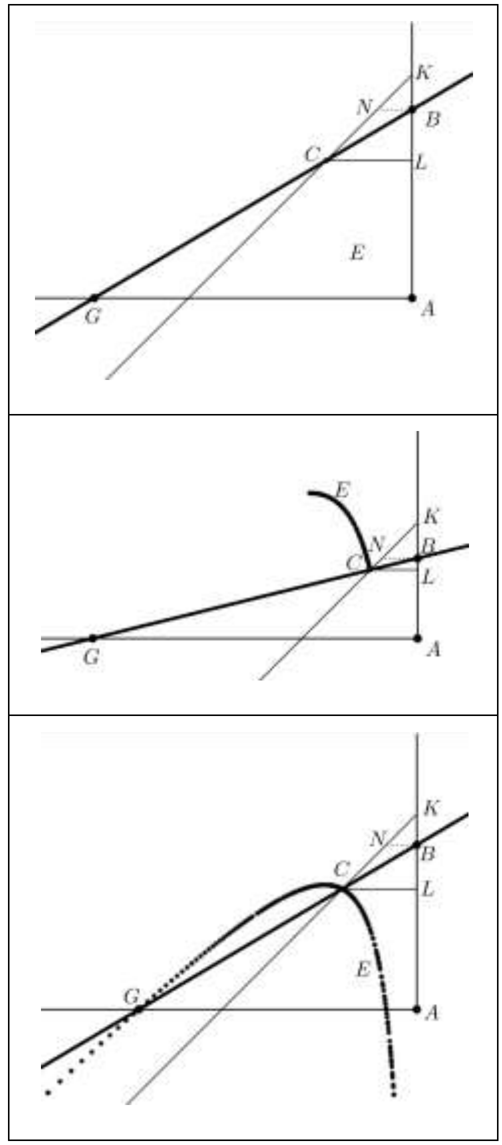

Figura 20. Reconstrucción en Geogebra

En la representación de Descartes (figura 19), la curva CE se genera moviendo la regla GL respecto al punto G, en su intersección con el plano $CNKL$, en el cual el ángulo CKL y la distancia KL son fijos. Ahora, en la reconstrucción (figura 20), las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AG}$ son fijas, KB y $\angle BKN$ son también fijos. El punto B se mueve a lo largo de $\overleftrightarrow{AB}$ y C resulta de la intersección de $\overleftrightarrow{GB}$ y $\overleftrightarrow{KN}$. Al repasar el rastro que deja C al mover B se obtiene la parábola GE descrita por Descartes.

En este documento se pone un interés particular en las características de los segmentos utilizados por Descartes para la realización de esta curva. $\overleftrightarrow{AB}$ es la base sobre la cual estará $\overline{KL}$ y Descartes la escoge para relacionar los puntos de la curva GE, y sobre ella escoge al punto A para iniciar desde él el cálculo. Luego, desde C, un punto de la curva, traza $\overline{CB}$ paralelo a $\overrightarrow{AG}$ y expone que, como AB y CB son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las llamará x y y , respectivamente.

Claramente está aquí la primera señal de la construcción por parte de Descartes de un plano de coordenadas más parecido al que se usa en la actualidad, con la diferencia que en ningún momento establece a los y como perpendiculares al eje x, o que formen ángulos rectos, él expone que escoge la ubicación del punto A buscando simplificar y abreviar la ecuación y esta elección parece formar un ángulo recto, pero no especifica que sea así, además en su esquema él hace uso de la semejanza de triángulos y las proporciones que estas generan, lo cual no necesariamente representa un sistema de coordenadas rectangular. Otra pequeña diferencia es que, en el esquema de Descartes, el eje x es vertical y los y vienen a ser segmentos horizontales.

Luego de esto, Descartes parece preocuparse, sin mencionarlo, por que los segmentos elegidos en sus representaciones sean perpendiculares. Así, para cuando en el problema de Pappus hay cuatro líneas paralelas y una perpendicular a las otras y el punto C forma ángulos rectos con las líneas dadas, Descartes la representa de la siguiente manera:

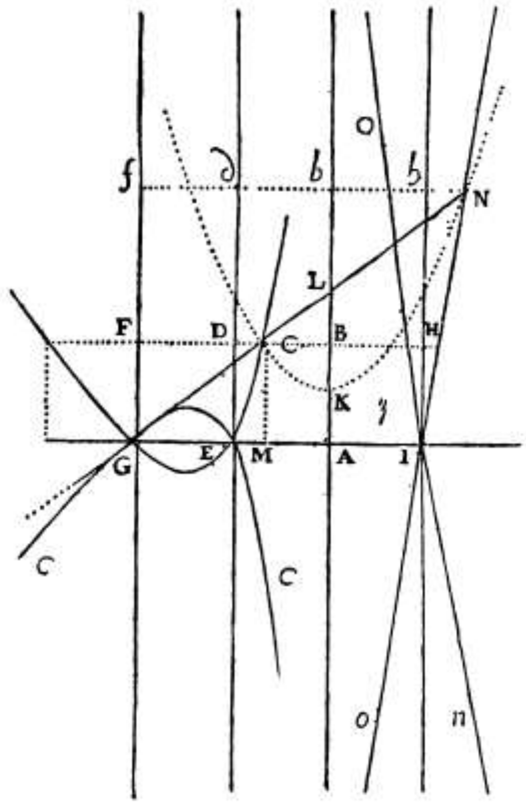

Figura 21, Representación problema de Pappus para cuatro líneas paralelas y una perpendicular por Descartes

Tomando como x al $\overline{CM}$ y como y al $\overline{CB}$, pero de nuevo en esta construcción, x es tomada verticalmente y a y lo toma sobre una línea horizontal.

