

NIVELES DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALEATORIO PARA  
LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL

CARLOS ANDRÉS LEÓN GÓMEZ  
NICOL ALEJANDRO GUALTEROS JIMÉNEZ

DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
BOGOTÁ

2016

NIVELES DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALEATORIO PARA  
LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL

CARLOS ANDRÉS LEÓN GÓMEZ  
2012140033

NICOL ALEJANDRO GUALTEROS JIMÉNEZ  
2012140029

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en  
Matemáticas

Directora de trabajo de grado  
INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO  
Magister en Docencia de la Matemática

DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
BOGOTÁ

2016

## AGRADECIMIENTOS

*Agradecemos a nuestros padres, hermanos y familiares que nos brindaron su apoyo incondicional en todo nuestro proceso de formación profesional.*

*A la Universidad Pedagógica Nacional por ofrecer un espacio óptimo para la formación como futuros docentes a partir de una plantilla profesional de calidad.*

*A la profesora Ingrith Álvarez Alfonso por su paciencia, dedicación y compromiso en nuestro proceso de formación y en la elaboración de este trabajo.*

*Al grupo de expertos por su colaboración en la valoración de la propuesta, en especial a los doctores Humberto Cuevas y Cileda Coutinho.*

*“Los fenómenos de la didáctica son esencialmente fenómenos estocásticos”*

*Brousseau*

## RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado.
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Niveles de desarrollo del pensamiento aleatorio para la probabilidad frecuencial
<b>Autor(es)</b>	Gualteros Jiménez, Alejandro; León Gómez, Carlos Andrés
<b>Director</b>	Álvarez Alfonso, Ingrith
<b>Publicación</b>	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 87 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO, NIVELES DE DESARROLLO, PROBABILIDAD FRECUENCIAL, ALEATORIEDAD, AZAR.

2. Descripción
<p>Este es un documento desarrollado en el campo de la Educación Estocástica, específicamente en el ámbito de la probabilidad frecuencial. Esta propuesta fue diseñada por futuros Licenciados en Matemática para docentes de Matemáticas interesados en categorizar el nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial sin importar el grado de escolaridad de los individuos. En este documento se encuentran aspectos históricos y conceptuales de la probabilidad frecuencial, además se presenta antecedentes de trabajos realizados en el marco de la categorización del desarrollo cognitivo de este objeto de estudio. Los niveles propuestos en este trabajo siguen la estructura de la taxonomía SOLO y están fundamentados por los referentes teóricos, históricos y cognitivos mencionados anteriormente. Finalmente se hace uso de una evaluación de expertos con el fin de valorar los componentes de la propuesta, y modificarla atendiendo a las sugerencias o comentarios de los expertos.</p>

3. Fuentes
<p>Entre las fuentes más relevantes para la construcción de la propuesta se encuentran:</p> <p>Álvarez, I. (2006). Alternativa metodológica para la acomodación de las estructuras cognitivas acerca de polígonos. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Félix Varela, Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. Santa Clara, Cuba.</p> <p>Bersabé, R. (1995). Sesgos cognitivos en los juegos de azar: La ilusión de control. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.</p> <p>Biggs, J. &amp; Collins, K. (1982). Evaluating the quality of learning: <i>The SOLO taxonomy</i>. New York: Academic Press.</p> <p>Crespo, T. (2007). Respuestas a 16 preguntas sobre el empleo de expertos en la investigación pedagógica. Ed. San Marcos. Lima, Perú.</p> <p>Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para</p>

la enseñanza de la Estadística. En: Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.

Mateos, G. & Morales, A. (1985). Teoría subjetiva de la probabilidad: Fundamentos, evolución y determinación de probabilidades. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de ciencias económicas y empresariales, Departamento de estadística y métodos de decisión. Madrid, España.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias matemáticas. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.

NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática (M. Fernández, Trad.). Sevilla: SAEM Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

Romero, J. y Vergara, M. (2014). Razonamiento probabilístico en estudiantes de undécimo grado bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Sánchez, E. y Valdez, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, (2).

#### **4. Contenidos**

Este trabajo consta de cuatro partes fundamentales: antecedentes, marco de referencia, desarrollo de la propuesta y valoración de la propuesta.

En la primera parte del trabajo se presenta los resultados de una revisión de documentación acerca de propuestas que formulan niveles para categorizar el desarrollo del razonamiento probabilístico, a partir de lo cual se identifican elementos que no se han tenido en cuenta en estas propuestas y se toman como parte de las necesidades para elaborar unos niveles que incluyan dichos elementos.

El marco de referencia está dividido principalmente en dos partes: marco conceptual y marco cognitivo, en el marco conceptual se realiza y reporta una revisión acerca de los aspectos históricos y teóricos que conforman el concepto de probabilidad frecuencial. En el marco cognitivo, se identificaron sesgos y heurísticas presentes en el aprendizaje de la probabilidad, además se revisaron algunas propuestas de enseñanza de este objeto para identificar secuencias y conocimientos previos. Finalmente se hizo un reconocimiento normativo de la estocástica en el ámbito nacional e internacional.

Posteriormente se encuentra el desarrollo de esta propuesta basado en los fundamentos teóricos anteriormente mencionados, en esta parte están presentes Indicadores, Posibles Relaciones entre ellos, Caracterización de cada nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial, y un cuestionario que en algún momento se puede llevar al aula

para determinar el nivel de este razonamiento.

Luego se establece la metodología que se implementa para la valoración y mejoramiento de esta propuesta, esto se hace usando la Evaluación de Experto. En esta parte se reportan las características del grupo de expertos y cada una de las fases de esta metodología, una vez aplicada se realizan los ajustes de la propuesta atendiendo las sugerencias de los expertos. Finalmente se presentan las Conclusiones, Referencias y Anexos correspondientes de este trabajo.

### **5. Metodología**

Este trabajo inicia con la revisión de propuestas que intentaran categorizar el razonamiento probabilístico con el fin de tener un panorama claro de qué se ha realizado en esta área, y así identificar aspectos positivos y algunas falencias que estas pudieran tener. Posteriormente se elabora el marco de referencia en el cual se reportaron elementos conceptuales, históricos, didácticos y cognitivos, que permitieron definir los aspectos a tener en cuenta en la construcción de los niveles. Luego se usaron los elementos mencionados anteriormente para proponer diferentes indicadores que permiten caracterizar el razonamiento probabilístico frecuencial de una persona; una vez se establecieron estos indicadores se usó la estructura de la Taxonomía SOLO para definir los niveles y los indicadores presentes en cada uno de ellos.

Acto seguido se implementa la metodología de Evaluación de expertos, solicitando a un grupo de expertos valorar la propuesta con base en criterios específicos, esto con el fin de conocer falencias y fortalezas de la misma y realizar los ajustes pertinentes en caso de ser necesario. Finalmente se realizan algunos ajustes a la propuesta atendiendo a las sugerencias dadas por los expertos y se presenta el producto final.

### **6. Conclusiones**

A lo largo de este trabajo se evidencia la formulación de una propuesta que permite caracterizar el desarrollo del pensamiento aleatorio para la probabilidad frecuencial, fundamentada en propuestas que trabajan en la misma línea y soportada en un proceso de documentación realizado sobre este objeto, desde aspectos: históricos, conceptuales y didácticos. De esta manera se establecen tres categorías (Conceptos, Sesgos, Tratamiento de Datos) que intervienen en la asignación de la probabilidad desde una noción frecuencial, así se construyen indicadores para cada una de estas categorías y se establecen posibles relaciones entre los indicadores, teniendo en cuenta la complejidad estructural propuesta en la taxonomía SOLO. A partir de los documentos revisados y los indicadores establecidos se caracterizan cinco niveles que permiten categorizar el desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial.

Esta propuesta fue sometida a una Evaluación de Expertos, esta valoración en términos generales fue positiva, ya que se destaca la aplicabilidad de este trabajo y la importancia de implementar la probabilidad desde un punto de vista experimental en la escuela. Además se diseñó un posible cuestionario que permite identificar los indicadores presentes en este razonamiento y así ubicarlo en su respectivo nivel.

Por otra parte, a partir de la elaboración de este trabajo surgió la necesidad de implementar un nuevo concepto, el cual acopia y refiere al razonamiento relacionado con la experimentación o simulación de situaciones aleatorias y el cálculo e interpretación de la probabilidad desde la noción frecuencial, conjunto de elementos al cual se denominó *razonamiento probabilístico frecuencial*.

Finalmente se resalta la importancia de llevar a cabo un Trabajo de Grado de manera conjunta ya que esto permite generar un ambiente académico que se ve fortalecido mediante la discusión entre pares, basándose en fundamentos teóricos y prácticos, garantizando la veracidad y calidad de los argumentos propuestos por cada uno de los participantes. Dichas discusiones son mediadas por un profesional con un conocimiento pleno de la temática a trabajar, y que permite a los futuros docentes de Matemáticas tener sus primeros acercamientos en la construcción de literatura especializada.

<b>Elaborado por:</b>	Gualteros Jiménez, Alejandro; León Gómez, Carlos Andrés
<b>Revisado por:</b>	Álvarez Alfonso, Ingrith

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	09	06	2016
--	----	----	------

## CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN.....	7
2. JUSTIFICACIÓN.....	9
3. OBJETIVOS.....	11
3.1. OBJETIVO GENERAL.....	11
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	11
4. ANTECEDENTES.....	12
5. MARCO DE REFERENCIA.....	17
5.1. ANÁLISIS CONCEPTUAL.....	17
5.1.1. <i>Desarrollo histórico de la probabilidad</i> .....	17
5.1.2. <i>Noción frecuencial de la probabilidad</i> .....	20
5.2. PERSPECTIVA DIDÁCTICA Y NORMATIVA.....	21
5.2.1. <i>Pensamiento aleatorio y sistemas de datos</i> .....	22
5.2.2. <i>Didáctica de la probabilidad frecuencial</i> .....	25
5.2.3. <i>Heurísticas y sesgos en la probabilidad</i> .....	27
5.2.4. <i>Taxonomía SOLO</i> .....	29
6. DESARROLLO DE LA PROPUESTA.....	31
6.1. INDICADORES.....	31
6.2. CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES.....	32
6.2.1. <i>Nivel 1 (Preestructural)</i> .....	34
6.2.2. <i>Nivel 2 (Uniestructural)</i> .....	35
6.2.3. <i>Nivel 3 (Multiestructural)</i> .....	36
6.2.4. <i>Nivel 4 (Relacional)</i> .....	37
6.2.5. <i>Nivel 5 (Abstracción Expandida)</i> .....	39
6.3. PAUTAS PARA DETERMINAR NIVELES DE DESARROLLO.....	40
7. VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA.....	43
7.1. SELECCIÓN DE EXPERTOS.....	43
7.2. VALORACIÓN DE PROPUESTA.....	46
7.3. AJUSTES A LA PROPUESTA.....	49
8. CONCLUSIONES.....	52
REFERENCIAS.....	54
ANEXO A. ACTIVIDADES E & A DE LA ESTADÍSTICA.....	58
ANEXO B. ACTIVIDADES PRÁCTICA I.P.E.....	65

ANEXO C. AUTOEVALUACIÓN DE EXPERTICIA .....	70
ANEXO D. RESULTADOS AUTOEVALUACIÓN FA Y NC .....	72
ANEXO E. LISTA DE EXPERTOS.....	73
ANEXO F. NIVEL DE COMPETENCIA DE LOS EXPERTOS .....	74
ANEXO G. PROPUESTA ENVIADA .....	75
ANEXO H. VALORACIÓN DE LA PROPUESTA .....	83

## LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Jerarquía para evaluar razonamiento probabilístico de y con la distribución binomial. Tomada de landín y sánchez (2010).....	12
Tabla 2. Jerarquía para el razonamiento binomial. Tomada de sánchez y landín (2011). .....	13
Tabla 3. Propuesta desarrollada por garzón y garcía (2009). .....	25
Tabla 4. Heurísticas y sesgos de probabilidad. ....	28
Tabla 5. Niveles taxonomía solo. Tomada de hernández, et al., (2003). ....	30
Tabla 6. Indicadores del razonamiento probabilístico frecuencial. ....	32
Tabla 7. Clasificación de indicadores. ....	32
Tabla 8. Respuestas y relaciones en los indicadores del nivel 1. ....	35
Tabla 9. Respuestas y relaciones en los indicadores del nivel 2. ....	36
Tabla 10. Respuestas y relaciones en los indicadores del nivel 3. ....	37
Tabla 11. Respuestas y relaciones en los indicadores del nivel 4. ....	39
Tabla 12. Respuestas y relaciones en los indicadores del nivel 5. ....	39
Tabla 13. Fuentes de argumentación de los expertos. Tomado de creso (2007). ....	44
Tabla 14. Autoevaluación nivel de conocimiento del tema. ....	44
Tabla 15. Indicadores para la valoración de la propuesta. Adaptada de álvarez (2006). ....	47
Tabla 16. Reformulación de los indicadores del razonamiento probabilístico frecuencial. ....	51

## 1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo del pensamiento estocástico en Colombia según el Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998) se enfoca en la recolección, organización, análisis y representación de datos; si estos procesos son llevados a cabo desde un enfoque predictivo, es decir, que el estudiante sea capaz de anticipar resultados dentro de unos rangos y tomar decisiones basadas en los datos, se generan nociones de aleatoriedad.

Partiendo de lo anterior se presenta un trabajo de grado en el marco de la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual aborda una propuesta de categorías que permiten identificar el nivel de desarrollo del pensamiento aleatorio en cuanto a la probabilidad frecuencial.

Dicho trabajo está desarrollado en dos partes, la primera presenta el marco de referencia en el cual se reportan resultados de consultas acerca del objeto matemático a tratar, en este caso la Probabilidad Frecuencial, comenzando desde los primeros registros de su aplicación, desarrollo y formalización. Además se muestra la Taxonomía SOLO la cual se toma como base para el diseño de los niveles de desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con el objeto de estudio.

En la segunda parte del documento se encuentra el desarrollo de la propuesta, donde se exponen los indicadores formulados por los maestros en formación para identificar el nivel de desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con la probabilidad frecuencial a partir de los elementos formulados en el marco de referencia; estos niveles son validados por medio de una evaluación de expertos de la cual se reportan sugerencias y/o recomendaciones. Finalizando el documento con las conclusiones, bibliografía y los respectivos anexos.

## 2. JUSTIFICACIÓN

Durante el proceso de formación inicial los autores de esta propuesta notaron que los pensamientos numérico, espacial y variacional que hacen parte del pensamiento matemático (MEN, 1998) tienen una forma de categorizar el nivel de razonamiento del estudiante. Sin embargo, a finales del año 2014 los maestros en formación desarrollaron una práctica pedagógica en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística enfocada en objetos propios de la probabilidad frecuencial teniendo en cuenta el enfoque expuesto por el MEN (2006) para el desarrollo del pensamiento estocástico; para ello diseñaron y aplicaron una serie de actividades, las cuales tenían como objetivo enseñar y evaluar el aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de 7° grado. Al aplicar estas actividades e intentar analizar los resultados teniendo en cuenta una propuesta o referente teórico, se evidencia que los criterios para realizar una categorización respecto al desarrollo del pensamiento aleatorio son limitados en comparación a los otros pensamientos. Porque por ejemplo, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003) proponen acciones mentales y niveles para categorizar el razonamiento covariacional, el cual está ligado al pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Van Hiele (1986) plantea cinco niveles para caracterizar el razonamiento geométrico, asociados estos al pensamiento espacial. Mientras que en el campo del álgebra y la aritmética, para el razonamiento variacional y el pensamiento numérico, Kaput (2000), Kieran (1989) y Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2012) entre otros, afirman que este tipo de razonamiento se puede caracterizar usando determinados niveles, los cuales categorizan la respuesta del sujeto más no al sujeto, dado que en la mayoría de los casos estos niveles se adaptan a un tema específico en cada uno de los anteriores ámbitos.

En el campo del pensamiento aleatorio o estadístico, algunas propuestas de enseñanza y aprendizaje toman como punto de partida para caracterizar dicho pensamiento la taxonomía Structure of Observed Learning Outcomes [SOLO] propuesta por Biggs y Collis (1982), sin embargo esta taxonomía es aplicable para cualquier otro campo del conocimiento humano, por lo que en muchas ocasiones ha sido usada para identificar la

comprensión de los estudiantes en cuanto a temas del pensamiento aleatorio, como lo son el diagrama de caja, la probabilidad en general y la interpretación de datos, entre otros.

Teniendo en cuenta lo anterior, se espera realizar una propuesta fundamentada en la taxonomía SOLO o en otra estructura que se pueda adaptar al pensamiento aleatorio con el objetivo de plantear niveles que permitan caracterizar el desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con el objeto de estudio probabilidad frecuencial, ya que esta noción de la probabilidad permite que el estudiante identifique características esenciales de un experimento aleatorio, para evitar que caiga en sesgos comunes como lo son la equiprobabilidad y las secuencias aleatorias, expuestos por Batanero, Cañizares, Ortiz, y Serrano, (1998); además de que al trabajar esa noción, también se abordan las nociones intuitiva y clásica de la probabilidad, lo que permite generar secuencialidad en el conocimiento y por ende niveles.

### 3. OBJETIVOS

En este trabajo se plantea un objetivo general, conducente a elaborar una propuesta en el campo de la didáctica de la probabilidad, fundamentado en cuatro objetivos específicos.

#### 3.1. Objetivo general

Formular una propuesta que permita caracterizar el desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con la probabilidad frecuencial.

#### 3.2. Objetivos específicos

- Fundamentar la elaboración y formulación de la propuesta a partir de marcos teóricos y conceptuales.
- Conocer los componentes conceptuales y procedimentales que implica el objeto de estudio probabilidad frecuencial, como fundamentos para los niveles de desarrollo del pensamiento.
- Proponer ejemplos de preguntas que permitan identificar el nivel de desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con la probabilidad frecuencial.
- Validar la propuesta a partir de una evaluación de expertos.

## 4. ANTECEDENTES

A continuación se presentan algunas propuestas que parten de la taxonomía SOLO que permiten analizar los resultados de un proceso de enseñanza en el campo de la probabilidad.

