APROXIMACIÓN A LA RELACIÓN ENTRE LA FILOGÉNESIS Y ONTOGÉNESIS DE LA IDEA DE LÍMITE

Nicolás Lizarralde Rodríguez
Julián Esteban Ramírez Bernal

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2016

APROXIMACIÓN A LA RELACIÓN ENTRE LA FILOGÉNESIS Y ONTOGÉNESIS DE LA IDEA DE LÍMITE

Trabajo presentado como requisito para optar con el título de Licenciado en Matemáticas

Nicolás Lizarralde Rodríguez
Código: 2011240031
C.C: 1031143200
Julián Esteban Ramírez Bernal
Código: 2011240049
C.C: 1012398166

Director:
Edgar Alberto Guacaneme Suárez

FIRMA DIRECTOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2016

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Aproximación a la relación entre filogénesis y ontogénesis de la idea de límite
Autor(es)	Lizarralde Rodríguez, Nicolás; Ramírez Bernal, Julián Esteban
Director	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Filogénesis, Ontogénesis, Límite, Historia de las Matemáticas, Cognición, Conocimiento del profesor de Matemáticas

2. Descripción

En el trabajo de grado se puede encontrar en primer lugar una explicación referente a la teoría de la recapitulación, sus antecedentes, problematización y crítica de la misma, seguido de la importancia de establecer un marco teórico que permita establecer una relación entre el dominio histórico y el cognitivo.

En segundo lugar se realiza un desarrollo histórico de la idea matemática de límite. Dicho desarrollo está establecido bajo un orden cronológico desde donde se cree surge la idea a tratar. Cada momento tratado en este desarrollo, pretende caracterizar como primera instancia factores y problemáticas presentes en cada uno, lo cual permite identificar razones frente a la forma de pensar respecto a la idea de límite, por parte de matemáticos representativos en el desarrollo de esta.

En tercer lugar se presenta un análisis cognitivo de la idea de límite, partiendo de una noción general de obstáculo epistemológico y la presencia de dicha noción (desde la teoría) en el desarrollo histórico de la idea a estudiar. Esta parte se complementa con una perspectiva socio-cultural de la idea de límite desde la teoría de la socioepistemologia y la visión de algunos autores.

Por último se dan a conocer las conclusiones en referencia a los objetivos planteados inicialmente presentando una postura frente al tema abordado en el trabajo.

3. Fuentes

Discusión entre filogénesis y ontogénesis

Piaget, J., & García, R. (1987). *Psicogénesis e Historia de la ciencia.*España: Siglo veintiuno editores.

Radford, L. (2002). Historical formation and student understanding of mathematics. En J. Fauvel, & J. Van Maanen, *History in mathematics education* (Capítulo 6, pp. 143-167). New York: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Mathemática, 12*, 51-69.

Rogers, L. (2000). The biogenetic law and its influence on theories of learning mathematics. *Research in Mathematics Education, 2*(1) 225-240.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural History of Mathematics. *For the learning of mathematics, 17*(1) 26-41.

Vygotsky, L. S. (1997). *The history of the development of higher mental functions* (Vol. 4). New York: Plenum Press: R. W. Rieber.

Vygotsky, L. S. (1994). *Tool and symbol in child development.* (E. R. Valsiner, Ed.) Oxford: Blackwell Publishers.

Desarrollo histórico de la idea de límite

Arcos, J., & Sepulveda, A. (2014). *Desarrollo conceptual del Cálculo. Desarrollo histórico de los conceptos del Cálculo. Una perspectiva docente.*Toluca, México: UAEM.

Boyer, C. (1959). *The History of Calculus and its Conceptual Development.* New York, Estados Unidos: Dover Publications Inc.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus* (Vol. 1). New York: Springer-Verlag.

Análisis epistemológico

Artigue, M. (1998). Enseñanza y Aprendizaje del Análisis elemental: ¿qué se puede esperar de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico* (Vol. 23). Ditrito Federal, México: Siglo XXI.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Cantoral, R. (2001). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. *Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos.14*, págs. 70-81. México: Clame.

Cornu, B. (1991). Limits. En *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 153-166). Kluwer Academic Press.

Crespo, C. (2006). Un paseo por el paraíso de Cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito.*Acta Latinoamericana de Matemática Educativa19*, pp. 28-34. Buenos Aires: Clame.

Mingüer, L. (2008). Las prácticas sociales que conforman la cultura matemática de los profesores del Instituto Tecnológico de Oaxaca.*Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,21*, pp. 815-824. México: Clame.

Pérez, G., Molfino, V., Lanzilotta, M., & Dalcín, M. (2002). *Orígenes del cálculo infinitesimal: De la antiguedad al teorema fundamental.Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,15*, pp. 514-519. Uruguay: Clame.

4. Contenidos

Este trabajo se compone de cuatro capítulos; descritos a continuación:

Exploración de la discusión entre la filogénesis y la ontogénesis de los objetos matemáticos: inicialmente se dan a conocer los orígenes y el desarrollo de la teoría de la recapitulación; ligado a esto, se presentan aspectos de problematización respecto de la teoría. En segundo lugar, se establecen algunos supuestos epistemológicos que, sujetos a un marco teórico, garanticen la relación entre el dominio histórico (filogénesis) y dominio cognitivo (ontogénesis).Por último, se exponen las conclusiones frente a la exploración de la discusión entre la filogénesis y la ontogénesis de los objetos matemáticos.

Estudio sobre el desarrollo histórico del límite: Como segundo momento se realiza un estudio sobre las diferentes presentaciones de la idea matemática de límite plasmada por distintos matemáticos en el pasado; ello con el fin de identificar diferentes aspectos de dicha idea.

Análisis epistemológico del límite: se identifican las posibles complicaciones (obstáculos y dificultades) que se presentan en el desarrollo histórico del objeto matemático límite, con base en trabajos realizados respecto a dichas complicaciones. Se realiza un estudio del desarrollo cognitivo del objeto matemático límite, con el fin de identificar los obstáculos y dificultades que se presentan. A partir esto, se establece una relación entre el desarrollo histórico y cognitivo respecto a la idea de límite, con el fin de identificar las posibles complicaciones que surgen al establecer dicha relación.

Conclusiones: Como momento final, se identifican los aportes e implicaciones que genera en la formación como profesor de Matemáticas, el estudiar y comprender el paralelo que existe entre del desarrollo histórico y cognitivo de la idea matemática de límite.

5. Metodología

Dentro de la metodología llevada a cabo en el trabajo de grado se realizó una revisión documental, con el fin de identificar en primer lugar el marco teórico bajo el cual se sustentan las diferentes temáticas abordadas. Seguido a esta se hace un análisis de los documentos teniendo en cuenta lo que se requiere o es necesario extraer para el desarrollo del trabajo.

6. Conclusiones

Las conclusiones que resultan de este trabajo pueden sintetizarse de la siguiente manera:

- ✓ Es necesario replantear el papel de la Historia de las Matemáticas, debido a que es importante relacionar si el desarrollo histórico de un objeto matemático influye en el desarrollo cognitivo del individuo, en torno a este objeto. Al replantearla, debe considerarse la historia que se está abordando y el uso de la misma, por ejemplo si es una historia internalista o internacionalista y si esta es un objeto de estudio en sí misma o simplemente es una herramienta para el diseño de actividades en el aula.

- ✓ Los supuestos epistemológicos desde los cuales se realizó el trabajo, permitieron evidenciar las complicaciones que resultan de establecer un paralelo entre lo cognitivo y lo histórico. Esto se vio a través del contraste entre los obstáculos epistemológicos desde la teoría y los obstáculos epistemológicos desde la historia.

- ✓ Se infiere que en su mayor parte, los obstáculos epistemológicos presentes en la historia corresponden a los evidenciados desde la investigación cognitiva.

- ✓ Los factores sociales y culturales influenciaron en el modo de razonar de matemáticos del pasado frente a la idea de límite. Comparando con los resultados de la investigación cognitiva, se concluye que es necesario establecer y tener en cuenta no solo aspectos epistemológicos sino también de carácter sociocultural para entender el desarrollo cognitivo del individuo.

Elaborado por:	Lizarralde Rodríguez, Nicolás; Ramírez Bernal, Julián Esteban
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Fecha de elaboración del resumen:	12	05	2016

Tabla de contenido

Tabla de imágenes

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, se ha intensificado la discusión sobre la transformación de la enseñanza de las Matemáticas a partir de la integración de la Historia de las Matemáticas. Dichas discusiones han conllevado a que el profesor de Matemáticas se provea de la Historia para llevar problemas históricos y actividades inspiradas en la Historia a los estudiantes, es decir utilizándola como una herramienta de enseñanza. Con este uso que se le da a la Historia de las Matemáticas, si bien el profesor tiene la oportunidad de realizar innovaciones educativas, no parece tener muchas posibilidades de trascender en la construcción y fortalecimiento de otros aspectos (por ejemplo, culturales, sociales, éticos, estéticos y económicos) que a su vez influencian directamente el conocimiento.

Ahora bien, la discusión respecto al uso de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas necesariamente lleva a reconocer una relación de base, es decir, la relación entre Historia de las Matemáticas y procesos cognitivos. Al respecto, Piaget y García afirman que existe una amplia relación entre la Historia de la Matemáticas y la teoría de las Matemáticas; esta relación no solo se evidencia en la misma Historia de las Matemáticas sino también en las estructuras de las operaciones mentales, las cuales están regidas por el desarrollo de un objeto de las Matemáticas como una progresión de etapas definibles.

En este orden de ideas, para establecer la relación entre Historia y lo cognitivo, Piaget y García plantean dos hipótesis; la primera de ellas considera que los individuos tienen una concepción interna de la Historia de la ciencia en general, en tanto que la segunda hace referencia a la universalidad y alude a que el fundamento lógico-matemático es un mecanismo común a todos los seres humanos. Dicha afirmación se problematiza a través de la visión de Vygotsky, la cual plantea que los hechos en diferentes contextos culturales dan origen a estructuras cognitivas diferentes, es decir diferentes contextos implican diferentes procesos cognitivos.

Esta discusión ofrece un marco de referencia propicio para contextualizar el origen del trabajo de grado que realizamos –y que se presenta en este documento– el cual se refiere a la inquietud personal sobre cómo afecta el desarrollo histórico del límite al aprendizaje de dicho objeto.

Para profundizar en esta inquietud, antes de iniciar el trabajo de grado (más precisamente en la etapa de elaboración del anteproyecto) decidimos realizar una búsqueda de algunos materiales bibliográficos que suministraran información sobre este asunto. Tal búsqueda nos condujo a identificar inicialmente dos artículos que discuten asuntos en tal sentido (Bagni, 2005; Juter, 2006).

Particularmente, Juter (2006) compara el concepto de límite que tienen los estudiantes universitarios de primer año con el desarrollo histórico de dicho concepto, a la vez que advierte que en dicha comparación se generan varias complicaciones teóricas y metodológicas dado que la Psicología y la Historia –disciplinas desde donde se realiza la comparación– son dos campos distintos. Por otra parte, reconoce que el significado de los objetos de las Matemáticas ha cambiado en el transcurso del tiempo y que ello implica que se tengan diferentes concepciones de estos en distintas culturas, motivo por el cual al comparar entre lo histórico y lo cognitivo se pueden presentar algunas dificultades.

Por su parte Bagni (2005) expone diferentes ideas y expresiones de métodos infinitesimales en la Historia y en la educación en Matemáticas con referencia a la noción de límite. Asimismo refiere cómo el desarrollo histórico de registros de representación hace posible el diseño de nuevas formas de superar obstáculos en los alumnos. Además, plantea que para realizar una discusión completa de un posible paralelismo entre el desarrollo histórico y el cognitivo, se requiere de una teoría del conocimiento que permita comparar el desarrollo histórico de los conceptos con el crecimiento de conocimientos de los alumnos; al respecto advierte que se genera un interrogante sobre si es posible y educativamente útil considerar una analogía entre tales desarrollos.

Analizando las ideas expuestas en los documentos anteriormente citados, logramos establecer que efectivamente pueden existir complicaciones que resultan de hacer un paralelo entre el desarrollo histórico y el cognitivo, respecto al límite como objeto matemático.

De lo anterior, surge la incertidumbre sobre cuáles son estas complicaciones y por qué en dichos documentos no las tratan específicamente. Además surge la inquietud por establecer la relación entre el desarrollo histórico y cognitivo de la idea de límite.

Este marco de inquietudes constituye la justificación del presente trabajo de grado y, en consecuencia, se establece como objetivo central del mismo lograr comprensión sobre las posibles complicaciones que surgen al procurar establecer las semejanzas y diferencias entre el desarrollo histórico de la idea de límite y el desarrollo cognitivo de la misma.

Para atender la cuestión descrita antes, se decide adoptar una metodología en la cual, como primera instancia, se establece el marco de referencia del trabajo. Se asume así que la discusión sobre la relación "filogénesis – ontogénesis", constituye el marco en el que se ubican los planteamientos de los autores citados anteriormente y, en consecuencia, se define como objetivo específico del trabajo establecer los rasgos fundamentales de tal discusión. De manera natural, ello lleva a la teoría de la recapitulación y a la ilusión de que a través de la misma se pueda establecer un marco de referencia con el fin de obtener una mirada hacia la idea matemática de límite desde el punto de vista del desarrollo histórico y cognitivo.

En tal sentido, en el primer capítulo del presente documento, inicialmente se dan a conocer los orígenes y el desarrollo de la teoría de la recapitulación; ligado a esto, se presentan aspectos de problematización respecto de la teoría. En segundo lugar, se establecen algunos supuestos epistemológicos que, sujetos a un marco teórico, garanticen la relación entre el dominio histórico (filogénesis) y dominio cognitivo (ontogénesis).Por último, se exponen las conclusiones frente a la exploración de la discusión entre la filogénesis y la ontogénesis de los objetos matemáticos.

Como segundo momento, en correspondencia con la metodología adoptada, se realiza un estudio sobre las diferentes presentaciones de la idea matemática de límite plasmada por distintos matemáticos en el pasado. Esta segunda parte, se realiza con el fin de satisfacer el objetivo específico de identificar a través de la Historia de las Matemáticas, diferentes aspectos de la idea de límite. Este estudio toma como base los documentos de Bagni (2005) y Juter (2006) complementando fundamentalmente con el estudio de tres libros de historia del Cálculo (Edwards, 1979; Arcos & Sepulveda, 2014; Boyer, 1959) y una tesis de Maestría (Medina, 2001). Este último documento nos permite establecer un orden cronológico de algunos momentos en la Historia de las Matemáticas de la idea del límite.

Precisamente, en el segundo capítulo de este documento se intenta esbozar de manera secuencial cómo se ha desarrollado la idea del límite en el transcurso de la historia, a partir de algunos momentos y hechos fundamentales elegidos a conveniencia.

Como tercer momento, se identifican las posibles complicaciones (obstáculos y dificultades) que se presentan en el desarrollo histórico del objeto matemático límite, con base en trabajos realizados respecto a dichas complicaciones. Seguido a esto, guiándonos por autores que han trabajado este asunto (Artigue, 1998; Bachelard, 2000; Cornu, 1991; Neira, 2009; Sierpinska & Lerman, 1996), se realiza un estudio del desarrollo cognitivo del objeto matemático límite, con el fin de identificar los obstáculos y dificultades que se presentan en relación con su aprendizaje. A partir esto, se establece una relación entre el desarrollo histórico y cognitivo respecto a la idea de límite, con el fin de identificar las posibles complicaciones que surgen al establecer dicha relación. Precisamente esto último constituye un objetivo específico más de este trabajo.

Como momento final, se hace una exploración a los aportes e implicaciones que genera en la formación como profesor de Matemáticas, el estudiar y comprender el paralelo que existe entre del desarrollo histórico y cognitivo de la idea matemática de límite. Este momento es consignado en el capítulo cuarto y procura responder al objetivo específico de identificar los posibles aportes que el estudio realizado puede generar a favor de la formación de los profesores de Matemáticas.

A modo de síntesis, y so pena de ser reiterativos, explicitamos que el objetivo central del estudio es lograr comprensión sobre las posibles complicaciones que surgen al procurar establecer las semejanzas y diferencias entre el desarrollo histórico de la idea de límite y el desarrollo cognitivo de la misma. Asimismo, como objetivos específicos se proponen: establecer los rasgos fundamentales de la discusión sobre la relación "filogénesis-ontogénesis", identificar a través de la Historia de las Matemáticas diferentes aspectos de la idea de límite, identificar los obstáculos y dificultades que se presentan en relación con el aprendizaje de la idea de límite, identificar posibles complicaciones que surgen al establecer la relación entre aspectos históricos y cognitivos de la idea de límite, e identificar los posibles aportes que el estudio realizado puede generar a favor de la formación de los profesores de Matemáticas.

Por otra parte, es necesario precisar que la configuración por capítulos, exhibe y recapitula las fases metodológicas empleadas en el estudio, que se pueden sintetizar en: estudio de la relación filogénesis-ontogénesis, estudio del desarrollo histórico de la idea de límite, estudio de resultados de la investigación cognitiva a propósito de la idea de límite (enfatizando en los obstáculos), comparación de los estudios citados inmediatamente antes, y exploración de aportes a la formación de un profesor de Matemáticas.

Para finalizar esta introducción se debe reseñar que durante el desarrollo del trabajo de grado se realizó la síntesis o resumen de algunos documentos; estos se incluyen como anexos del trabajo puesto que allí se encontró gran parte de los insumos para complementar ideas del estudio.