Para hallar líneas rectas que cortan curvas dadas o sus tangentes formando ángulos rectos, aparece de nuevo la elección de los segmentos de referencia x y y, de la misma manera. Descartes presenta la construcción de normales a una curva por un punto como se ve en la figura 22, siendo $MA = CB = y$ y $CM = ZB = x$.

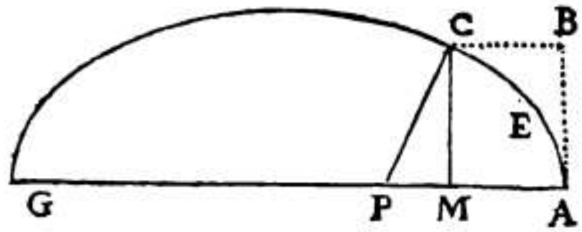

Figura 22, Representación para determinar la normal a una curva por un punto por Descartes

En la figura 22 se observa un elemento interesante, Descartes, sin dar explicación, asume el ΔPMC como rectángulo, lo cual indica una preocupación porque $\overline{CM}$ sea perpendicular a $\overline{GA}$ y por consiguiente a $\overline{MA}$.

En general el segundo y tercer libro de la Geometría presentan más ejemplos donde Descartes parece mostrar implícitamente el uso de un sistema de coordenadas que parece ser más conveniente si se toman rectas de referencia perpendiculares. Pero, a pesar de esto, no se ve una referencia puntual al uso necesariamente de un sistema de coordenadas rectangular, ni tampoco se ve la creación de un eje de ordenadas totalmente establecido. El trabajo de Descartes es un trabajo con un fuerte enfoque hacía la construcción de los problemas en la geometría a través de la solución geométrica de ecuaciones y su procedimiento es predominantemente algebraico, pero su significancia es de carácter geométrico. En este enfoque, Descartes no hace uso de las coordenadas en el mismo sentido en que las usó Oresme para representar propiedades de la curva, Descartes las usa como apoyo para la solución de los problemas geométricos, volviendo un poco a la idea de Apolonio.

Casi simultáneamente a Descartes, el también francés Pierre de Fermat complementaría la misión de Descartes de organizar esta nueva idea de geometría analítica, y con ello el desarrollo del plano de coordenadas.

CAPÍTULO 5: COORDENADAS EN EL TRABAJO DE FERMAT

En la historia de las matemáticas es un hecho curioso que descubrimientos de gran importancia han sido hechos simultáneamente por diferentes hombres. Un ejemplo claro está en el desarrollo simultáneo pero independiente del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz. Otro ejemplo se puede ver en el desarrollo del cálculo vectorial por parte de Grassmann y Hamilton. Así mismo, mientras Descartes descubría elementos importantes de la geometría algebraica desarrollando su *Método*, Pierre de Fermat creaba sin ninguna relación con el trabajo de Descartes un tratado titulado *Ad locos planos et solidos isagoge* –*Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos*–, donde se muestra que todos los lugares geométricos estudiados en la antigüedad por Apolonio, pueden ser descritos, caracterizados y analizados mediante ecuaciones algebraicas indeterminadas con dos variables. La *Introducción* de Fermat, junto con la *Geometría* de Descartes son los pilares de la naciente Geometría Algebraica que actualmente conocemos como Geometría Analítica.

Pierre de Fermat (1601-1665) fue uno de los matemáticos más notables que han existido, fue quizás el matemático aficionado con más talento de la historia. Formalmente su profesión era en las leyes, pasó toda su vida adulta como magistrado en la ciudad de Toulouse, Francia. Fermat tenía un hermano y dos hermanas y es muy probable que haya crecido en la ciudad de Beaumont-de-Lomagne, lugar de su nacimiento, aunque hay poca evidencia al respecto. Estudió en la Universidad de Toulouse antes de trasladarse a Burdeos en la segunda mitad de la década de 1620, donde recibió su título en derecho civil y recibió el cargo de concejal en el Parlamento de Toulouse. Así por 1631 Fermat era un abogado y funcionario del gobierno en Toulouse y debido al cargo que ahora sostenía, obtuvo el derecho de cambiar su nombre de Pierre Fermat a Pierre de Fermat. El resto de su vida Fermat vivió en Toulouse, pero además de trabajar allí, también trabajó en su ciudad natal de Beaumont-de-Lomagne y en la cercana ciudad de Castres.