Landín y Sánchez (2010) proponen cuatro niveles de razonamiento probabilístico en lo relacionado con las distribuciones binomiales:

Nivel 1. Subjetivo	Nivel 2. Transicional	Nivel 3. Cuantitativo informal	Nivel 4. Numérico
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aunque se reconoce la distribución de Bernoulli el razonamiento es idiosincrásico o basado en sesgos cognitivos; por ejemplo, al evaluar probabilidades binomiales se presenta el sesgo de representatividad, el de equiprobabilidad o se cae en la ilusión de la linealidad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se representan los elementos, no necesariamente de manera exhaustiva, mediante secuencias de E (éxitos) y F (fracasos). Se considera el parámetro <math>n</math> de la binomial en la longitud de las secuencias.</li> <li>• Para evaluar la probabilidad se utiliza, bien o mal, la definición clásica (de Laplace) de probabilidad o se utiliza el valor esperado. Revierte frecuentemente a razonamiento subjetivo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se reconoce el carácter combinatorio de la situación. Se considera la variable <math>k</math> al separar los casos favorables.</li> <li>• El cálculo de combinaciones se presenta en dos niveles:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- mediante una lista organizada o</li> <li>- utilizando diagrama de árbol para calcular los casos favorables</li> </ul> </li> <li>• Se aplica la definición clásica o, a veces, se aplica la regla del producto para calcular la probabilidad de una secuencia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se reconocen la variable aleatoria y sus parámetros; su carácter combinatorio y se aplica la regla del producto. Se calculan las combinaciones apoyándose en el triángulo de Pascal o en la fórmula.</li> <li>• Se plantea la solución en términos de una instancia de la expresión general de la distribución binomial <math>B(n, p, k)</math> o del binomio de Newton. Se obtiene la solución mediante el uso de tablas, calculadora, computadora o mediante cálculo directo en la fórmula</li> </ul>

*Tabla 1. Jerarquía para evaluar razonamiento probabilístico de y con la distribución binomial. Tomada de Landín y Sánchez (2010).*

Poco después estos mismos autores reformulan estos niveles llamándolos jerarquía de razonamiento binomial, tomando como base los resultados de tareas de probabilidad binomial aplicadas a un grupo de estudiantes de bachillerato. La nueva formulación es:

Nivel	Descripción
<b>Nivel 1 Subjetivo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aunque se reconoce la distribución de Bernoulli y posiblemente se elija la opción correcta no la argumenta en absoluto o la argumentación es de tipo idiosincrásico y/o con base en algún sesgo cognitivo.</li> <li>• Es posible que se muestren rasgos de conocimientos pertinentes, como diagramas de árbol o la regla del producto pero sin coherencia, con componentes extraños o con gran cantidad de errores</li> </ul>
<b>Nivel 2 Transicional</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se representan los elementos del Espacio Muestral de manera conveniente aunque no necesariamente de manera exhaustiva.</li> <li>• Así mismo, para evaluar la probabilidad, se utiliza, bien o mal, la definición clásica de probabilidad o se usa el valor esperado.</li> <li>• También se clasifican en esta categoría respuestas que se apoyan en la regla del producto y/o calculan o usan coeficientes binomiales, pero de manera parcial, o sin hacer los cálculos correspondientes o con errores importantes</li> </ul>
<b>Nivel 3 Cuantitativo informal</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se reconocen el carácter combinatorio de la situación. Se considera la variable <math>k</math> al separar los casos favorables.</li> <li>• Se calculan combinaciones mediante una lista organizada o mediante la elaboración un diagrama de árbol</li> <li>• Se aplica la definición clásica de probabilidad y se llega a la respuesta correcta.</li> <li>• De manera alternativa, se aplica la regla del producto aunque con resultados parcialmente correctos.</li> <li>• En ocasiones se calculan y usan los coeficientes binomiales pero con errores de cálculo o se utiliza la fórmula binomial pero se omiten los cálculos</li> </ul>
<b>Nivel 4 Numérico</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se reconocen la variable aleatoria, los parámetros de la distribución binomial y el carácter combinatorio de la situación. Se utiliza la regla del producto y se cuentan las combinaciones para obtener una respuesta correcta.</li> <li>• La respuesta puede ser parcialmente correcta, pero utiliza la regla del producto y calcula el coeficiente binomial con el triángulo de Pascal o con la fórmula de las combinaciones o, también puede clasificarse en esta categoría respuestas que hacen uso de la fórmula de la distribución binomial, aunque con algunos errores o con resultados parciales</li> </ul>
<b>Nivel 5 Abstracto</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se reconocen los parámetros de una distribución binomial; se plantea el problema y obtiene la solución en términos de una instancia de la expresión general de la distribución binomial <math>B(n, p, k)</math> o del binomio de Newton.</li> <li>• Se reconocen la influencia de los parámetros <math>n</math> y <math>p</math> en la forma gráfica de la distribución</li> </ul>

*Tabla 2. Jerarquía para el razonamiento binomial. Tomada de Sánchez y Landín (2011).*

Esta jerarquización se centra en la comprensión del estudiante sobre la probabilidad binomial, es decir, que él tenga la capacidad de explicar el porqué de sus respuestas y procedimientos. Sin embargo, como el foco de esta investigación es la probabilidad binomial, obliga al estudiante a tener conocimientos formales de la probabilidad clásica y binomial; debido a ello no es posible hacer uso de esta jerarquización para caracterizar el razonamiento de un sujeto que no haya tenido acercamientos conceptuales con la probabilidad.

En Jones, Thornton, Langrall y Mogill (1997) y en Shaughnessy y Ciancetta (2004), citados en Sánchez y Valdez (2013) se presentan unos niveles de muestreo que se toman

como base para la propuesta de Sánchez y Valdez (2013). En este trabajo proponen cuatro niveles de razonamiento sobre el concepto de probabilidad, estos niveles no se enfocan en una noción de probabilidad específica, sino que trabaja con las nociones subjetiva, frecuencial, clásica y las relaciones entre ellas. Así los niveles formulados son:

Nivel 1 (Subjetivo): Asigna la probabilidad desde su intuición, sin interpretar el resultado ni hacer inferencias con este.

Nivel 2 (Transicional): Asigna la probabilidad de una manera subjetiva a partir de frecuencias relativas y el espacio muestral del experimento, pero sin relacionar las características de cada una.

Nivel 3 (Cuantitativo informal): Se asigna la probabilidad desde más de una noción, lo relaciona con la idea subjetiva y empieza a formar inferencias, pero no asimila la variabilidad.

Nivel 4 (Numérico): Se asigna la probabilidad usando las tres nociones asimilando la variabilidad para hacer inferencias.

Se considera que la relevancia de estos niveles radica en la consideración de los procesos de: interpretar, analizar y comparar la probabilidad sin dejar de lado el juicio a priori del individuo. Sin embargo, no es conveniente que el sujeto tenga que asignar la probabilidad usando la noción frecuencial, clásica y subjetiva para estar en el nivel más alto del razonamiento probabilístico, ya que esto puede depender del desarrollo del pensamiento asociado con la edad y al grado de escolaridad del sujeto. Además no presentan indicadores para poder ubicar el razonamiento de cada individuo en los respectivos niveles. También se considera que no es una herramienta cercana para el profesor de matemáticas del aula de la educación básica, ya que faltan elementos prácticos para llevar esta propuesta al aula, y así ayudarle al profesor a categorizar el razonamiento de los estudiantes.

Sánchez y Valdez (2013) asumen las mismas denominaciones para los niveles según la propuesta de Sánchez y Landín (2011), pero en este caso las descripciones de los niveles no se relacionan entre sí, ya que en Sánchez y Landín (2011) el objeto de

estudio es la distribución binomial de probabilidad y en Sanchez y Valdes (2013) son las diferentes nociones de probabilidad (clásica, frecuencial, subjetiva).

Por otra parte Romero y Vergara (2014) realizan un trabajo en el cual plantean unos niveles de razonamiento probabilístico siguiendo la estructura de la taxonomía SOLO, a partir de los siguientes temas asociados a la probabilidad:

- Experimento aleatorio
- Secuencias aleatorias
- Tratamiento de intuiciones
- Interpretación de enunciados en términos frecuenciales
- Espacio muestral
- Eventos simples y compuestos
- Completar e interpretar tablas de frecuencias
- Diagramas de barras
- Ley de Laplace
- Regla de la suma y del producto
- Comparación de probabilidades
- Convergencia estocástica

Para identificar los desempeños de los estudiantes diseñan un test para cada uno de los temas mencionados. Uno de los aspectos importantes de esta propuesta es la completitud de la misma, ya que tienen en cuenta cada componente conceptual y procedimental que se deben considerar a la hora de asignar una probabilidad. Pero cada uno de estos análisis se realiza de forma totalmente independiente, lo cual por ejemplo, no permite ver la relación que hay entre el concepto de aleatoriedad y el espacio muestral, y así evidenciar la justificación de un estudiante del por qué el espacio muestral de un experimento es vacío.

Ateniendo a la anterior revisión, para el diseño de los niveles que se desarrolla en esta propuesta, se tendrán en cuenta:

- Mantener el enfoque argumentativo que se evidencia en la mayoría de estas propuestas debido a que los cálculos necesarios para asignar una probabilidad

desde la noción frecuencial son de poca complejidad en comparación con otras nociones.

- Los elementos, tanto conceptuales como procedimentales, que hacen parte de la noción frecuencial de la probabilidad, de tal manera que estén relacionados entre sí, pues son estos los que componen en esencia el objeto de estudio.
- Se brindará una herramienta para los profesores que sea de fácil aplicación al aula, lo cual implica que cada nivel propuesto tenga indicadores necesarios que permitan categorizar el desarrollo del pensamiento.
- El enfoque de esta propuesta es categorizar el nivel de desarrollo de la probabilidad frecuencial sin importar la edad o grado de escolaridad del sujeto, ya que no se considera necesario el uso de conocimientos previos para ubicar el razonamiento en los niveles iniciales.

## 5. MARCO DE REFERENCIA

Mediante la elaboración de este marco de referencia se brinda el soporte teórico de la propuesta. Así, se presenta el objeto de estudio desde el punto de vista conceptual y cognitivo. En el primero se muestra la evolución y desarrollo que ha tenido la teoría de la probabilidad, atendiendo al surgimiento de cada uno de los conceptos de esta teoría desde la concepción frecuencial; en el segundo se muestran los antecedentes didácticos que permiten tener un panorama de las investigaciones realizadas respecto a este tema, con el fin de asumirlas como soporte para la propuesta.

### 5.1. Análisis conceptual

En este apartado se presenta el desarrollo histórico de la probabilidad frecuencial (sin dejar de lado las otras nociones) y sus fundamentos teóricos.

#### 5.1.1. Desarrollo histórico de la probabilidad

La teoría de la probabilidad en un principio se enfocó en dar respuesta a algunas preguntas referentes a los juegos de azar, por ejemplo, predecir resultados, repartir ganancias, determinar si es conveniente jugar, etc. A continuación se presenta el desarrollo de los juegos de azar y de la teoría de probabilidad, desde sus orígenes hasta su formalización axiomática.

Existen posibles registros de juegos de azar que datan de la época de la prehistoria según Vega-Amaya (2002), estos registros pertenecen a las culturas sumeria y asiria (alrededor del año 5000 A.C); que tomaban el hueso del talón de algunos animales denominado astrágalo y lo arrojaban sobre una superficie, el hueso podría caer en cuatro posiciones diferentes lo que podría ser un antecedente del juego de los dados. Asimismo en la cultura egipcia (alrededor del año 3000 A.C) se han encontrado pinturas de este hueso en las tumbas de los faraones, sin embargo no se tiene la certeza si este hueso fue utilizado con fines religiosos o de diversión. Además se tienen registros del uso de este hueso cerca del año 1200 A.C. en diferentes regiones de España, Italia y Francia. Se

presume que Palamedes inventó los dados que se utilizan comúnmente a partir del juego con este tipo de huesos.

De acuerdo con Alonso, Rodríguez y Ordás (2004) durante el renacimiento Galileo Galilei (1564-1642) y Girolamo Cardano (1501-1576) de forma independiente, se apasionaron por resolver algunos de los problemas más conocidos sobre el tema de los dados, la fascinación por este tema llegó a tal punto que se publicaron los libros *Sobre la puntuación en tiradas de dados* (Galileo) y *Libro de los juegos de azar* (Cardano). Otro de los aportes de Galileo fue definir y diferenciar el *error sistemático* y el *error aleatorio*, posteriormente esto sirvió como apoyo para diferenciar la probabilidad de la estadística.

Teniendo en cuenta lo expuesto por Alcázar (2007) las primeras definiciones sobre la probabilidad clásica se le atribuyen a Jacob Bernoulli (1654-1705) y Abraham de Moivre (1667-1754), en las cuales establecen la probabilidad de un evento como el cociente entre el número de apariciones favorables y el número de simulaciones. Cabe destacar que en estas definiciones no se tenía en cuenta el concepto de equiprobabilidad. Análogamente Bernoulli descubre la forma de calcular la probabilidad de un evento a partir de la experimentación, realizando muchas simulaciones del experimento y calculando el cociente descrito anteriormente, sin embargo al referirse a “muchas simulaciones” daba pie para generar bastantes confusiones con el número de simulaciones que se debían realizar. De esta forma se le atribuye a Jacob Bernoulli la introducción a la noción frecuencial de probabilidad, formulando el conocido Teorema que lleva su nombre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left( \frac{f}{n} - p > \varepsilon \right) = 0$$

Es decir, sea  $\varepsilon$  un valor positivo y “pequeño”,  $p$  la probabilidad real del evento. La diferencia positiva entre la frecuencia relativa y la probabilidad real (siempre y cuando sea mayor que  $\varepsilon$ ) tiende a 0 cuando el número de simulaciones del experimento tiende a infinito.

Siméon Denis Poisson (1781-1840) realizó aportes relevantes a la teoría de la probabilidad frecuencial, a tal punto que “suyo es el término *Ley de los Grandes*

*Números*, para indicar la estabilidad de las frecuencias relativas y la media aritmética de un número grande de observaciones” (Garzón, 2006, p. 174).

En 1866 John Venn (1834-1923) publicó el libro *La lógica del azar*, en el cual aproxima la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de frecuencias relativas, según Mateos y Morales (1985) este es uno de los primeros trabajos de la probabilidad frecuencial. En el siglo XX uno de los matemáticos que desarrolló esta teoría fue Richard Von Mises (1883-1953), quien en 1926 propuso el término “colectivo” para describir la noción de frecuencia relativa, entiéndase por colectivo como “una sucesión de un número grande de observaciones idénticas o experimentos, conduciéndonos cada uno de éstos a un resultado numérico determinado” (Franquet, 2008, p. 205). Para identificar estas sucesiones Von Mises define dos axiomas:

Aleatoriedad: No se admite que haya regularidades en la sucesión de los resultados de un experimento aleatorio.

Convergencia: “La sucesión de frecuencias relativas tiende a un límite cuando aumenta la sucesión de sucesos” (Mateos y Morales, 1985, p.116).

Sixto Cámara (1878-1964) (citado en Benito (2002)), publica un artículo en el cual propone una definición de límite estocástico de una sucesión numérica, además expone algunas de las propiedades de dicho límite para mostrarlas como una generalización de las propiedades del límite aritmético. Esta definición la propuso con el fin de retomar el trabajo realizado en el año 1933, en el que expresó la necesidad de reemplazar el término *límite aritmético* por *límite estocástico* en el postulado de convergencia propuesto por Von Mises.

Bajo este breve panorama del desarrollo histórico de la probabilidad, se concluye que para el diseño de los niveles que permitan categorizar el desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con la probabilidad frecuencial se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Simulación del experimento bajo idénticas condiciones.
- Recolección e interpretación de datos.

- El número necesario de simulaciones para la estabilización de las frecuencias relativas.
- La noción de límite estocástico.

### 5.1.2. Noción frecuencial de la probabilidad

Desde un punto de vista frecuencial “la probabilidad de un suceso A se define como el límite de una frecuencia relativa, cuando el experimento se realiza un número infinito de veces” (Sánchez, 2004, p.8), formalmente:

$$P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}$$

*i = 1, 2, ..., k donde k es el número de puntos muestrales,*

*n el número de simulaciones y  $n_i$  es el número de apariciones del evento  $A_i$*

Varios autores presentan sus puntos de vista sobre el uso de la noción frecuencial de la probabilidad. Por ejemplo Godino, Batanero y Cañizares (1987) afirman que la probabilidad de un evento se puede calcular a partir de su frecuencia relativa, esto es posible si el experimento se puede repetir bajo idénticas condiciones indefinidamente, lo que conlleva a que la probabilidad empírica o frecuencial sea aplicable a cualquier experimento aleatorio; a lo cual Serrano, Batanero y Ortiz (1996) agregan que esta interpretación no es netamente objetiva, dado que el sujeto debe asimilar que aunque no es posible repetir el experimento bajo condiciones estrictamente iguales se deben mantener las condiciones que impidan sesgos.

Ortiz, Batanero y Serrano (1996) afirman que el uso de la noción frecuencial promueve al desarrollo del razonamiento proporcional ya que la frecuencia relativa se expresa como una proporción entre los casos en los cuales se obtiene el resultado de interés y el total de casos. Además afirman que usando esta noción de probabilidad se establece una conexión más evidente entre la probabilidad y la estadística, ya que de esta forma los conjuntos de datos, además de describir el comportamiento de una población se presentan como una herramienta de predicción justificada y estructurada, permitiendo una mayor objetividad en la toma de decisiones.

Todos los teóricos de la probabilidad coinciden con el planteamiento del sentido común en reconocer que el conocimiento de las frecuencias relativas de ocurrencias influye convenientemente, a veces, en los juicios de probabilidad. De no ser así, las agencias de encuestas no merecerían más crédito que los adivinos y su interés por la información estadística sería un desatino inútil. (Black (1979) citado en Mateos y Morales, 1985, p. 110).

Sin embargo, Batanero (2005) expone dos problemas en el uso de esta noción, el primero tiene que ver con cálculo de la probabilidad con las frecuencias relativas dado que no se obtiene el valor exacto, solo una aproximación. El segundo consiste en saber el número exacto de simulaciones para que la aproximación sea “buena”.

Bajo estas miradas, se considera que para el diseño de los niveles se debe tener en cuenta, desde lo conceptual:

- La similitud de las condiciones del experimento aleatorio, en cada replicación de tal forma que no alteren los resultados.
- La recolección, organización y sistematización de los datos arrojados por el experimento.
- La comparación y estimación de las frecuencias relativas de los diferentes eventos dentro de un mismo experimento.
- La importancia de las frecuencias relativas a la hora de predecir para no adivinar el resultado de un experimento.
- La relación directamente proporcional entre el número de simulaciones del experimento y la cercanía que tendrá su aproximación a la probabilidad real.
- La relación que existe entre la asignación de una probabilidad usando la noción frecuencial y el razonamiento proporcional, ya que la frecuencia relativa de un evento se expresa como una proporción.

## 5.2. Perspectiva didáctica y normativa

En este ítem se muestran los fundamentos didácticos necesarios para el diseño de la propuesta, para ello se toman documentos nacionales e internacionales orientadores para el desarrollo del pensamiento aleatorio, y además se tienen en cuenta sesgos y heurísticas de la probabilidad y teorías estructurales del conocimiento.

### 5.2.1. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

En 1998 el MEN publicó los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, en este documento estructura el desarrollo del pensamiento matemático a través de cinco pensamientos y sus respectivos sistemas, de tal forma que el conocimiento enseñable llegue de manera integral a la escuela:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas
- Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

En dicho documento el MEN (1998) ubica la probabilidad dentro del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y propone la estadística como la rama de las matemáticas que domina, describe y maneja la incertidumbre, ya que esta rama permite ordenar los fenómenos aleatorios de manera estadística facilitando el uso de inferencias sin dejar de lado su margen de error, con el fin de tomar decisiones en situaciones de la vida cotidiana donde esté presente el azar. Así, es importante que los estudiantes recolecten, organicen, sistematicen, representen y analicen los resultados de cualquier tipo de experimentos en un contexto significativo ayudando a conjeturar sobre dichas situaciones, estos procesos no se deben presentar de manera formal debido que las reglas de cálculo se alejan de la naturaleza de lo aleatorio y oculta las nociones de incertidumbre.

Más adelante esta misma entidad presenta los Estándares Básicos de Competencia Matemática [EBCM] en 2006, en este documento el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos siguen el mismo enfoque presentado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, sin embargo en los EBCM se amplía la idea de aleatorio, ya que también lo llaman pensamiento probabilístico o estocástico, además se afirma que “el azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones” (MEN, 2006, p. 65).

En MEN (2006) se proponen cuáles deben ser las competencias mínimas de una persona que ha culminado su proceso de escolaridad básica y media, entiendo por competencia “como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase” (MEN, 2006, p. 49), siendo esta una noción restringida usada en el campo de la Educación Matemática antes que el MEN realizará la construcción de estos documentos normativos.

Teniendo en cuenta lo establecido en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y algunas posturas sobre la idea de comprensión se establece un nuevo y más amplio significado para el término competencia, visto “como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (MEN, 2006, p. 49).