1 EXPLORACIÓN DE LA DISCUSIÓN ENTRE LA FILOGÉNESIS Y LA ONTOGENÉSIS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

1.1 Teoría de la recapitulación

El presente capítulo intenta esbozar de manera secuencial la discusión entre la filogénesis y ontogénesis tratada por diversos autores. En primer lugar, se abordará la teoría de la recapitulación expuesta por Haeckel, la cual alude a la articulación de los dominios históricos y psicológicos. Seguido a esto se mostrará la problematización de la teoría de la recapitulación a partir de concepciones de algunos autores como Piaget, García y Vigotsky. En tercer lugar, se darán a conocer los porqués de la necesidad de implementar un marco teórico de tipo epistemológico, el cual relacione los dominios históricos y psicológicos con el fin de establecer una metodología para el diseño activo de clases. En cuarto lugar, se darán a conocer distintos supuestos epistemológicos que muestran diversas maneras en que se puede concebir el conocimiento, el cual conlleva a diferentes interpretaciones de la Historia de las Matemáticas. Para finalizar, se presentarán algunas conclusiones respecto a la discusión entre filogénesis y ontogénesis.

1.1.1 Orígenes y desarrollo de la teoría de la recapitulación

Después de la explotación de tierras en el siglo XVIII en Europa Occidental, se genera una creencia generalizada de la superioridad del hombre sobre las demás razas; ejemplo de ello es la promulgación de las "razas menos sofisticadas", considerándolas como etapas previas del desarrollo humano. Dentro de la raza animal se postulaba también un cierto tipo de jerarquía; los monos eran considerados la especie más cercana a las acciones del ser humano(Rogers, 2000).Entonces, se realizan estudios de comparación del desarrollo de los seres humanos y los animales; a partir de ello se observaron las crecientes formas del animal en un óvulo, frente a las del ser humano, y a pesar de las diferencias se identificaron ciertas semejanzas.

En el siglo XIX se comienza a hablar de la idea de *recapitulationism biologic*, a raíz de algunos escritos realizados por Charles Darwin (1809-1882) respecto a la evolución de las especies; en estos expresa que el desarrollo del individuo (ontogénesis) recapitula el desarrollo de la humanidad (filogénesis).Ahora bien, cuando se alude al concepto de evolución de las especies, este se fundamenta en el desarrollo embriológico propuesto por Lamarck, quien argumenta que las transformaciones de los individuos se ven directamente relacionadas por la influencia del medio ambiente. Con lo anterior, Darwin plantea la *descendencia con modificación* teniendo como fundamento que en el embrión hay lugar para una repetición secuencial de las formas adultas de los ancestros que ya no existen.

Por otra parte, el biólogo alemán Ernst Haeckel(1834-1919) profundiza lo esbozado por Darwin respecto a la idea de recapitulación, planteando así la relación directa que existe entre ontogénesis y filogénesis, indicando que la ontogenia es una recapitulación de la filogenia, de tal manera que las condiciones por las que pasa el individuo desde la fecundación hasta lograr su estado de madurez, es una breve reproducción de las condiciones por las que pasaron los ancestros de tal individuo desde las etapas iniciales de la evolución hasta la actual. Ahora bien, se presume que Haeckel fue uno de los pioneros en transferir esta teoría de carácter biológico a los dominios psicológicos; afirma que el desarrollo psíquico del niño es más que una breve repetición de la evolución filogenética de la humanidad.

Junto a lo mencionado anteriormente, algunos investigadores, como el filósofo inglés Herbert Spencer (1820-1903) y el psicólogo Stanley Hall (1846-1924), plantean y utilizan la teoría de la recapitulación para desarrollar bases en la educación cultural y el desarrollo infantil, respectivamente.

La teoría de la recapitulación ha tenido su mayor aplicación en la enseñanza primaria. Autores como Friedrich Freobel(1782-1852) y Friedrich Herbart(1776-1841) apoyaron una noción vaga de la teoría de la recapitulación señalando un orden natural para el proceso educativo. Por otro lado Rogers (2000, citando a Spencer, 1861) plantea que cada niño, a medida que se está desarrollando, se está envolviendo sobra toda la historia de la humanidad, física y espiritualmente.

Por otra parte, la teoría de la recapitulación se ha visto afectada hasta el punto de ser desacreditada por parte de los mismos biólogos, pero no se pretende asumir que se haya perdido interés por la aplicación de la misma en diferentes disciplinas; en la actualidad ha tenido gran impacto en los campos de la Educación, la Antropología y el desarrollo psicológico.

1.1.2 Problematización respecto de la teoría de la recapitulación

A partir de la teoría de la recapitulación presentada por Haeckel, se da pie para la elaboración del concepto de desarrollo genético por parte de Jean Piaget (1896-1980) y Rolando García (1919-2012), argumentando sobre la versión simplista que hace Haeckel. Ellos arguyen que se debe entender el problema del conocimiento en términos de instrumentos, procesos y mecanismos que permitan su adquisición.

En primer lugar, la fuente general de los **instrumentos** de adquisición refiere a la asimilación de los objetos, en donde se considera el conocimiento como una relación indisociable entre el sujeto y el objeto, donde este último constituye un contenido al cual impone el sujeto una forma extraída de sus estructuras anteriores pero ajustadas a este contenido, sobre todo si es el nuevo, modificando un tanto el esquema asimilador por medio de acomodaciones, es decir, de diferenciaciones en función del objeto que se habrá de asimilar.(Piaget & García, 1987, pp. 246).

Este instrumento de asimilación se puede interpretar desde un accionar biológico (como por ejemplo, la asimilación climática de alimentos, entre otros) y bajo un nivel de formas funcionales de los niveles cognoscitivos (por ejemplo, asimilación sensorio-motriz, conceptual). La asimilación hace énfasis en la incorporación de nuevos elementos en el proceso cognitivo del individuo sin modificar sus estructuras cognitivas. Las condiciones biológicas de asimilación de un individuo son hereditarias, resulta de manera análoga que las asimilaciones cognoscitivas las cuales consisten en construir nuevos esquemas con base en los precedentes, o acomodándose a los anteriores.

Por otra parte, si se hace referencia a los instrumentos que subyacen de la asimilación, se pueden mencionar la abstracción y la generalización. Dentro de la abstracción se caracterizan dos tipos: la empírica y la reflexiva. La empírica trata los objetos que son externos al sujeto, de tal manera que este caracteriza propiedades de los mismos objetos del cual extrae y las analiza. La reflexiva, se refiere a las acciones y operaciones propias del sujeto y a los parámetros que lo conllevan a construir. Ahora bien, en relación a las abstracciones, para cada una de ellas sea empírica o reflexiva, existe un diferente tipo de generalización. Si aludimos a las abstracciones empíricas, las generalizaciones resultarían de naturaleza extensional constituyendo un pasaje de leyes particulares a leyes más generales, sin reorganización de las primeras. Las abstracciones reflexivas permiten la formación de generalizaciones completivas en el cual algunas de las leyes particulares adquieren nuevos significados. Las generalizaciones completivas consisten en que a partir de la adquisición del conocimiento y la adjunción de uno nuevo, se retoman partes a partir de un todo enriqueciéndolas en este proceso.

En segundo lugar, se generan diversos **procesos.** El más importante se basa en la búsqueda de razones para las abstracciones y generalizaciones mencionadas anteriormente, ya que el papel del sujeto en el conocimiento consiste en relacionar todo evento real entre un conjunto de posibles, además de una necesidad. Ahora bien, estos dos no son tangibles ni observables, pero ambos subyacen al sujeto; asimismo este conjunto de posibilidades afectan en las asimilaciones del sujeto como a los contenidos inferidos por la experiencia.

Otro proceso que surge, a partir de manifestaciones que se han hecho visibles en las fases del constructivismo matemático (las cuales se evidenciaban muy poco en el platonismo de las generaciones anteriores), consiste en el pasaje de una fase anterior donde las operaciones que se realizan se ven como un instrumento que no influye en la toma de decisiones, a una fase en donde estas mismas son tematizadas y se consideran e influyen en la creación de nuevas teorías. Con base en lo anterior al tematizarse las operaciones resulta un prolongamiento de las abstracciones reflexivas.

Con base en la relación entre la ontogénesis y la filogénesis, (Piaget & García, 1987)pretenden demostrar que los mecanismos de conjunto para el paso de un periodo histórico al siguiente, son análogos al paso de una etapa psicogenética a la siguiente. Para esto se plantea un mecanismo, el cual es un proceso que parte del análisis de los objetos (intra-objeto), seguido del análisis de las transformaciones (inter-objeto) y relaciones de los objetos (trans-objeto), hasta la construcción de estructuras mentales. Este mecanismo ha resultado ser el más general de los aspectos comunes a la psicogénesis y a la historia de las ciencias; además se considera invariable y omnipresente, es decir, no se necesita especificar lo que son en un determinado tiempo y espacio geográfico.

A partir de este trabajo se encuentra una paradoja que hace referencia a la obtención del conocimiento en el individuo, el cual está afectado por factores externos a su propia estructura cognitiva, pero a su vez la asimilación de los objetos están desligados de su contexto. Esta paradoja conlleva discutir sobre la influencia del entorno social sobre la evolución del conocimiento del individuo.

Para Piaget y García, uno de los motivos para realizar este trabajo fue cuestionarse sobre si existe un solo camino para el desarrollo del conocimiento, o si existen diversos. Esto se hace a partir de estudiar la diferencia entre cómo el individuo adquiere el conocimiento y el paradigma epistémico en el cual se encuentra el mismo; dicho paradigma hace referencia a una concepción de la ciencia con base en un conjunto de conocimientos aceptados. Con lo anterior ellos trazan una frontera que divide lo social y lo individual; además, debe hacerse una distinción entre los mecanismos para adquirir el conocimiento y la manera en que son concebidos los objetos por el individuo.

En contraposición a lo planteado por Piaget y García, quienes plantean que el conocimiento se adquiere sin tener en cuenta factores externos al individuo, se presenta una perspectiva la cual manifiesta la relación entre factores socio-culturales y cómo éstos afectan la manera como se concibe el conocimiento. A partir de lo anterior se alude a la racionalidad de Vygostsky respecto a su teoría histórico cultural.

Vygotsky en su trabajo “Herramientas y símbolos en el desarrollo del niño” (Vygotsky L. S., 1994), establece un grupo específico de fenómenos con base en las leyes estructurales, funcionales y genéticas para hacer una generalización de cómo se concibe el inicio de las funciones psicológicas superiores del sujeto.

Existen algunos caminos que conllevan a dicha generalización. Uno de ellos se plantea a partir dela actividad simbólica del sujeto, la cual está estrechamente relacionada con el uso de signos, puesto que sus formas concretas se rigen por las mismas leyes de desarrollo, estructura y funcionamiento. La génesis de dicha actividad tiene propiedades en común a todos los procesos psicológicos superiores. Este camino permite una reorganización del comportamiento del sujeto y va en contraposición a la estructura tradicional. Algunas funciones superiores (como la percepción, la memoria, la atención y el movimiento) están directamente relacionadas con la actividad del sujeto; su entendimiento se logra solo a partir de un análisis genético e histórico cultural al cual está vinculado el sujeto. Por otra parte se han considerado dichas funciones mentales superiores como hechos netamente individuales, pero tal consideración a partir de diferentes estudios realizados, son producto también de un desarrollo histórico de la conducta del sujeto.

En consecuencia, la importancia del uso de formas simbólicas en la historia, permite la inclusión de factores externos a las funciones mentales superiores, en el sistema de categorías psicológicas. Ahora bien, dichas formas simbólicas a partir de una nueva perspectiva, al incluirse en el sistema de funciones psicológicas superiores, son vistas de manera equivalente con el resto de procesos psicológicos superiores, debido a que en general se les ve como agentes extraños a los procesos psicológicos internos.

En ese sentido, todo conocimiento es conocimiento sobre algo, sobre un objeto. Con base en esto se pretende establecer la relación sujeto-objeto mediante el lenguaje y otras herramientas que son vistas como medios culturales. Ahora bien, el objeto es transformado mediante dichos medios culturales, es decir, el objeto ya no es percibido por el sujeto como un objeto puro, debido al papel que ejerce la cultura sobre el objeto. Vygotsky plantea que:

> El niño comienza a percibir el mundo no solo a través de sus ojos, sino también a través del lenguaje. En consecuencia, la inmediatez de la percepción natural queda substituida por un proceso mediato y complejo; como tal, el lenguaje se convierte en una parte esencial del desarrollo cognoscitivo del niño. (Vygotski, 1988, pág. 55).

Con lo anterior se puede inferir que los medios culturales cumplen un papel fundamental en la adquisición del conocimiento, pero este argumento se puede teorizar desde el punto de vista de la interacción simbólico-ahistórica la cual refiere al diálogo y negociación de intereses vistos sin historia. También se puede argumentar a partir de las teorías marxistas del reflejo, la cual hace énfasis en que las ideas que adquiere el individuo son una copia de las estructuras sociales donde se encuentra inmerso el mismo. En ese orden de ideas, Vygotsky es influenciado por la teoría marxista basada en la crítica a la filosofía alemana y plantea la directa relación entre actividad y conocimiento:

> La producción de ideas de concepciones, de la conciencia, está, en primera instancia, directamente entremezclada con la actividad material y la relación material de los hombres, el lenguaje de la vida real. (Marx & Engels, 1970, pág. 47).

Ahora bien, lo anterior no quiere decir que Vygotsky fue el primero en plantear la relación sujeto-objeto, pero se le alude la manera en que caracteriza el papel que cumplen los signos en el proceso de interiorización (interpersonal-intrapersonal). Por otra parte el signo deja de ser algo ideal que traduzca una idea, para ser una herramienta que media entre el individuo y su entorno.

Sin perder de vista el aspecto marxista, se plantean dos aspectos cruciales para comprender las relaciones materiales-intelectuales. Como primera instancia los medios de producción los cuales aluden al encuentro entre el hombre con la naturaleza (técnica); la segunda refiere a la reglamentación y normatividad de los individuos (social). Hay que tener en cuenta que en la primera instancia se prioriza la herramienta, mientras que en la segunda el lenguaje. Vygotsky guiado por estos dos aspectos deduce que a partir de la técnica, el signo puede ser visto como regulador psicológico del comportamiento del individuo respecto a su entorno. A partir de una visión social del signo, él plantea:

> Un signo es siempre originalmente un medio usado con propósitos sociales, un medio para influenciar a los otros, y solamente más tarde se convertirá en un medio para influenciarse uno mismo. (Vygotsky L. S., 1981, pág. 157)

En conclusión, observamos cómo los medios culturales median entre la relación sujeto-objeto de conocimiento, mediante la interiorización. Además se puede resaltar la profunda relación e importancia con uno de los aspectos para comprender las relaciones materiales-intelectuales, la técnica, teniendo raíces profundas que se enlazan con la forma como el individuo concibe el conocimiento, a partir del desarrollo de la teoría histórico-cultural de la formación de funciones psicológicas superiores, planteada por Vygotsky.

De modo general, y con base en la relación entre ontogénesis y filogénesis, Vigotsky presenta un enfoque diferente en contraposición a lo que argumentaban Piaget y García, respecto a que la cultura no modifica los elementos esenciales en la adquisición del conocimiento. Para él, la cultura en general modifica la actividad de las funciones mentales mediante el uso de herramientas (como por ejemplo, tabletas de arcilla en la antigua Mesopotamia, computadores en la actualidad, el uso del lenguaje, palabras o el habla interna).

1.2 La importancia de trabajar hacia un marco teórico epistemológico

En las últimas décadas se ha tenido la necesidad, por parte de los educadores matemáticos, de adquirir herramientas que permitan tener un método coherente para el diseño de actividades en el aula de clase. Dichas herramientas deberían estar contenidas en un marco teórico claro el cual ayude al educador en la formación del conocimiento matemático y a obtener una postura epistemológica clara. Este marco teórico, a su vez, debería garantizar la articulación entre el dominio histórico y el dominio psicológico.

La falta de un marco teórico adecuado conlleva a dejar de un lado aspectos importantes, respecto a los puntos de vista sobre cómo se ha desarrollado los conceptos matemáticos en la historia. Por otra parte se presenta un problema al entender la Historia de las Matemáticas como la continuidad del concepto, es decir que los conceptos matemáticos de la antigüedad son vistos de la misma manera a los actuales, donde lo único que cambia es la simbología. A partir de ello los historiadores añaden racionalidades totalmente ajenas a los matemáticos del pasado. Con base en esto, se presentan algunas perspectivas, cada una de ellas bajo diferentes supuestos epistemológicos. Estas muestran diversas maneras en que se puede concebir el conocimiento dentro del campo de la educación en Matemáticas.

1.2.1 La perspectiva de “obstáculos epistemológicos”

Se plantea la idea de obstáculo epistemológico dada por Guy Brousseau (1933-), quien concibe la relación entre los fenómenos histórico-epistemológicos y psicológicos a partir de tres supuestos epistemológicos.

El punto de partida hace referencia a la existencia del conocimiento y cómo a partir de los estudios históricos se manifiestan algunas limitaciones dentro del conocimiento. Es decir el obstáculo epistemológico como fuente de errores cuando un individuo trata de resolver un problema.

El segundo supuesto se refiere a cómo el obstáculo epistemológico está enmarcado en el conocimiento y se diferencia de otro tipo de obstáculos (como lo son los culturales, ontogénicos y didácticos). Estos obstáculos, según Brousseau, aparecen tanto en la Historia de las Matemáticas como en el individuo contemporáneo.

Por último, el tercer supuesto se evidencia en la relación estudiante-entorno, en la cual el maestro establece la situación y es el estudiante a partir de la apropiación de la misma, quien genera el conocimiento. Por esta razón la elaboración y organización de situaciones problema deben ser diseñadas cuidadosamente, con el fin de que sea posible superar los obstáculos epistemológicos.

1.2.2 Una perspectiva sociocultural

Luis Radford plantea que el conocimiento es visto no solo como las acciones necesarias para resolver cierto tipo de problemas; por el contrario este se concibe como la práctica cognitiva donde los individuos participan en su entorno social y cultural. Por esta razón el conocimiento puede entenderse a partir de cómo surge y cómo se desarrolla la forma de pensar del individuo que está vinculado en su entorno social, cultural e histórico.