Originalmente su interés matemático se centró en la restauración de los textos perdidos de Euclides y de Apolonio, a partir de las notas y referencias de autores posteriores, así en Burdeos comenzó su primera investigación matemática seria y en 1629 compartió su restauración de *Lugares Planos* de Apolonio. Durante este período produjo importantes trabajos sobre máximos y mínimos que entregó a Jean Beaugrand, conocido matemático de la época, con quien claramente compartieron intereses matemáticos. Fermat también hizo amistad con el matemático Carcavi, quien le relacionó con el padre Marin Mersenne, amigo de todos los doctos franceses de la época. El padre Mersenne le puso en contacto con Roberval y con René Descartes, con quien no sostuvo una buena relación, a diferencia de Blaise Pascal, con quien Fermat mantuvo una buena amistad. Ricardo Quintero (2001) señala que:

> Por razones que son un enigma para sus biógrafos, Fermat era reacio a publicar, aún cuando no desdeñaba la fama que merecidamente gozaba entre los matemáticos europeos, así que su muerte en 1665, dejó la mayoría de sus trabajos dispersos en cartas, notas y manuscritos breves, muchos de los cuales eran copias únicas (p. 44).

A principios de 1637, Fermat envió a sus amigos matemáticos de Paris, copias manuscritas de su *Introducción a los lugares planos y sólidos*, terminado probablemente en 1635. Allí muestra que todos los lugares geométricos estudiados en la antigüedad por Apolonio, pueden ser descritos, caracterizados y analizados mediante ecuaciones algebraicas indeterminadas con dos variables. Fermat utiliza técnicas muy similares a las empleadas por Descartes para estudiar los problemas geométricos con la ayuda del álgebra, aunque sus trabajos difieren en notación, propósito y contenido. Al ser Fermat reacio a publicar sus hallazgos, la nueva geometría desarrollada por Fermat y Descartes se conoció con el nombre de Geometría Cartesiana, puesto que la Geometría de Descartes alcanzó mayor difusión.

En su *Introducción* Fermat se apegó a las convenciones de notación, así como a las técnicas y resultados del álgebra de Viéte, utilizando las vocales para designar las incógnitas y las consonantes para los parámetros. Luego de cumplir su propósito de reconstruir el trabajo perdido de Apolonio, lo cual era una tarea muy de moda por la época, Viéte, entre otros, también había puesto de su parte en esta restauración, Fermat se propuso presentar una teoría de los lugares geométricos para un análisis adecuado a problemas como los propuestos por Apolonio y Pappus, y afirmó abrir el camino para un estudio general de los problemas de lugares geométricos. La *Introducción* es una obra de alrededor de una veintena de páginas dedicadas a la línea, al círculo, y a las secciones cónicas, en la cual muestra gran interés por el problema de Apolonio de circunferencias tangentes a tres circunferencias, y generalizó el problema a esferas tangentes a cuatro esferas.

Sin avanzar mucho, La *Introducción* comienza por indicar en forma completamente explícita, el principio fundamental de la geometría analítica:

> *Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, fit locus loco et terminus alterius ex illis describit lineam rectam aut curvam.* (Tannery, 1891)
>
> Cuando dos cantidades desconocidas se encuentran en una ecuación final, resulta un lugar geométrico fijo y el punto final de una de ellas describe una línea recta o curva.

Esta sencilla afirmación representa una de las declaraciones más importantes en la historia de las matemáticas y es el principio fundamental de la naciente Geometría Analítica. Aunque en la terminología de Viéte las vocales representan cantidades desconocidas, pero fijas o determinadas, Fermat da un significado a una ecuación algebraica en dos incógnitas permitiendo que las vocales tomen un valor sobre una línea recta concebidas como segmentos, la primera se mide, a partir de un punto inicial, a lo largo de un eje dado, mientras los segmentos correspondientes que representan la otra incógnita, siendo determinados por la ecuación dada, se levantan como ordenadas formando un determinado ángulo con el eje. La idea clave del trabajo de Fermat consiste en poder, a partir de una ecuación algebraica en dos incógnitas, definir, con respecto a un sistema de coordenadas dado, un lugar geométrico de puntos, es decir una curva.

Algo para tener en cuenta es que ni Fermat ni Descartes utilizan el término «sistema de coordenadas» o la idea de los dos ejes: el de abscisas y el de ordenadas. Fermat por su parte, escoge a conveniencia una línea recta, o una semirrecta, que juega el papel del eje x, cuyo origen es un punto fijo que hace las veces del actualmente llamado origen de coordenadas. La manera en que Fermat construye los lugares geométricos dada la ecuación es la siguiente: Sobre la línea de referencia dada, se mide un segmento cuya longitud corresponde al valor de una de las variables, generalmente A, y después con un ángulo fijo dado, se toma un segmento de longitud igual a la otra variable, generalmente llamada E, de manera que se satisfaga la ecuación dada, y el extremo "libre" de dicho segmento, describe, al tomar la "variable independiente" todos sus valores, un lugar geométrico (figura 23).