De acuerdo a esta idea de competencia surge el interrogante sobre qué es ser matemáticamente competente. Según el MEN (2006) una persona es matemáticamente competente si en toda actividad matemática que desarrolle están presentes procesos generales, tales como los propuestos por el MEN (1998):

- Razonamiento
- Resolución y planteamiento de problemas
- Comunicación
- Modelación
- Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Desde un punto de vista internacional el National Council of Teacher Mathematics (NCTM) en el año 2000 propuso los estándares para la enseñanza de las matemáticas en Norteamérica. En el estándar Análisis de Datos y Probabilidad se plantea la probabilidad como el medio que permite realizar inferencias de un conjunto de datos, por ende es necesario que el estudiante sea capaz de identificar la relación entre la estadística y la probabilidad, por medio de la formulación de preguntas de su entorno cuya respuesta no sea obvia, y al tratar de resolverlas lo lleven a recoger y organizar

datos a partir de encuestas o simulaciones, esto con el fin de realizar inferencias o conclusiones sobre las preguntas planteadas sin desconocer que hay incertidumbre en dichas conclusiones. Además resaltan que las conclusiones del estudiante se pueden basar en datos recolectados por él mismo o suministrados por otros. Se recomienda que en los primeros niveles de escolaridad el profesor suministre los instrumentos de recolección y organización de datos, sin la necesidad que el estudiante reconozca la razón de usar estos instrumentos y no otros.

A medida que van pasando de nivel, deberían invertir más tiempo planificando la recogida de datos y evaluando cómo funcionan sus métodos para obtener información sobre las preguntas. En los niveles medios, se debería trabajar más con datos recogidos por otros o generados mediante simulaciones. En la etapa 9-12, deberían comprender los diversos propósitos de las encuestas, los estudios de observación y los experimentos. (NCTM 2003, p. 52).

Finalmente en este documento se resalta que el Análisis de Datos y Probabilidad es un medio que permite al estudiante conectar entre sí algunas ramas de las matemáticas, además facilita que el estudiante conecte la matemática con otras ciencias en contextos cotidianos. Por ejemplo, “utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones.” (NCTM, 2003, p. 252), muestra de manera explícita dicha relación.

En el ámbito nacional e internacional se resaltan las siguientes características del Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos, a tener en cuenta para el diseño de los niveles:

- Contexto. El sujeto debe identificar las situaciones azarosas de su vida cotidiana y diferenciarlas de aquellas que son deterministas.
- Inferencias. Utilizar los resultados de un estudio estadístico para emitir conclusiones predictivas acerca del resultado de un experimento y la incertidumbre de dicha predicción.
- Estadística-Probabilidad. Usar la noción frecuencial de probabilidad como el medio que conecte la estadística con la probabilidad.
- Competencia matemática. Las respuestas ubicadas en los niveles más altos deben reflejar que el sujeto tiene dominio de los cinco procesos generales.

Además se ha de asumir que el sujeto debe reconocer la fiabilidad de los datos recogidos por él o suministrados por una fuente confiable de información, teniendo en cuenta el contexto en el que se recolectaron, esto siguiendo las sugerencias dadas entre otros por el NCTM (2003).

### 5.2.2. Didáctica de la probabilidad frecuencial

En esta sección se muestran diferentes propuestas de enseñanza de la probabilidad frecuencial, con el objetivo de identificar algunas secuencias a seguir para la construcción del razonamiento probabilístico y así determinar cuáles deben ser los conocimientos previos que se deben tener en cuenta para generar los indicadores de los niveles que permitan categorizar el desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con la probabilidad frecuencial.

Garzón y García (2009) utilizan un juego diseñado por ellas para presentar el concepto de probabilidad, este juego consiste en descubrir el personaje del oponente y mover una ficha hasta llegar al final de una trayectoria antes que el otro jugador, cada jugador moverá su ficha un espacio si obtiene un resultado específico al lanzar un dado de 6 caras o una moneda equilibrada (un jugador escoge el dado y el otro la moneda manteniendo su elección hasta finalizar el juego). A continuación se muestra la secuencia a seguir para introducir el concepto de probabilidad y las actividades desarrolladas por los estudiantes en cada secuencia:

<b>Secuencia</b>	<b>Temática</b>	<b>Acciones de estudiantes</b>
Secuencia 1	Azar, experimentos aleatorios, y determinísticos	Construcción de un personaje a partir de experimentos aleatorios.
Secuencia 2	Espacio Muestral	Crear estrategias para descartar opciones de personaje del compañero.
Secuencia 3	Suceso Seguro, imposible, elemental.	Elección de diferentes tipos de suceso para dar la partida
Secuencia 4	Frecuencias absolutas y relativas	Reflexión de estrategia de juego comparando posibilidades a partir de frecuencias relativas. (juegan)
Secuencia 5	Cálculo y comparación de probabilidades	Elección de estrategia final a partir del cálculo y comparación de probabilidades

*Tabla 3. Propuesta desarrollada por Garzón y García (2009).*

En esta propuesta se identifica que antes de abordar la asignación de probabilidades, el estudiante debe tener conocimientos acerca de azar, experimentos aleatorios, espacio muestral y eventos simples, seguros o imposibles, con el fin de permitir al estudiante realizar buenas aproximaciones de la probabilidad de ocurrencia de un evento. Aunque el estudiante no maneje estos elementos desde un punto de vista formal se hace necesario que él tenga nociones intuitivas de lo que ellos son, cómo se comportan y las relaciones que existen entre ellos.

De otra parte, Serrano (1996), propone una serie de actividades que permite introducir los conceptos básicos de la probabilidad frecuencial, a grandes rasgos, esta tesis consta de dos secciones: 1) Prueba diagnóstica. 2) Secuencias aleatorias y asignación de probabilidad con noción frecuencial. Analizando los resultados de la prueba diagnóstica se evidencia la relevancia que la autora le da a la identificación, creación y comparación de las secuencias aleatorias, además pretende indagar acerca de la traducción entre diversos sistemas de representación como el paso de los datos simulados a una tabla de frecuencias. Partiendo de los argumentos presentados y las preguntas realizadas se infiere que el estudiante necesita conocer o tener nociones sobre espacio muestral. La segunda actividad planteada pretende sortear las dificultades evidenciadas al analizar los resultados de la prueba diagnóstica, para esto se diseña una serie de preguntas en las cuales el estudiante identifica las características necesarias para que una secuencia sea aleatoria y clasifique las que lo son, luego usa este concepto para realizar inferencias acerca del resultado de la siguiente simulación y sus ideas intuitivas de probabilidad para inferir cuáles secuencias son más probables. Finalmente pretende que el estudiante reconozca la proporcionalidad que existe entre el número de simulaciones y la frecuencia absoluta del evento con el fin de identificar cuáles eventos son más probables que otros.

Yáñez (2003), citado en Mantilla y Martínez (2007) define una secuencia a seguir para introducir las nociones básicas del concepto de probabilidad a partir de los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral, eventos y probabilidad frecuencial. Esta secuencia se menciona en el marco de los antecedentes de una propuesta didáctica para

la enseñanza de la probabilidad frecuencial en la educación pre-universitaria, la cual es acorde con las secuencias presentadas por Garzón y García (2009), y Serrano (1996).

En conclusión, a partir de las propuestas revisadas y expuestas anteriormente, se reconoce como necesario que el sujeto tenga nociones en relación con azar, aleatoriedad, espacio muestral, secuencias aleatorias y tipos de eventos para poder realizar una buena aproximación de la probabilidad usando la noción frecuencial. De esta manera, en el desarrollo de la propuesta se clasificarán estos elementos según su importancia a la hora de asignar una probabilidad. De acuerdo a esta clasificación se generan indicadores que permiten categorizar el nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico en relación con la probabilidad frecuencial.

### 5.2.3. Heurísticas y sesgos en la probabilidad

Kahneman, Slovic y Tversky (1982) (citado en Díaz, 2003) define la heurística como reglas simples que llevan a un sujeto a tomar juicios acerca de un experimento aleatorio basándose en creencias, experiencias o inferencias intuitivas debido a su falta de conocimiento probabilístico formal desde cualquier enfoque. Si se presenta alguna heurística lo lleva a evidenciar algún sesgo de probabilidad. Así, tomando como referencia varios autores que reportan asuntos sobre este tema, se construye la Tabla 4 con la definición de cada heurística y los sesgos asociados a ellas:

Heurística/ Definición		Sesgos/Definición	
Representatividad	“la evaluación del grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría, un acto y un actor o, más generalmente, un resultado y un modelo” (Tversky y Kahneman, 1983; citado en Díaz, 2003, p. 3).	Insensibilidad al tamaño de la muestra	Ocurre cuando el “estadístico de una muestra será independiente de su tamaño” (Díaz, 2003, p. 3)
		Concepción errónea del azar	Según Bersabé (1995) sucede cuando el sujeto cree que en las secuencias aleatorias siempre están presentes patrones irregulares.
		Falacia del jugador tipo I	Bersabé (1995) afirma que este sesgo sucede al asegurar que el resultado de un experimento aleatorio será un evento A basándose en la simulación del experimento donde había una racha favorable para un evento B.

		Falacia del jugador tipo II	Bersabé (1995) afirma que este sesgo sucede al asegurar que el resultado de un experimento aleatorio será un evento A basándose en la simulación del experimento donde había una racha favorable para un evento A.
		Falacia de la conjunción	Se produce cuando el sujeto tiende a “creer que es más probable la intersección de dos sucesos que su unión” (Díaz, 2003, p. 5).
Disponibilidad	“Mediante el heurístico de la disponibilidad, una persona evalúa la probabilidad de un suceso aleatorio en términos de la facilidad para encontrar ejemplos o asociaciones relevantes de esa misma clase de sucesos” (Tversky y Kahneman, 1973; citado en Bersabé, 1995, p. 34).	Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos	Díaz (2003) identifica que este sesgo ocurre cuando se considera más probable un evento cuando es más fácil recordar ejemplos o situaciones asociadas a este.
		Atribuciones flexibles	Bersabé (1995) afirma que se presenta este sesgo cuando una persona atribuye su éxito de anticipar el resultado de un experimento aleatorio a su habilidad y su fracaso a factores externos como la suerte, rachas, dificultad, etc.

*Tabla 4. Heurísticas y Sesgos de probabilidad.*

Existen otros sesgos que son producto de otras heurísticas, las cuales hasta el momento no se han podido identificar, los siguientes son los sesgos reportados por diferentes autores:

- Sesgo confirmatorio: Ocurre cuando el sujeto solo tiene en cuenta los resultados favorables de un experimento aleatorio (Bersabé, 1995).
- Sesgo determinista: Sucede cuando una persona cree que todo se modela de manera determinista, dejando de lado el azar, la incertidumbre y la aleatoriedad. Guisasola y Barragués (2002)
- Sesgo de equiprobabilidad: Ocurre cuando el sujeto afirma que todos los eventos de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (1998)

El objetivo de realizar esta documentación sobre heurísticas y sesgos en la probabilidad es clasificar los sesgos de acuerdo a la forma en la que interfieren para formular una aproximación de la probabilidad de un evento. Por ejemplo, si una persona presenta el sesgo determinista, es más factible que se encuentre en un nivel inicial o primario en

relación con una persona que presenta el sesgo de facilidad para recuperar ejemplos, ya que en el sesgo determinista no se tiene ninguna noción de azar ni de aleatoriedad, mientras que en el de facilidad, es posible que tenga nociones claras de azar y aleatoriedad, pero debido a sus experiencias concibe un evento como más probable que otro.

#### 5.2.4. Taxonomía SOLO

Desde la segunda mitad del siglo XX muchas investigaciones se han orientado a identificar los procesos realizados para dar respuestas a un problema, una vez se identifican estos procesos se realiza una categorización utilizando niveles de complejidad del razonamiento.

Las primeras propuestas de una taxonomía que permite describir y categorizar el razonamiento fueron: la taxonomía cognitiva de Benjamin Bloom publicada en el año 1956, posteriormente Robert Gagné propuso su propio modelo taxonómico de aprendizaje, sin embargo estas propuestas son limitadas ya que:

Tienen muy poca relevancia en el sentido de los aspectos estructurales de los resultados de aprendizaje, puesto que se centran en aspectos del análisis lógico del contenido y del proceso de aprendizaje, y no tiene alcance para estudios sobre los diferentes resultados adquiridos para una materia dada. (Marton et al., 1997; citado en Hernández, Martínez, Da Fonseca y Rubio, 2005, p.80)

Asumiendo el argumento de Hernández, et al., (2005) una de las teorías que mejor se ajusta al objetivo de esta propuesta es la taxonomía expuesta por John Biggs y Kevin Collins en 1982. En esta teoría se presenta una mirada taxonómica de las diferentes formas de cómo una persona selecciona y procesa la información ya sea familiar o no para él, dicha información puede ser matemática o formar parte de diversos campos del conocimiento humano. Medrano (2003) afirma que en la teoría de Biggs y Collins se llega a la siguiente conclusión: los estadios de desarrollo de Piaget son engañosos a la hora de clasificar la respuesta de un estudiante, dado que estas etapas se basan en la edad y no en los conocimientos que el sujeto pueda tener de un tema, por tanto un adulto que según Piaget se encuentra en el estadio operatorio formal debe resolver un

problema de manera abstracta, pero Biggs y Collins sostienen que no es posible resolverlo de manera abstracta si no está familiarizado con el problema, de esta manera Biggs y Collins plantearon unos criterios que permiten la elaboración de los niveles de la taxonomía SOLO:

- El nivel de atención y memoria.
- El establecimiento de relaciones y asociaciones.
- La consistencia y la elaboración teórica.

De este modo “Biggs y Collins, presentaron en 1982 una propuesta para evaluar los diferentes niveles de complejidad estructural en los resultados de aprendizaje alcanzados” (Hernández, et al., 2005, p. 80)

<b>Nivel</b>	<b>Descripción</b>
I. Preestructural	Respuesta centrada en aspectos irrelevantes de la propuesta de trabajo, con contestaciones evasivas o tautológicas del trabajo.
II. Uniestructural	Respuestas que contienen datos informativos obvios, los cuales han sido extraídos directamente del enunciado.
III. Multiestructural	Respuestas que requieren de dos o más informaciones del enunciado, los cuales siendo obtenidas directamente de éste, son analizadas separadamente, no de forma interrelacionada.
IV. Relacional	Respuestas extraídas tras el análisis de los datos del problema, integrando la información en un todo comprensivo. Los resultados se organizan formando una estructura.
V. Abstracción Expandida	Respuestas que manifiestan la utilización de un principio general y abstracto que puede ser inferido a partir del análisis sustantivo de los datos del problema y que es generalizable a otros contextos.

*Tabla 5. Niveles Taxonomía SOLO. Tomada de Hernández, et al., (2003).*

Para la construcción de los indicadores de cada nivel de esta propuesta se tendrá en cuenta la descripción de los niveles de la taxonomía SOLO, así por ejemplo, los indicadores del nivel 1 deben caracterizar un razonamiento que este centrado en aspectos irrelevantes, dando respuestas como “no se sabe”, “no se puede determinar”, “el futuro no se puede predecir” o de carácter determinista.

## 6. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Teniendo en cuenta los aspectos identificados anteriormente respecto al razonamiento probabilístico, se generan indicadores sobre conceptos, sesgos y tratamiento de los datos recolectados a partir de experimentos aleatorios, datos necesarios para la asignación de probabilidad desde una noción frecuencial. Usando dichos indicadores se establecen las posibles relaciones entre ellos para poder, a partir de ello, caracterizar el razonamiento ubicando su desarrollo en un determinado nivel.

### 6.1. Indicadores

A continuación se presenta la Tabla 6, en la que se clasifica y describen sesgos, conceptos, y el tratamiento que se le dan a los datos, esto en relación con la asignación de probabilidad desde una noción frecuencial.

Categoría	Indicadores/Descripción
Conceptos	C <sub>1</sub> : Las respuestas evidencian un carácter evasivo ya que se desconocen los procedimientos y conceptos para cuantificar la ocurrencia de un evento.
	C <sub>2</sub> : Identifica y clasifica situaciones donde está presente el azar y la aleatoriedad.
	C <sub>3</sub> : Define espacio muestral de un experimento aleatorio clasificando los tipos de eventos.
	C <sub>4</sub> : Compara secuencias aleatorias en términos de más probable que, menos probable que o igualmente probables.
	C <sub>5</sub> : Calcula la probabilidad frecuencial de un evento sin reconocer la necesidad de la repetitividad del experimento y por ende realiza pocas experimentaciones.
	C <sub>6</sub> : Calcula la frecuencia relativa de un evento partiendo del número necesario de experimentaciones o simulaciones para que dichas frecuencias tiendan a estabilizarse.
	C <sub>7</sub> : Calcula la frecuencia relativa de un evento teniendo en cuenta su límite estocástico, es decir, la cercanía existente entre la probabilidad real y la experimental.
Sesgos	S <sub>1</sub> : Determinista: No reconoce ni diferencia las situaciones azarosas de las que no lo son.
	S <sub>2</sub> : Falacia del Jugador Tipo I y II: Predice el resultado de un experimento basado en rachas favorables o no favorables.
	S <sub>3</sub> : Concepción Errónea del Azar: Considera que las secuencias aleatorias nunca pueden tener algún patrón.
	S <sub>4</sub> : Atribuciones Flexibles: Intenta manipular el resultado de un experimento aleatorio a partir de creencias personales o mitos.
	S <sub>5</sub> : Confirmatorio: Considera la probabilidad frecuencial partiendo de la frecuencia absoluta de un evento.
	S <sub>6</sub> : Insensibilidad al Tamaño de la Muestra: Aproxima una probabilidad partiendo de un número muy pequeño de simulaciones.
	S <sub>7</sub> : Equiprobabilidad: Calcula e interpreta la frecuencia relativa como una aproximación de probabilidad pero considera a priori que todos los eventos definidos sobre un experimento aleatorio son igualmente probables.
	S <sub>8</sub> : No presenta ningún sesgo.

Tratamiento de datos	T <sub>1</sub> : Desarrolla experimentos aleatorios, sin tener en cuenta si se llevan a cabo bajo idénticas condiciones.
	T <sub>2</sub> : Realiza experimentos aleatorios teniendo en cuenta que se deben hacer bajo idénticas condiciones para que su resultado sea confiable.
	T <sub>3</sub> : Diseña experimentos aleatorios teniendo en cuenta las condiciones necesarias para que su resultado sea confiable.
	T <sub>4</sub> : Manipula herramientas tecnológicas que le permiten simular experimentos aleatorios.
	T <sub>5</sub> : Reconoce la validez de los datos y es capaz de trabajar con los resultados de simulaciones hechas por él mismo o por otros.
	T <sub>6</sub> : Asigna probabilidades basándose en resultados de experimentos propios o ajenos, además reconoce el propósito de realizar las simulaciones e interpreta la probabilidad.

Tabla 6. Indicadores del razonamiento probabilístico frecuencial.

De esta manera, los indicadores de las categorías conceptos y tratamiento de datos son “acumulables” a excepción del primer indicador de cada una de estas dos categorías, por ejemplo, si está presente el indicador T<sub>5</sub> implica que los indicadores T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub> y T<sub>4</sub> también lo están. Por otra parte los indicadores de sesgo no son “acumulables”, por tanto la presencia de uno no implica la presencia de los anteriores.

## 6.2. Caracterización de los niveles

Partiendo de la descripción realizada para cada indicador, se construye la Tabla 7 que contiene la clasificación de dichos indicadores según su complejidad estructural. Esta clasificación se realiza con base en los cinco niveles de complejidad propuestos en la Taxonomía SOLO.

Nivel de Complejidad	Indicadores
Preestructural	S <sub>1</sub> ; C <sub>1</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> .
Uniestructural	C <sub>2</sub> ; C <sub>3</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>3</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>7</sub> ; T <sub>1</sub> .
Multiestructural	C <sub>3</sub> ; C <sub>5</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> ; T <sub>2</sub> ; T <sub>5</sub> .
Relacional	C <sub>6</sub> ; C <sub>4</sub> ; S <sub>8</sub> ; T <sub>5</sub> ; T <sub>4</sub> ; T <sub>3</sub> .
Abstracción Expandida	C <sub>7</sub> ; S <sub>8</sub> ; T <sub>6</sub> .

Tabla 7. Clasificación de indicadores.