Esta perspectiva está sostenida por el supuesto epistemológico de la relación estudiante-entorno ya que el conocimiento es socialmente construido, es decir el estudiante está totalmente sumergido en su entorno social. Ahora bien, el aula se puede considerar como un espacio en donde el estudiante realiza un proceso de apropiación cultural y conceptual a partir de las actividades que se planteen. Por otra parte, las culturas pueden aprender unas de otras y es allí donde se puede evidenciar cómo la mayoría de conceptos actuales son mutaciones, adaptación eso transformaciones de conceptos elaborados por generaciones anteriores de matemáticos sumergidos en sus propios contextos.

Por esta razón la Historia de las Matemáticas es un lugar adecuado que no solo permite la reconstrucción e interpretación del pasado, sino posibilita el diseño de actividades en el aula de clase.

1.2.3 Perspectiva “Voces y ecos”

Radford(2002, cita a Boero, 1988) quien plantea como punto de partida las expresiones verbales y no verbales, donde estas representan de manera significante saltos en la evolución de las Matemáticas y la ciencia. Cada una de estas expresiones comunica un contenido específico ofreciendo un salto histórico. Ahora bien, cuando el profesor ofrece tareas adecuadas al estudiante, este intentará enlazar *la voz* a sus propias interpretaciones, concepciones y experiencias para producir un *eco*, un vínculo con la voz hecha explícitamente a través de un discurso.

Los supuestos epistemológicos que resultan de *“voces y ecos”* se refieren tanto a la naturaleza del conocimiento teórico como a las justificaciones cognitivas y educativas.

1.3 Conclusiones parciales

Una de las conclusiones que resultan al realizar esta exploración de la discusión entre filogénesis y ontogénesis consiste en dejar a un lado la ingenuidad con que se es vista esta teoría, debido a la complejidad que presenta el sumergirse cada vez más entorno a dicha discusión, teniendo en cuenta los diferentes puntos de vista que presentan múltiples investigadores

Por otra parte, en referencia al aprendizaje este no puede ser visto solamente como una reorganización conceptual, puesto que como se ha demostrado, también consiste en la adquisición de sistemas de ideas y signos (lenguaje, el habla interna, la percepción, etc.), que llevan consigo las estructuras sociales, simbólicas, históricas, que afectan directamente el proceso ontogénico del individuo.

Por último, en los acercamientos socioculturales el aprendizaje es visto como un proceso de adquisición de un conocimiento interpersonal-intrapersonal el cual podemos relacionarlo a la ontogenia, pero a su vez se presenta como un objeto externo, el cual está históricamente constituido, es decir a su filogenia. Ahora, para complementar lo anterior y basándonos en las perspectivas sustentadas en distintos supuestos epistemológicos, podemos concluir cómo estas muestran una variedad de formas de concebir el conocimiento y cómo a partir de los diferentes supuestos epistemológicos, se pueden realizar diferentes interpretaciones de la Historia de las Matemáticas y diversas formas de relacionar el desarrollo histórico de los conceptos con el desarrollo conceptual de los estudiantes contemporáneos.

2 ESTUDIO SOBRE EL DESARROLLO HISTÓRICO DEL LÍMITE

El presente capítulo intenta esbozar de manera secuencial cómo se ha desarrollado la idea del límite, plasmada por distintos matemáticos en el transcurso de la Historia. Ahora bien, el documento de (Medina, 2001)nos permitirá establecer un orden cronológico de algunos momentos de la Historia de las Matemáticas de la idea del límite.

Por otra parte, es necesario reconocer el trabajo desarrollado por los egipcios y babilonios, respecto a las ideas relacionadas con el cálculo como lo son: medición de figuras planas y volúmenes de figuras en el espacio. A pesar de esto, dentro de los pocos trabajos que aún existen, la Historia se queda corta para determinar declaraciones explícitas de normas o métodos de procedimientos de carácter general, producidas por estas dos culturas.

Por lo declarado antes el recuento histórico que sigue comienza en la cultura griega y no en culturas anteriores.

2.1 Eudoxo y el método de exhausción

Fueron los matemáticos griegos los pioneros en tratar aspectos relacionados con procesos infinitos, además de organizar los conocimientos matemáticos de la época. Ahora bien, para profundizar sobre estos procesos infinitos, es necesario reconocer las ideas geométricas ya plasmadas por los Egipcios y Babilonios, a partir de las investigaciones realizadas por los griegos Tales (624–546 a.C.) y Pitágoras(569-475 a.C.) en uno de sus viajes realizados a los lugares donde estaban situadas estas culturas.

Fueron diversas las paradojas que provocaron inquietud entre los griegos, como lo es la paradoja de Aquiles y la tortuga. Es en este momento los matemáticos tuvieron la necesidad de buscar alternativas que no se confrontaran con ideas infinitesimales o números irracionales, el desenlace de estas ideas conllevó a una crisis ocasionando un horror al infinito.

A partir de esta crisis la escuela platónica introduce un rigor lógico en las matemáticas llevando de esta manera un refinamiento geométrico y oponiéndose completamente al lenguaje ingenuo de los pitagóricos, que asumían actitudes místicas y aforismos religiosos dentro de sus ideas matemáticas. Fue Eudoxo de Cnido (390-337 a.C.), quien subsanó esta crisis diferenciando la concepción de finito e infinito, introduciendo el concepto de “tan pequeño como se quiera”; de allí podemos inferir que es análogo a nuestro proceso de “paso al límite”. Por otra parte Eudoxo plantea principios básicos para el método de exhausción, en donde no existen magnitudes infinitamente pequeñas, es decir no existen infinitésimos.

De esta manera en los *Elementos* de Euclides se enuncia así:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas. (Euclides, Elementos de Geometría, X, 1992)

Por otra parte, con lo anterior no se quiere decir que en general nunca se pueda encontrar algo tan pequeño como se quiera. Euclides en los *Elementos* propone un ejemplo en el cual habla del ángulo de contingencia, que contradice la no existencia de los infinitésimos, es decir encuentra un elemento que es más pequeño que todos los demás, en este caso para ángulos. Dicha proposición plasmada en el Libro III, proposición 16 dice que:

> La recta dibujada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el diámetro, caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta al espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el que queda es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.(Euclides, 1992)

Esto se muestra en la siguiente imagen:

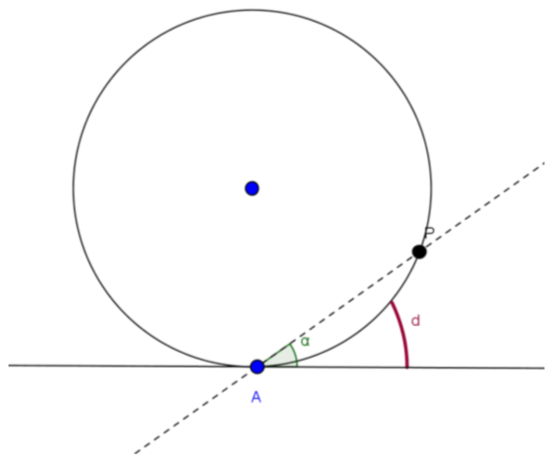

Figura 1: Ángulo de contingencia

Específicamente, teniendo en cuenta la figura 1, al acercar el punto P hacia A, notaremos que el ángulo de contingencia d siempre va ser menor que el ángulo rectilíneo α, siendo este ángulo de contingencia un infinitésimo.

Este método exhausción está estrechamente relacionado con el cálculo usual desde tres perspectivas, una de ellas es el *infinito*, ya enunciada anteriormente.

La siguiente alude a la *cuadratura* de superficies, en la cual se intenta comparar ciertas superficies transformándolas y reubicando algunas figuras. Cuadratura de una superficie hace referencia a encontrar un cuadrado cuya área sea la misma a la superficie dada. En este caso podemos mencionar la cuadratura del círculo, el cual no se puede hallar mediante el uso de regla y compas, mas adelante evidenciaremos el uso del método del exhausción en la cuadratura de la parábola utilizado por Arquímedes.

Por último, sin ser menos importante hace referencia a la *aproximación* entre magnitudes, ya que es aquí donde en el cálculo se debe establece un conjunto de condiciones el cual satisfaga el principio de exhausción. Este conjunto de condiciones debe cumplir la no existencia de magnitudes infinitamente pequeñas.

En este momento, la idea del paso al límite está implícita en el método de exhausción no como una operación matemática sino como una herramienta para probar diferentes relaciones entre magnitudes.

2.2 Concepción geométrica según Arquímedes

Continuando con la matemática griega, se destaca Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.). Debido a la diferencia de sus trabajos realizados con el de sus antecesores, es calificado por su carácter investigativo, siendo a su vez el gran generador del conocimiento matemático y científico de la época. Dentro de algunos de los trabajos realizados por Arquímedes respecto a problemas de cuadraturas y cubaturas, estos no se trataban por medio del uso de expresiones que involucraran variables, sino teniendo en cuenta la relación entre el área o el volumen de la figura que se tenía como referencia. Algunos de estos problemas sobre cuadraturas y cubaturas son: la cuadratura de la parábola, la esfera y el cilindro, los espirales, los conoides y esferoides y la medida del círculo.

Arquímedes llevó el método de exhausción a cumplir algunos logros en temas de demostración de diversos problemas, es decir hizo uso del método para resolver dichos problemas.

Por otra parte Arquímedes se caracteriza por constituir principios del cálculo infinitesimal y el método experimental en ciencias naturales. Entre ellos se destacan: el método mecánico-geométrico, el método de suma de integrales y el método de tangencia. Fue tanto el interés por parte de Arquímedes en temas relacionados con la mecánica, que no solo se ocupó por proporcionar fundamentos geométricos a estos fenómenos mecánicos, sino que logró que esta penetrara completamente sus métodos matemáticos.

Dentro de la estimación que realiza Arquímedes para la medida del círculo, se demuestra la equivalencia entre un círculo y un triángulo cuya base del triángulo es igual a la longitud de la circunferencia, y cuya altura es el radio. Esto se realiza de forma aproximada al demostrar que la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro, está comprendida entre las razones $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$.

De esta manera, se sabe que el área de un círculo de radio r, es proporcional al cuadrado de su radio para el que existe una constante π de tal forma que el área del círculo y la longitud de circunferencia puede expresarse en términos de esa constante como$A = \pi r^2$ y $C = \pi d$ respectivamente, siendo$d$ el diámetro de la circunferencia.

Para realizar una aproximación a la constante π Arquímedes plantea una demostración rigurosa en el cual extiende el método de exhausción para determinar lo que ha sido el método de compresión, es decir no solo tratar con polígonos inscritos, sino a su vez con polígonos circunscritos. Allí, el área del círculo es comprimida entre las áreas de los polígonos (inscritos y circunscritos) las cuales se aproximan al círculo.

Arquímedes comienza con inscribir y circunscribir hexágonos sobre un circulo de radio 1 (ver **Figura 2**). Sucesivamente se duplica el número de lados de los polígonos, considerando polígonos de 12, 24, 48 y 96 lados.

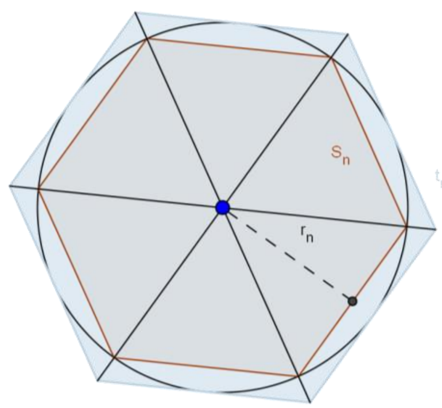

Figura 2: Hexágono inscrito y circunscrito en la circunferencia

De esta manera Arquímedes encuentra que el valor deπse encuentra entre las razones mencionadas anteriormente es decir$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

Por otra parte, para el caso de la cuadratura de la parábola, Arquímedes establece una relación entre el área de un sector parabólico y el área del triángulo inscrito, en la cual la base del triángulo debe ser la misma del sector parabólico y su vez el vértice opuesto a la base del triángulo pertenece a la parábola.

Ahora bien, el proceso de demostración consiste en circunscribir al sector parabólico un paralelogramo, donde el triángulo inscrito corresponda a la mitad de dicho polígono, como se muestra en la **Figura 3.**

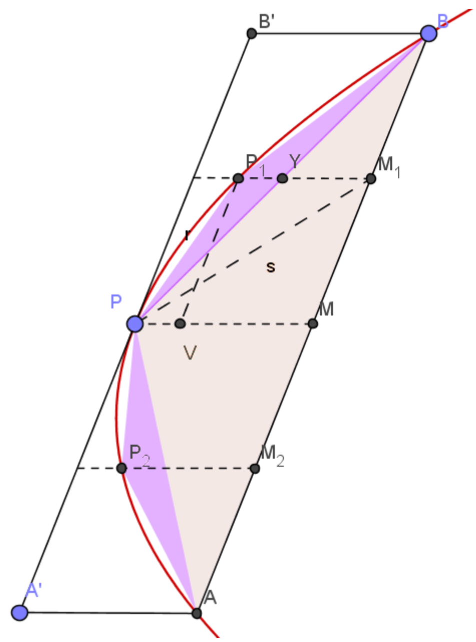

Figura 3: Cuadratura de la parábola

De aquí resulta, después de un manejo algebraico respecto a construcciones auxiliares que la suma de los $\Delta PP_1B + \Delta AP_2P = \frac{1}{4}\Delta APB$

Este procedimiento puede realizarse después de n etapas teniendo en cuenta el área del triangulo inscrito igual a una constante φ. En términosP_n, el polinomio inscrito en el sector parabólico, se puede establecer una serie geométricala cual determina dicho proceso, de la siguiente forma:

$$S(P_n) = \varphi + \frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{4^2}\varphi + \cdots + \frac{1}{4^n}\varphi$$

La suma de la serie anterior converge a $\frac{4}{3}$, la cual determina el área del triángulo inscrito en el sector parabólico. Hay que entender que lo anterior está presentado en una simbología actual ya que para Arquímedes no se habla de convergencia, puesto que en este problema se establece una relación entre magnitudes, en este caso relación entre superficie. Arquímedes no hace un tratamiento de series o sucesiones.

Sin duda alguna, puede generar incertidumbre el saber de qué forma Arquímedes planteaba o descubría ciertas proposiciones, las cuales demostraría con el método de exhausción. Es dentro de su trabajo *El método* en el cual se establece, a partir de cuestiones mecánicas, conjeturas relacionadas a áreas, volúmenes y centros de gravedad. En dicho trabajo Arquímedes escribe a Eratóstenes respecto a cómo llegaba a sus resultados matemáticos por medio de la mecánica, relatando que en comparación con el método geométrico, el método mecánico queda lejos de una demostración, siendo más viable, primero adquirir un conocimiento respecto a los problemas en cuestión y tener una idea del mismo, para luego proceder a demostrarlo.

Por otra parte en algunas líneas de la proposición 14 de *El método*, Arquímedes habría trabajado con la noción de infinito actual, para operar con cantidades infinitamente pequeñas. Arquímedes no se arraigaba completamente con el contexto sociocultural de la época, por el contrario se oponía, por ejemplo, en algunos casos a resolver problemas geométricos mediante regla y compas como era común en la matemática griega. Con lo anterior se puede cuestionar respecto a la posibilidad que Arquímedes haya aceptado la noción de infinito actual en algún momento.

El trabajo desarrollado por Arquímedes respecto a cuadraturas y cubaturas en gran parte está supeditado a los caracteres geométricos, y desde el estudio actual pueden ser estudiadas desde el uso del análisis infinitesimal, conocimiento algebraico, aspectos que en la matemática griega se dejaban a un lado. Pero dentro de las demostraciones que realiza Arquímedes de manera rigurosa, existe una implicación en los conocimientos mencionados, es decir estos conocimientos se ven envueltos y acobijados detrás del carácter geométrico.

Como consecuencia de ello surge, como una serie de teoremas el álgebra geométrica que designa transformaciones y manipulación de letras en los polinomios.

Ahora bien, el trabajo realizado por Arquímedes tiene completa relación con los métodos infinitesimales que se manejan hoy día, el cual permite realizar las cuadraturas y cubaturas mediante integrales definidas, que soportan el concepto de límite aplicado a sumas infinitas.

2.3 Concepción geométrica de la aproximación de lo infinito a lo finito según Kepler y Cavalieri

Kepler (1571-1630) es conocido por su trabajo respecto al movimiento planetario; afirma que el movimiento de traslación de los planetas del sistema solar se define por el lugar geométrico causado por una elipse, y a su vez el Sol está ubicado en uno de sus focos. Como segundo, plantea que las áreas barridas por los radios de los planetas son proporcionales al tiempo empleado por estos en recorrer el perímetro de dichas áreas. Y como última proposición, alude que el cuadrado de los periodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de las distancia promedio del Sol.

Ahora bien, para poder dar su demostración a la llamada segunda ley, Kepler introduce la concepción infinitesimal de la curva, que puede concebirse como una figura poligonal con infinidad de lados, pero cada uno de ellos con longitud infinitamente tan pequeña como se quiera. Pero esto no quiere decir que ya este demostrada esta segunda ley, pues aún falta dar solución a las áreas barridas por los radios de los planetas, y es aquí donde Kepler recuerda la concepción arquimediana respecto a la división del círculo entre infinitos números de triángulos:

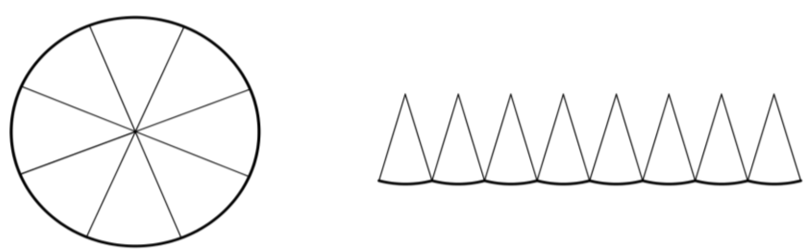

Figura 4: División del círculo en infinitos triángulos

Kepler estaba relacionado con la matemática griega, pero a él le interesaban más los resultados que las pruebas. Por esta razón en uno de sus trabajos presenta un conjunto de métodos infinitesimales para la estimación finita de volúmenes de sólidos. Por otra parte se considera que Kepler fue uno de los primeros matemáticos en abandonar el esquema de prueba formal de Arquímedes e introduce el uso libre de los conceptos infinitesimales.