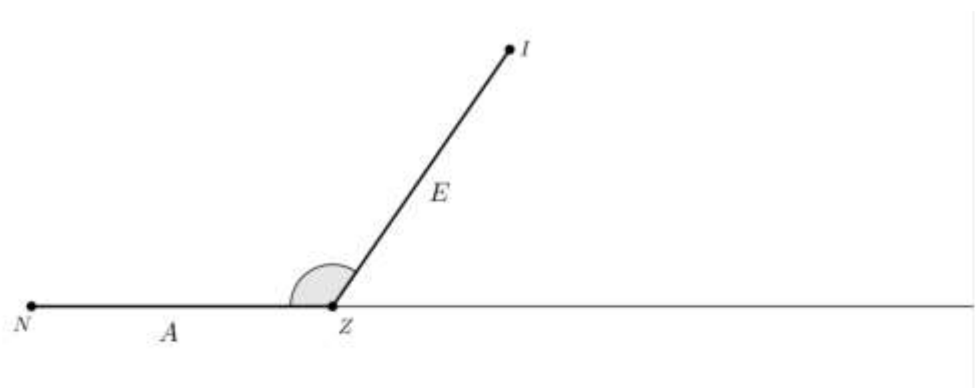

Figura 23. Referencias de construcción de plano por Fermat

En el esquema de Fermat, el eje y de ordenadas no existe explícitamente, pero aunque en algún caso aparezca una línea equivalente a lo que sería el eje y, la abscisa, es decir, la cantidad A, no es interpretada como una línea trazada desde el punto en que se considere hasta tal supuesto eje de ordenadas. Así pues, la Geometría desarrollada bajo estos presupuestos será una «Geometría de ordenadas» más que una «Geometría de coordenadas». Además, al considerar las coordenadas como segmentos, Fermat restringe las operaciones a lo que ahora se llama el primer cuadrante.

En el momento en que Fermat realiza la división de los lugares en tres tipos: planos, sólidos y lineales, él afirma que si las potencias de los términos en una ecuación dada no supera el cuadrado, entonces el lugar es plano o sólido, y es aquí cuando emplea las coordenadas para justificar este resultado, a base de la consideración de casos de ecuaciones de grados progresivos.

> *Commode autem instituí possunt aequationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus (quem ut plurimum rectum sumemus), et alterius ex illis poritione datae terminus unus sit datus; modo neutra quantitatum ignotarum quadratum praetergrediatur, locus erit planus aut solidus...*(Tannery, 1891)
>
> Es cómodo, para establecer las ecuaciones, tomar las dos cantidades desconocidas bajo un ángulo dado (que de ordinario supondremos recto) y dar la posición y un extremo de una de ellas; siempre que ninguna de las dos cantidades desconocidas sobrepase el cuadrado, el lugar será plano o sólido…

Un elemento importante en esta idea es la suposición del ángulo recto, pareciendo así que Fermat, como Descartes intuían alguna importancia en esto para un manejo más cómodo de las ecuaciones relacionadas cuando el ángulo de referencia es recto.

Fermat empieza trabajando con la ecuación de primer grado que según la terminología de Viéte expresa en la forma *«D in A aequetur B in E»* o en lenguaje cartesiano «$dx = by$» (figura 24).

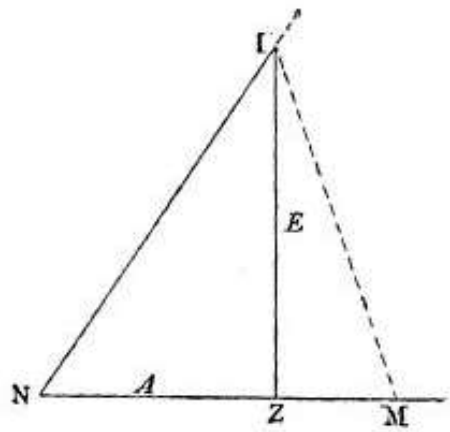

Figura 24. Lugar geométrico semirrecta por Fermat

En este caso el lugar geométrico resulta ser la semirrecta NI.

> *Recta data positione sit NZM, cujus punctum datum N; NZ aequetur quantitati ignotae A, et ad angulum datum NZI elevate recta ZI sit aequalis alteri quantitati ignotae E. D in A aequetur B in E: Punctum I erit ad lineam rectam positione datam.*
>
> *Erit enim Ut B ad D, ita A ad E. Ergo ratio A ad E data est, et datur angulus ad Z, triangulum igitur NIZ specie, et angulus INZ; datur autem punctum N et recta NZ positione: ergo dabitur NI positione, et est facilis compositio.*(Tannery, 1891)
>
> Sea NZM una recta de posición dada (figura 24), en la que se da el punto N. NZ se iguala a la cantidad desconocida A, y bajo el ángulo dado NZI se levanta la recta ZI igual a la otra cantidad desconocida E. Sea $DA = BE$. El punto I estará sobre una recta dada de posición.
>
> En efecto, se tendrá $\frac{B}{D} = \frac{A}{E}$ Por tanto la razón $\frac{A}{E}$ es dada, así como el ángulo en Z. Por consiguiente el triángulo NIZ es dado de especie, así como el ángulo INZ. Pero el punto N es dado, así como la posición de la recta NZ. Por tanto NI está determinado. La síntesis es fácil»

Fermat sigue con las ecuaciones de segundo grado, mostrando en primer lugar que «*A in E aeq. Z pl.*», es decir $xy = c^2$, es una hipérbola (figura 25).