A continuación, se definen los niveles del *razonamiento probabilístico frecuencial* entendiendo este razonamiento como aquel que está relacionado con la experimentación o simulación de situaciones aleatorias, el cálculo e interpretación de la probabilidad desde la noción frecuencial, a partir de las relaciones existentes entre los indicadores (Tabla 6) clasificados en cada nivel de complejidad estructural (Tabla 7). Estas

relaciones se identifican usando ejemplos de respuestas y argumentos de estudiantes de secundaria y maestros en formación sobre algunas situaciones azarosas.

Estos ejemplos de respuesta son tomados de diferentes espacios y experiencias académicas de los autores de esta propuesta. Dentro del plan de estudios del Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas (PCLM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) se propone el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística, en el cual los estudiantes inician su acercamiento con la didáctica de la estadística y de la probabilidad. Este espacio fue cursado en el periodo académico 2014-2 (de Agosto a Diciembre de 2014), en el cual se diseñó una serie de actividades que permitieran la introducción de la probabilidad a estudiantes de grado séptimo del Colegio Mercedario San Pedro Nolasco; dado que los estudiantes no habían tenido un acercamiento con la probabilidad se escogió la noción frecuencial para abordar este concepto matemático, ya que esta noción facilita el paso de la estadística a la probabilidad. Algunas actividades fueron adaptaciones de las propuestas didácticas de González (2008) y Coutinho (2001), para finalizar ese proceso de enseñanza los maestros en formación diseñaron una evaluación de selección múltiple con única respuesta para identificar los posibles sesgos en el razonamiento de los estudiantes (Anexo A, Parte III).

En el periodo académico 2015-2 (de Agosto a Diciembre de 2015) los autores de esta propuesta cursan el espacio académico Práctica de Integración Profesional a la Escuela (Práctica I.P.E.), en el cual se realizan modificaciones de las actividades propuestas en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística atendiendo a las dificultades observadas en la aplicación de los talleres (Anexo B), luego de las modificaciones se aplicaron a estudiantes de noveno y décimo de dos colegios oficiales (Escuela Normal Superior Distrital María Montessori y Colegio Técnico Comercial Manuela Beltrán IED).

Finalmente se recolectó información de posibles respuestas a tareas relacionadas con la probabilidad frecuencial en el marco de la XXXV Jornada del Educador Matemático<sup>1</sup> (30 de septiembre, 1° y 2 de octubre de 2014) mediante un pilotaje a maestros en formación de las actividades correspondientes a la práctica del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística (Anexo A, Parte I y II).

### 6.2.1. Nivel 1 (Preestructural)

El razonamiento probabilístico ubicado en este nivel refleja la modelación de las situaciones aleatorias bajo un modelo determinista (sesgo  $S_1$ ), por ende las respuestas de los individuos son evasivas, evidenciando el desconocimiento de los elementos relacionados con la cuantificación del azar, además sus argumentos se asocian a otros sesgos como:  $S_5$ ,  $S_2$  y  $S_4$ . Por ende aun no es posible que se tenga un tratamiento de los datos, cuando no acepta la aleatoriedad. Ejemplo de razonamiento en este nivel se puede ver en situaciones tales como:

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
Juan todos los días para ir al colegio debe ingresar a la estación de Transmilenio más cercana de su casa, allí espera alguna de todas las posibles rutas que le sirven para llegar hasta la estación cercana al colegio. ¿Cuál de las rutas que le sirven será la que pase primero? ¿Por qué razón crees que no es posible asegurar el resultado de esta situación?	No sé cuál pase primero, porque no conozco el futuro.	Este tipo de respuesta refleja un carácter evasivo, ya que se sabe que no es posible asegurar el resultado de una situación azarosa pero se puede tratar de predecir el resultado partiendo del espacio muestral del experimento y la equiprobabilidad o no de los puntos muestrales, es evidente la presencia de $C_1$ .
	Siempre pasa el Ruta Fácil, porque es el que pasa más.	En esta respuesta refleja el sesgo determinista y sus argumentos muestran como se relaciona este sesgo con el sesgo confirmatorio, por tanto se identifica la relación existente entre $S_1$ y $S_5$ .
En un partido cualquiera del Chelsea, se analiza la cantidad de tiros que falla Falcao durante el transcurso del juego ¿puedes decir con seguridad cuál será el total de tiros fallados antes del partido? Justifica tu respuesta.	Todos porque él no está haciendo goles.	En esta situación se identifica la presencia de los sesgos determinista y falacia del jugador, ya que basa su respuesta en una racha. Relación entre $S_2$ y $S_1$ .
	Si todos, porque estoy seguro que no va a hacer	Esta respuesta evidencia un carácter netamente determinista, se identifica

<sup>1</sup> Este evento se realiza semestralmente en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, en el cual estudiantes y profesores de la Licenciatura en matemáticas, e invitados profesionales en el ámbito de la Educación Matemática se encargan de preparar y ejecutar conferencias, concursos, talleres, etc., para toda la comunidad universitaria.

	goles en ese partido.	la presencia del indicador $S_1$ .
¿Cuál es el resultado al lanzar un dado?	Seis, porque los sople y eso me da suerte y siempre voy a sacar el mayor número.	Modela la situación de manera determinista a partir de mitos. Se evidencia la presencia de $S_1$ y $S_4$ .

Tabla 8. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 1.

Ya que el razonamiento de este nivel se caracteriza por modelar toda situación de manera determinista esto hace que se omita la información experimental o del enunciado, por ende el tratamiento de los datos es nulo, de ahí que en este nivel no está presente algún indicador de tratamiento de datos.

### 6.2.2 Nivel 2 (Uniestructural)

El razonamiento probabilístico en este nivel se caracteriza por el reconocimiento del azar y los tipos de eventos ( $C_2$  y  $C_3$ ), pero se desconocen las características fundamentales para realizar una aproximación de la probabilidad cercana a la real, ya que la información usada en este proceso es obtenida directamente de las condiciones de los problemas sin cuestionar su validez, omitiendo su análisis; es decir trabaja con los datos presentados en los enunciados sin tener en cuenta la existencia de otros conjuntos de datos que permiten hacer inferencias sobre el comportamiento futuro de los experimentos ( $T_1$ ), además de se reconoce la existencia de varios sesgos que interfieren en la aproximación de la probabilidad ( $S_n$ ), por ejemplo:

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
Luego de lanzar el dado diez veces se tomaron los siguientes datos: 5, 6, 1, 4, 5, 2, 3, 3, 3, 3. ¿Qué tan probable es que salga 3 en el siguiente lanzamiento y por qué?	Es muy probable porque en los últimos lanzamientos ha salido el tres.	En esta respuesta se evidencia el reconocimiento del azar, pero está basada en rachas. Por tanto están presentes los indicadores $C_2$ y $S_2$ .
	Es del 50% porque existen dos posibilidades: que salga o no.	Es claro que en esta respuesta se reconoce la presencia del azar, pero cree que cualquier evento tiene un 50% de ocurrencia, de esta manera se evidencian la relación de los indicadores $C_2$ y $S_7$ .

<p>Se seleccionaron 5 dados que difieren en su tamaño y peso, realice 20 lanzamientos de un dado para identificar cuál es la probabilidad de que el resultado dé un número par.</p> <p>A) ¿Los 20 lanzamientos los haría con un solo dado o con varios? ¿Por qué?</p> <p>B) Realice la tabla de frecuencias para dichos lanzamientos y diga cuál es la probabilidad que salga un número par.</p>	<p>A) Los hice con más de un dado para que los resultados sean más variables.</p> <p>B) 15% porque en 15 lanzamientos salieron números pares.</p>	<p>Estas respuestas evidencian que se realiza el experimento sin mantener las mismas condiciones, además se calcula la probabilidad partiendo de la frecuencia absoluta. Indicadores <math>T_1</math>; <math>C_3</math>; <math>S_5</math>.</p>
<p>Se lanzó 10 veces una moneda y se anotaron los resultados C, S, C, S, C, S, C, S, C, S ¿Cree que es posible obtener estos resultados y por qué?</p>	<p>No es posible porque están intercalados.</p>	<p>Esta respuesta refleja que se cree que una secuencia aleatoria no puede tener algún patrón y ser producto del azar. Por tanto está presente el indicador <math>S_3</math>.</p>
	<p>Sí porque si lanzo la moneda con la mano derecha obtengo cara y con la mano izquierda obtengo sello.</p>	<p>Se evidencia la presencia del indicador <math>S_4</math>.</p>

Tabla 9. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 2.

### 6.2.3 Nivel 3 (Multiestructural)

El razonamiento probabilístico que se encuentre en este nivel se caracteriza por analizar información obtenida directamente de los enunciados, pero dicho análisis se hace de manera separada ( $T_n$ ), es decir, tiene los conceptos necesarios para dar respuesta a las preguntas ( $C_n$ ) pero la falta de asociación de estos conceptos con el contexto de los problemas, impide dar la respuesta correcta ya que los argumentos presentados permiten inferir la presencia de sesgos ( $S_n$ ). Además el razonamiento utilizado para resolver los ejercicios o problemas se hace sin tener en cuenta los análisis realizados en ejercicios anteriores.

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
-----------	-----------------------	-----------------

<p>Considere la siguiente situación: Juan y María lanzan cada uno 3 dados 10 y 100 veces respectivamente y anotan los resultados de cada uno de ellos. Consideran el evento A que resulte 1, 2, 3. Para aproximar la probabilidad realizan la tabla de frecuencias relativas para todos los resultados y afirman que la probabilidad del evento A es del 10%.</p> <p>¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?</p> <p>a. La aproximación de Juan es correcta, porque realizó todos los procedimientos necesarios.</p>	<p>a. La aproximación de Juan es correcta, porque realizó todos los procedimientos necesarios.</p>	<p>En esta respuesta se trabaja con datos recolectados por otros, pero no se tiene en cuenta la cantidad de simulaciones, es decir, están presentes los indicadores <math>T_5</math> y <math>S_6</math>.</p>
	<p>b. Las aproximaciones de Juan y María son correctas, porque realizaron todos los procedimientos necesarios.</p> <p>c. La aproximación de Juan no es correcta, porque realizó muy pocas repeticiones del experimento.</p>	<p>b. Las aproximaciones de Juan y María son correctas, porque realizaron todos los procedimientos necesarios.</p>
<p>Se desea determinar la probabilidad de que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto.</p>	<p>Coger un dado y lanzarlo 20 veces de la misma forma, y anotar el resultado de cada lanzamiento. Luego agrupar los números que son pares y los que no lo son, y calcular la frecuencia relativa de los pares.</p>	<p>En esta respuesta se identifica la necesidad de realizar las experimentaciones bajo idénticas condiciones para que el resultado no se vea afectado además se clasifican los eventos favorables y no favorables a partir del espacio muestral lo que implica un reconocimiento del azar, sin embargo considera suficiente 20 experimentaciones para aproximar la probabilidad. Indicadores presentes en esta respuesta: <math>C_3</math>, <math>T_2</math> y <math>S_6</math>.</p>

Tabla 10. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 3.

#### 6.2.4 Nivel 4 (Relacional)

El razonamiento probabilístico de este nivel se caracteriza por el análisis interrelacionado de la información que está presente en la situación, ya sea explícita o implícitamente, además usa la tecnología como un recurso que le ayuda a realizar los procedimientos de manera ágil, reconociendo la eficiencia de los software para hacer tareas repetitivas y aleatorias ( $T_n$ ). Por ende hay un reconocimiento de los conceptos que

se ponen en juego en el momento de aproximar una probabilidad ( $C_6$ ), de esta manera es posible que en el razonamiento de este nivel esté inmerso algún sesgo que no sea determinante para aproximar la probabilidad ( $S_7$ ).

Situación	Ejemplos de respuesta	Características																
Se desea calcular la probabilidad que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto y calcúlela.	Uso la función 'aleatorio entre' de Excel para generar números aleatorios entre 1 y 6. Luego copio esta función 500 veces, finalmente uso las herramientas de Excel para hacer la frecuencia relativa.	Se evidencia el diseño de una simulación en un software que permite simular el comportamiento de experimentos aleatorios, además se resalta la necesidad de realizar un gran número de simulaciones para calcular la frecuencia relativa ( $C_6$ ), esto implica que de manera implícita se están realizando las simulaciones bajo idénticas condiciones y que se establece el espacio muestral para experimentos aleatorios. En este procedimiento están presentes los indicadores: $C_6$ , $T_4$ , $S_8$ .																
	Tendría que hacer 300 veces este experimento y luego calcular la frecuencia del evento.	En esta respuesta es clara la necesidad de realizar un gran número de repeticiones manuales de los experimentos para calcular la frecuencia relativa, además maneja los conceptos suficientes para aproximar la probabilidad. En este procedimiento están presentes los indicadores: $C_6$ , $T_3$ , $S_8$ .																
<p>A continuación se muestra el resultado de 300 simulaciones del lanzamiento de un dado realizada en Excel:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Resultado</th> <th>Frecuencia Abs.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>42</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>63</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>38</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>51</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>46</td> </tr> <tr> <td><b>Total general</b></td> <td><b>300</b></td> </tr> </tbody> </table> <p>¿Cuál sería el procedimiento a seguir para calcular la probabilidad de que salga 4, y por qué?</p>	Resultado	Frecuencia Abs.	1	42	2	63	3	38	4	51	5	60	6	46	<b>Total general</b>	<b>300</b>	Calcular la frecuencia relativa del 4 usando la tabla, porque se realizaron muchas experimentaciones y no es necesario lanzar el dado.	Es evidente el reconocimiento de la validez de los datos recogidos por otros, ya que se acepta el número de simulaciones y la manera como se repitieron, por ende son usados para aproximar la probabilidad. Indicadores presentes en esta respuesta: $T_5$ , $S_8$ y $C_6$ .
Resultado	Frecuencia Abs.																	
1	42																	
2	63																	
3	38																	
4	51																	
5	60																	
6	46																	
<b>Total general</b>	<b>300</b>																	
Se lanzó 10 veces una moneda y se anotaron los resultados C, S, C, S, C, S, C, S, C, S ¿Crees que es posible obtener estos	Sí porque todas las secuencias de cualquier experimento aleatorio son igualmente probables.	Se evidencia la presencia de los indicador $C_4$ y $S_7$ , ya que se considera que todos los eventos de cualquier experimento aleatorio son equiprobables y está realizando comparaciones																

resultados y por qué?		entre secuencias aleatorias que no son mencionadas en el enunciado.
-----------------------	--	---

Tabla 11. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 4.

### 6.2.5 Nivel 5 (Abstracción Expandida)

En este nivel hay una ausencia de sesgos ( $S_8$ ) en el razonamiento probabilístico permitiendo una aproximación de la probabilidad cercana a la real ( $C_7$ ) y sus argumentos develan la comprensión de las condiciones, características, finalidad y aplicación de cada uno de los conceptos relacionados con la probabilidad frecuencial con el objetivo de hacer inferencias en un contexto matemático o cotidiano ( $T_6$ ). De este modo están presentes algunos procesos generales propuestos por el MEN, tales como modelar, comunicar y conjeturar.

Situación	Ejemplos de respuesta	Características																
Se desea calcular la probabilidad de que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto y calcúlela.	Usar un programa para simular este experimento las veces que sean necesarias para que se establezcan las frecuencias y dé una aproximación cercana a la probabilidad real, calcular la frecuencia relativa del evento, al repetir esto se ve que estas aproximaciones se mueven alrededor del 50%.	Se ve un manejo de los conceptos y ayudas tecnológicas para el tratamiento de los datos y así diseña sus propias simulaciones de los experimentos aleatorios, realizando varios grupos de simulaciones con el objetivo de conjeturar cuál es la probabilidad real a partir de una idea intuitiva de límite estocástico. Indicadores presentes $C_7$ , $S_8$ y $T_6$ .																
A continuación se muestra el resultado de 300 simulaciones del lanzamiento de un dado realizada en Excel: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Resultado</th> <th>Frecuencia Abs.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>42</td></tr> <tr><td>2</td><td>63</td></tr> <tr><td>3</td><td>38</td></tr> <tr><td>4</td><td>51</td></tr> <tr><td>5</td><td>60</td></tr> <tr><td>6</td><td>46</td></tr> <tr><td><b>Total general</b></td><td><b>300</b></td></tr> </tbody> </table> ¿Cuál sería el procedimiento a seguir para calcular la probabilidad de que salga 4, y por qué?	Resultado	Frecuencia Abs.	1	42	2	63	3	38	4	51	5	60	6	46	<b>Total general</b>	<b>300</b>	Usar los datos ya que es una simulación de ese experimento y se realizó un gran número de veces y calcular la frecuencia relativa del 4 y saber que esta frecuencia es una aproximación cercana a la real porque solo se tiene en cuenta ese grupo de datos.	Se trabaja con datos recolectados por otros y está interesado por la veracidad de estos, además reconoce la finalidad de realizar simulaciones de experimentos aleatorios y esto que su interpretación de la probabilidad frecuencial tenga en cuenta la necesidad de realizar varios grupos de simulaciones. Indicadores presentes $C_7$ , $S_8$ y $T_6$ .
Resultado	Frecuencia Abs.																	
1	42																	
2	63																	
3	38																	
4	51																	
5	60																	
6	46																	
<b>Total general</b>	<b>300</b>																	

Tabla 12. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 5.

### 6.3. Pautas para determinar niveles de desarrollo

A continuación se presenta un test que podría ayudar al docente a identificar los indicadores presentes en el razonamiento probabilístico frecuencial de los estudiantes y así poder clasificar el razonamiento usando los niveles propuestos en este trabajo. En cada una de las situaciones se puede evidenciar la presencia de los indicadores  $S_1$ ;  $T_6$ ;  $S_8$ ;  $C_2$  y  $C_1$ , además cada situación fue diseñada para identificar algunos indicadores.

#### Situación 1

Teniendo en cuenta el bajo nivel futbolístico y las estadísticas de su carrera como futbolista, en un partido cualquiera del Chelsea, se analiza la cantidad de tiros que falla Falcao durante el transcurso del juego. ¿Puedes decir con seguridad cuál será el total de tiros fallados antes del partido? Justifica tu respuesta.

#### *Explicación:*

En esta situación se puede evidenciar si están presentes los indicadores:  $S_5$ ;  $S_2$ ;  $C_2$  y  $S_4$ .

#### Situación 2

Se seleccionaron 5 dados que difieren en su tamaño y peso. Para identificar cuál es la probabilidad de que el resultado de 20 lanzamientos dé un número par, usted ¿haría los 20 lanzamientos con un solo dado? ¿O con varios? ¿Con todos? ¿Por qué?

A) Realice una tabla de frecuencias para los 20 lanzamientos con un mismo dado. Teniendo en cuenta la información registrada, determine cuál es la probabilidad que salga un número par. ¿Esta probabilidad se mantendría en caso de realizar 100 lanzamientos del mismo dado?

B) Al hacer este experimento con alguno de los dados se obtuvo el siguiente resultado: 2, 1, 1, 2, 4, 3, 2, 3, 3, 6, 1, 5, 6, 6, 4, 3, 3, 3, 3, 3. ¿Qué tan probable es que salga 3 en el siguiente lanzamiento y por qué?

C) Al hacer este experimento con alguno de los dados se obtuvo el siguiente resultado: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2. ¿Cree que es posible obtener estos resultados y por qué?

*Explicación:*

Las primeras preguntas se relacionan con el hecho de mantener las mismas condiciones de un experimento (indicadores  $T_1$  y  $T_2$ ); en el literal A) se pueden evidenciar los indicadores  $C_5$ ;  $C_6$ ;  $S_4$ ;  $S_5$  y  $S_6$ . En el literal B)  $S_2$ ;  $S_5$  y  $C_3$ . En el literal C)  $C_4$ ;  $S_7$  y  $S_3$ .

Situación 3:

Considere la siguiente situación:

Juan y María lanzan cada uno 3 dados 10 y 100 veces respectivamente y anotan los resultados de cada uno de ellos. Consideran el evento A que resulte 1, 2, 3. Para aproximar la probabilidad realizan la tabla de frecuencias relativas para todos los resultados y ambos afirman que la probabilidad del evento A es del 10%.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a. La aproximación de Juan es correcta, porque realizó todos los procedimientos necesarios, mientras que María realizó muchas experimentaciones que no eran necesarias.
- b. Las aproximaciones de Juan y María son correctas, porque realizaron todos los procedimientos necesarios.
- c. La aproximación de Juan no es correcta, porque realizó muy pocas repeticiones del experimento.