Ahora bien, en relación con lo anterior surge el método de los indivisibles en 1635 planteado por Buenaventura Cavalieri (1598-1647), el cual consiste en considerar una figura geométrica compuesta de una cantidad infinitamente grande de indivisibles de menor dimensión, como por ejemplo un volumen está conformado por una infinidad de planos paralelos y equidistantes.

A partir de este método, se toma como ejemplo un triángulo rectángulo isósceles utilizando indivisibles de menor dimensión, en este caso segmentos de recta. **Figura 5.**

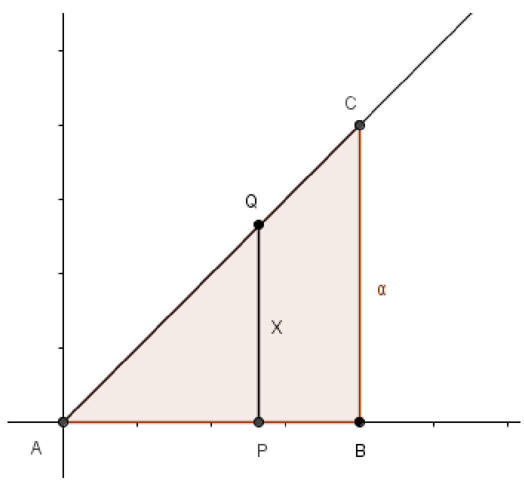

Figura 5: Indivisibles de un triángulo rectángulo isósceles

Allí podemos deducir que el Área $(\Delta ABC) = \frac{AB \cdot a}{2}$, ahora fácilmente podemos deducir la siguiente expresión

$$Área(\Delta ABC) = \frac{1}{2}a^2 estoserá\ iguala \sum_{A}^{B} x$$

Siendo x uno los indivisibles de menor dimensión del triángulo tendremos la siguiente expresión.

$$Área(\Delta ABC) = \sum_{A}^{B} x = \frac{1}{2}a^2$$

De una manera más rigurosa Cavalieri presenta un resultado equivalente a la integral básica

$$\int_0^a x \cdot dx = \frac{a^{1+1}}{1+1}$$

A partir de lo realizado por Kepler y Cavalieri, se pueden caracterizar las invariantes en relación a los trabajos de Eudoxo y Arquímedes, el cual conserva la intuición en los procesos geométricos infinitos, pero se concluyen aproximaciones finitas como lo es la estimación finita de volúmenes de sólidos y el método de los indivisibles.

2.4 Newton y el paso de las razones primeras a las razones últimas

En 1642 nace un hombre que transformó el pensamiento y las costumbres del mundo, Isaac Newton (1642-1727). Durante su infancia se destacó en su vida escolar sin mostrar características de un genio a futuro. A sus 18 años ingresa a la Universidad de Cambridge donde posteriormente conoce al mentor Isaac Barrow quien se encargaría de descubrir su capacidad intelectual en el campo de la ciencia induciéndolo al estudio de la óptica. Luego de culminar sus estudios y al dar inicio a la crisis respecto a la plaga que azotaba a Londres, Newton se ve obligado a aislarse en su casa de nacimiento durante un periodo de dos años; es en este periodo de tiempo que abstrae sus ideas respecto a los movimientos celestes y reformula la mecánica del Universo. Estas ideas surgen como los pilares de sus trabajos más reconocidos los cuales fueron los *Principia, Opticks* y el *Método de las fluxiones y las series infinitas*.

En 1734 es publicado *The analyst*, por el obispo Berkeley; este tratado uno es de los mayores enfrentamientos filosóficos, a través del cual expone confusos fundamentos respecto al desarrollo del nuevo Cálculo. En dicho tratado no se niega ni se cuestiona las conclusiones y resultados matemáticos obtenidos, sino que se discute sobre el método científico, la lógica utilizada para llegar estos resultados. Berkeley afirma que "los matemáticos no habían dado ninguna explicación verídica respecto a su procedimiento, habiendo empleado el razonamiento inductivo en lugar del deductivo" (Newman, 1968). Como se menciona anteriormente, esto hace parte de una discusión filosófica puesto que se cuestiona respecto a ¿qué es el conocimiento científico? o ¿cómo se concibe? Newton reconoce las objeciones de Berkeley argumentando que son totalmente válidas y responde a ello en consideración al funcionamiento de su método.

Por otra parte, Newton percibe los cuerpos u objetos como movimiento continuo de puntos, determinando las cantidades por las velocidades de los movimientos o de los incrementos por los cuales son generadas, llamando "fluxiones" a estas velocidades de los movimientos o incrementos y "fluyentes" cantidades que fluían con el tiempo.

Ahora bien, se presenta el siguiente ejemplo para hallar el diferencial de cualquier potencia. Suponemos que la cantidad x fluctúa en el tiempo procedemos hallar la diferencial de x^n. Pero el término x al fluctuar, se convierte en$(x + a)$, ahora al remplazar tenemos $(x + a)^n$. Seguidamente, cuando se utiliza el método de series infinitas ó binomio de Newton, tenemos:

$$x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot n - n}{2} a \cdot a \cdot x^{n-2} + \cdots$$

Y las fluxiones

$$ayn \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot n - n}{2} a \cdot a \cdot x^{n-2} + \cdots$$

Son entre sí como

$$1\text{Es a } n \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot n - n}{2} a \cdot x^{n-2} + \cdots$$

Seguidamente si hacemos desaparecer las fluxiones, tendremos como resultado 1 es a $n \cdot x^{n-1}$. Con lo anterior sustenta Newton el concepto de “términos evanescentes”, pero Berkeley lo renombra como los “fantasmas de las cantidades desaparecidas” intentando ridiculizar el argumento de Newton, argumentando que este razonamiento no es claro o definitivo. Arguye que argumentar así(es decir, haciendo desaparecer las fluxiones o incrementos, asignándoles un valor nulo) es totalmente contradictorio con la suposición inicial, en el que los incrementos eran algo.

Por otra parte, como antecedente del concepto de límite se puede hacer referencia *al principio de las primeras y últimas razones* el cual se puede encontrar en el libro primero de *Los Principia* específicamente en el lema VI, el cual dice:

> Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo BAD contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última la distancia. (Newton, 1871)

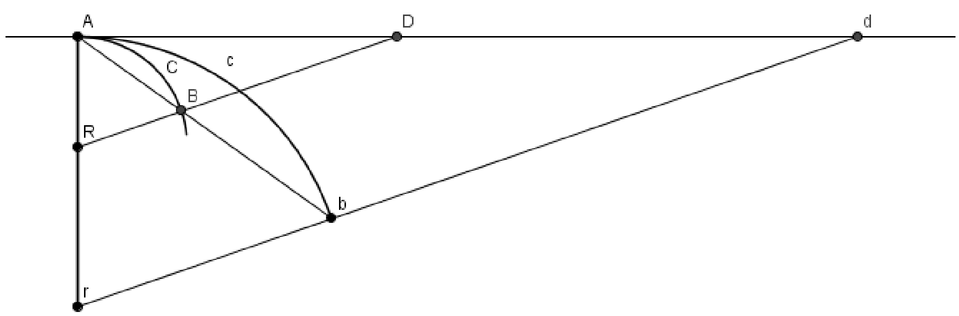

Figura 6: Los *Principia*, lema IV

Observando la imagen anterior, se puede identificar la *Razón primera* ya que el incremento tiene un valor. Ahora para finalizar cuando los puntos A y B se acercan tanto como se quiera, entonces el ángulo BAD disminuirá de tal manera que desaparece, siendo esta la *Razón última* para la cual se anula el incremento.

En conclusión, las ideas expuestas por Newton traen de fondo un contexto dentro del nexo físico-matemático, en el cual, a partir de un problema netamente físico (movimiento planetario) se plantea un modelo matemático para dar solución a este problema, sin profundizar en el método utilizado que es cuestionado como por ejemplo por Berkeley, pero sí dando valor a las conclusiones o soluciones que se obtengan.

Ahora bien, respecto a la idea de límite en este contexto, parece creerse que se evidencia en el paso de las razones primeras a las razones últimas, en donde las cantidades al hacerse tan pequeñas como se quiera, tienden a desaparecer.

2.5 Triángulo característico y principio del continuo bajo una perspectiva leibniciana

William Gottfried Leibniz (1646-1716) es considerado un genio versátil en diferentes campos. Ingresó a la universidad a los quince años realizando estudios de Lógica, Filosofía y Derecho.

Ahora bien, fue en 1682que se exponen las ideas del nuevo Cálculo basadas en cantidades infinitesimales ejerciendo influencia en la divulgación en problemas principales de la ciencia en el siglo XVII con base en la metodología para resolverlos.

En primer lugar Leibniz, en su concepción del Cálculo, se basa en las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales. Esto se convirtió en una herramienta para la generación de conocimiento científico en general. Respecto a la idea de lo infinitamente pequeño, Leibniz considera, de manera geométrica, una curva como la constitución de un sinnúmero de segmentos, en el cual cada uno de estos tiene longitud infinitamente pequeña. En este sentido Leibniz plantea que una figura curvilínea debe ser considerada como un polígono con un número infinito de lados. Por otra parte, profundizó respecto al estudio de sucesiones numéricas, dando lugar a la suma y diferencia de los términos de estas, con el fin de aplicarlo a las considerando sucesiones de ordenadas y abscisas, en el que supone infinitamente pequeñas las diferencias entre los términos de esas sucesiones. Leibniz, a partir de lo anterior, observa que al tratar estas sumas de diferencias corresponde a las tangentes (diferenciales) y a las sumas con las cuadraturas (integrales).

Con esta idea de lo infinitesimal se plantan las bases para el Cálculo leibniciano aludiendo al triángulo característico, el cual consiste en concebir las curvas como polígonos infinitangulares.El triángulo característico, consideraba los tres lados del mismo como diferencias: diferencia dxde la abscisa, diferencia dy de la ordenada, diferenciads del arco, así:

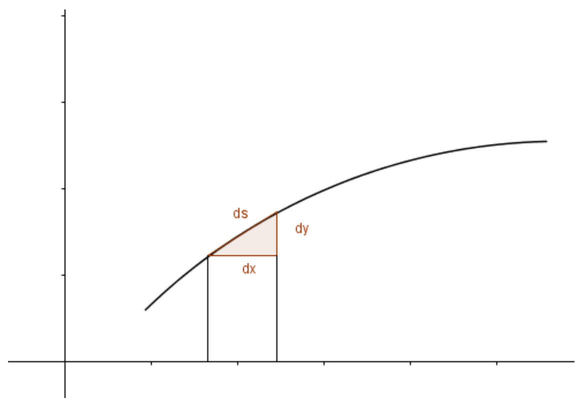

Figura 7: Triángulo característico

El siguiente lema, encontrado en "*Traité des sinus du quart de cercle"* escrito por Pascal, permite dimensionar una primera intuición respecto al concepto de diferencial de una manera más concreta; en este lema podemos encontrar nuevamente el triángulo característico:

> Lema: Sea ABC un cuadrante de círculo, donde el radio AB es considerado como eje y el radio perpendicular como base; sea D un punto cualquiera sobre el arco, desde el cual se traza el seno DI sobre el radio AC, y la tangente DE sobre la cual se toman los puntos W, donde se quiera, desde donde son trazadas las perpendiculares ER sobre el radio AC. Digo que el rectángulo comprendido por el seno DI y la tangente EE' es igual al comprendido por la porción de la base (encerrada por paralelas) y el radio AB. (Arcos & Sepulveda, 2014, pág. 84)

Pascal, para demostrar el lema anterior, retoma la geometría de los indivisibles utilizando el triángulo *EKE'*, de tal manera que la suma de las perpendiculares trazadas desde la base, es igual a la porción de la base comprendida entre los senos extremos multiplicados por el radio.

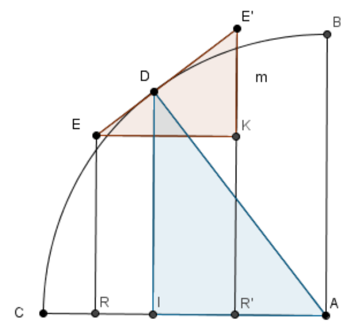

Figura 8: Primera intuición respecto al concepto de diferencial

Pero es a partir de recapitular esta construcción realizada por Pascal, que Leibniz conceptualiza la noción de diferencial. Como resultado, si se considera el triángulo *EKE'* cada vez más pequeño, notaremos que los puntos *E* y *E'* serán infinitamente próximos como se desee, sin que los triángulos *EKE'* y *DIA* dejen de ser semejantes, siendo esta la clave de la deducción ya que permitió tratar este triángulo característico como un elemento consecutivo del arco de la curva, además de estar conformado por un parte infinitamente pequeña de la tangente y partes infinitamente pequeñas de paralelas a la abscisa y ordenada.

A diferencia de Newton, Leibniz proporciono un marco en el cual se pudieran entenderlos nuevos desarrollos de las matemáticas, concretamente con el Cálculo infinitesimal como un campo en sí mismo.

Ahora bien, Leibniz establece unos principios los cuales permiten tener una visión del mundo y dar explicación a diferentes fenómenos. Uno de estos principios es el de continuidad, principio en el cual se sostiene Leibniz para realizar una comprensión y explicación del Cálculo infinitesimal. En primer lugar Leibniz diferencia entre cantidad y calidad. La primera alude a la magnitud y puede ser espacial, temporal o posicional; la segunda constituye los atributos de un individuo o fenómeno de una especie. En ese sentido si se observa el cambio de las cualidades en el orden natural, se encuentra una relación progresiva para aplicar las mismas "cualidades matemáticas" por ejemplo: relación parte-todo, mayor que, menor que, etc. Lo anterior Leibniz lo relaciona diciendo que *"la* continuidad está presente en el tiempo tanto como en el proceso de los fenómenos naturales debido a que dicho proceso no tiene lugar a saltos repentinos" (Celso, 2009).

En conclusión, el principio de continuidad, proporciona una base teórica para comprender los infinitesimales del nuevo Cálculo. En general este principio considera que entre dos fenómenos, conceptos, existe un número infinito de otros fenómenos o conceptos, dejándolos espacios vacíos a la imaginación.

2.6 Euler y los incrementos infinitamente pequeños

Considerado junto a Arquímedes, Newton y Gauss como uno de los gigantes matemáticos, nace en Basilea, Suiza Leonhard Euler en 1707. Los trabajos realizados por Euler recorrieron las matemáticas puras y aplicadas durante la época.

Los trabajos realizados en el Cálculo, sugieren este mismo como una gran herramienta para el descubrimiento, en ese sentido se da inicio a la búsqueda de un Cálculo que dejara a un lado lo infinitamente pequeño. En estos trabajos se pueden referenciar la *Introducción al análisis de los infinitos* y los *Fundamentos del cálculo diferencial.*

Los primeros trabajos realizados por Euler respecto al Cálculo tienen base en la perspectiva leibniciana. De allí, Euler manifiesta la complejidad al leer algunos de sus trabajos, si no se está familiarizado con la idea de infinito, puesto que por ejemplo el objetivo de la *Introducción al análisis de los infinitos* es proporcionar los conocimientos necesarios para abordar el análisis infinitesimal.

Ahora bien, Euler prioriza el encontrar la razón entre los incrementos evanescentes de cualquier función cuando la variable (de la que depende) tiene un incremento evanescente. Pero esto no quiere decir que el Cálculo diferencial para Euler, sea el estudio de los evanescentes (los cuales son nada), sino el estudio de la razón entre los incrementos infinitamente pequeños. Para pensarlo un poco más evidente, los incrementos se conciben como continuamente más pequeños, por lo cual se genera la razón que es presentada como consecutivamente, aproximándose a cierto límite; este es finalmente alcanzado cuando el incremento se convierte en absolutamente nada.

2.7 Lagrange

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) es considerado junto a Euler, como uno de los grandes matemáticos del siglo XVII. En su trabajo más relevante *Teoría de las funciones analíticas,* Lagrange presenta un extenso desarrollo del Cálculo, en el cual intentó alejar todas las consideraciones referentes al uso de las cantidades infinitamente pequeñas y cantidades evanescentes.

Uno de los motivos para generar dicha teoría, parte de estudiar las características del Cálculo presentado por Newton y Leibniz, tomando como base las deficiencias de dichas versiones con el fin de mejorar estos sustentos teóricos.

Ahora bien, Lagrange se refería a estas deficiencias como "compensación de errores"; por ejemplo al referirse de la concepción ontológica leibniciana, indicaba: al concebir las curvas como polígonos infinitangulares, siendo la prolongación de estos lados la línea tangente a la curva. Con lo anterior, es evidente la suposición errónea, pero este error se corrige en el cálculo por la omisión de las cantidades infinitamente pequeñas. Lagrange a partir de esta deficiencia presenta la segunda parte de su Teoría *Aplicación de las funciones a la Geometría*.