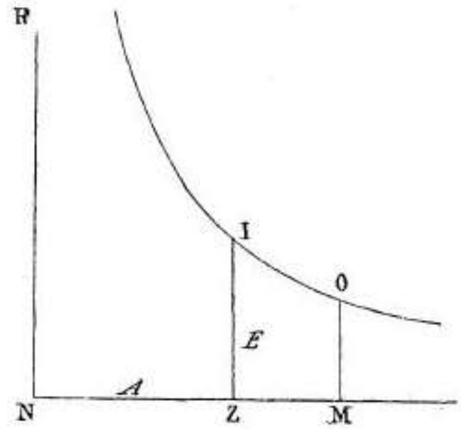

Figura 25. Lugar geométrico de hipérbola por Fermat

> *Fiat NR parallela ZI; sumatur in NZ quodlibet punctum, ut M, a quo ducatur MO parallela ZI; et fiat rectangulum NMO aequale Z pl.*
>
> *Per punctum O, circa asymptotes NR, NM, describatur hyperbole: dabitur positione et transibit per punctum I, quum ponatur rectangulum A in E, sive NZI, aequale NMO.*(Tannery, 1891)
>
> Trácese NR paralela a ZI (figura 25); tómese sobre NZ un punto cualquiera, sea M, por el cual se traza MO paralela a ZI. Constrúyase el rectángulo NMO igual al área c^2.
>
> Por el punto O, entre las asíntotas NR, NM, descríbase una hipérbola: ella queda determinada y pasará por el punto I, puesto que se supone AE, es decir, el rectángulo NZI, equivalente al rectángulo NMO.

Aquí Fermat aplica la propiedad asintótica de la curva hiperbólica que probablemente era conocida desde el descubrimiento de la curva.

De la misma forma, Fermat continúa demostrando que «*Aq aeq. D in E*» y «*Eq aeq. D in A*» que sería el equivalente a $x^2 = dy$, y $y^2 = dx$, así como la forma general «*Bq* ± *Aq aeq. D in E*» o $b^2 \pm x^2 = dy$, son parábolas, de la forma que se muestra en la figura 26.

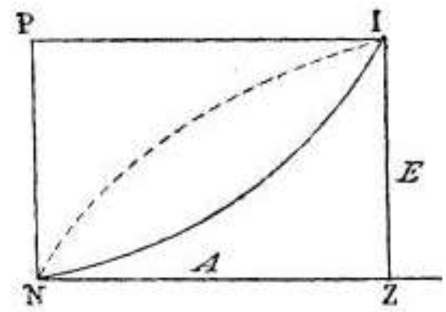

Figura 26. Lugar geométrico de una parábola por Fermat

Y más adelante comprueba que «*Bq. - Aq. aeq. Eq.*», es decir, $b^2 - x^2 = y^2$ es un círculo (figura 27).

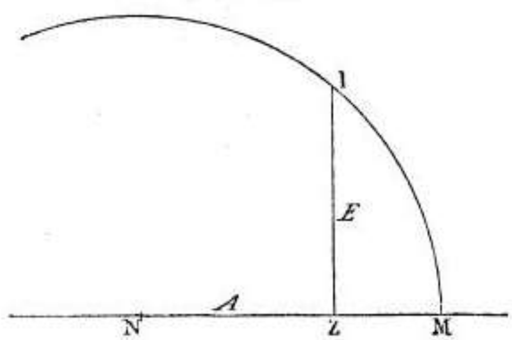

Figura 27. Lugar geométrico de un círculo por Fermat

Y prosigue explicando que «*Bq. - Aq. ad. Eq. Habeat rationem datam*», $b^2 - x^2 = ky^2$ es una elipse y que «*Bq. + Aq. est ad. Eq. in data ratione*», $b^2 + x^2 = ky^2$ es una hipérbola de la cual da las dos ramas, figura 28.

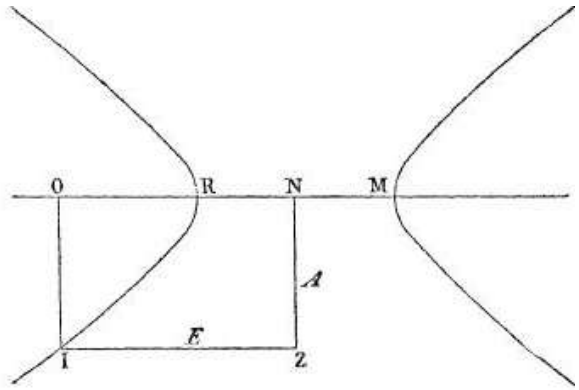

Figura 28. Lugar geométrico Hipérbola de dos ramas por Fermat

En todas sus construcciones se observa la presencia claramente de un eje horizontal, del cual hemos dicho que hace las veces de nuestro eje x, pero normalmente tomado desde su origen solamente en el sentido positivo, exceptuando esta última representación de la hipérbola de dos ramas, donde parecen cambiar los ejes x y y, además de tomar la parte "negativa" del eje de abscisas. Se pueden observar también vagos indicios de la presencia del eje y en las semirrectas que se erigen desde el punto N, paralelas al segmento ZI, pero sin ninguna mención por parte de Fermat, de que estas semirrectas harán las veces de ejes. Finalmente, como ya se mencionaba, la continua recurrencia a tomar ángulos rectos no parece ser casualidad, Fermat parece proponer este hecho como una forma de obtener resultados más "cómodos".