*Explicación:*

Si el estudiante selecciona la opción *a* en su razonamiento está presente el indicador  $S_6$ , si selecciona la opción *b* está presente el indicador  $C_5$  o si selecciona la opción *c* está presente le indicador  $C_6$ .

Situación 4:

Se desea calcular la probabilidad que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto y calcúlela.

*Explicación:*

En esta situación se pueden identificar los indicadores  $C_5$ ;  $C_6$ ;  $C_7$ ;  $S_4$ ;  $S_5$ ;  $S_6$ ;  $T_3$ ;  $T_4$  y  $T_5$ .

Situación 5:

A continuación se muestra el resultado de 300 simulaciones del lanzamiento de un dado, realizadas en Excel:

Resultado	Frecuencia Abs.
1	42
2	63
3	38
4	51
5	60
6	46
<b>Total general</b>	<b>300</b>

Partiendo de la información de la tabla, ¿Cuál sería el procedimiento a seguir para calcular la probabilidad de que salga 4, y por qué?

*Explicación:*

En esta situación se pueden identificar los siguientes indicadores:  $C_6$ ;  $C_7$ ;  $S_5$  y  $T_5$ .

La idea es que el profesor use de manera conjunta y complementaria las situaciones antes planteadas para identificar y/o corroborar alguno de los indicadores que caracterizan el razonamiento probabilístico frecuencial.

## 7. VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA

La evaluación de expertos es una modalidad alternativa de validación de las producciones académicas o científicas, en esta se solicita a una comunidad de especialistas en un objeto de estudio específico, emitir valoraciones cualitativas y recomendaciones que permitan ajustar la propuesta, con el fin de validarla sin necesidad de llevarla en una primera instancia al aula.

La evaluación de expertos se realiza con base en los siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son los criterios para la selección de los expertos y su grado de competitividad?
- ¿Cuáles son los indicadores que permiten a los expertos la valoración de la propuesta?
- ¿Qué métodos fueron utilizados para la recolección, procesamiento y análisis de la información dada por los expertos?

Para iniciar, se define el *perfil del experto* que ha de valorar la propuesta, de tal manera que se ajuste al campo de estudio y contexto de la misma, así debe ser una persona que sea capaz de emitir una valoración conclusiva y hacer recomendaciones partiendo de una ética profesional, imparcialidad y autocrítica, con la disposición de formar parte de la construcción de un producto de otra autoría, esto atendiendo a la definición de experto dada por Crespo (2007). Además de estas características, para la presente propuesta se hace necesario que el profesional que se ha de considerar como experto tenga un nivel de educación profesional en lo posible postgradual en el campo de la Educación Matemática, con una experiencia superior a 5 años impartiendo cursos de probabilidad o trabajando como investigador en este ámbito (Anexo C).

### 7.1 Selección de expertos

Para determinar el grupo de expertos, atendiendo a la definición de experto propuesta por Crespo (2007) anteriormente mencionada; se hizo contacto con 40 profesionales del área de la Educación Estadística, a través de correo electrónico, por medio del cual se envió el Anexo C, solicitándoles el diligenciamiento del mismo, esto si aceptaban

valorar la propuesta. De los 40 profesionales 15 de ellos aceptaron ser parte de la valoración de la propuesta y conformaron así el grupo de expertos al cumplir el perfil establecido.

Para determinar el grado de competitividad del experto se les realiza una consulta para autoevaluar las fuentes de argumentación (Anexo C). A partir de los resultados de la consulta y a la luz de los valores asignados a cada una de las fuentes de argumentación (Tabla 13), se calcula el coeficiente de argumentación  $F_a$  de cada uno de los expertos, el cual se reporta en el Anexo D.

FUENTES DE ARGUMENTACIÓN	GRADO DE INFLUENCIA DE CADA UNA DE LAS FUENTES ES SUS CRITERIOS		
	ALTO (A)	MEDIO (M)	BAJO (B)
1. Investigaciones teóricas y/o experimentales relacionadas con el tema.	0,05	0,05	0,05
2. Experiencia obtenida en la actividad profesional (docencia en educación básica, pregrado y/o posgrado)	0,5	0,4	0,25
3. Análisis de literatura especializada y publicaciones de autores nacionales relacionadas con el tema.	0,1	0,1	0,05
4. Análisis de literatura especializada y publicaciones de autores extranjeros, relacionadas con el tema.	0,2	0,1	0,05
5. Conocimiento del estado actual de la problemática en algunos contextos del país.	0,1	0,1	0,05
6. Intuición	0,05	0,05	0,05
Total	1	0,8	0,5

Tabla 13. Fuentes de Argumentación de los expertos. Tomado de Crespo (2007).

Análogamente se le pregunta a cada uno de los expertos sobre su nivel de conocimiento respecto al tema ( $N_c$ ), solicitando una valoración de 0 a 10 (Tabla 14) siendo 0 el desconocimiento del tema y 10 el conocimiento pleno de tema, usando el siguiente formato:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tabla 14. Autoevaluación nivel de conocimiento del tema.

Los resultados de esta autoevaluación del nivel de conocimiento del tema se reportan en el Anexo D.

Una vez se obtiene el resultado de las fuentes de argumentación del experto ( $F_a$ ) y su autovaloración del conocimiento del tema ( $N_c$ ), se calcula el promedio para determinar su grado de competitividad, tal y como lo propone Crespo (2007):

$$G_c = \frac{F_a + N_c/10}{2}$$

$G_c$ : Grado de competitividad

$F_a$ : Resultado de la autoevaluación de las fuentes de argumentación

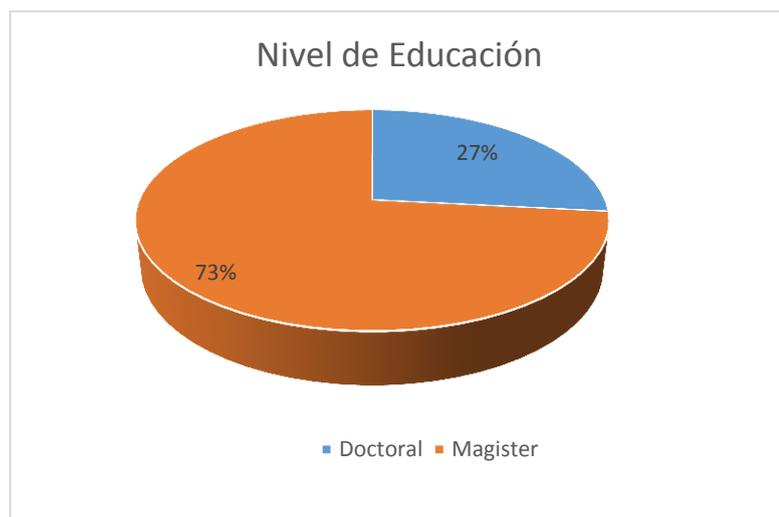
$N_c$ : Resultado de la autoevaluación del nivel de conocimiento del tema

De esta manera el grupo de expertos queda conformado por 15 profesionales de la Educación Matemática, que han trabajado en el área de la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad (Anexo E). Este grupo se caracteriza por estar compuesto por 10 colombianos (67%), 1 brasileño (7%), 1 venezolano (7%), 1 chileno (7%) y 2 mexicanos (13%). Dado que esta propuesta se hace en el marco de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, la mayoría de los expertos son del ámbito nacional, además de esto la mitad de los expertos nacionales desempeñan su labor en dicha Universidad.



Grafico 1. Nacionalidad de los expertos.

Todos los expertos manifestaron tener estudios post-graduales en el campo de la Educación Matemática, 11 de ellos tiene nivel de magister (73%) y 4 nivel doctoral (27%).



*Gráfico 2. Nivel de Educación de los expertos.*

Actualmente todos los expertos desempeñan el cargo de docente en colegios o universidades. Además los expertos de nivel doctoral realizan investigaciones en el campo de la Educación Matemática. Por otra parte el promedio de años de experiencia es aproximadamente 15 años, esto se ve permeado por los datos referidos a los expertos cuya edad supera los 45 años, lo cual conlleva a que su experiencia profesional sea bastante amplia (aproximadamente 25 años de experiencia en promedio).

Una vez se sistematizaron los resultados de la información acopiada a través del Anexo C (ver sistematización en el Anexo F), se identificó que doce de los expertos tienen un grado de competitividad alto y tres de ellos un grado medio. Partiendo de esta valoración, se puede inferir que las recomendaciones de los expertos serán de gran utilidad para el perfeccionamiento de esta propuesta.

## 7.2 Valoración de propuesta

Una vez definido el grupo de expertos, se le envió a cada uno de ellos por correo matriz de evaluación (Tabla 15) acompañada de un resumen de la propuesta, donde se muestra cómo se construyen los indicadores y las posibles relaciones entre ellos (Anexo G). Además se presenta la caracterización de cada nivel para su respectiva valoración. Dicha matriz consta de varios indicadores que permiten evaluar la fiabilidad,

aplicabilidad, viabilidad y relevancia (Crespo, 2007) de la propuesta, bajo los siguientes índices de valoración: Muy Adecuado (MA), Bastante Adecuado (BA), Adecuado (A), Poco Adecuado (PA) y Muy Inadecuado (MI). Igualmente se le solicita a los expertos describir fortalezas, falencias y sugerencias de la propuesta atendiendo a las calificaciones realizadas en los distintos criterios (Anexo H), para prever los posibles efectos (Crespo, 2007).

Nº	INDICADORES	VALORACIÓN				
		MA	BA	A	PA	MI
1	Los niveles para la categorización del desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial, reflejan los sustentos teóricos de la propuesta.					
2	El marco de referencia presentado bajo el cual se sustenta la construcción de los niveles favorece el logro del objetivo por el cual se elaboró la propuesta.					
3	Los niveles e indicadores presentados permiten que un profesor (en el campo de la Educación Matemática) clasifique el desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial de sus estudiantes.					
4	El número de niveles propuestos es acorde con la complejidad del objeto de estudio (probabilidad frecuencial).					
5	De acuerdo a la propuesta, es necesario que para alcanzar un nivel determinado de razonamiento se deben transitar por los niveles anteriores. Es decir, los niveles son jerárquicos.					
6	La justificación de cada uno de los niveles es acorde con la teoría que se usa para fundamentar la propuesta.					

*Tabla 15. Indicadores para la valoración de la propuesta. Adaptada de Álvarez (2006).*

Una vez se recolectaron estas valoraciones fue posible establecer un panorama general de las fortalezas, falencias y sugerencias de la propuesta.

### **Fortalezas**

Uno de los aspectos de mayor relevancia para el grupo de expertos es la cercanía que esta propuesta tiene con el ambiente educativo en cursos de secundaria, ya que con los indicadores establecidos es fácil y preciso realizar un diagnóstico del nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial de un grupo de personas, y a partir de ello poder generar propuestas que favorezcan el desarrollo de este razonamiento. Por otra parte se destaca que el uso de la Taxonomía SOLO es adecuado para una propuesta con estas características, debido que esta teoría se ha sometido a prueba durante décadas, esto implica que el marco teórico es robusto y confiable. Finalmente se resalta la

importancia de trabajar con la probabilidad frecuencial, puesto que no es común que la probabilidad se trabaje en la escuela desde un punto de vista experimental.

### **Falencias**

(1) La mayoría de los expertos expresaron la necesidad de diseñar un cuestionario que permita identificar el nivel de razonamiento a partir de los indicadores expuestos. (2) Uno de los expertos manifestó que los antecedentes relacionados con la categorización del razonamiento probabilístico frecuencial no son suficientes, dado que solo se presenta una propuesta que trabaja la probabilidad frecuencial. (3) Por último, para algunos de los expertos no es claro cuál es el producto de este trabajo de grado, ya que se cuestiona acerca de si el resultado son los indicadores, las relaciones, las preguntas que permiten identificarlos o simplemente los niveles.

### **Sugerencias**

Los expertos sugirieron ampliar la explicación de los indicadores para facilitar la comprensión de los mismos, además de mejorar la redacción de los indicadores  $C_3$ ,  $C_6$ ,  $S_1$  y  $S_2$ , y hacer uso de tablas y gráficos en la situaciones que se han de proponer a los estudiantes para obtener información sobre el nivel de desarrollo de su razonamiento. También sugirieron agregar la descripción de las categorías Conceptos, Sesgos y Tratamiento de datos a partir de las cuales se forjaron los niveles presentados. Finalmente se recomienda aplicar la propuesta como parte de investigaciones para realizar ajustes a partir de los resultados que se logren obtener en el campo.

### **Reacciones**

1. En relación con el taller solicitado por los expertos, en la sección 6.3 se expone un posible cuestionario que ha de permitir la identificación del nivel de razonamiento probabilístico frecuencial, el cual no fue sometido a la valoración de los expertos dado que este no se contempla como la esencia de este trabajo y podía generar más tiempo para la valoración por parte de los expertos.

2. Con respecto a los antecedentes de la propuesta, cabe resaltar que no todos se incluyeron en el resumen de la propuesta enviado a los expertos, y contemplados en el

documento en extenso (el presente), por lo que se pudo generar la percepción de poca consulta al respecto. Sin embargo, en la revisión realizada para construir la sección de antecedentes, se encontraron muy pocas producciones relacionadas directamente con el razonamiento probabilístico frecuencial, por ende se seleccionaron las más acordes con el objetivo de esta propuesta.

3. Es importante aclarar que el producto de este trabajo de grado son los indicadores, las relaciones y la caracterización de los niveles de desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial. Para algunos expertos esto no fue claro, ya que en el Anexo G no fue posible mostrar cada uno de los pasos para la caracterización de cada nivel, como se hizo a lo largo de este trabajo.

### 7.3 Ajustes a la propuesta

A continuación se realizan algunos ajustes a la propuesta atendiendo a las sugerencias hechas por el grupo de expertos. De esta manera se realiza la conceptualización de cada categoría presente en los indicadores.

A lo largo de la revisión bibliográfica para la construcción del marco teórico se identifican tres categorías que influyen en la asignación de la probabilidad, desde la noción frecuencial, las cuales son Conceptos, Sesgos y Tratamiento de Datos, que se caracterizan así:

**Conceptos:** En esta categoría se encuentran los elementos probabilísticos que se usan para realizar una aproximación de la probabilidad bajo esta noción. Cada indicador de esta categoría está asociado a uno de estos elementos probabilísticos. Por ejemplo:  $C_2$  se asocia con los elementos azar y aleatoriedad;  $C_3$  se asocia con espacio muestral y eventos.

**Sesgos:** En esta categoría se encuentra un conjunto de obstáculos cognitivos que se deben “a una limitación de la capacidad de procesamiento de la información”

(Tversky y Kahneman, 1983; citado en Díaz, 2003, p. 2), de esta manera se identifican los principales obstáculos que interfieren con la asignación de probabilidad.

**Tratamiento de datos:** En esta categoría se muestran formas de manejar la información bien sea de procesos experimentales propios o ajenos. Por ejemplo: En T<sub>4</sub> se muestra cómo un sujeto obtiene la información a partir de simular experimentos con algún recurso tecnológico.

Además de la conceptualización realizada, se reformulan algunos indicadores bien sea por necesidad de mejorar redacción o ampliar su definición para una mejor comprensión:

Categoría	Indicadores/Descripción
Conceptos	C <sub>1</sub> : Las respuestas evidencian un carácter evasivo ya que se desconocen los procedimientos y conceptos para cuantificar la ocurrencia de un evento.
	C <sub>2</sub> : Identifica y clasifica situaciones donde está presente el azar y la aleatoriedad.
	C <sub>3</sub> : Define espacios muestrales de experimentos aleatorios, clasificando los eventos como: posibles, imposibles o seguros.
	C <sub>4</sub> : Compara dos o más secuencias aleatorias en términos de más probable que, menos probable que o igualmente probables.
	C <sub>5</sub> : Calcula la probabilidad frecuencial de un evento sin reconocer la necesidad de la repetitividad del experimento y por ende realiza pocas experimentaciones.
	C <sub>6</sub> : Reconoce que a mayor número de experimentaciones o simulaciones la probabilidad frecuencial tiende a estabilizarse alrededor de la probabilidad real.
	C <sub>7</sub> : Calcula la frecuencia relativa de un evento teniendo en cuenta su límite estocástico, es decir, la cercanía existente entre la probabilidad real y la experimental.
Sesgos	S <sub>1</sub> : Determinista: No reconoce ni diferencia las situaciones azarosas de aquellas que son deterministas.
	S <sub>2</sub> : Supone las rachas de resultados de un experimento como insumo suficiente para predecir el siguiente resultado de la experimentación.
	S <sub>3</sub> : Concepción Errónea del Azar: Considera que las secuencias aleatorias nunca pueden tener algún patrón, ya que el azar implica la ausencia de algún orden en la totalidad de los resultados de un experimento.
	S <sub>4</sub> : Atribuciones Flexibles: Intenta manipular el resultado de un experimento aleatorio a partir de creencias personales o mitos producto de experiencias propias o ajenas.
	S <sub>5</sub> : Confirmatorio: Considera la probabilidad frecuencial de un evento asumiendo que es la frecuencia absoluta de este.
	S <sub>6</sub> : Insensibilidad al Tamaño de la Muestra: Aproxima la probabilidad de un evento realizando un número muy pequeño de simulaciones.
	S <sub>7</sub> : Equiprobabilidad: Calcula e interpreta la frecuencia relativa como una aproximación de probabilidad pero considera a priori que todos los eventos definidos sobre un experimento aleatorio son igualmente probables.
	S <sub>8</sub> : No presenta ningún sesgo.
Tratamiento de datos	T <sub>1</sub> : Desarrolla experimentos aleatorios, sin considerar que se deben llevar a cabo bajo idénticas condiciones.
	T <sub>2</sub> : Realiza experimentos aleatorios teniendo en cuenta que se deben hacer bajo idénticas condiciones para que su resultado sea confiable.

	T <sub>3</sub> : Diseña experimentos aleatorios teniendo en cuenta las condiciones necesarias para que su resultado sea confiable.
	T <sub>4</sub> : Manipula herramientas tecnológicas que le permiten simular experimentos aleatorios.
	T <sub>5</sub> : Reconoce la validez de los datos presentados en tablas o gráficos, y es capaz de trabajar con los resultados de simulaciones hechas por él mismo o por otros.
	T <sub>6</sub> : Asigna probabilidades basándose en resultados de experimentos propios o ajenos, además reconoce el propósito de realizar las simulaciones e interpreta la probabilidad favoreciendo la construcción de gráficos de probabilidad.

*Tabla 16. Reformulación de los indicadores del razonamiento probabilístico frecuencial.*

## 8. CONCLUSIONES

Respecto al trabajo desarrollado y plasmado a lo largo de este documento, se evidencia la formulación de una propuesta que permite caracterizar el desarrollo del pensamiento aleatorio para la probabilidad frecuencial, fundamentada en propuestas que trabajan en la misma línea y soportada en un proceso de documentación realizado sobre este objeto, desde aspectos: históricos, conceptuales y didácticos. De esta manera se establecen tres categorías (Conceptos, Sesgos, Tratamiento de Datos) que intervienen en la asignación de la probabilidad desde una noción frecuencial, así se construyen indicadores para cada una de estas categorías y se establecen posibles relaciones entre los indicadores, teniendo en cuenta la complejidad estructural propuesta en la taxonomía SOLO. De acuerdo a las posibles relaciones se construyen los niveles de desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial. Estos indicadores, sus relaciones y los niveles fueron sometidos a una valoración por parte de un grupo de expertos en el campo de la Educación Matemática, específicamente en el área de la probabilidad; esta valoración en términos generales fue positiva, ya que se destaca la aplicabilidad de este trabajo y la importancia de implementar la probabilidad desde un punto de vista experimental en la escuela. Además se diseñó un posible cuestionario que permite identificar los indicadores presentes en este razonamiento y así ubicarlo en su respectivo nivel, esperando a futuro aplicar el cuestionario e implementar la propuesta de los niveles en una investigación formal con el fin de realizar ajustes que permiten hacer un aporte en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Por otra parte, a partir de la elaboración de este trabajo surgió la necesidad de implementar un nuevo concepto, el cual acopia y refiere al razonamiento relacionado con la experimentación o simulación de situaciones aleatorias y el cálculo e interpretación de la probabilidad desde la noción frecuencial, conjunto de elementos al cual se denominó *razonamiento probabilístico frecuencial*.