Por otra parte, dentro de la perspectiva de Newton, Lagrange indica los inconvenientes que tienen el método de fluxiones y el principio de razones últimas y primeras. En primer lugar introducir la concepción de movimiento en el Cálculo, es introducir una idea extraña, obligando a ver algunas cantidades como espacios recorridos por un cuerpo. Newton también respecto a su método de fluxiones, presenta inconveniente en considerar las cantidades en el estado en que ellas desaparecen; puesto que uno considera más fácil razones entre dos cantidades finitas y no entre dos que sean nulas a la vez. Lo anterior se presenta en el tercer capítulo de *Aplicación de la teoría de las funciones a la Mecánica.*

2.8 Cauchy respecto a la variación de variables

Como hemos visto anteriormente, el cálculo de fluxiones va conduciendo a la necesidad de un nuevo concepto matemático el cual modele las variaciones en general. A partir de este cálculo de fluxiones se puede interpretar la cinemática del Cálculo, en donde pueden describirse fenómenos como el sonido, calor, movimiento, otros. Estos fenómenos buscan ser interpretados mediante ecuaciones constituidas de variables relacionadas, conociéndose como *estilo analítico* concebido por Fourier y Lagrange. Estos dos personajes buscan dar solución al problema de representación de funciones, el cual consiste en aproximarse tanto como se desee a una función mediante el uso de series de potencia. Ahora bien, en estos autores incluyendo a Leibniz se percibe el concepto de límite como el cálculo de procesos aproximados, determinando inicios del Análisis Matemático, pero es con Cauchy que se instaura el análisis como disciplina independiente de las Matemáticas.

Agustín Louis Cauchy (1789-1857) pupilo de Joseph Louis Lagrange, se gradúa como ingeniero y combina sus trabajos de ingeniería con sus investigaciones matemáticas. Ahora bien, como primera instancia el proceso de rigorización del análisis fue a través de los documentos *Coursd´Analyse*de 1821 y las *Leçons sur le Calcul Infinitésimal* de 1823. A partir de estos documentos, Cauchy impone unas bases teóricas para los conceptos respecto al análisis matemático moderno (número real, función, límite, derivada, integral). Además en estos sustentos teóricos, establece la diferencia entre número y cantidad. Cauchy describe número como referente a la medida absoluta de magnitudes y cantidad, a las cantidades reales positivas o negativas, es decir números predeterminados por signos.

Dentro de la misma época Newton establece el término de “fluentes” para determinar las variables que dependen del tiempo, es decir lo que conocemos actualmente como funciones paramétricas. Por otra parte Leibniz introduce el término función para decir que corresponde a cualquier cantidad que varía de un punto a otro en una curva.

A partir de la necesidad de establecer un término que designe una acción específica, se identifica un concepto que merece un tratamiento especial. De allí surge el objeto matemático función con la definición de Cauchy, aunque previamente por ejemplo Euler, Lagrange y Fourier proponen alguna definición para dicho objeto. La definición que propone Cauchy plantea que:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable. (Cauchy, 1994, pág. 77)

El término 'cantidades variables' corresponde a aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros.

Para plantear el concepto de límite, se introduce las cantidades infinitamente pequeñas vistas como una cantidad variable cuyos valores numéricos sucesivos decrecen indefinidamente, volviéndose menores a cualquier número dado. Por ejemplo la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ es infinitamente pequeña. Ahora, las cantidades infinitamente grandes son aquellas cuando sus valores numéricos sucesivos crecen indefinidamente, superando a cualquier número dado. Como por ejemplo la sucesión$1, 2, 3, \dots, n, \dots$ es una cantidad infinitamente grande. Por último, Cauchy expone una definición de límite como:

> El momento en que los valores van tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, en consecuencia terminan en diferir de él tampoco como queramos, este último se llama el límite de los anteriores. (Arcos & Sepulveda, 2014, pág. 210)

De esta manera Cauchy establece la relación entre límite e infinito.

A partir de la definición anterior respecto a las cantidades infinitamente pequeñas haciendo referencia a la sucesión $\frac{1}{n}$, estas no solo varían de forma discreta, sino que también varían de maneracontinua. Con base en lo anterior, Cauchy presenta de manera formal la definición de función continua la cual nos dice:

> Sea $f\ (x)$ una función de la variable x, entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función.

$$f(x+\alpha)-f\ (x)$$

Teniendo en cuenta la definición y condiciones para que una función sea continua, Cauchy presenta la definición de función derivada de una función f. De esta manera si se toma $\Delta x=i$ los términos de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\alpha)-f\ (x)}{i}$ corresponderá a cantidades infinitamente pequeñas. Ahora bien si tomamos el límite de cada uno de ellos tenderá a cero y la razón completa puede converger a un límite.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\alpha)-f\ (x)}{i}=lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dentro de la definición anterior que presenta Cauchy, se pueden establecer la relación frente a diferentes trabajos realizados por Lagrange, puesto que a diferencia de Newton y Leibniz el proceso de derivación de una función su resultado es otra función. En Newton y Leibniz dicho proceso se efectúa para ciertos valores de las variables; Cauchy y Lagrange lo efectúan para todo el dominio total de variación de las variables.

2.9 La formalización algebraica del límite según Weierstrass

Como observamos anteriormente, Cauchy en realidad parafrasea su concepto de límite utilizando implícitamente términos de ε,δ y desigualdades. Ahora bien, Karl Wilhem Theodor Weierstrass (1815-1897) fue uno de los precursores del rigor en el análisis intentando separarlo de la Geometría y basar este primero exclusivamente en el concepto de número, siendo uno de los primeros matemáticos asociados a la formalización del Cálculo a partir del uso de ε y δ. Por otra parte, en relación a nuevos aspectosde conceptos fundamentales del análisis, Weierstrass provee una definición de función, continuidad de una función, de derivada, una definición formal de infinitesimales y de límite. En este último, llegó a la conclusión de que era imperativo separar el concepto de número irracional del concepto de límite, ya que hasta ese entonces la concepción de límite estaba estrechamente relacionada con número irracional. Para dar solución al anterior problema, hace uso del razonamiento de Cauchy, quien consideró el problema de la existencia del límite de una sucesión convergente identificando la misma sucesión como el número límite. Lo anterior quiere decir que Weierstrass define los números irracionales como simples sucesiones ordenadas de racionales.

Ahora bien, a diferencia de Cauchy, Weierstrass no utilizaba expresiones como “tan pequeño como se quiera”, “valores sucesivos” o “infinitamente grande”. Por el contrario, Weierstrass persistía en lo que él llamaba *Teoría estética de las variables.* A continuación se presentará la definición formal de límite presentada por Weierstrass encontrada en (Arcos & Sepulveda, 2014, pág. 219).

> Si dado cualquier ε, existe un μ_0 tal que para $0 < \mu < \mu_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \mu) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

Respecto a esta definición, se marcó de manera contundente el fin del recurso de las cantidades infinitamente pequeñas o de puntos moviéndose para generar curvas. Dentro de Weierstrass solo hay números reales, operaciones de suma, resta, relaciones de mayor o menor que entre dichos números. En suma, en esta época de la historia llega la era de la rigurosidad dentro del desarrollo del Cálculo.

Por último, si hacemos una comparación respecto a lo presentado por Cauchy y Weierstrass, realizan una caracterización como límite a nociones completamente diferentes. Cauchy define el límite para cantidades variables sin estar representada en términos de épsilon y delta. Por otra parte Weierstrass define un límite de funciones, para la cual dicha perspectiva puede cambiar dentro del tratamiento de las sucesiones y series, representado en términos de épsilon y delta.

3 ANÁLISIS COGNITIVO DEL LÍMITE

En este capítulo se realiza un análisis epistemológico. La primera parte presenta la noción de obstáculo epistemológico y como este hace presencia en la idea matemática de límite, seguido de la relación entre dificultades y obstáculo epistemológico. Como complemento a esto, se describen los obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico de la idea de límite.

En la segunda parte se presenta la perspectiva sociocultural enmarcada en la teoría socioepistemológica y cómo esta afecta el desarrollo de la idea matemática del límite. Se caracterizan cuatro momentos en la historia en los cuales se pueden evidenciar algunos aspectos socioculturales de cada uno de estos, para esto se recapitulan algunas ideas planteadas por (Cantoral, 2001), (Perez, Molfino, Lanzilotta, & Dalcín, 2002) que hacen referencia al desarrollo conceptual del cálculo.

Por último, en la tercera parte se realiza un contraste a partir del desarrollo histórico realizado en el capítulo anterior y los supuestos epistemológicos: obstáculo epistemológico y perspectiva sociocultural. Lo anterior, con el fin de enmarcar cada hecho histórico con lo expuesto en la segunda parte de este capítulo.

3.1 La noción de obstáculo epistemológico

En términos generales la noción de obstáculo epistemológico se plantea por primera vez en (Bachelard, 2000). Dicha noción es retomada por el francés Guy Brousseau, el cual aparece a partir de las siguientes premisas:

- Un obstáculo es u conocimiento.
- Un obstáculo tiene un dominio de "validez".
- Un obstáculo resiste y reaparece.
- Un obstáculo es constitutivo del saber.

En ese sentido(Brousseau, 1989) propone una categorización para los obstáculos, los cuales son:

- El ontogénico. Tiene que ver con todo lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo.
- El didáctico. Son todos los obstáculos que se adquieren o aparecen por el modo de enseñar o por la escogencia de un tema o una axiomática en particular. A la vez que didáctico puede ser sociocultural.
- Los epistemológicos. Son los obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos; son propios del concepto. Por ejemplo la dificultad del concepto de conceptuar el cero, los números relativos, etc. Todos estos han sido problemas históricos en cuanto a su desarrollo conceptual; son obstáculos que también se pueden presentar en la enseñanza de las Matemáticas.
- Los culturales. Son los obstáculos que están relacionados con las características culturales del sujeto, por ejemplo: su nivel académico, social, económico.

Por otra parte, haciendo referencia a los obstáculos epistemológicos, estos quedan contenidos dentro del concepto general de obstáculo. La noción de obstáculo epistemológico lleva a establecer un paralelismo entre las ideas que se tienen de un concepto actualmente y los saberes históricos que han obstaculizado las Matemáticas.

Ahora bien,(Neira, 2009) cita a (Sierpinska, 1985) en el planteamiento de la teoría de obstáculos epistemológicos específicamente referentes al concepto de límite, para lo cual hace uso de la conceptualización o entendimiento de las Matemáticas. Por otra parte, se plantea una posición la cual hace alusión un aspecto de la noción de obstáculo epistemológico en cuanto a “la repetición de su reaparición en la filogénesis y ontogénesis de los conceptos” (Bachelard, 2000).

(Sierpinska, 1985) Plantea una serie de obstáculos epistemológicos en referencia al concepto de límite; estos son:

- **Obstáculo del horror al infinito:** comprende el principal obstáculo ligado a la existencia de lo infinitamente grande o pequeño, sobre si el límite se alcanza, si es posible encontrar un intermedio entre lo infinitamente pequeño y lo nulo. Dicho obstáculo recoge otros obstáculos que puedan estar ligados al rechazo de manipulaciones de magnitudes finitas a las magnitudes infinitas; este obstáculo en resumen consiste en relacionar el paso al límite de un movimiento físico, a una aproximación.
- **Obstáculo ligado al concepto de función:** pese a la aparición del concepto de función como punto decisivo para la formulación del límite fuera de toda intuición geométrica y física, se manifiesta en uno de los problemas primitivos de la continuidad en la atención que se presta al aspecto racional que predomina las propiedades topológicas del dominio y condominio de una función, por ejemplo en la dificultad de distinguir entre límite de las cotas superior en inferior.
- **Obstáculo geométrico:** se manifiesta en la idea geométrica de la diferencia entre una magnitud variable y una magnitud constante el cual es su límite. Por ejemplo los polígonos que se acercan al círculo o las secantes a una curva.
- **Obstáculo lógico:** este obstáculo se evidencia en borrar los cuantificadores o el orden el cual se establezcan estos, es decir los cuantificadores como un ente extraño. Por ejemplo la función se “lee” del eje x al eje y, mientras que estudiar el límite de la misma en un punto sigue un orden inverso.
- **Obstáculo de símbolo:** referido al uso de un símbolo específico para la operación del paso al límite.

En relación con lo anterior un concepto que esté en la base de los obstáculos epistemológicos reaparece y resiste en la Historia puesto que el proceso cognitivo no se considera como un proceso acumulativo.

Dentro de la filosofía de los obstáculos epistemológicos no se puede obtener la naturaleza de estos, debido a que las perspectivas que tiene cada individuo del mundo, formas de pensar, uso del lenguaje, se vuelven apoyo y a su vez obstáculos para un mejor entendimiento.

3.1.1 Obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico del concepto de límite desde la teoría

(Cornu, 1991) Considera la utilidad de estudiar la historia del concepto para localizar las dificultades que tal vez indiquen la presencia de algunos obstáculos epistemológicos. Plantea que en el desarrollo histórico del concepto de límite se puede observar que esta noción se introdujo a partir de dar respuesta o solucionar las siguientes problemáticas o dificultades:

- Problemas de caracter geométrico (cálculo de áreas, naturaleza de longitudes).
- El problema de la suma y razón de la convergencia de series.
- Problemas de diferenciación; los cuales se establecen de la relación entre dos cantidades que tienden simultáneamente a cero.

A partir de los problemas mencionados anteriormente se establecen cuatro grandes obstáculos epistemológicos respecto al concepto de límite:

- **El fracaso de enlazar la geometría con los números:** el problema del cálculo del área de un círculo suministró una oportunidad para desarrollar herramientas similares a las del concepto de límite. Sin embargo el método de exhausción de Eudoxo, parece cerrar la noción de límite, no podemos decir que los griegos poseían un concepto de límite. El método de exhausción es en esencia un método geométrico que permite obtener resultados sin tener que lidiar con el problema del infinito, puesto que este es aplicado a magnitudes geométricas y no a números. Con base en lo anterior no existe una transición de lo geométrico a lo numérico pese a que la interpretación geométrica ayudo a la resolución de algunos problemas, pero causa un obstáculo en un paso a la noción de un límite numérico.

- **La noción de infinitamente grande e infinitamente pequeño:** dentro del desarrollo del concepto de límite se puede evidenciar la suposición de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Tal es el caso de Newton en relación con las cantidades evanescentes, es decir considerar en algún instante que una expresión posee un valor y en algún momento esta se anula tendiendo a cero. En ese sentido dicha noción de lo infinitamente grande y pequeño genera un obstáculo en el que la noción de infinito que se tenga perturba "el paso al límite".
- **El aspecto metafísico de la noción de límite:** este obstáculo alude al aspecto metafísico de la noción de límite, el cual es uno de los principales obstáculos para los estudiantes hoy en día. Se considera que el límite no es realmente Matemáticas puesto que el Cálculo ya no se basa meramente en el Álgebra y la Aritmética; en algunos casos se consideran aspectos abstractos como es el caso del infinito. Este obstáculo hace la comprensión del concepto de límite extremadamente difícil, debido a que un límite en algunos casos no puede ser calculado directamente con métodos algebraicos y aritméticos.
- **¿Es el límite alcanzado o no?:** expresiones como "la última razón entre dos cantidades es la razón alcanzada cuando las dos cantidades se cancelan" abren el debate en los estudiantes en incluir preguntas como ¿cuándo *n* es igual a cero, el límite es cero?

Existe variedad de obstáculos epistemológicos (horror al infinito, ligado al concepto de función, geométrico, lógico y de símbolo) entorno al concepto de límite. Para la construcción de estrategias pedagógicas hacia el aprendizaje de los estudiantes, deben considerarse los obstáculos que se presenten en los mismos, puesto que en algunos casos esto conlleva a que el estudiante presente errores y dificultades frente a algún tema de las Matemáticas en general

3.1.2 Dificultades ligadas al concepto de límite

(Artigue, 1998) Plantea que la resistencia de un obstáculo epistemológico está confirmada por las dificultades que presentan los estudiantes. Ahora bien, en la búsqueda de obstáculos epistemológicos no se puede pensar que las dificultades que presentan los estudiantes se reducen a tales obstáculos. Dentro del concepto de límite se categorizan dos dimensiones: una de proceso y otra de objeto. Por ejemplo, las dificultades que presentan los estudiantes para identificar 0.999… como una sucesión de términos o como el número1 en sí mismo, permite ver la sucesión como proceso y el número como un objeto.

Otra categoría de dificultades está la relacionada con la definición formal del límite, puesto que se da la necesidad de invertir la dirección del proceso de función que va desde x a $f(x)$. El concepto formal de límite rompe con las perspectivas previas de esta noción.

Por otra parte dentro de la enseñanza del Cálculo se presentan diversas dificultades, como por ejemplo comprender que la importancia de la enseñanza del límite puede verse como una herramienta útil para definir o tratar otros objetos (función, diferencial, etc.). En ese sentido se considera que un concepto es útil cuando el interés está centrado en su utilidad para resolver problemas, cuando es considerado como actor dentro del conocimiento científico reconocido.

(Cornu, 1991) Manifiesta que una de las principales dificultades del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad, tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática.

3.2 La idea de límite desde una teoría de perspectiva sociocultural

Para obtener una perspectiva sociocultural de un objeto matemático se hace necesario establecer una aproximación teórica en la cual está enmarcada. Dicha aproximación corresponde a la socioepistemología. La socioepistemología busca dar explicación de los fenómenos didácticos producidos en el campo de las Matemáticas mediante el entendimiento de la construcción social del conocimiento y bajo un enfoque sistémico (que precisa de la incorporación de aspectos sociales, como la comunicación, la búsqueda de consensos, la construcción de lenguajes o el diseño de herramientas) en el estudio de tales fenómenos. Desde esta perspectiva, la construcción de un conocimiento matemático necesariamente se encuentra ligada a aspectos más amplios y que rebasan la mera organización teórica del contenido: Aspectos epistemológicos, prácticas socioculturales, procesos avanzados del pensamiento y aquellos que tienen que ver con el funcionamiento de una institución escolar(Cantoral, 2001)

El estudio histórico de la construcción social de cada uno de los conceptos, permite determinar los mecanismos presentes en el desarrollo del mismo y la transposición que un concepto sufre cuando es llevado al aula. Entender cuáles fueron los obstáculos que ha tenido la humanidad en su conjunto en el desarrollo de un concepto puede ser significativo para comprender los obstáculos que tienen nuestros alumnos en ese proceso, construcción del conocimiento matemático que concebimos indisociable del contexto sociocultural en el que se produce. (Pérez, Molfino, Lanzilotta y Dalcín, 2002).