Carl Boyer (2012) comenta que:

> La geometría analítica elemental como ahora se enseña generalmente abarca cuatro temas principales en el plano de coordenadas cartesianas: la derivación de las fórmulas de puntos, líneas, ángulos y áreas, junto con la aplicación de éstos a problemas y teoremas; la representación de curvas; la derivación de las ecuaciones de lugares geométricos; y el estudio de las propiedades de las curvas, especialmente de ecuaciones lineales y cuadráticas. De estos temas Descartes enfatiza en el tercero y consideró brevemente algunos aspectos del último; Fermat destaca en el último y resuelve algunos problemas relacionados con el tercero. El segundo tema no se trabajó hasta los primeros años del siglo XVIII, y el primer tema no se vio hasta el final del mismo siglo. Descartes y Fermat descubrieron los dos

aspectos del principio fundamental de la geometría analítica, pero no lo presentan como el concepto que es hoy. (Boyer, 2012, p. 102)

CAPÍTULO 6: PLANO DE COORDENADAS DESPUÉS DE FERMAT Y DESCARTES

Los trabajos de Descartes y Fermat generaron una revolución en el campo de la geometría; pero a pesar de esto, la geometría analítica en sí misma, tal y como la presentaron Descartes y Fermat, tuvo poca repercusión inmediata. Se tendría que esperar el trabajo de Gaspard Monge (1746 - 1818), uno de los matemáticos más importantes de la época de la Revolución Francesa, y sus discípulos en la Escuela Politécnica francesa, para que tomara los alcances y fortalezas que ésta posee.

La geometría analítica se asentó en Holanda, antes que en ningún otro lugar de Europa, debido a la influencia de Descartes en la matemática holandesa. Frans van Schooten y sus discípulos desarrollaron la geometría cartesiana. Hacia 1650 Jan de Witt, miembro del grupo de van Schooten, escribió *Elementa curvarum linearum*, incorporado a las ediciones de La Geometría de Descartes de 1659 y 1695, donde utilizó de un modo sistemático las coordenadas en el plano, es así esta la primera verdadera exposición del método de las coordenadas que permite la traducción automática de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría.

En *Elementa curvarum linearum*, De Witt primero da ecuaciones en x y y para la línea recta y las cónicas, en forma estándar con respecto a un sistema de coordenadas elegido por él, luego muestra que estas formas estándar representan las curvas en cuestión. Es decir, las coordenadas de cada punto en una curva satisfacen la ecuación correspondiente. Lo contrario, que cada punto cuyas coordenadas satisfacen una ecuación se encuentra en la curva correspondiente, rara vez se indica.

Jan de Witt comienza con una ecuación lineal o cuadrática dada en dos variables, al igual que Fermat, y prueba que representa una recta o una cónica. También utiliza un sistema de coordenadas con un eje, como Fermat. Jan de Witt establece las coordenadas en la misma dirección que Fermat, por lo que él también se restringe al "primer cuadrante” del plano.

John Wallis (1616-1703) propagó las ideas de Descartes en Gran Bretaña, aunque no a través de una traducción o comentario sobre la Geometría, sino a través de una obra original, el *Tractatus de sectionibus conicis*, publicado en 1655. El *Tractatus de sectionibus conicis* (1665) de Wallis y los *Elementa* de De Witt son complementarios en cuanto al estudio de las cónicas. Wallis primero expresa las secciones cónicas en forma analítica, es decir, obtiene las ecuaciones de las cónicas trasladando las condiciones geométricas de Apolonio a la forma algebraica y luego de sus ecuaciones deriva las propiedades de las curvas, mientras que De Witt primero obtiene las propiedades de las cónicas geométricamente y después muestra analíticamente que las ecuaciones de segundo grado representan curvas con esas propiedades. Pero para Wallis las coordenadas ya no eran segmentos de línea, sino números, mientras que para los de Witt todavía eran segmentos de línea. Se podría decir que de Witt es más conservador en su enfoque de Wallis. Wallis también introdujo abscisas y ordenadas negativas, a diferencia de De Witt. Pero la combinación de las partes analíticas de ambos textos sería una razonable aproximación a los materiales de los textos modernos.