Con respecto al proceso de formación como futuros licenciados de matemáticas, para la elaboración de esta propuesta fue necesario poner en práctica y profundizar en aspectos teóricos, metodológicos y didácticos, que en algún momento se trabajaron en espacios

académicos del Proyecto Curricular. Entre otros aspectos fue necesario retomar elementos históricos de la probabilidad frecuencial trabajados de manera tangencial en espacios académicos como Probabilidad; lo referente a la normatividad colombiana en el ámbito de la Educación Matemática tratada en Teoría Curricular y Currículo escolar colombiano y en la electiva Materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas; además elementos de la didáctica de la Educación Estocástica como Dificultades, Obstáculos y Errores presentes en los procesos de aprendizaje de esta rama de las matemáticas, llamados en probabilidad Sesgos y Heurísticas, vistos en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística; también se revisan secuencias didácticas propuestas en los diferentes espacios de prácticas iniciales y de inmersión como Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística, y Practica de Integración Profesional a la Escuela.

Por otra parte fue necesario la revisión autónoma de otros elementos que a lo largo de la formación académica no fueron tratados y fueron esenciales en el desarrollo de este trabajo de grado, tales como: el estudio de la Taxonomía SOLO como herramienta y base para la construcción de los niveles para el razonamiento probabilístico frecuencial; la implementación de la evaluación de expertos como alternativa de valoración y validación de una propuesta didáctica; y el uso adecuado de todas las herramientas que brinda un programa para el procesamiento de textos como Microsoft Word.

Finalmente se resalta la importancia de llevar a cabo un Trabajo de Grado de manera conjunta ya que esto permite generar un ambiente académico que se ve fortalecido mediante la discusión entre pares, basándose en fundamentos teóricos y prácticos, garantizando la veracidad y calidad de los argumentos propuestos por cada uno de los participantes. Dichas discusiones son mediadas por un profesional con un conocimiento pleno de la temática a trabajar, y que permite a los futuros docentes de Matemáticas tener sus primeros acercamientos en la construcción de literatura especializada.

## REFERENCIAS

- Alcázar, A. (2007). Historia de la probabilidad. Recuperado de [http://web.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20de%20la%20probabilidad.pdf](http://web.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20de%20la%20probabilidad.pdf)
- Alonso, R., Rodríguez, A. y Ordás, P. (2004). La teoría de los juegos de azar en el siglo XVIII. La participación del matemático francés Francois Nicoles. En: M. P. Galán (Ed.). *Historia de la probabilidad y la estadística, (II)* (pp. 109-122). Madrid, España: Delta Publicaciones.
- Álvarez, I. (2006). Alternativa metodológica para la acomodación de las estructuras cognitivas acerca de polígonos. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Félix Varela, Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. Santa Clara, Cuba.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 8(3).
- Batanero, C., Cañizares, M., Ortiz, J., y Serrano, L. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. Universidad de Granada.
- Benito, J. (2002). La aportación de Sixto Cámara a la Estadística española. En: Historia de la probabilidad y de la estadística. Ed. AC. Madrid, España.
- Bersabé, R. (1995). Sesgos cognitivos en los juegos de azar: La ilusión de control. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.
- Biggs, J. y Collins, K. (1982). Evaluating the quality of learning: *The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. Revista EMA, 8(2).
- Crespo, T. (2007). Respuestas a 16 preguntas sobre el empleo de expertos en la investigación pedagógica. Ed. San Marcos. Lima, Perú.

- Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la Estadística. En: Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.
- Franquet, J. (2008). El estudio operativo de la psicología, una aproximación matemática. Centro Asociado De Tortosa, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tortosa, España.
- Garzón, G. (2006). Fuentes bibliográficas para el estudio de la historia y la estadística y la probabilidad en la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando. En: Historia de la probabilidad y la estadística (III). Delta Publicaciones Universitarias.
- Garzón, A., y García, M. (2009). Diseño de una secuencia de actividades para la enseñanza de la probabilidad simple en estudiantes de sexto grado: aplicación y validación. 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colombia.
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. (1987), Azar y probabilidad Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Ed. Síntesis. Madrid, España.
- Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En: Investigación en educación matemática XVI Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Guisasola, J. y Barragués, J. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. En: Enseñanza de las Ciencias. Vol. 20
- Hernández, M., Martínez, P., Da Fonseca, P. y Rubio, M. (2005). Aprendizaje, competencias y rendimiento en Educación Superior. Editorial La Muralla, Madrid, España.
- Kaput, J. (2000). Teaching and Learning a New Algebra with Understanding.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. Research issues in the learning and teaching of algebra.
- Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. Educação Matemática Pesquisa, 12 (3).

- Mantilla, M., y Martínez, M. (2007). Construcción de significados del concepto de probabilidad frecuencial en un ambiente computacional. Una experiencia con profesores en formación. Trabajo de Grado Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2007.
- Mateos, G. y Morales, A. (1985). Teoría subjetiva de la probabilidad: Fundamentos, evolución y determinación de probabilidades. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de ciencias económicas y empresariales, Departamento de estadística y métodos de decisión. Madrid, España.
- Medrano, M. (2003). Una experiencia instruccional en el contexto universitario. Revista de Educación, 332. Universidad del País Vasco, Leioa, Bizkaia, España
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias matemáticas. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.
- NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática (M. Fernández, Trad.). Sevilla: SAEM Thales. (Trabajo original publicado en 2000).
- Ortiz, J., Batanero, C. y Serrano, L. (1996). Las frecuencias relativas y sus propiedades en los textos españoles de bachillerato. Revista EMA, 2(1).
- Romero, J. y Vergara, M. (2014). Razonamiento probabilístico en estudiantes de undécimo grado bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Sánchez, E. & Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.
- Sánchez, E. y Valdez, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, (2).
- Sánchez, J. (2004). Introducción a la Estadística Empresarial. Capítulo 6. Probabilidad. Departamento de Estadística y Econometría, Universidad de Málaga. Málaga, España.

- Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Universidad de Granada, España.
- Serrano, L., Batanero, C. y Ortiz, J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma*, 22.
- Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. y Cañizares, M. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*.
- Vega-Amaya, O. (2002). Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Apuntes de historia de las matemáticas Vol 1*. México D.F., México.

## ANEXO A. ACTIVIDADES E & A DE LA ESTADÍSTICA

### PARTE I



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA

*Alejandro Gualteros  
Carlos Andrés León*

### UN DÍA DEL AZAR

Un día de la semana te levantas temprano para ir al colegio, para llegar debes ingresar a la estación de Transmilenio más cercana de tu casa, allí esperas alguna de todas las posibles rutas que te sirven para llegar hasta Flores. ¿Cuál de las rutas que te sirven será la que pase primero? Cuando te hayas subido al bus sabrás exactamente: ¿cuántas personas hay en el bus? ¿Cuántas personas se subirán a cantar en el bus? ¿Cuántas paradas en otras estaciones hará el bus? Y finalmente ¿Cuánto tiempo tardará el recorrido?

Cuando llegas al colegio encuentras a tus compañeras de clase hablando sobre el programa de televisión que vieron la noche anterior ¿Cuál pudo haber sido ese programa del que tanto hablan tus compañeras?, luego ves a dos de tus amigos jugando Mortal Kombat en sus PSP ¿Quién ganará?. Al comenzar la clase de Español el profesor aplica un cuestionario ¿Puedes saber cuántas preguntas tendrá? Luego llega el profesor de matemáticas y hace su clase ¿Sabrás a qué hora terminará su clase (si no se presentan eventualidades y toda la clase se desarrolla a la perfección)?

Al finalizar la clase suena el timbre para ir al descanso ¿Sabrás a dónde te dirigirás al descanso? Luego decides jugar un partido de microfútbol con tus amigos ¿Ganarás o perderás el partido? ¿Cuántos goles harás? Se acaba el descanso y tienes clase de sociales ¿Puedes saber el salón en el que te toca esa clase? ¿Qué tarea dejará el profesor? ¿El profesor te sorprenderá molestando a tus amigos?

Luego sales del colegio y te diriges a tu casa pero no te queda dinero para el pasaje y tratas de ingresar a la estación sin pagar ¿Podrás hacerlo?, antes de llegar a tu casa te sorprende un ladrón y quiere robarte ¿Con qué arma tratará de hacerlo? ¿Lo atrapará la policía? Al llegar a la casa prendes la televisión ¿En

cuál canal estará?, al pasar los canales ves que hay un partido de fútbol: Real Madrid Vs Alianza Petrolera ¿Quién va a ganar?

Al llegar la noche quieres ver Los Simpson ¿A qué hora empezará el programa? Luego te empieza a dar sueño y decides irte a dormir para continuar tu rutina de azar al siguiente día.

- ¿Cuáles preguntas planteadas en la historia puedes responder con certeza?
- ¿Por qué razón crees tú que no es posible asegurar el resultado de las otras situaciones?
- ¿Es posible en cambio, poder intuir algunos sucesos de la historia?
- ¿Qué característica común encuentras en estas situaciones?
- ¿Es posible decir que en estos ejemplos entra en juego el factor suerte?



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA  
*Alejandro Gualteros  
Carlos Andrés León*

### **Experimentando en lo cotidiano**

1. Lea con atención las siguientes situaciones y conteste las preguntas que se plantean:
  - La mamá de Marta le pide que cuide la sopa que está en la estufa y le apague una vez esté lista, mientras va a recoger a su hermanito menor y lo lleva al médico, Marta muy obediente le dice a su mamá que sí, ella se pone a jugar en su computador y se le olvida que debe mirar la sopa luego de 4 horas, se acuerda y va muy preocupada a revisar. ¿puedes decir con seguridad qué le paso a la sopa?

- Una niña tiene 3 monedas de \$200, le pide a su papá 3 monedas, del mismo valor, ¿puedes decir con seguridad cuánto dinero posee ahora la pequeña?
  - Juan compra una libra de sal, para realizar el siguiente experimento toma un vaso lleno de agua y le echa la libra de sal. ¿puedes decir con seguridad cuál será el sabor del agua del vaso?
2. ¿Si se repiten 50 veces estos experimentos (bajo las mismas condiciones) cambiará el resultado que predijiste? Justifica tu respuesta.
  3. ¿Qué tienen en común estos experimentos, teniendo en cuenta sus resultados?
  4. Lea con atención las siguientes situaciones y conteste las preguntas que se plantean:
    - Si se contabiliza el número de vehículos que transitan por la esquina del colegio durante el día. Podrías adelantarte a asegurar, ¿cuántos autos pasarán entre las 10 y las 12 horas? Justifica tu respuesta.
    - En un partido cualquiera de la selección, se analiza la cantidad de tiros que ataja el arquero colombiano durante el transcurso del juego ¿puedes decir con seguridad cuál será el total de tapadas antes del partido? Justifica tu respuesta.
    - Se le pide a Martín que saque una carta de una baraja de 52 cartas, ¿puedes decir con seguridad el color de la carta que saco Martín? Justifica tu respuesta.
    - Tienes la posibilidad de revisar tu facebook solamente los días Domingo, ¿puedes decir con seguridad cuántos mensajes tienes sin leer? Justifica tu respuesta.
  5. ¿Si se repiten 50 veces estos experimentos (bajo las mismas condiciones) cambiará el resultado que predijiste? Justifica tu respuesta.
  6. ¿Qué tienen en común estos experimentos, teniendo en cuenta sus resultados?
  7. Conteste las preguntas que se plantean en cada situación

- De una alcancía tratas de sacar unas monedas (la alcancía tiene monedas de todos los valores), solamente puedes retirar 2 monedas cualquiera, ¿tendrás certeza de cuánto suman ambas?, ¿qué posibles resultados pueden darse?
  - Conociendo a un nuevo compañero, le dices cuál es tu equipo favorito de futbol, luego le preguntas si su equipo favorito es el mismo que el tuyo, ¿qué posibles respuestas podrías obtener? ¿Te adelantaría a asegurar lo que responderá?
  - Si lanzas un dado al aire, y estudias el número resultante en la cara superior ¿qué posibles resultados existen?
8. ¿Qué tienen en común estos experimentos, teniendo en cuenta sus resultados?
9. ¿Cuáles son las diferencias que encuentra entre los dos grupos de situaciones?
10. Un niño tiene el día Lunes clases de Matemática, Música, Español, Historia y Artes. Su madre ha forrado todos sus cuadernos del mismo color
- En cierto momento, el niño saca un cuaderno al azar desde su mochila ¿a qué asignatura corresponderá el seleccionado?
  - Su compañero le pide prestado el cuaderno de Ciencias Naturales ¿es posible que el niño encuentre este cuaderno en la mochila?

¿Qué tan posible es que el niño saque un cuaderno de una materia cuyo nombre tenga más de cuatro letras?

## PARTE II



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA  
*Alejandro Gualteros  
Carlos Andrés León*

### Simulación con Cabri II

1. Abra el documento que se llama figura 1, allí se presenta una construcción que permite lanzar un punto aleatoriamente dentro de un rectángulo, para observar esto haga doble clic sobre el valor de N, cambie este valor bien sea usando las flechas o escribiendo un número.
2. ¿Cuál cree que es la posibilidad de que el punto caiga en la parte azul del rectángulo?

3. Ahora vaya a la opción animación que se encuentra en el segundo menú de derecha a izquierda, señale la tabla y luego haga clic sobre el valor de N y sin soltar arrastre el mouse hacia abajo suavemente, inmediatamente observará que se realizaran una cantidad numerosa de repeticiones del experimento y en la tabla quedara consignado si el punto P queda en la región azul o en la blanca, uno cuando quede en lo azul y espacio en blanco cuando quede en la región blanca.
4. Usando los valores de la tabla de Cabri realice una tabla de frecuencias absolutas usando y relativas usando Excel, para esto siga estos pasos:
  - Seleccione la tabla de Cabri con el cursor y una vez seleccionas oprima ctrl+C
  - Abra el documento de Excel llamado simulación señale la celda A2 y oprima ctrl+V
  - Ahora diríjase al menú de insertar y selecciona la opción tabla dinámica, ahí aparecerá una ventana donde dice tabla o rango seleccione todos los datos validados incluyendo el título y en la opción “elija donde desea colocar el informe de tabla dinámica” seleccione la opción hoja de cálculo existente y en el espacio en blanco seleccione la celda donde quedará la tabla dinámica.
  - Aparecerá un menú de la tabla dinámica, arrastre el rotulo de “valores validados” en el recuadro inferior izquierdo.
  - Tome nuevamente este rotulo y ubíquelo en el recuadro inferior derecho.
  - Teniendo la tabla de frecuencias absolutas calcule las frecuencias relativas para cada variable estadística.

Nota: Cada una de las frecuencias relativas es una aproximación de las probabilidades que ese evento ocurra.

5. Determine ventajas y desventajas de usar esta concepción para asignar probabilidades.
6. Teniendo en cuenta las condiciones del experimento aleatorio determine cuáles deben ser las condiciones para un evento seguro e imposible. Determine el espacio muestral del experimento inicial.

### PARTE III



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
 ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA  
*Alejandro Gualteros*  
*Carlos León*

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

**FECHA** \_\_\_\_\_

### EVALUACIÓN 1

**Pregunta 1:**

Explique qué es un experimento aleatorio y diga que otros tipos de experimentos hay y cuáles son sus diferencias con el experimento aleatorio.

**Pregunta 2:**

Considere la siguiente situación:

Juan y María lanzan cada uno 3 dados 10 y 100 veces respectivamente y anotan los resultados de cada uno de ellos. Consideran el evento A que resulte 1, 2, 3. Para aproximar la probabilidad realizan la tabla de frecuencias relativas para todos los resultados y afirman que la probabilidad del evento A es del 10%. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

- a. La aproximación de Juan es correcta, porque realizó todos los procedimientos necesarios, mientras que María realizó muchas experimentaciones que no eran necesarias.
- b. Las aproximaciones de Juan y María son correctas, porque realizaron todos los procedimientos necesarios.
- c. La aproximación de Juan no es correcta, porque realizó muy pocas repeticiones del experimento.
- d. La aproximación de Juan no es correcta, porque la probabilidad de este resultado es del 50% ya que solo hay dos posibilidades que salga o que no salga.

**Pregunta 3:**

Un experimento aleatorio consiste en lanzar dos dados y anotar su suma, a continuación se presenta la tabla de frecuencias absolutas:

suma de los Dado	Frecuencia Absoluta
2	10
3	36
4	30
5	60
6	75
7	80
8	71
9	58
10	38
11	27
12	15
<b>Total general</b>	<b>500</b>

Teniendo en cuenta la información de la tabla diga cuál de los siguientes eventos tiene mayor probabilidad de ocurrencia:

- a. Que la suma sea múltiplo de dos y de tres.
- b. Que la suma sea múltiplo de dos o de tres.
- c. Que la suma sea 7, porque su probabilidad es del 80%.
- d. No se puede saber, porque todos tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

**Pregunta 4:**

Un jugador quiere calcular la probabilidad de sacar un número menor o igual que 2 al lanzar un dado. ¿Cuál de los siguientes procedimientos es el más confiable para aproximar esa probabilidad?

- a. Afirnar que es el 50%, ya que existen dos posibles casos: (1) Que el número sea menor o igual que 2, (2) Que el número sea mayor que 2
- b. Soplar los dados (para la buena suerte) y decir que la probabilidad es muy alta.
- c. Realizar 300 lanzamiento y calcular la frecuencia relativa de los números menores o iguales que 2.
- d. Realizar 2 lanzamientos para decir si es el 0%, 50% o 100%.

**Pregunta 5:**

Se desea calcular la probabilidad que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto y calcúlela.

**Pregunta 6:**

A continuación se muestra el resultado de 300 simulaciones del lanzamiento de un dado realizada en Excel:

Resultado	Frecuencia Abs.
1	42
2	63
3	38
4	51
5	60
6	46
<b>Total general</b>	<b>300</b>

¿Cuál sería el procedimiento a seguir para calcular la probabilidad de que salga 4, y por qué?

## ANEXO B. ACTIVIDADES PRÁCTICA I.P.E.



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
*Carlos Andrés León*

### UN DÍA DEL AZAR

Un día de la semana te levantas temprano para ir al colegio, para llegar debes ingresar a la estación de Transmilenio más cercana de tu casa, allí esperas alguna de todas las posibles rutas que te sirven para llegar hasta Nariño. ¿Cuál de las rutas que te sirven será la que pase primero? Cuando te hayas subido al bus sabrás exactamente: ¿cuántas personas hay en el bus? ¿Cuántas personas se subirán a cantar en el bus? ¿Cuántas paradas en otras estaciones hará el bus? Y finalmente ¿Cuánto tiempo tardará el recorrido?

Cuando llegas al colegio encuentras a Lesmes y Galindo hablando sobre la novela que vieron la noche anterior ¿Será la de Diomedes, Lady, Las hermanitas Calle, Tu voz Kids u otra?, luego ves a Bareño y Páez jugando Mortal Kombat en sus celulares ¿Quién ganará? Al comenzar la clase de Matemáticas la profe Claudia y el profe Carlos llegan de mal genio y aplican un cuestionario ¿Puedes saber cuántas preguntas tendrá? Luego llega el profesor de Español y hace su clase ¿Sabrás a qué hora terminará su clase (si no se presentan eventualidades y toda la clase se desarrolla a la perfección)?