Por otra parte las influencias socioculturales se pueden concebir como el conjunto de prácticas sociales de un grupo humano en una cultura específica. Este conjunto de prácticas sociales envuelve y afecta a dicho grupo humano, abriendo la posibilidad a su reproducción y recreando nuevas prácticas sociales que surgen de las necesidades internas o externas al mismo (Mingüer, 2008).

Un ejemplo claro de la relación entre lo sociocultural como generador del conocimiento matemático puede atribuirse a la invención del cero en el México prehispánico o la creación del binomio de Newton en el siglo diecisiete. Es un hecho conocido que no todas las culturas desarrollaron la noción del cero.

Particularmente el cero fue inventado en aquellos escenarios socioculturales en los que el imaginario colectivo y el tratamiento que este hacía de las representaciones de ausencia como la muerte por ejemplo, el vacío, como complementariedad del espacio infinito, o la transición de estado contiguos y continuos permitió la elaboración teórica del cero como una representación dinámica particular(Cantoral, 2001)

El objeto matemático, binomio de Newton se presenta entonces como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que requieren de la predicción, hasta llegar a tomar la forma abstracta del concepto de función analítica.

Ambos ejemplos, el de la formación del cero entre los antiguos mexicanos y la presentación del binomio por Newton, expresan cómo ambos procesos de construcción del conocimiento matemático avanzado tienen un profundo carácter social.

En ese sentido específicamente lo que refiere al objeto matemático límite se presentan diferentes aspectos enmarcados en un contexto histórico determinado el cual trae de fondo un contexto sociocultural en su época. Veamos.

3.2.1 La antigua Grecia

La necesidad por la resolución de problemas particulares, hacen del concepto de límite como un periodo de acción; como un proceso. Allí se caracterizan la exactitud de los resultados y la rigurosidad en los razonamientos.

Se pueden caracterizar diferentes obras que no solo se ocupan de problemas matemáticos sino relacionados también a aspectos característicos de la Física: *Medida del Círculo*, *Cuadratura de la Parábola*, *Sobre las Espirales*, *Sobre la esfera y el cilindro, Sobre conos y esferoides*, *Sobre el equilibrio de las figuras planas* y *Sobre cuerpos flotantes,* entre otros.

Dichos problemas son un antecedente relevante considerándose en algunos casos como los problemas génesis del Cálculo infinitesimal. Allí el concepto de límite no se tenía, había apatía a su tratamiento pero a su vez lo concebían en su esencia meramente potencial es decir como algo que crece y que crece sin límite alguno.

Es evidente que la idea de infinito es una construcción que deja ver su carácter sociocultural en cuanto en la antigua Grecia dicha idea influía en la sociedad científica en la toma de decisiones y la visión respecto a los diferentes problemas que se tenían.

3.2.2 Siglo XVI y XVII

En esta época emerge un sinnúmero de problemas los cuales están motivados e influenciados por la evolución de la tecnología y la articulación de las Matemáticas con otras ciencias. Hay una resurrección de la intuición y curiosidad matemática griega y se deja a un lado los métodos rigurosos dando prioridad a los procesos de generalización.

Por ejemplo, en el siglo XVII, luego de más de diez siglos durante los cuales el cálculo de áreas y volúmenes no fue un asunto prioritario para los matemáticos, Cavalieri se ocupa del tema con razonamientos similares a los de Arquímedes, basándose en el concepto de los *"indivisibles"* que aparece por primera vez en su libro "*Geometría Indivisibilibus*" (1635).

La idea de "indivisibles" en una figura plana, hace referencia a cualquier cuerda de ella. Así, una figura plana estaría formada por una infinidad de cuerdas paralelas que Cavalieri Denominó "*omnes lineae*".

A los efectos de resolver el problema que lo ocupaba –el cálculo de áreas y volúmenes– Cavalieri debió definir las *potencias de todas las líneas*, calculando así la integral de x^kpara k=1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9.

3.2.3 Siglo XVII y XVIII

Si bien los siglos XVI y XVII representaron un fructífero período en la historia de la creación del Cálculo, con una gran cantidad de resultados particulares motivados por problemas físicos (cálculo de máximos y mínimos, trazado de tangentes y resolución de cuadraturas), no se puede hablar aún de la existencia del Cálculo como un conjunto unificado de conceptos y resultados, aplicables con generalidad para resolver determinados problemas.

En esta época el uso de conceptos como cantidades evanescentes, llevan a diferentes sectores (no solo de las Matemáticas sino también de la Filosofía, entre otros), a cuestionarse frente a los métodos empleados para la resolución de algún tipo de problemas en específico

En (Perez, Molfino, Lanzilotta, & Dalcín, 2002)se plantea que hubo que esperar a que Isaac Newton, desde Inglaterra, y Gottfried W. Leibniz, en el continente europeo, realizaran sus aportes que conducirían a la fundación –aunque sin una fundamentación rigurosa– del Cálculo.

Podemos sintetizar dichos aportes en dos:

a. El desarrollo de un *método general* para el cálculo de la variación de una variable con respecto al tiempo, en el Cálculo de Newton, o la diferencial de una variable, en el Cálculo de Leibniz.
b. El conocimiento claro y contundente, y de nuevo con generalidad, de que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos, lo que suponía una nueva herramienta para el cálculo de áreas. Frente al contenido geométrico y parcial en que Barrow presentó este resultado, Newton y Leibniz le dieron en primer lugar más generalidad en su aplicación, en segundo lugar una presentación más analítica, y en tercer lugar la importancia que dicho resultado tiene dentro del Cálculo.

Al hablar de un método general para el cálculo Se pueden atribuir el método de fluxiones de Newton o el triángulo característico de Leibniz. En referencia a Leibniz hay un contexto filosófico el cual permea su razonamiento frente al desarrollo del Cálculo, la perspectiva de que todo tanto en el universo como las cosas en general son continuas, es decir no existen saltos ni vacíos entre dos cosas una de la otra. Sin embargo, para Newton dicho método consistía en considerar las razones de cambio del movimiento respecto al tiempo de un cuerpo con el fin de dar explicación a fenómenos astrales.

En relación a los métodos planteados por Newton y Leibniz, causó polémica el hecho de que ambos llegaran a resultados similares de tal manera que cada uno desarrolló su método de forma independiente. Lo anterior genera gran disputa entre naciones debida a la prioridad del descubrimiento, disputa que se prolonga durante el siglo XVIII

3.2.4 Siglo XIX y XX

En el siglo XIX se hace un tratamiento el cual transciende de los procesos infinitos a los finitos, a partir de ello se introduce la definición formal de límite de una sucesión numérica. En este sentido el límite ya no es visto como un proceso, puesto que al usar inferencias lógicas y argumentos de naturaleza el límite es visto como un número en el cual los valores de la sucesión llegan.

En relación a las implicaciones de introducir de una manera formal una definición de la idea de límite, pueden considerarse las nuevas formas de estudio para justificar antiguas temáticas, trasladando las justificaciones que en algunos casos se realizaban de manera intuitiva a justificaciones teóricas. Por otra parte dicha definición influenció en el desarrollo social y epistemológico, a partir de una nueva generación de saber matemático, que se podía evidenciar no solo en el transitar institucional sino en los libros de texto.

Para complementar la idea anterior, la definición presentada por Weierstrass permitió articular diferentes campos de la ciencia utilizando una comunicación metafórica en la modelación y matematización de fenómenos, sin perder el rigor que establece la definición, permitiendo la evolución de las prácticas humanas como lo es la socialización.

Las ideas anteriores fueron tomadas de (Cantoral, 2001) con el fin de ver la relación entre matematización y construcción social a partir de la idea de límite como un concepto ya estructurado y formalizado.

3.3 Hechos históricos bajo una visión desde los distintos supuestos epistemológicos

Como hemos visto anteriormente la idea de límite ha sido un poco variante en el transcurso de la Historia, tratando de dar solución a ciertos problemas planteados en las Matemáticas y en el mundo físico. Estas ideas nos exhiben diversas concepciones las cuales mostraron algunas inconformidades que llegaron a generar algunas disputas. A continuación resaltaremos los distintos supuestos epistemológicos bajo el lente de los obstáculos epistemológicos y la concepción sociocultural, mostrando cómo estos hechos históricos están directamente permeados por los distintos supuestos epistemológicos.

3.3.1 Obstáculos epistemológicos desde el desarrollo histórico realizado

3.3.1.1 Horror al infinito

Todo surge en el momento en que los matemáticos griegos, al proponer diversas paradojas, buscan alternativas en las cuales no se confrontaran con las ideas de los infinitesimales o números irracionales, por lo cual conllevó a una crisis ocasionando un horror al infinito, en otras palabras en la no aceptación del infinito actual. Posteriormente y para dar una solución a esta crisis, la escuela platónica introduce un rigor lógico en las Matemáticas llevando de esta manera un refinamiento geométrico oponiéndose completamente al leguaje de los pitagóricos.

Pero ahora bien, este obstáculo epistemológico sigue mostrando rasgos en las ideas de límite ya tratadas como por ejemplo en Newton en su método de fluxiones y fluentes, Leibniz respecto al triángulo característico, Euler y el estudio de la razón entre los incrementos infinitamente pequeños, Lagrange respecto al estudio de series de potencias y Cauchy sobre la variación de variables. Este obstáculo (horror al infinito) es superado por Cantor en su teoría de conjuntos, allí ya se acepta el límite ámbito numérico.

3.3.1.2 Separación de lo numérico y geométrico

Sin alejarnos mucho, en esta misma época Greco-Alejandrina retomando los procesos geométricos infinitos que surgen de las paradojas de Zenón, podemos encontrar problemas en relación con lo discreto (número) y lo continuo (magnitud). De esta misma manera el surgimiento de los inconmensurables o irracionales.

3.3.1.3 Obstáculo geométrico

Consiste en la dificultad de transferirla idea de límite desde una perspectiva geométrica a una numérica. Lo anterior subyace desde la permanencia del razonamiento euclidiano, como lo demuestra en las ideas plasmadas por Eudoxo, Arquímedes, Cavalieri y otros. Este obstáculo es superado en el momento en que es separada la geometría del rigor en el análisis, de tal manera que este rigor se observa exclusivamente en el concepto numérico (aritmetización del análisis).

3.3.1.4 Obstáculo relativo a funciones

Surge a partir de la concepción generada por Euler, respecto a la función como expresión analítica $Y = f\ (x)$, de tal manera que no hay una correspondencia desde la concepción de Newton (fluente) y Leibniz (curvas como polígonos infinitangulares) la cual no se mira desde la naturaleza del x y los y.

3.3.1.5 Obstáculo de la simbología

Son aquellos procesos infinitos y situaciones que le dan sentido a la noción de límite y oculta su complejidad; por ejemplo en Cauchy se alude a una definición de límite de manera parafraseada, mientras que en Euler resalta la importancia en los resultados y no en el fundamento de los métodos.

3.3.2 Justificación de la perspectiva sociocultural

Como se mencionó en el capítulo anterior, la construcción de un conocimiento matemático va más allá de una organización teórica de un contenido, se deben tener en cuenta aspectos epistemológicos, socioculturales. Se entiende por aspectos socioculturales como los conjuntos de prácticas sociales que envuelve o afecta a una cultura específica.

Es de allí que se toma esta perspectiva, en primer lugar para realizar el desarrollo histórico de la idea de límite, puesto que es necesario reconocer los factores epistemológicos que llevaron a matemáticos del pasado a concebir dicha idea de una forma determinada; también es necesario reconocer la influencia de factores sociales y culturales. Y en segundo lugar, para establecer un paralelo entre la filogenia de la idea y la ontogenia, lo cual nos permite comprender si el desarrollo de la idea matemática de límite en la historia de la humanidad afecta el desarrollo cognitivo del individuo, es decir cómo las problemáticas sociales, aspectos culturales y epistemológicos en un determinado momento en la historia se recapitulan en la forma de pensar y presentar concepciones referentes a la idea de límite. Un ejemplo claro puede tomarse de la época de la matemática griega que a partir de ciertos problemas geométricos y el carácter en la construcción de una idea de infinito, establecen la idea de límite como algo implícito en métodos y procesos para la resolución de dichos problemas.

4 CONCLUSIONES

A partir de lo realizado donde se hizo una exploración del desarrollo histórico de la idea de límite, podemos caracterizar la importancia de la Historia de las Matemáticas como fuente de un desarrollo multi-cultural; es decir comprender la relación entre las Matemáticas con diferentes campos científicos. La Historia de las Matemáticas ofrece oportunidades para el trabajo transversal entre las Matemáticas y otras disciplinas. Vista también como una actividad humana, influenciada por diferentes aspectos socio-culturales.

En ese sentido se debe replantear el papel de la Historia de las Matemáticas, debido a que en algunos casos no se trata como un objeto de estudio en sí mismo, sino como una herramienta en donde los conceptos matemáticos de la antigüedad son vistos de la misma manera a los actuales; replicando o simplemente transmitiendo lo que en la historia se ha elaborado.

Dada la problemática anterior, Radford sugiere implementar un marco teórico que garantice la articulación entre los dominios históricos y psicológicos. Para establecer dicha relación se hace uso de la teoría de la recapitulación planteada por Heackel, ya que empalma la esencia misma de estos dos dominios.

A partir de lo que plantea la teoría de la recapitulación en donde la ontogénesis recapitula la filogénesis es decir el desarrollo del sujeto está afectado por el desarrollo histórico de la humanidad, y tomando la perspectiva Vigotskyana donde en ella se manifiesta que la cultura en la cual está inmerso el sujeto afecta el desarrollo cognitivo del mismo, mediado por instrumentos u objetos y herramientas psicológicas como signos y el lenguaje, se cree que es necesario profundizar en estos dominios; histórico y psicológico, en los cuales se plantean dos perspectivas socioepistemológicas; la primera, la cual se resume en los aspectos socio-culturales y la segunda que alude a los obstáculos epistemológicos. Estas dos perspectivas recogen estos dos dominios que permite obtener una mirada más clara respecto a la existencia del paralelismo entre lo psicológico (ontogénesis) e histórico (filogénesis).

Por otra parte en los trabajos realizados por Juter y Bagni se plantea que existen dificultades para abordar lo psicológico y lo histórico. En este trabajo se realizó una exploración al desarrollo cognitivo e histórico de la idea de límite, de allí se puede mencionar aspectos en relación al tipo de historia que se está estudiando, por ejemplo una historia internalista del concepto que se está tratando, y si esta historia permite vislumbrar los mismos obstáculos epistemológicos que se evidencian, como también si permite considerar los mismos contextos socioculturales que se pudieron encontrar. Es por esta razón que se cree que resulta complejo al entender y estudiar de qué manera afecta el desarrollo sociocultural e histórico de un objeto matemático, en el proceso y desarrollo cognitivo del mismo, en el individuo. Con base en esto se establece un paralelo entre lo cognitivo y lo histórico de la siguiente manera:

En los subtemas anteriores se plasmó lo que plantea la teoría frente a los obstáculos epistemológicos (en el desarrollo histórico y cognitivo) y la perspectiva sociocultural respecto a la idea matemática de límite. Con base en esto y en el documento de (Medina, 2001), se identificaron unos posibles obstáculos epistemológicos para cada momento en la historia. Frente a esto, y comparando lo que dice la teoría y lo realizado como exploración, se encontró que los obstáculos presentes en la historia coinciden con los que se plantearon como posibles. También se encuentra que desde la teoría los obstáculos epistemológicos que plantea Sierpinska en relación a lo cognitivo coinciden con los planteados por Cornu en relación al desarrollo histórico de la idea de límite.

Por ejemplo el obstáculo desde lo cognitivo que hace alusión al horror al infinito, se puede relacionar con el que se plantea desde lo histórico que hace referencia a la noción de lo infinitamente grande e infinitamente pequeño. En ambos casos se genera un obstáculo en el cual como se menciona allí, la noción que se tenga de infinito perturba el “paso al límite”.

Como segundo obstáculo se plantea el que alude al concepto de función. Dicho obstáculo no aparece en la teoría de los obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico, aparece simplemente en la teoría cognitiva. Se puede referenciar las concepciones diferentes que tenían Newton y Leibniz frente a la noción de función, afectando sin duda alguna la forma en cómo se puede concebir la noción de límite.

Un tercer obstáculo en lo cognitivo, el obstáculo geométrico, se puede relacionar con el obstáculo desde lo histórico que hace énfasis al fracaso de enlazar la Geometría con lo numérico. Se plantea como ejemplo el método de exhausción, el cual es un método que permite trabajar y lidiar con el problema del infinito, método que es aplicado para magnitudes y no para números. Este fracaso de enlazar lo geométrico y lo numérico no permite que haya una transición para poder entender el paso al límite, como un número determinado.

Como cuarto obstáculo se propone el obstáculo lógico, en el cual se menciona que si no se tiene unos cuantificadores universales en un orden determinado estos pueden considerarse como un ente extraño. Se menciona un ejemplo en la lectura de una función en donde sí se invierte dicho orden el límite de una función seguiría un orden inverso.

El obstáculo que hace referencia a si el límite es alcanzado o no, hace presencia en lo histórico contrastando por ejemplo la perspectiva de Newton con base en las razones últimas entre dos cantidades ¿es la razón alcanzada cuando las dos cantidades se cancelan?

5 BIBLIOGRAFÍA

Arcos, J., & Sepulveda, A. (2014). *Desarrollo conceptual del cálculo. Desarrollo histórico de los conceptos del calculo. Una perspectiva docente.* Toluca, México: UAEM.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y Aprendizaje del Análisis elemental: ¿qué se puede esperar de las investigaciones didacticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1* (001), 40-55.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espiritu cientifico* (Vol. 23). Ditrito Federal, México: Siglo XXI.