Pero sin duda en cuanto al desarrollo del plano de coordenadas, el trabajo más importante es el de Euler en su famosa obra *Introductio in Analysis ininfinitorum* de 1748, donde trata sistemáticamente la Geometría plana con coordenadas. La *Introductio* de Euler es uno de los tratados más importantes de toda la Historia de la Matemática. Boyer señala que:

> Este libro es probablemente el libro de texto más influyente de los tiempos modernos. Es el trabajo que convirtió el concepto de función en básico para las Matemáticas [...]. La *Introductio* es para el Análisis elemental lo que Los *Elementos* de Euclides es para la Geometría. (Boyer, 2012, p. 180)

La primera parte de esta obra está destinada al *Análisis puro*, la segunda a la *aplicación del Álgebra a la Geometría* y la última es un tratado metódico de

Geometría Analítica en el sentido de Fermat. El Principio Fundamental de la Geometría Analítica, en sus dos sentidos, es claramente establecido por Euler. Él reconoce que “La naturaleza de una curva cualquiera viene dada por una ecuación en dos variables, x, y, de las cuales x es la abscisa y y es la ordenada”, como propuso Descartes, y de acuerdo con Fermat, Euler establece que “Cualquier función de x da lugar a una curva continua que puede ser descrita mediante un gráfico.”

La aparición del eje y llega por primera vez en una publicación póstuma de 1730 de C. Rabuel (1669-1728). A partir de ese momento se habla de la abscisa y la ordenada en lugar de la primera y la segunda variable, y para finales del siglo XVII los términos abscisa, ordenada, origen, eje y coordenadas eran de uso general en el sentido actual. La denominación de Geometría Analítica fue dada por primera vez por el matemático francés Silvestre François Lacroix (1764-1848) a finales del siglo XVIII. El uso de un sistema de coordenadas fue vital en los trabajos de Euler, Lagrange, Newton y Leibniz, entre otros grandes matemáticos, y estos a su vez fueron desarrollando la idea del plano de coordenadas rectangulares hasta la forma actual.

CONCLUSIONES

La idea de plano de coordenadas o plano cartesiano, que en la educación básica se presenta como una idea simple y poco elaborada, incluso en ocasiones se omite su presentación por considerarse elemental, es el fruto de siglos de evolución en la historia de las matemáticas. Considerar que un concepto es simple o elemental por el hecho de haberlo estudiado en cursos de educación básica es una concepción errónea, puesto que cada idea, en particular en matemáticas, es producto de un elaborado estudio histórico que la muestra con la sencillez que se presenta actualmente.

Considerar que René Descartes es el único creador de la geometría analítica, y en particular del plano que lleva su nombre también es algo errado. Se puede constatar a lo largo de este trabajo que esta idea fue elaborada desde mucho antes que Descartes presentara su Geometría, y que se continuó desarrollando por mucho tiempo luego de su obra. El aporte de Descartes fue muy significativo para la concreción de la idea de plano de coordenadas rectangulares, las señales que se vislumbraron en su Geometría permitieron que matemáticos y científicos posteriores a él desarrollaran este puente que relacionó la geometría con el álgebra. Es cierto que, como en múltiples ocasiones en matemáticas, el título de Geometría Cartesiana y el de Plano Cartesiano es más un honor a su trabajo que una mención a él como su descubridor, pero esto no opaca el gran aporte de Descartes a la elaboración del plano de coordenadas.

Cada aporte, desde los diámetros y tangentes de Apolonio, como las recopilaciones de Pappus, las representaciones gráficas de Oresme, las semirrectas y los segmentos empleados por Fermat y Descartes hasta la concreción de los ejes x y y, así como cada contribución de un sin número de matemáticos y hombres de ciencia ha sido un eslabón en la creación de esa "simple" idea que se conoce hoy como plano cartesiano. Sin ser una labor sencilla, se puede seguir un rastro de los distintos momentos por los que pasó esta idea. Se pueden vislumbrar rastros de este en culturas antiguas como los egipcios y romanos, pero también distintas apariciones en trabajos del siglo XVIII, algunos trabajos no han sido de mucha divulgación, por lo que seguir el rastro de la creación del plano cartesiano ha sido una ardua tarea. Sin embargo, cada descubrimiento en esta investigación ha sido una nueva herramienta para ir comprendiendo la importancia y la fuerza del plano de coordenadas.

La recopilación de los textos que dan fe del desarrollo del plano de coordenadas ha sido una ardua labor debido a la poca divulgación de algunos de estos documentos. Documentos como el *Tractatus de latitudinibus formarum* de Oresme y el *Elementa Curvarum Linearum* de Jan de Witt no se analizaron en este trabajo desde sus originales, en ellos se buscó traducciones y referencias cercanas a los originales. El *Œuvres de Fermat* en el cual se incluye su *Ad locos planos et solidos isagoge* y el *Treatise on conic sections* de Apolonio fueron trabajados desde copias de sus originales en latín e inglés respectivamente. En la mayoría de estos textos el lenguaje fue un obstáculo en algunos momentos de la investigación, pues la forma de referirse a distintos conceptos era diferente en cada época, y el lenguaje actual difiere del empleado por Descartes y Apolonio, por ejemplo. Comprender que se referían a términos cotidianos fue una labor interesante.