Al finalizar la clase suena el timbre para ir al descanso ¿Sabrás a dónde te dirigirás al descanso? Luego decides jugar un partido de microfútbol con tus amigos ¿Ganarás o perderás el partido? ¿Cuántos goles harás? Se acaba el descanso y tienes clase de Sociales ¿Puedes saber el salón en el que te toca esa clase? ¿Qué tarea dejará el profesor? ¿El profesor te sorprenderá molestando a tus amigos?

Luego sales del colegio y te diriges a tu casa pero no te queda dinero para el pasaje y tratas de colarte ¿Podrás hacerlo?, antes de llegar a tu casa te sorprende un ladrón y quiere robarte ¿Con qué arma tratará de hacerlo? ¿Te robará el bicho? ¿Lo atrapará la policía? Al llegar a la casa prendes la televisión ¿En cuál canal estará?, al pasar los canales ves que hay un partido de fútbol: Real Madrid Vs Alianza Petrolera ¿Quién va a ganar?

Al llegar la noche quieres ver Los Simpson en Fox ¿A qué hora empezará el programa? Luego te empieza a dar sueño y decides irte a dormir para continuar tu rutina de azar al siguiente día.

- Subraya las preguntas del texto que puedes responder con certeza
- ¿Por qué razón crees que no es posible asegurar el resultado de las otras situaciones?
- ¿Qué característica común encuentras en estas situaciones?
- ¿Es posible predecir el resultado de algunas preguntas de la historia?
- ¿Es posible decir que en estos ejemplos entra en juego el factor suerte? ¿Por qué?



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
*Carlos Andrés León*

### **Experimentando en lo cotidiano**

1. Lea con atención las siguientes situaciones y conteste las preguntas que se plantean:
  - La mamá de Marta le pide que cuide la sopa que está en la estufa y le apague una vez esté lista, mientras va a recoger a su hermanito menor y lo lleva al médico, Marta muy obediente le dice a su mamá que sí, ella se pone a jugar en su computador y se le olvida que debe mirar la sopa, luego de 4 horas se acuerda y va muy preocupada a revisar. ¿puedes decir con seguridad qué le paso a la sopa?

- Una niña tiene 3 monedas de \$200, le pide a su papá 3 monedas, del mismo valor, ¿puedes decir con seguridad cuánto dinero posee ahora la pequeña?
- Juan compra una libra de sal, para realizar el siguiente experimento toma un vaso lleno de agua y le echa la libra de sal. ¿puedes decir con seguridad cuál será el sabor del agua del vaso?

¿Si se repiten 50 veces estas situaciones (bajo las mismas condiciones) cambiará el resultado que predijiste? Justifica tu respuesta.

¿Qué tienen en común estos experimentos, teniendo en cuenta sus resultados?

2. Lea con atención las siguientes situaciones y conteste las preguntas que se plantean:

- Si se contabiliza el número de vehículos que transitan por la esquina del colegio durante el día. Podrías adelantarte a asegurar, ¿cuántos autos pasarán entre las 10 y las 12 horas? Justifica tu respuesta.
- En un partido cualquiera del Chelsea, se analiza la cantidad de tiros que falla Falcao durante el transcurso del juego ¿puedes decir con seguridad cuál será el total de tiros fallados antes del partido? Justifica tu respuesta.
- Se le pide a Martin que saque una carta de una baraja de 52 cartas, ¿puedes decir con seguridad el color de la carta que sacó Martin? Justifica tu respuesta.
- Tienes la posibilidad de revisar tu Facebook solamente los días Domingo, ¿Puedes decir con seguridad cuántos mensajes tienes sin leer? Justifica tu respuesta.

¿Si se repiten 50 veces estos experimentos (bajo las mismas condiciones) cambiará el resultado que predijiste? Justifica tu respuesta.

¿Qué tienen en común estos experimentos, teniendo en cuenta sus resultados?

3. ¿Cuáles son las diferencias que encuentra entre las situaciones de la pregunta 1 y la pregunta 2?

4. Conteste las preguntas que se plantean en cada situación

- De una alcancía tratas de sacar unas monedas (la alcancía tiene monedas de todos los valores), solamente puedes retirar 2 monedas cualquiera, ¿tendrás certeza de cuánto suman ambas?, ¿qué posibles resultados pueden darse?
- Conociendo a un nuevo compañero, le dices cuál es tu equipo favorito de fútbol, luego le preguntas si su equipo favorito es el mismo que el tuyo, ¿qué posibles respuestas podrías obtener? ¿Te adelantaría a asegurar lo que responderá?
- Si lanzas un dado al aire, y estudias el número resultante en la cara superior ¿qué posibles resultados existen?

5. Un niño tiene el día Lunes clases de Matemática, Música, Español, Historia y Artes. Su madre ha forrado todos sus cuadernos del mismo color

- En cierto momento, el niño saca un cuaderno al azar desde su mochila ¿a qué asignatura corresponderá el seleccionado?
- Su compañero le pide prestado el cuaderno de Ciencias Naturales ¿es posible que el niño encuentre este cuaderno en la mochila?
- ¿Qué tan posible es que el niño saque un cuaderno de una materia cuyo nombre tenga más de cuatro letras?



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
*Carlos León*

## EVALUACIÓN

### **Pregunta 1:**

Explique qué es un experimento aleatorio y diga que otros tipos de experimentos hay y cuáles son sus diferencias con el experimento aleatorio.

**Pregunta 2:**

Considere la siguiente situación:

Juan y María lanzan cada uno 3 dados 10 y 100 veces respectivamente y anotan los resultados de cada uno de ellos. Consideran el evento A que resulte 1, 2, 3. Para aproximar la probabilidad realizan la tabla de frecuencias relativas para todos los resultados y afirman que la probabilidad del evento A es del 10%. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

- a. La aproximación de Juan es correcta, porque realizó todos los procedimientos necesarios, mientras que María realizó muchas experimentaciones que no eran necesarias.
- b. Las aproximaciones de Juan y María son correctas, porque realizaron todos los procedimientos necesarios.
- c. La aproximación de Juan no es correcta, porque realizó muy pocas repeticiones del experimento.
- d. La aproximación de Juan no es correcta, porque la probabilidad de este resultado es del 50% ya que solo hay dos posibilidades que salga o que no salga.

**Pregunta 3:**

Luego de lanzar el dado diez veces se tomaron los siguientes datos: 5, 6, 1, 4, 5, 2, 3, 3, 3, 3. ¿Qué tan probable es que salga 3 en el siguiente lanzamiento y por qué?

**Pregunta 4:**

Se lanzó 10 veces una moneda y se anotaron los resultados C, S, C, S, C, S, C, S, C, S. ¿Cree que es posible obtener estos resultados y por qué?

**Pregunta 5:**

Se desea calcular la probabilidad que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto y calcúlela.

## ANEXO C. AUTOEVALUACIÓN DE EXPERTICIA



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
*Alejandro Gualteros  
Carlos León*

Apreciado(a) docente

El OBJETIVO del presente cuestionario es determinar su nivel de experticia en relación con el proceso de enseñanza aprendizaje de la probabilidad frecuencial, y por ende el desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial<sup>2</sup>

Por lo anterior le pedimos el favor de diligenciar por completo y de forma verídica la siguiente información.

### A. INFORMACIÓN SOBRE EL EXPERTO

Nombre:

Género:

Edad:

Nivel de educación:

Cargo que desempeña:

País:

Ciudad:

Institución donde labora:

Años de experiencia:

Marque una equis (X) en la tabla siguiente, la casilla que refleja su nivel de conocimiento acerca de la enseñanza aprendizaje de la probabilidad frecuencial.

1. Considere que la escala que se le presenta es ascendente, es decir, el número 10 corresponde al mayor nivel, 9 al siguiente y así sucesivamente hasta el número 0 que corresponde al menor nivel de conocimiento.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

<sup>2</sup> Entiéndase por *razonamiento probabilístico frecuencial* como aquel que está relacionado con la experimentación o simulación de situaciones aleatorias, el cálculo e interpretación de la probabilidad desde la noción frecuencial.

2. Realice una evaluación del grado de influencia que cada una de las fuentes que se presentan a continuación, ha tenido en su conocimiento y criterios sobre el razonamiento probabilístico y su enseñanza. Para ello marque con una cruz (X), según corresponda, en A (alto), M (medio) o B (bajo).

FUENTES DE ARGUMENTACIÓN	GRADO DE INFLUENCIA DE CADA UNA DE LAS FUENTES ES SUS CRITERIOS		
	ALTO (A)	MEDIO (M)	BAJO (B)
1. Investigaciones teóricas y/o experimentales relacionadas con el tema.			
2. Experiencia obtenida en la actividad profesional (docencia en educación básica, pregrado y/o posgrado)			
3. Análisis de literatura especializada y publicaciones de autores nacionales relacionadas con el tema.			
4. Análisis de literatura especializada y publicaciones de autores extranjeros relacionadas con el tema.			
5. Conocimiento del estado actual de la problemática en algunos contextos del país.			
6. Intuición			

## ANEXO D. RESULTADOS AUTOEVALUACIÓN Fa Y Nc

Experto	Fuentes de Argumentación						% Fuentes de Argumentación						Fa
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	%F1	%F2	%F3	%F4	%F5	%F6	
1	A	A	A	A	A	A	0,05	0,5	0,1	0,2	0,1	0,05	1
2	A	A	M	A	M	B	0,05	0,5	0,1	0,2	0,1	0,05	1
3	A	A	A	A	B	B	0,05	0,5	0,1	0,2	0,05	0,05	0,95
4	A	A	A	A	M	B	0,05	0,5	0,1	0,2	0,1	0,05	1
5	M	A	M	B	A	A	0,05	0,5	0,1	0,05	0,1	0,05	0,85
6	A	A	M	A	M	A	0,05	0,5	0,1	0,2	0,1	0,05	1
7	A	A	A	A	A	A	0,05	0,5	0,1	0,2	0,1	0,05	1
8	A	A	M	A	B	M	0,05	0,5	0,1	0,2	0,05	0,05	0,95
9	M	A	M	B	B	M	0,05	0,5	0,1	0,05	0,05	0,05	0,8
10	A	A	B	A	M	M	0,05	0,5	0,05	0,2	0,1	0,05	0,95
11	A	A	M	A	M	A	0,05	0,5	0,1	0,2	0,1	0,05	1
12	M	A	B	A	M	M	0,05	0,5	0,05	0,2	0,1	0,05	0,95
13	M	A	B	A	B	A	0,05	0,5	0,05	0,2	0,05	0,05	0,9
14	M	A	M	M	M	M	0,05	0,5	0,1	0,1	0,1	0,05	0,9
15	A	B	M	A	M	M	0,05	0,25	0,1	0,2	0,1	0,05	0,75

Resultados Autoevaluación Nivel de Conocimiento del tema de los 15 expertos

Experto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nc	10	7	8	9	8	9	9	8	9	7	10	8	6	6	6

## ANEXO E. LISTA DE EXPERTOS

Nombre	Nivel de Educación	Años de Experiencia	País
Raimundo José Elicer Coopman	Magister	5	Chile
Jeisson Camilo Sua Flórez	Magister	5	Colombia
Karen Yissed Torres Mondragón	Magister	5	Colombia
Karen Yulemy Hernández	Magister	8	Colombia
Diana Milena Montoya Cortés	Magister	10	Colombia
Tulia Esther Rivera Flórez	Magister	10	Colombia
William Alfredo Jiménez Gómez	Magister	10	Colombia
Claudia Patricia Mancipe Caicedo	Magister	12	Colombia
Felipe Jorge Fernández Hernández	Magister	13	Colombia
Jack Eduardo Toloza Fernández	Magister	14	Colombia
Jesús Humberto Cuevas Acosta	Doctoral	18	México
Julia Elena Sanoja	Doctoral	25	Venezuela
Héctor Oswaldo Puerto Moreno	Magister	25	Colombia
Santiago Inzunza Cazares	Doctoral	29	México
Cileda de Queiroz e Silva Coutinho	Doctoral	35	Brasil

## ANEXO F. NIVEL DE COMPETENCIA DE LOS EXPERTOS

<b>EXPERTO</b>	<b>F.A. (Coeficiente de argumentación)</b>	<b>N.C. (Nivel de conocimiento)</b>	<b>G.C. (Grado de competencia)</b>	<b>Nivel de Competencia</b>
1	1	10	1	ALTO
2	1	7	0,85	ALTO
3	0,95	8	0,875	ALTO
4	1	9	0,95	ALTO
5	0,85	8	0,825	ALTO
6	1	9	0,95	ALTO
7	1	9	0,95	ALTO
8	0,95	8	0,875	ALTO
9	0,8	9	0,85	ALTO
10	0,95	7	0,825	ALTO
11	1	10	1	ALTO
12	0,95	8	0,875	ALTO
13	0,9	6	0,75	MEDIO
14	0,9	6	0,75	MEDIO
15	0,75	6	0,675	MEDIO

## ANEXO G. PROPUESTA ENVIADA

### Introducción

A continuación se presenta el producto de un trabajo de grado en el marco de la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual aborda una propuesta de categorías que permiten identificar el nivel de desarrollo del pensamiento aleatorio en cuanto a la probabilidad frecuencial.

Esta propuesta surge a partir de las necesidades observadas por los autores en la práctica pedagógica del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de Estadística que se realizó a finales del año 2014, para ello diseñaron y aplicaron una serie de actividades, las cuales tenían como objetivo enseñar y evaluar el aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de 7° grado, los maestros en formación deciden abordar esto desde la noción frecuencial, ya que esta noción evidencia la relación entre la estadística y la probabilidad. Se evidencia que los criterios para realizar una categorización respecto al desarrollo del pensamiento aleatorio son limitados en comparación a los otros pensamientos (numérico, variacional, espacial).

Partiendo de lo anterior se plantea un objetivo general: Formular una propuesta que permita caracterizar el desarrollo del pensamiento aleatorio en relación con la probabilidad frecuencial. Para ello se realizó una revisión de algunas propuestas que permiten caracterizar este desarrollo mediante la implementación de niveles, en esta revisión se destacan los trabajos realizados por Landín y Sánchez (2010) y Sánchez y Valdez (2013), ya que en estos se plantean cuatro niveles que permiten caracterizar el razonamiento acerca de las distribuciones binomiales y las nociones de probabilidad clásicas, frecuencial y subjetiva respectivamente, sin embargo no presentan indicadores para poder ubicar el razonamiento de cada individuo en los respectivos niveles, por ende no son de fácil adaptación para un objeto probabilístico diferente, también se considera que no son herramientas cercanas para el profesor de matemáticas del aula de la educación básica. Atendiendo a estas falencias se diseñan unos niveles específicamente para la probabilidad frecuencial, que contengan indicadores que permiten a cualquier profesor identificar el nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial.

En el campo del pensamiento aleatorio o estadístico, algunas propuestas de enseñanza y aprendizaje toman como punto de partida para caracterizar dicho pensamiento la taxonomía Structure of Observed Learning Outcomes [SOLO] propuesta por Biggs y Collis (1982), una de las conclusiones de esta teoría es que los estadios de desarrollo de Piaget son engañosos a la hora de clasificar la respuesta de un estudiante, dado que estas etapas se basan en la edad y no en los conocimientos que el sujeto pueda tener de un tema, por tanto un adulto que según Piaget se encuentra en el estadio operatorio formal debe resolver un problema de manera abstracta, pero Biggs y Collins sostienen que no es posible resolverlo de manera abstracta si no está familiarizado con el problema, de esta manera Biggs y Collins plantearon unos criterios que permiten la elaboración de los niveles de la taxonomía SOLO:

- El nivel de atención y memoria.
- El establecimiento de relaciones y asociaciones.
- La consistencia y la elaboración teórica.

De este modo Biggs y Collins, presentaron en 1982 una propuesta para evaluar los diferentes niveles de complejidad estructural en los resultados de aprendizaje alcanzados:

Nivel	Descripción
I. Preestructural	Respuesta centrada en aspectos irrelevantes de la propuesta de trabajo, con contestaciones evasivas o tautológicas del trabajo.
II. Uniestructural	Respuestas que contienen datos informativos obvios, los cuales han sido extraídos directamente del enunciado.

III. Multiestructural	Respuestas que requieren de dos o más informaciones del enunciado, los cuales siendo obtenidas directamente de éste, son analizadas separadamente, no de forma interrelacionada.
IV. Relacional	Respuestas extraídas tras el análisis de los datos del problema, integrando la información en un todo comprensivo. Los resultados se organizan formando una estructura.
V. Abstracción Expandida	Respuestas que manifiestan la utilización de un principio general y abstracto que puede ser inferido a partir del análisis sustantivo de los datos del problema y que es generalizable a otros contextos.

Tabla 1. Niveles Taxonomía SOLO.

### Desarrollo de la propuesta

Teniendo en cuenta los aspectos identificados anteriormente respecto al razonamiento probabilístico, se generan indicadores sobre conceptos, sesgos y tratamiento de los datos recolectados a partir de experimentos aleatorios, datos necesarios para la asignación de probabilidad desde una noción frecuencial. Usando dichos indicadores se establecen las posibles relaciones entre ellos para poder, a partir de ello, caracterizar el razonamiento ubicando su desarrollo en un determinado nivel.

### Indicadores

A continuación se presenta la Tabla 2, en la que se clasifica y describen sesgos, conceptos, y el tratamiento que se le dan a los datos, esto en relación con la asignación de probabilidad desde una noción frecuencial.

Categoría	Indicadores/Descripción
Conceptos	C <sub>1</sub> : Las respuestas evidencian un carácter evasivo ya que se desconocen los procedimientos y conceptos para cuantificar la ocurrencia de un evento.
	C <sub>2</sub> : Identifica y clasifica situaciones donde está presente el azar y la aleatoriedad.
	C <sub>3</sub> : Define espacio muestral de un experimento aleatorio clasificando los tipos de eventos.
	C <sub>4</sub> : Compara secuencias aleatorias en términos de más probable que, menos probable que o igualmente probables.
	C <sub>5</sub> : Calcula la probabilidad frecuencial de un evento sin reconocer la necesidad de la repetitividad del experimento y por ende realiza pocas experimentaciones.
	C <sub>6</sub> : Calcula la frecuencia relativa de un evento partiendo del número necesario de experimentaciones o simulaciones para que dichas frecuencias tiendan a estabilizarse.
	C <sub>7</sub> : Calcula la frecuencia relativa de un evento teniendo en cuenta su límite estocástico, es decir, la cercanía existente entre la probabilidad real y la experimental.
Sesgos	S <sub>1</sub> : Determinista: No reconoce ni diferencia las situaciones azarosas de las que no lo son.
	S <sub>2</sub> : Falacia del Jugador Tipo I y II: Predice el resultado de un experimento basado en rachas favorables o no favorables.
	S <sub>3</sub> : Concepción Errónea del Azar: Considera que las secuencias aleatorias nunca pueden tener algún patrón.
	S <sub>4</sub> : Atribuciones Flexibles: Intenta manipular el resultado de un experimento aleatorio a partir de creencias personales o mitos.
	S <sub>5</sub> : Confirmatorio: Considera la probabilidad frecuencial partiendo de la frecuencia absoluta de un evento.
	S <sub>6</sub> : Insensibilidad al Tamaño de la Muestra: Aproxima una probabilidad partiendo de un número muy pequeño de simulaciones.
	S <sub>7</sub> : Equiprobabilidad: Calcula e interpreta la frecuencia relativa como una aproximación de probabilidad pero considera a priori que todos los eventos definidos sobre un experimento aleatorio son igualmente probables.
	S <sub>8</sub> : No presenta ningún sesgo.
Tratamiento de datos	T <sub>1</sub> : Desarrolla experimentos aleatorios, sin tener en cuenta si se llevan a cabo bajo idénticas condiciones.
	T <sub>2</sub> : Realiza experimentos aleatorios teniendo en cuenta que se deben hacer bajo idénticas condiciones para que su resultado sea confiable.
	T <sub>3</sub> : Diseña experimentos aleatorios teniendo en cuenta las condiciones necesarias para que su

	resultado sea confiable.
	T <sub>4</sub> : Manipula herramientas tecnológicas que le permiten simular experimentos aleatorios.
	T <sub>5</sub> : Reconoce la validez de los datos y es capaz de trabajar con los resultados de simulaciones hechas por él mismo o por otros.
	T <sub>6</sub> : Asigna probabilidades basándose en resultados de experimentos propios o ajenos, además reconoce el propósito de realizar las simulaciones e interpreta la probabilidad.