Bagni, G. (2005). The historical roots of the limit notion: Cognitive development and the. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5* (4), 423-418.

Boyer, C. (1959). *The history of calculus and its conceptual development.*New York, Estados Unidos : Dover Publications Inc.

Brousseau, G. (1989). *Los obstáculos epistemológicos en la didáctica de las matemáticas.*

Cantoral, R. (2004). Acta laninoamericana de Matemática Educativa. *Desarrollo del pensamiento y lenguaje varacional, una mirada socioepistemológica.17*, págs. 1-9. México: Clame.

Cantoral, R. (2001). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. *Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos.14*, págs. 70-81. México: Clame.

Cauchy, A. (1994). *Curso de análisis.* México: Servicios Editoriales de la Facultad de.

Celso, V. (2009). El papel del principio de continuidad de Leibniz en el desarrollo del cálculo infinitesimal. *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica, 47*, 113-118.

Cornu, B. (1991). Limits. En *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 153-166). Kluwer Academic Press.

Crespo, C. (2006). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. *Un paseo por el paraíso de cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito.19*, págs. 28-34. Buenos Aires: Clame.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus* (Vol. 1). New York: Springer-Verlag.

Euclides. (1992). *Elementos de Geometría, lll- lV*. México: UNAM.

Euclides. (1992). *Elementos de Geometría, X*. México: UNAM.

Gonzáles, O. (2004). El cálculo infinitesimal leibniciano. *Signos Filosóficos* , 97-120.

Juter, K. (2006). Limits of Functions as They Developed Through Time and as Students. *Mathematical Thinking and Learning, 8* (4), 407-431.

Marx, K., & Engels, F. (1970). *The German Ideology*. (C. J. Arthur, Trad.) New York: International Publishers.

Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Revista tecne, episteme y didaxis* (9), 44-60.

Mingüer, L. (2008). Acta latinoamericana de Matemática Educativa. *Las prácticas sociaes que conforman la cultura matemática de los profesores del instituto tecnológico de Oaxaca.21*, pág. 818. México: Clame.

Neira, G. (2009). Obstaculos epistemologicos y conflictos semioticos en la educación matemática: visiones y perspectivas actuales . *Memorias VIII encuentro nacional de educación matemática y estadística* . Duitama.

Newman, J. (1968). El analista. En J. Newman, *SIGMA: El mundo de las matemáticas* (Vol. I, págs. 215-219). Grijalbo.

Newton, I. (1871). *Mathematical principles of natural philosophy.*Glasgow: University Cambridge.

Perez, G., Molfino, V., Lanzilotta, M., & Dalcín, M. (2002). Acta latinoamericana de Matemática Educativa. *Orígenes del cálculo infinitesimal: De la antiguedad al teorema fundamental.15*, págs. 514-519. Uruguay: Clame.

Piaget, J., & García, R. (1987). *Psicogénesis e Historia de la ciencia.*España: Siglo veintiuno editores.

Radford, L. (2002). Historical formation and student understanding of mathematics. En J. Fauvel, & J. Van Maanen, *History in mathematics education* (Vol. 6, págs. 143-167). New York: Kluwer academic publishers.

Radford, L. (1997). On psychology, Historical Epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural History of Mathematics. *For the learning of mathematics* , 26-41.

Radford, L. (2000). SUJETO, OBJETO, CULTURA Y LA FORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO. *Educación Mathemática, 12*, 51-69.

Rogers, L. (2000). THE BIOGENETIC LAW AND ITS INFLUENCE ON THEORIES OF LEARNING MATHEMATICS. *Research in Mathematics Education* , 225-240.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Épistémologiques Relatifs á la Notion de Limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6* (1), 5-68.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). *Epistemologies of mathematics and of mathematics education.*

Spencer, H. (1861). *Education: Intellectual, Moral and Physical.* London: Williams and norgate.

Study, T. I. (2002). *History in Mathematics Education* (Vol. 6). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, Kluwer Academic Publishers.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical “parallelism” revisited: historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line. *Educ Stud Math* , 165-183.

Vygotski, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.*Barcelona: Grijalbo: Crítica.

Vygotsky, L. S. (1981). The development of higher mental functions. *The concept of activity in Sovietic psychology* , 144-188.

Vygotsky, L. S. (1997). *The history of the development of higher mental functions* (Vol. 4). New York: Plenum Press: R. W. Rieber.

Vygotsky, L. S. (1994). *Tool and symbol in child development.* (E. R. Valsiner, Ed.) Oxford: Blackwell Publishers.

6 ANEXOS

Un ángulo histórico, una encuesta de literatura reciente sobre el uso y el valor de la Historia de la Geometría en la Educación

En este artículo se muestran algunas razones o argumentos que responden a la pregunta de ¿cómo introducir la historia de las matemáticas en clase?

1) Introducción

1.1) Configuración del problema

El articulo ofrece la perspectiva de algunos autores que describen el por qué y cómo utilizar la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las mismas, algo que de manera reducida es tratada por algunos investigadores.

1.2) Antecedentes

A partir de las investigaciones realizadas por algunos investigadores sobre el uso y el valor de la historia de las matemáticas se desprenden resultados que muestran el interés por parte de los maestros por la historia de las matemáticas, donde en diversos países se ha profundizado en grupos de investigación que tienen como fin no solo investigar sobre la historia de las matemáticas, sino su valor y su uso. De allí también se han obtenido resultados referentes a que los maestros a parte del interés por la historia de las matemáticas, no están bien proporcionados de recursos que permitan realmente utilizarla en la enseñanza. Con lo anterior, en los últimos años se ha incrementado la búsqueda de un fundamento teórico que integre la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la misma.

2) Por que el uso de la historia

A continuación se presentan una serie de argumentos con una perspectiva desde el profesor y el estudiante, los cuales permiten obtener una visión general respecto a las razones del porqué utilizar la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las mismas.

a) Argumento conceptual:

Gran variedad de autores han estudiado y mencionado, la necesidad de la historia de las matemáticas en los cursos de formación docente con el fin de fortalecer las actitudes y enriquecer el repertorio didáctico del profesor. Por otra parte si se hace un recuento en los métodos utilizados en la antigüedad, ayuda a los docentes a reflexionar sobre cómo se está desenvolviendo frente algún objeto matemático, a su vez ayuda a alejarse del hacer matemáticas y permite discutir de lo que se está haciendo con respecto a las diferentes ideas y métodos matemáticos.

Por otra parte, la historia de las matemáticas ayuda a los estudiantes a aprender de una manera no lineal puesto que en algunos casos, en los libros se presentan de manera secuencial. Además permite que el alumno adquiera un equilibrio entre el rigor y la imaginación, con el fin de evitar conclusiones sin fundamento, dando oportunidad al desarrollo del pensamiento creativo.

b) Argumento culturales:

La historia de las matemáticas ayuda a desarrollar un enfoque multi-cultural. En algunos casos puede ayudar a fortalecer la tolerancia y el respeto entre los alumnos en el aula de clase, además de consolidar una visión científica del mundo. Por otra parte es importante no aislar las matemáticas de las diferentes asignaturas de la escuela, donde el estudiante debe reconocer la interconexión e influencia entre estas. La historia de las matemáticas ofrece oportunidades para el trabajo transversal entre las matemáticas y otras disciplinas.

Teniendo en cuenta que la historia de las matemáticas puede ayudar a explicar el papel de las matemáticas en la sociedad, donde la matemática es una actividad humana y dinámica influenciada por factores sociales y culturales, permite al estudiante entender el desarrollo de las matemáticas no solo como un sistema de verdades preestablecidas, sino como una actividad humana, influenciada por diferentes aspectos socio-culturales. Por otra parte algunos autores mencionan la necesidad de mostrar a los estudiantes biografías de hombres y mujeres que han aportado en la construcción y desarrollo de las matemáticas, con el fin de por ejemplo entender el papel de la mujer en las mismas, reconociendo que no es solo obra y participación del hombre.

c) Argumentos de motivación

La historia de las matemáticas puede estimular e interesar al docente a profundizar sobre un tema específico, proporcionándole un acceso a recursos útiles en la aplicación de situaciones educativas, con el fin de generar un ambiente de discusión en el aula.

Si se hace una exploración de la historia de las matemáticas puede también ayudar a fortalecer el interés por parte de los estudiantes por el aprendizaje de las mismas. Para los estudiantes las clases pueden resultar menos aterradoras, pero si más agradables y emocionantes. Por otro lado el conocimiento sobre la historia de las matemáticas ayuda en la comprensión de la materia en sí misma, algunos autores piensan que la forma en que la historia de las matemáticas se puede aplicar en el aula de clase, es la forma en que los estudiantes revivan el trabajo creativo y pongan a la luz descubrimientos y trabajos realizados por hombres y mujeres en la antigüedad.

2.1) Objeciones prácticas planteadas por los profesores

Diferentes problemas se han planteado en la integración de la historia de las matemáticas al aula. Uno de ellos corresponde a que los profesores no tienen suficiente formación histórica, esto como consecuencia de la no integración de la historia de las matemáticas por parte de los programas de formación docente.

Otro problema subyace en el poco acceso que presentan los profesores a los materiales adecuados para hacer un enfoque histórico en las clases de matemáticas.

El ultimo problema u objeción, hace énfasis a la relación entre los dos anteriores; la falta de tiempo en la investigación sobre historia de las matemáticas y como hacer del material histórico una herramienta posible para llevar al aula de clase.

3) Como usar la historia

En este apartado, a partir de responder al por qué integrar la historia de las matemáticas en la educación matemática, se propone de qué manera (como) se puede realizar.

a) **La integración general de la historia de las matemáticas en el aula**

En la integración de la historia de las matemáticas al aula se puede hacer uso de los argumentos mencionados en el apartado 2, es decir argumentos culturales y de motivación. Por ejemplo algunas fuentes secundarias como los libros de texto presentan narraciones históricas, los cuales pueden proporcionar una introducción de conceptos que sean nuevos para los estudiantes. Estos también pueden mostrar relatos, biografías de matemáticos del pasado y eventos importantes respecto a obras destacadas en las matemáticas. Por otro lado un enfoque más profundo permite conocer sobre los aspectos sociales y culturales en las que se han desarrollado las matemáticas.

Con base en los argumentos conceptuales (apartado 2) se puede realizar el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir de un enfoque histórico, puesto que proporciona a los estudiantes ideas intuitivas respecto a un tema específico. A partir del uso de fuentes primarias y secundarias se pueden proporcionar a los estudiantes de una gran cantidad de problemas que resulten interesantes y significativos. Aun así el hacer análisis de textos y/o documentos históricos resulta difícil hacerlos de total acceso para los estudiantes, puesto que se necesita que los hechos históricos sean identificados y reconstruidos de tal manera que puedan ser comprendidos por el estudiante.

Un aspecto importante en el cómo utilizar la historia de las matemáticas, corresponde a encontrar o plantear preguntas que involucren al estudiante en el contexto histórico de estudio, corriendo el riesgo al que se enfrenta la historia, el cual está compuesto por una larga lista de ejemplos y tergiversaciones.

Por último existen diferentes posibilidades de integrar la historia de las matemáticas en el aprendizaje de las mismas, a partir de diferentes fuentes como por ejemplo: proyectos de investigación basado en textos de historia, problemas históricos, actividades de experiencias matemáticas, obras de teatro, películas y medios audiovisuales, salidas de campo y la internet.

b) los experimentos en las aulas

Para finalizar, se presentan algunos ejemplos de experimentos realizados en el aula de clase por diversos docentes, donde se encuentra inmerso los conocimientos históricos y el saber actual respecto a un objeto matemático. Un ejemplo clave, al introducir el estudio del libro *los Elementos de Euclides,* al finalizar los estudiantes mostraron mejoría en sus habilidades para hablar y debatir. Estos experimentos poseen gran diversidad, tanto a su procedimiento y su finalidad, demostrando conclusiones satisfactorias respecto al uso de la historia de las matemáticas en el aula de clase.

Bibliographic

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A HISTORICAL ANGLE', A SURVEY OF RECENT LITERATURE ON THE USE AND VALUE OF HISTORY IN GEOMETRICAL EDUCATION. *Educational Studies in Mathematics* , 223–258.

Formación histórica y la comprensión del estudiante de matemática

Introducción

En las últimas décadas se ha tenido la necesidad por parte de los educadores matemáticos, de adquirir herramientas que permitan tener un método coherente para el diseño de actividades en el aula de clase, donde dichas herramientas están contenidas en un marco teórico claro el cual ayuda al educador en la formación del conocimiento matemático y a obtener una postura epistemológica clara. Este marco teórico a su vez garantiza la articulación entre el dominio histórico y el dominio psicológico.

La falta de un marco teórico adecuado conlleva a dejar de un lado aspectos importantes, respecto a los puntos de vista sobre cómo se ha desarrollado los conceptos matemáticos en la historia. Por otra parte se presenta un problema al entender la historia de las matemáticas como la continuidad del concepto, es decir que los conceptos matemáticos de la antigüedad son vistos de la misma manera a los actuales, donde lo único que cambia es la simbología. A partir de ello los historiadores añaden racionalidades totalmente ajenas a los matemáticos del pasado.

Con base en el problema de establecer un marco teórico que garantice la articulación entre los dominios históricos y psicológicos, se acude a la versión psicológica de la teoría biológica de la recapitulación presentada por Haeckel (año). Esto da pie para la elaboración del concepto de desarrollo genético por parte de Piaget y García, argumentando sobre la versión simplista que hace Haeckel. A partir de este trabajo se encuentra una paradoja que hace referencia a la obtención del conocimiento en el individuo, donde está afectado por factores externos a su propia estructura cognitiva, pero a su vez la asimilación de los objetos están desligados de su contexto. Esta paradoja conlleva discutir sobre la influencia del entorno social sobre la evolución del conocimiento del individuo.

Uno de los motivos para realizar este trabajo fue cuestionarse sobre si existe un solo camino para el desarrollo del conocimiento, o si existen diversos. Esto se hace a partir de estudiar la diferencia entre cómo el individuo adquiere el conocimiento y el paradigma epistémico en el cual se encuentra el mismo, donde dicho paradigma hace referencia a una concepción de la ciencia con base en un conjunto de conocimientos aceptados. Con esto Piaget y García trazan una frontera que divide lo social y lo individual. Debe hacerse una distinción entre los mecanismos para adquirir el conocimiento y la manera en que son concebidos los objetos por el individuo, siendo el anterior el primer mecanismo de asimilación planteado por Piaget y García.

Con base en la relación entre la ontogénesis y la filogénesis, Piaget y García pretenden demostrar que los mecanismos para el paso de un periodo histórico al siguiente, son análogos al paso de una etapa psicogenética a la siguiente. Para esto se plantea el segundo mecanismo, el cual es un proceso que parte del análisis de los objetos (intra-objeto), seguido del análisis de las transformaciones (inter-objeto) y relaciones de los objetos (trans-objeto), hasta la construcción de estructuras. Estos dos mecanismos se consideran invariables y omnipresentes, es decir no se necesita especificar lo que son en un determinado tiempo y espacio geográfico.

Siguiendo la relación entre ontogénesis y filogénesis, Vigotsky presenta un enfoque diferente en contraposición a lo que argumentaban Piaget y Garcia, respecto a que la cultura no modifica los elementos esenciales en la adquisición del conocimiento. Para él la cultura en general modifica la actividad de las funciones mentales mediante el uso de herramientas como por ejemplo, tabletas de arcilla en la antigua Mesopotamia, o computadores en la actualidad, el uso del lenguaje, palabras o el habla interna.

En conclusión a la discusión planteada, Radford afirma la complejidad del problema de la relación entre filogénesis y ontogénesis y la importancia de trabajar hacia un marco teórico.

5.2 El papel del análisis histórico en la predicción y la interpretación de las dificultades de los estudiantes en matemáticas

Se pretende predecir si hay razones históricas que sustenten las dificultades que presentan los estudiantes referentes a algún concepto matemático. Para ello a partir de ejemplos se compara las familiaridades de las dificultades de los estudiantes con los matemáticos del pasado. Uno de estos ejemplos alude a la noción del concepto de límite, donde los estudiantes se resisten a dar una solución formal utilizando épsilon y delta en algún ejercicio, el cual con un simple cálculo aritmético lo resolverían. A partir de las condiciones y razones históricas de una transición de lo intuitivo a lo formal nos permite predecir e interpretar las posibles dificultades de los estudiantes.

Ahora bien, ejemplos como el anterior permite al profesor anticiparse sobre las posibles dificultades de los estudiantes mediante el conocimiento de la Historia de las matemáticas, siendo este lo más completo posible, pero a su vez debe realizar una investigación didáctica que enmarque las posibles dificultades que puedan presentar los estudiantes. Por último, el enfrentamiento de estas dos situaciones históricas y didácticas, debe hacerse con precaución partiendo de las limitaciones y condiciones de estos entornos.

5.3 La importancia de los estudios históricos en el diseño y análisis de las actividades de clase.

En esta sesión se muestra algunas metodologías llevadas al aula de clase a partir de estudios históricos y cómo permiten la construcción del conocimiento matemático.

Una de estas metodologías se enfoca en trasladar el discurso de algunos matemáticos y filósofos del pasado al aula (voces y ecos), con el fin de articular el vínculo que existe en la conciencia de que en la antigüedad las matemáticas y la filosofía estaban relacionadas directamente y organizadas culturalmente arraigados a patrones lingüísticos.

Uso indirecto de los estudios históricos y epistemológicos del diseño de actividades para los estudiantes

Se pretende mostrar algunos ejemplos que muestran los vínculos entre los estudios históricos y el diseño de actividades para la enseñanza de las matemáticas.

Un ejemplo muestra una investigación didáctica realizada, utilizando una metodología a partir del modelo constructivista donde se espera que el estudiante sea el que construya su propio conocimiento. En esta investigación se observa como el estudiante depende indirectamente de las indicaciones que oriente el profesor. Por otro lado para el álgebra lineal, se acude a la historia simplemente para organizar las temáticas a desarrollar y es el profesor quien indica la metodología a utilizar.