Para la comprensión de los anteriores documentos, el apoyo de una amplia bibliografía fue vital. Textos como *History of analytic geometry* de Carl Boyer, *Los orígenes de la Geometría Analítica* y *Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica* de Pedro González, y *La Invención de Fermat de la Geometría Analítica* de Ricardo Quintero permitieron comprender un poco mejor el pensamiento de Descartes, Fermat, Apolonio y Oresme en este trabajo. Estos, además de los otros documentos referenciados en la bibliografía, presentan información muy útil para apreciar las ideas expuestas por los personajes citados. *History of analytic geometry* es una muy completa recopilación histórica de trabajos y pensamientos de grandes matemáticos alrededor de la geometría analítica, permite conocer las historias en torno a la creación y descubrimiento de múltiples conceptos que componen la geometría analítica hasta nuestros tiempos. *Los orígenes de la Geometría Analítica* presenta un estudio sobre la creación de la geometría analítica en general, junto con un análisis de las ideas presentes en esta historia. *Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica* es un documento donde la mayoría de las ideas como plano de coordenadas, trazo de gráficas y propiedades de ciertas curvas son analizadas, se presentan referencias históricas y se revisan algunos textos clásicos. *La Invención de Fermat de la Geometría Analítica* es una discusión sobre la paternidad de Descartes en la geometría analítica; Quintero presenta las ideas de Fermat que permitieron dar las bases de la geometría analítica, incluso antes que Descartes, sin quitarle mérito a éste.

A pesar de que el plano de coordenadas era una idea intuitiva desde antes de Descartes y Fermat, su trabajo permitió concretar esta idea en un campo llamado geometría analítica. La forma en que Descartes y Fermat comprendieron que relacionando la geometría griega y el álgebra que presentaba Viéte mediante la idea de coordenadas fue el paso más brillante de la época, y sin duda uno de los mayores descubrimientos en la historia de las matemáticas. Puede que Fermat y Descartes contaran con las herramientas, pero solo su brillante genio permitió vislumbrar dicha relación. Si bien en los documentos de Descartes y Fermat no aparece como tal el plano de coordenadas, ni la idea de ejes bien definida, matemáticos posteriores a ellos pudieron encontrar en sus escritos la forma de desarrollar esta nueva y tan importante idea.

LISTA DE FIGURAS

BIBLIOGRAFÍA

Ausejo, E. (1993). *Las matemáticas en el siglo XVII*. Madrid, España: Ediciones Akal.

Azcarate, C., Deulofeu, J. (2010). *Funciones y gráficas.* Madrid, España: Ed. síntesis.

Biografías y vidas. (s.f.). *Pierre de Fermat*. Recuperado de http://www.biografiasyvidas.com/biografia/f/fermat.htm

Boyer, C. (2012). *History of analytic geometry*. New York, USA: Dover Publications.

Castañeda, A. (2008). Desarrollo de la noción de graficación en la antigüedad. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, 868-877. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Castelnuovo, E. (septiembre, 1995). *Las representaciones gráficas en matemáticas: un estudio histórico-crítico.* Conferencia inaugural en la VII Jornada para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Madrid, España. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=370&Itemid=75.

Coolidge, J. L. (2003). *A history of geometrical methods.* New York, USA. Dover Publications.

Sánchez, J.M. (1996). *René Descartes. Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría*. Barcelona, España: Círculo de lectores.

Duhem, P. (1911). *Nicole Oresme. In The Catholic Encyclopedia*. New York: Robert Appleton Company. Recuperado Abril 27, 2016 de New Advent: http://www.newadvent.org/cathen/11296a.htm

González, P. M. (s.f) *La geometría de descartes*. Recuperado de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriadescartes.pdf

González, P. M. (s.f.). *Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica*. Recuperado de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf

González, P. M. (2003). *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

González, P. M. (Mayo, 2007). Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica. *Sigma, 30*, 205-236.

Grootendorst, A. (2010). *Jan de Witt's Elementa Curvarum Linearum. Liber secundus*. New York, USA: Springer Science & Business Media.

Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga Treatise on conic sections*. Cambridge, Reino Unido: University of Cambridge.

Hernández, V. M. (Enero, 2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿y Apolonio? *Apuntes de historia de las matemáticas, 1(1)*, 32-45.

Frantz, S. (2010).*An episodic history of mathematics. Mathematical culture through problem solving*.USA: MAA Textbooks.

Quintero, R. (noviembre, 2001). La Invención de Fermat de la Geometría Analítica. *Miscelánea Matemática 34, 43-58.*

Ramírez, J. (2007). Reflexiones sobre las Ideas de Nicolás Oresme. *Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia, 59, 23-24.*

Sierra, M. (1997). Notas de la historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En: L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 179-194. Barcelona: Horsori Editorial.

Soto, A. (2013). *El papel de la geometría analítica en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

Tabak, J. (2004). *Geometry: the language of space and form*. New York, USA. Factson file.

Tannery, P. (1891). *Œuvres de Fermat*. Francia: Gauthier-Villars et fils.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos tomo II. Apolonio de Pergamo*. Madrid, España: Ed. Aguilar.

Wieleitner, H. (1914). Über den Funktionsbegriffund die graphische Darstellung bei Oresme. *Bibliotheca Mathematica, 3, 193–243*.