Por último, en ninguno de los ejemplos mencionados sobre la metodología implementada para tratar un objeto matemático, se basa en la discusión Histórica explícitamente, sino por el contrario se evidencia el uso de la Historia de las matemáticas de una forma indirecta, es decir en algunos casos como una simple inspiración para la reconstrucción y organización de actividades en el aula.

5.4 **Supuestos epistemológicos que enmarcan las interpretaciones de los estudiantes en la comprensión de las matemáticas**

A continuación se presentara una visión general de algunos enfoques y sus correspondientes marcos epistemológicos con el fin de vincular los fenómenos psicológicos e histórico-epistemológicos dentro del campo de la educación matemática.

5.4.1 la perspectiva de "obstáculos epistemológicos"

Se plantea la idea de obstáculo epistemológico dada por Brousseau, donde se concibe la relación entre los fenómenos histórico epistemológicos y psicológicos a partir de tres supuestos epistemológicos.

El punto de partida hacer referencia a la existencia del conocimiento y como a partir de los estudios históricos se manifiestan algunas limitaciones dentro del conocimiento. Es decir el obstáculo epistemológico como fuente de errores cuando un individuo trata de resolver un problema.

Ahora bien, el segundo supuesto se refiere a cómo el obstáculo epistemológico pertenece a donde está enmarcado el conocimiento y se diferencia de otra tipo de obstáculos como lo son los culturales, ontogénicos y didácticos. Estos obstáculos según Brousseau aparecen tanto en la historia de las matemáticas como en el individuo contemporáneo.

Por último, el tercer supuesto se evidencia en la relación estudiante-entorno, donde el maestro establece la situación y es el estudiante a partir de la apropiación de la misma, quien genera el conocimiento. Por esta razón la elaboración y organización de situaciones problema deben ser diseñadas cuidadosamente, con el fin de que sea posible superar los obstáculos epistemológicos.

Bibliografía

ICMI. (2002). *History in Mathematics Education.*New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Sobre Psicología, Epistemología histórica y la enseñanza de las Matemáticas; hacia una historia socio-cultural de las Matemáticas

El uso de la historia de las Matemáticas con fines didácticos; los cuales son llevados al aula de manera anecdótica o importando problemas cronológicamente al aula de clase para que el estudiante los resuelva. Ahora bien, si estos usos de la historia de las Matemáticas se ven afectados cuando se tiene otra mirada de las mismas, esto se puede relacionar a una especie de laboratorio epistemológico donde subyace un vínculo entre el desarrollo conceptual, histórico y moderno. El vínculo mencionado anteriormente, es evadido muy a menudo, donde se supone que el conocimiento del pasado debe estar relacionado con el moderno.

El objetivo de este artículo es contribuir a una reflexión sobre las posibilidades y las limitaciones del uso de la historia de las Matemáticas como una herramienta no ingenua con propósitos educativos. Para justificar lo anterior, se tratarán cinco secciones.

1) Algunos problemas historiográficos

En algunos casos la historia de las Matemáticas en los libros de texto se presenta de manera secuencial, es decir como una narración de eventos la cual se basa en la concepción Platonista de las matemáticas, dejando a un lado su carácter epistemológico. Esto implica que los esfuerzos de matemáticos del pasado (considerándose torpes) conlleven a una reformulación conceptual de las matemáticas modernas.

Ahora bien, si se interpreta la historia de las matemáticas fuera de la concepción Platónica, Radford plantea dos problemas ligados a esta interpretación. El primero hace referencia a que los datos históricos no son valiosos por sí mismos, sino por el contrario son valiosos en la medida en que alguien los está leyendo con alguna intención, puesto que los datos históricos resultan significativos a partir del marco conceptual en el que se esté trabajando. El segundo problema alude a encontrar la pureza de un concepto, puesto que estamos supeditados a llevar nuestras concepciones socioculturales modernas en la interpretación de datos históricos del pasado.

2) Psicología e Historia de las Matemáticas

A continuación se presentará una discusión del enlace de los resultados histórico-epistemológico frente a la psicología y la enseñanza.

Waldegg plantea que existe una relación entre la historia de las matemáticas y la psicología de las matemáticas, la cual puede ser asegurada por la epistemología. Se necesita ser explicito ante el vínculo que hay entre lo histórico y psicológico, si no se tiene ese vínculo es necesario acudir a la versión psicológica de Haeckel sobre la ley dela recapitulación;

donde se dice que el desarrollo de la idea de un sujeto (ontogénesis) está afectado por el desarrollo histórico de la idea (filogénesis).

Ahora bien, esta teoría de la recapitulación es interpretada por Piaget & García afirmando cómo el desarrollo del conocimiento tiene lugar específicamente en el marco de la evolución natural del individuo. A partir de esto, Radford realiza un análisis crítico a la interpretación de Piaget y García respecto a la teoría de la recapitulación donde no pretende decir que los investigadores en la educación Matemática del pasado no tienen en cuenta aspectos culturales. De hecho, es constante en ellos no tener en cuenta que los desarrollos cognitivos matemáticos modernos están relacionados en las secuencias de enseñanza modernas, que a su vez, están relacionados con contextos sociales y culturales que son muy diferentes a las del pasado. Por último concluye que la perspectiva sociocultural sugiere que los efectos de la cultura y la sociedad son fundamentales para la forma en que llegamos al conocimiento.

3) Obstáculos epistemológicos

En esta sección se pretende mostrar un análisis crítico de una de las perspectivas histórico-epistemológica respecto a los obstáculos epistemológicos, siendo Bachelard uno de los autores más influyentes. Donde el plantea que un obstáculo epistemológico no trata de tener en cuenta factores externos tales como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni mucho menos culpar la debilidad de los sentidos ni la mente, sino a las condiciones psicológicas que impide evolucionar el acto mismo de conocer.

A partir de esta definición, Brousseau plantea cómo el estudiante presenta errores cuando se enfrenta a un tema específico, demostrando así una lógica detrás de cómo se generan estos errores. Por otra parte, identifica la posibilidad que los obstáculos epistemológicos modifiquen sus condiciones, teniendo en cuenta el entorno cultural que se encuentra el individuo, añadiendo así un nuevo tipo de obstáculo: Obstáculos culturales.

Ahora bien, Radford a partir de lo anterior, concluye que los obstáculos epistemológicos no son resistentes a los factores culturales, puesto que la cultura no es un inconveniente para el conocimiento, partiendo que el conocimiento es una producción cultural inevitable que está enraizado a su entorno.

4) Matemáticas y cultura

En las secciones anteriores, se ha discutido cómo el conocimiento matemático está arraigado por su formación social y contexto cultural. Se presenta varios ejemplos a través de la historia, donde cada cultura tiene sus propias maneras de definir y delimitar la forma y el contenido de los objetos de investigación. Uno de ellos es el surgimiento de la matemática deductiva en Grecia, la cual se relaciona con la organización política de las ciudades basada en la ley que anima a los ciudadanos a discutir y debatir. Ahora bien, no se puede establecer con seguridad que este fenómeno cultural afectara o no el surgimiento de la matemática deductiva.

A partir de ejemplos como el anterior, Radford en su opinión, concluye que el conocimiento matemático está meramente relacionado con su entorno cultural y que la configuración y el contenido del conocimiento matemático están correctamente e íntimamente definidos por la cultura en la que se desarrolla y en el que está enraizado.

5) Comentarios finales

Con el fin de dar respuesta a las posibilidades que proporciona el análisis histórico-epistemológico de las matemáticas para la enseñanza de las matemáticas, Radford concluye desde la perspectiva socio-cultural, que el conocimiento es un proceso cuyo producto se obtiene a través de acuerdos de significados que se traduce en la actividad social de los individuos y está abarcado en el marco cultural en que los individuos están inmersos, donde la historia de las matemáticas tiene mucho que ofrecer a la epistemología de las matemáticas, puesto que también nos proporciona información sobre el desarrollo de los conocimientos matemáticos dentro de diferente culturas, por ejemplo en la forma en cómo han cambiado los significados.

Por otra parte, el análisis histórico-epistemológico nos permite informar acerca de la manera en que los programas de investigación se han enfrentado entre sí, en un momento determinado en el desarrollo de las matemáticas, no solo a través de los aspectos cognitivos sino también en el contexto de los valores y compromisos socioculturales que afectan al desarrollo de las matemáticas.

Bibliografía

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* , 26-33.

Discusión entre ontogénesis vs filogénesis en las matemáticas

Se deduce que a partir de la historia se puede dar solución a los problemas actuales que enfrentan los estudiantes para adquirir un concepto moderno, pero analizando a profundidad no es fácil vincular estos dominios "histórico y psicológico" donde la epistemología platónicano es suficiente para mostrar como los matemáticos lograron descubrir nuevos conceptos.

Ahora bien, Waldegg plantea que existe una relación entre la historia de las matemáticas y la psicología de las matemáticas, la cual puede ser asegurada por la epistemología, se necesita ser explicito ante el vínculo que hay entre lo histórico y psicológico, si no se tiene ese vínculo es necesario acudir a la versión psicológica de Haeckel sobre la ley de la recapitulación; donde se dice que el desarrollo psicológico del individuo (ontogénesis) está afectado por el desarrollo socio cultural al cual pertenezca el mismo(filogénesis).

Por otra parte esta teoría de la recapitulación no solo es aplicada para las matemáticas en general, sino a los propios conceptos y teorías matemáticas simples. Si hablamos de la relación que existe en el desarrollo de conceptos matemáticos y su origen evolutivo, se hace referencia al paralelismo histórico, que hace referencia a la observación de las dificultades obstáculos que aparecieron en la historia. Cuando se hace énfasis a la historia con un objetivo en sí mismo, este no debe ser confundido con el conocimiento de la historia de las matemáticas como un tema independiente, es decir, la historia de las matemáticas por el bien de su historia. Surgen algunas preguntas las cuales están relacionadas a la disciplina de las matemáticas, estas son: ¿De qué manera evolucionan con el tiempo las matemáticas? ¿Qué fuerzas y mecanismos pueden estar presentes en dicha evolución? ¿Es la sociedad y las circunstancias culturales las que juegan un papel en esta evolución? Si es así ¿de qué manera? ¿Dependen las matemáticas entonces de la cultura, la sociedad, el lugar y el tiempo? Dichas preguntas se obtienen desde el punto de vista *meta-matemático.*

Si nos enfocamos en la relación que existe entre las matemáticas y la cultura, el mismo conocimiento matemático esta permeado y gira entrono al contexto socio-cultural. En concordancia con el conocimiento matemático, las diferentes culturas posee sus determinaciones ante como manejar el contenido de los objetos de estudio. A modo de ejemplo, podemos aludir al surgimiento de las matemáticas deductivas en Grecia, la cual se relaciona con la organización política de las ciudades Griegas basada en la ley, animando a los ciudadanos a discutir y a debatir. Pero hasta qué punto esto es cierto, donde las formas de organización política influían en cómo se concebían las matemáticas. La historia de las matemáticas en algunos ámbitos es vista o tratada de manera superficial, en algunos casos es tratada como una secuencia de eventos, por ejemplo en los libros de texto. Una de las maneras de utilizar la historia de las Matemáticas con fines didácticos es por ejemplo relacionar anécdotas históricas con los estudiantes, o ver la historia de las matemáticas como una máquina de problemas que pueden ser llevados al aula de clases, para que los estudiantes resuelvan.

Schubring (1988) hay una conexión entre los errores de los estudiantes, obstáculos cognitivos y problemas en el desarrollo histórico de las Matemáticas. El conocimiento de los momentos importantes de la historia puede proporcionar así a los profesores una herramienta para procurar obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de las matemáticas.

Otra afirmación expresada por Rogers (1997) sobre el reclamar algún tipo de “paralelismo” entre las dificultades que puedan tener hoy los estudiantes y las aparentes dificultades de la conceptualización de las ideas matemáticas del pasado, son consecuencia de dos ámbitos; dejar de lado el proceso de interpretación y reinterpretación, ubicada en una serie de contextos socioculturales y la identificación de un concepto hoy en día como “el mismo” de tiempos pasados.

Por último, han sido muchos los investigadores que se han encargad de encontrar el valor del uso de la historia de la matemática en la educación matemática. Por esta razón es de relevancia mencionar el interés que se ha incrementado por parte de los profesores de matemáticas por profundizar en temas sobre la historia de las matemáticas. Aun así surge una cuestión respecto a ¿con que recursos cuentan los profesores de matemáticas, conforme a la historia de las matemáticas, para utilizarla en la enseñanza de estas? Es por esta razón que las investigaciones en los últimos años, refieren a la búsqueda de una metodología y fundamentos teóricos la cual integre la historia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Bibliografía

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A HISTORICAL ANGLE', A SURVEY OF RECENT LITERATURE ON THE USE AND VALUE OF HISTORY IN GEOMETRICAL EDUCATION. *Educational Studies in Mathematics* , 223–258.

ICMI. (2002). *History in Mathematics Education.* New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Jankvist, T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educ Stud Math* , 235–261.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* , 26-33.

La ley biogenética y su influencia en teorías de aprendizaje de las matemáticas

En el presente artículo se presentan antecedentes que dan origen a la ley biogenética como lo es la teoría de la recapitulación. Se tratará específicamente ejemplos desde la educación Matemática

Introducción

En los últimos años, se ha discutido sobre el progreso en la enseñanza de las matemáticas a partir de la Historia de las mismas. Dichas discusiones han conllevado a que el profesor de matemáticas se provea de la Historia para llevar problemas y actividades a los estudiantes, es decir utilizándola como una herramienta de enseñanza. Visto de este modo, el profesor de matemáticas de manera ingenua no trasciende en la construcción y fortalecimiento de aspectos culturales, sociales y económicos, donde estos a su vez influencian directamente el conocimiento.

Ahora bien, Piaget afirma que existe una amplia relación entre la historia de la Matemáticas y la teoría; donde no solo se evidencia en la misma Historia sino también en las estructuras de las operaciones mentales, las cuales están regidas por el desarrollo de un área de las matemáticas como una progresión de etapas definibles.

Por otra parte surgen dos problemáticas las cuales plantea Piaget, en los que considera en primer lugar la relación entre la construcción de procesos cognitivos y la concepción interna que se tiene de la historia de la ciencia en general, debido que resulta complejo establecer la relación entre lo Histórico y lo Psicológico. Como segundo problema, hace referencia a la universalidad, en donde alude a que el fundamento lógico-matemático es un mecanismo común a todos los seres humanos. Dicha afirmación se critica con hechos a partir de las diferencias en contextos culturales los cuales dan origen a estructuras cognitivas diferentes, es decir diferentes contextos implica diferentes procesos cognitivos.

Bibliografía

Rogers, L. (2000). THE BIOGENETIC LAW AND ITS INFLUENCE ON THEORIES OF LEARNING MATHEMATICS. *Research in Mathematics Education* , 225-240.

La noción histórica de “paralelismo”: evolución histórica y concepción de los estudiantes de la relación de orden en la recta numérica

A continuación se presentará los resultados de un estudio histórico y empírico, en un grupo de estudiantes determinado, donde el objetivo es examinar críticamente las relaciones históricas entre la evolución de conceptos matemáticos y el proceso de enseñanza y aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

Se ha argumentado que la Historia de las matemáticas influye de manera positiva en la resolución de problemas relacionados al aprendizaje de conceptos matemáticos. Por otra parte, muchos matemáticos y educadores matemáticos defienden el paralelismo entre la manera que ha evolucionado las matemáticas y el aprendizaje de los estudiantes aludiendo a la ley de Haeckel (*ontogénesis recapitula filogénesis)*. En ese sentido se ha discutido sobre un modelo de enseñanza que recapitule las raíces históricas del conocimiento matemático y a su vez se oponga al estilo axiomático-deductivo habitual.

Por otra parte, Arcavi argumenta que dicho paralelismo puede no existir, dando un ejemplo a partir de la resolución de ecuaciones lineales, donde los estudiantes utilizan métodos muy diferentes a los utilizados a lo largo de la historia. Esto no quiere decir que para el estudio de las ecuaciones lineales, haya que inspirarse en el paralelo entre lo histórico y psicológico.

Adicionalmente, se ha cuestionado la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes y concepciones semejantes adoptadas por matemáticos del pasado; donde se pone en discusión si esta relación puede ser útil en la educación matemática. Teniendo en cuenta lo anterior, Brousseau afirma que los obstáculos epistemológicos no pueden y no deben ser evitados, partiendo que son una parte importante en la adquisición de un nuevo conocimiento, pero sustenta en contra de la reproducción en el aula de hechos históricos que llevaron a los matemáticos a superar estos obstáculos. Diferentes autores afirman que:

- Existe un paralelo entre los obstáculos epistemológicos y la evolución cognitiva del estudiante, entendiéndose que este paralelo no debe tomarse textualmente puesto que el entorno de aprendizaje del pasado es completamente diferente.
- Los obstáculos epistemológicos están relacionados con los obstáculos didácticos ligados a las opciones y características del sistema educativo.

Por último Thomaidis sugiere que al transformar un concepto matemático, afecta sustancialmente su funcionalidad y la naturaleza de los obstáculos en relación con su evolución, donde los obstáculos didácticos afectan a los epistemológicos en su contexto histórico. A partir de lo anterior, se genera varios cuestionamientos referidos al paralelismo como una herramienta en la compresión de conceptos matemáticos en los estudiantes y que dificultades puede presentar dicha herramienta, además de la importancia en la enseñanza de las matemáticas de hacer un paralelo entre la concepción de un matemático del pasado y un estudiante en el aula actualmente. Ahora bien, para dar respuestas a estos planteamientos es imperativo ser conocedor de la existencia, las características y las limitaciones de cualquier paralelismo histórico.

Bibliografía

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical “parallelism” revisited: historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line. *Educ Stud Math* , 165-183.