Tabla 2. Indicadores del razonamiento probabilístico frecuencial.

De esta manera, los indicadores de las categorías conceptos y tratamiento de datos son “acumulables” a excepción del primer indicador de cada una de estas dos categorías, por ejemplo, si está presente el indicador T<sub>5</sub> implica que los indicadores T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub> y T<sub>4</sub> también lo están. Por otra parte los indicadores de sesgo no son “acumulables”, por tanto la presencia de uno no implica la presencia de los anteriores.

### **Caracterización de los niveles**

Partiendo de la descripción realizada para cada indicador, se construye la Tabla 3 que contiene la clasificación de dichos indicadores según su complejidad estructural. Esta clasificación se realiza con base en los cinco niveles de complejidad propuestos en la Taxonomía SOLO.

<b>Nivel de Complejidad</b>	<b>Indicadores</b>
Preestructural	S <sub>1</sub> ; C <sub>1</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> .
Uniestructural	C <sub>2</sub> ; C <sub>3</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>3</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>7</sub> ; T <sub>1</sub> .
Multiestructural	C <sub>3</sub> ; C <sub>5</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> ; T <sub>2</sub> ; T <sub>5</sub> .
Relacional	C <sub>6</sub> ; C <sub>4</sub> ; S <sub>8</sub> ; T <sub>5</sub> ; T <sub>4</sub> ; T <sub>3</sub> .
Abstracción Expandida	C <sub>7</sub> ; S <sub>8</sub> ; T <sub>6</sub> .

Tabla 3. Clasificación de indicadores.

A continuación, se definen los niveles del *razonamiento probabilístico frecuencial* entendiendo este razonamiento como aquel que está relacionado con la experimentación o simulación de situaciones aleatorias, el cálculo e interpretación de la probabilidad desde la noción frecuencial, a partir de las relaciones existentes entre los indicadores (Tabla 6) clasificados en cada nivel de complejidad estructural (Tabla 7). Estas relaciones se identifican usando ejemplos de respuestas y argumentos de estudiantes de secundaria y maestros en formación sobre algunas situaciones azarosas.

Estos ejemplos de respuesta son tomados de diferentes espacios y experiencias académicas de los autores de esta propuesta. Dentro del plan de estudios del Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas (PCLM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) se propone el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística, en el cual los estudiantes inician su acercamiento con la didáctica de la estadística y de la probabilidad. Este espacio fue cursado en el periodo académico 2014-2 (de Agosto a Diciembre de 2014), en el cual se diseñó una serie de actividades que permitieran la introducción de la probabilidad a estudiantes de grado séptimo del Colegio Mercedario San Pedro Nolasco; dado que los estudiantes no habían tenido un acercamiento con la probabilidad se escogió la noción frecuencial para abordar este concepto matemático, ya que esta noción facilita el paso de la estadística a la probabilidad. Algunas actividades fueron adaptaciones de las propuestas didácticas de González (2008) y Coutinho (2001), para finalizar ese proceso de enseñanza los maestros en formación diseñaron una evaluación de selección múltiple con única respuesta para identificar los posibles sesgos en el razonamiento de los estudiantes.

En el periodo académico 2015-2 (de Agosto a Diciembre de 2015) los autores de esta propuesta cursan el espacio académico Práctica de Integración Profesional a la Escuela, en el cual se realizan modificaciones de las actividades propuestas en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística atendiendo a las dificultades observadas en la aplicación de los talleres, luego de las modificaciones se aplicaron a estudiantes de grados noveno y décimo de dos colegios oficiales (Escuela Normal Superior Distrital María Montessori y Colegio Técnico Comercial Manuela Beltrán IED).

Finalmente se recolectó información de posibles respuestas a tareas relacionadas con la probabilidad frecuencial en el marco de la XXXV Jornada del Educador Matemático<sup>3</sup> (30 de septiembre, 1° y 2 de octubre de 2014) mediante un pilotaje a maestros en formación de las actividades correspondientes a la práctica del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística.

### **Nivel 1 (Preestructural)**

El razonamiento probabilístico ubicado en este nivel refleja la modelación de las situaciones aleatorias bajo un modelo determinista (sesgo  $S_1$ ), por ende las respuestas de los individuos son evasivas, evidenciando el desconocimiento de los elementos relacionados con la cuantificación del azar, además sus argumentos se asocian a otros sesgos como:  $S_5$ ,  $S_2$  y  $S_4$ . Por ende aun no es posible que se tenga un tratamiento de los datos, cuando no acepta la aleatoriedad. Ejemplo de razonamiento en este nivel se puede ver en situaciones tales como:

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
Juan todos los días para ir al colegio debe ingresar a la estación de Transmilenio más cercana de su casa, allí espera alguna de todas las posibles rutas que le sirven para llegar hasta la estación cercana al colegio. ¿Cuál de las rutas que le sirven será la que pase primero? ¿Por qué razón crees que no es posible asegurar el resultado de esta situación?	No sé cuál pase primero, porque no conozco el futuro.	Este tipo de respuesta refleja un carácter evasivo, ya que se sabe que no es posible asegurar el resultado de una situación azarosa pero se puede tratar de predecir el resultado partiendo del espacio muestral del experimento y la equiprobabilidad o no de los puntos muestrales, es evidente la presencia de $C_1$ .
	Siempre pasa el Ruta Fácil, porque es el que pasa más.	En esta respuesta refleja el sesgo determinista y sus argumentos muestran cómo se relaciona este sesgo con el sesgo confirmatorio, por tanto se identifica la relación existente entre $S_1$ y $S_5$ .
En un partido cualquiera del Chelsea, se analiza la cantidad de tiros que falla Falcao durante el transcurso del juego ¿puedes decir con seguridad cuál será el total de tiros fallados antes del partido? Justifica tu respuesta.	Todos porque él no está haciendo goles.	En esta situación se identifica la presencia de los sesgos determinista y falacia del jugador, ya que basa su respuesta en una racha. Relación entre $S_2$ y $S_1$ .
	Si todos, porque estoy seguro que no va a hacer goles en ese partido.	Esta respuesta evidencia un carácter netamente determinista, se identifica la presencia del indicador $S_1$ .
¿Cuál es el resultado al lanzar un dado?	Seis, porque los sople y eso me da suerte y siempre voy a sacar el mayor número.	Modela la situación de manera determinista a partir de mitos. Se evidencia la presencia de $S_1$ y $S_4$ .

Tabla 4. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 1.

Ya que el razonamiento de este nivel se caracteriza por modelar toda situación de manera determinista esto hace que se omita la información experimental o del enunciado, por ende el tratamiento de los datos es nulo, de ahí que en este nivel no está presente algún indicador de tratamiento de datos.

### **Nivel 2 (Uniestructural)**

El razonamiento probabilístico en este nivel se caracteriza por el reconocimiento del azar y los tipos de eventos ( $C_2$  y  $C_3$ ), pero se desconocen las características fundamentales para realizar una aproximación de la probabilidad cercana a la real, ya que la información usada en este proceso es obtenida directamente de las condiciones de los problemas sin cuestionar su validez, omitiendo su análisis; es decir trabaja con los

<sup>3</sup> Este evento se realiza semestralmente en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, en el cual estudiantes y profesores de la Licenciatura en matemáticas, e invitados profesionales en el ámbito de la Educación Matemática se encargan de preparar y ejecutar conferencias, concursos, talleres, etc., para toda la comunidad universitaria.

datos presentados en los enunciados sin tener en cuenta la existencia de otros conjuntos de datos que permiten hacer inferencias sobre el comportamiento futuro de los experimentos ( $T_1$ ), además de se reconoce la existencia de varios sesgos que interfieren en la aproximación de la probabilidad ( $S_n$ ), por ejemplo:

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
Luego de lanzar el dado diez veces se tomaron los siguientes datos: 5, 6, 1, 4, 5, 2, 3, 3, 3, 3. ¿Qué tan probable es que salga 3 en el siguiente lanzamiento y por qué?	Es muy probable porque en los últimos lanzamientos ha salido el tres.	En esta respuesta se evidencia el reconocimiento del azar, pero está basada en rachas. Por tanto están presentes los indicadores $C_2$ y $S_2$ .
	Es del 50% porque existen dos posibilidades: que salga o no.	Es claro que en esta respuesta se reconoce la presencia del azar, pero cree que cualquier evento tiene un 50% de ocurrencia, de esta manera se evidencian la relación de los indicadores $C_2$ y $S_7$ .
Se seleccionaron 5 dados que difieren en su tamaño y peso, realice 20 lanzamientos de un dado para identificar cuál es la probabilidad de que el resultado dé un número par. A) ¿Los 20 lanzamientos los haría con un solo dado o con varios? ¿Por qué? B) Realice la tabla de frecuencias para dichos lanzamientos y diga cuál es la probabilidad que salga un número par.	A) Los hice con más de un dado para que los resultados sean más variables. B) 15% porque en 15 lanzamientos salieron números pares.	Estas respuestas evidencian que se realiza el experimento sin mantener las mismas condiciones, además se calcula la probabilidad partiendo de la frecuencia absoluta. Indicadores $T_1$ ; $C_3$ ; $S_5$ .
Se lanzó 10 veces una moneda y se anotaron los resultados C, S, C, S, C, S, C, S, C, S. ¿Cree que es posible obtener estos resultados y por qué?	No es posible porque están intercalados.	Esta respuesta refleja que se cree que una secuencia aleatoria no puede tener algún patrón y ser producto del azar. Por tanto está presente el indicador $S_3$ .
	Sí porque si lanzo la moneda con la mano derecha obtengo cara y con la mano izquierda obtengo sello.	Se evidencia la presencia del indicador $S_4$ .

Tabla 5. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 2.

### **Nivel 3 (Multiestructural)**

El razonamiento probabilístico que se encuentre en este nivel se caracteriza por analizar información obtenida directamente de los enunciados, pero dicho análisis se hace de manera separada ( $T_n$ ), es decir, tiene los conceptos necesarios para dar respuesta a las preguntas ( $C_n$ ) pero la falta de asociación de estos conceptos con el contexto de los problemas, impide dar la respuesta correcta ya que los argumentos presentados permiten inferir la presencia de sesgos ( $S_n$ ). Además el razonamiento utilizado para resolver los ejercicios o problemas se hace sin tener en cuenta los análisis realizados en ejercicios anteriores.

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
Considere la siguiente situación: Juan y María lanzan cada uno 3 dados 10 y 100 veces respectivamente y anotan los resultados de cada uno de ellos. Consideran el evento A que	a. La aproximación de Juan es correcta, porque realizó todos los procedimientos necesarios.	En esta respuesta se trabaja con datos recolectados por otros, pero no se tiene en cuenta la cantidad de simulaciones, es decir, están presentes los indicadores $T_5$ y $S_6$ .

<p>resulte 1, 2, 3. Para aproximar la probabilidad realizan la tabla de frecuencias relativas para todos los resultados y afirman que la probabilidad del evento A es del 10%.</p> <p>¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?</p> <p>a. La aproximación de Juan es correcta, porque realizó todos los procedimientos necesarios, mientras que María realizó muchas experimentaciones que no eran necesarias.</p> <p>b. Las aproximaciones de Juan y María son correctas, porque realizaron todos los procedimientos necesarios.</p> <p>c. La aproximación de Juan no es correcta, porque realizó muy pocas repeticiones del experimento.</p>	<p>b. Las aproximaciones de Juan y María son correctas, porque realizaron todos los procedimientos necesarios.</p>	<p>Esta respuesta refleja trabajo con datos ajenos y el análisis de cada procedimiento, sin embargo el número de simulaciones no es un factor relevante. Por tanto se ve la relación entre los indicadores T<sub>5</sub> y C<sub>5</sub>.</p>
<p>Se desea determinar la probabilidad de que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto.</p>	<p>Coger un dado y lanzarlo 20 veces de la misma forma, y anotar el resultado de cada lanzamiento. Luego agrupar los números que son pares y los que no lo son, y calcular la frecuencia relativa de los pares.</p>	<p>En esta respuesta se identifica la necesidad de realizar las experimentaciones bajo idénticas condiciones para que el resultado no se vea afectado además se clasifican los eventos favorables y no favorables a partir del espacio muestral lo que implica un reconocimiento del azar, sin embargo considera suficiente 20 experimentaciones para aproximar la probabilidad. Indicadores presentes en esta respuesta: C<sub>3</sub>, T<sub>2</sub> y S<sub>6</sub>.</p>

Tabla 6. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 3.

#### **Nivel 4 (Relacional)**

El razonamiento probabilístico de este nivel se caracteriza por el análisis interrelacionado de la información que está presente en la situación, ya sea explícita o implícitamente, además usa la tecnología como un recurso que le ayuda a realizar los procedimientos de manera ágil, reconociendo la eficiencia de los software para hacer tareas repetitivas y aleatorias (T<sub>n</sub>). Por ende hay un reconocimiento de los conceptos que se ponen en juego en el momento de aproximar una probabilidad (C<sub>6</sub>), de esta manera es posible que en el razonamiento de este nivel esté inmerso algún sesgo que no sea determinante para aproximar la probabilidad (S<sub>7</sub>).

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
<p>Se desea calcular la probabilidad que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto y calcúlela.</p>	<p>Uso la función 'aleatorio entre' de Excel para generar números aleatorios entre 1 y 6. Luego copio esta función 500 veces, finalmente uso las herramientas de Excel para hacer la frecuencia relativa.</p>	<p>Se evidencia el diseño de una simulación en un software que permite simular el comportamiento de experimentos aleatorios, además se resalta la necesidad de realizar un gran número de simulaciones para calcular la frecuencia relativa (C<sub>6</sub>), esto implica que de manera implícita se están realizando las simulaciones bajo idénticas condiciones y que se establece el espacio muestral para experimentos aleatorios. En este procedimiento están presentes los indicadores: C<sub>6</sub>, T<sub>4</sub>, S<sub>8</sub>.</p>
	<p>Tendría que hacer 300 veces este experimento y luego calcular la frecuencia del evento.</p>	<p>En esta respuesta es clara la necesidad de realizar un gran número de repeticiones manuales de los experimentos para calcular la frecuencia relativa, además maneja los</p>

		conceptos suficientes para aproximar la probabilidad. En este procedimiento están presentes los indicadores: $C_6$ , $T_3$ , $S_8$ .																
<p>A continuación se muestra el resultado de 300 simulaciones del lanzamiento de un dado realizada en Excel:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Resultado</th> <th>Frecuencia Abs.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>42</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>63</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>38</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>51</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>46</td> </tr> <tr> <td><b>Total general</b></td> <td><b>300</b></td> </tr> </tbody> </table> <p>¿Cuál sería el procedimiento a seguir para calcular la probabilidad de que salga 4, y por qué?</p>	Resultado	Frecuencia Abs.	1	42	2	63	3	38	4	51	5	60	6	46	<b>Total general</b>	<b>300</b>	<p>Calcular la frecuencia relativa del 4 usando la tabla, porque se realizaron muchas experimentaciones y no es necesario lanzar el dado.</p>	<p>Es evidente el reconocimiento de la validez de los datos recogidos por otros, ya que se acepta el número de simulaciones y la manera como se repitieron, por ende son usados para aproximar la probabilidad. Indicadores presentes en esta respuesta: <math>T_5</math>, <math>S_8</math> y <math>C_6</math>.</p>
Resultado	Frecuencia Abs.																	
1	42																	
2	63																	
3	38																	
4	51																	
5	60																	
6	46																	
<b>Total general</b>	<b>300</b>																	
<p>Se lanzó 10 veces una moneda y se anotaron los resultados C, S, C, S, C, S, C, S, C, S. ¿Crees que es posible obtener estos resultados y por qué?</p>	<p>Sí porque todas las secuencias de cualquier experimento aleatorio son igualmente probables.</p>	<p>Se evidencia la presencia de los indicador <math>C_4</math> y <math>S_7</math>, ya que se considera que todos los eventos de cualquier experimento aleatorio son equiprobables y está realizando comparaciones entre secuencias aleatorias que no son mencionadas en el enunciado.</p>																

Tabla 7. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 4.

### **Nivel 5 (Abstracción Expandida)**

En este nivel hay una ausencia de sesgos ( $S_8$ ) en el razonamiento probabilístico permitiendo una aproximación de la probabilidad cercana a la real ( $C_7$ ) y sus argumentos develan la comprensión de las condiciones, características, finalidad y aplicación de cada uno de los conceptos relacionados con la probabilidad frecuencial con el objetivo de hacer inferencias en un contexto matemático o cotidiano ( $T_6$ ). De este modo están presentes algunos procesos generales propuestos por el MEN, tales como modelar, comunicar y conjeturar.

Situación	Ejemplos de respuesta	Características
<p>Se desea calcular la probabilidad de que el resultado del lanzamiento de un dado sea un número par a partir de las frecuencias relativas. Mencione cuáles son los pasos necesarios para llevar a cabo esto y calcúlela.</p>	<p>Usar un programa para simular este experimento las veces que sean necesarias para que se estabilicen las frecuencias y dé una aproximación cercana a la probabilidad real, calcular la frecuencia relativa del evento, al repetir esto se ve que estas aproximaciones se mueven alrededor del 50%.</p>	<p>Se ve un manejo de los conceptos y ayudas tecnológicas para el tratamiento de los datos y así diseña sus propias simulaciones de los experimentos aleatorios, realizando varios grupos de simulaciones con el objetivo de conjeturar cuál es la probabilidad real a partir de una idea intuitiva de límite estocástico. Indicadores presentes <math>C_7</math>, <math>S_8</math> y <math>T_6</math>.</p>
<p>A continuación se muestra el resultado de 300 simulaciones del lanzamiento de un dado realizada en Excel:</p>	<p>Usar los datos ya que es una simulación de ese experimento y se realizó un gran número de veces y calcular la frecuencia relativa del 4 y saber que esta frecuencia es una aproximación cercana a la real porque solo se tiene en cuenta ese grupo de datos.</p>	<p>Se trabaja con datos recolectados por otros y está interesado por la veracidad de estos, además reconoce la finalidad de realizar simulaciones de experimentos aleatorios y esto que su interpretación de la probabilidad frecuencial tenga en cuenta la necesidad de realizar varios</p>

Resultado	Frecuencia Abs.	
1	42	grupos de simulaciones. Indicadores presentes C <sub>7</sub> , S <sub>8</sub> y T <sub>6</sub> .
2	63	
3	38	
4	51	
5	60	
6	46	
<b>Total general</b>	<b>300</b>	
¿Cuál sería el procedimiento a seguir para calcular la probabilidad de que salga 4, y por qué?		

Tabla 8. Respuestas y relaciones en los indicadores del Nivel 5.

### Referencias

- Bersabé, R. (1995). Sesgos cognitivos en los juegos de azar: La ilusión de control. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.
- Biggs, J. y Collins, K. (1982). Evaluating the quality of learning: *The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.
- Coutinho, C. (2001). Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. *Université Joseph Fourier, Grenoble I, França*.
- Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la Estadística. En: Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.
- Mateos, G. y Morales, A. (1985). Teoría subjetiva de la probabilidad: Fundamentos, evolución y determinación de probabilidades. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de ciencias económicas y empresariales, Departamento de estadística y métodos de decisión. Madrid, España.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias matemáticas. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.
- NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática (M. Fernández, Trad.). Sevilla: SAEM Thales. (Trabajo original publicado en 2000).
- Sánchez, E. y Valdez, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2).

## ANEXO H. VALORACIÓN DE LA PROPUESTA



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
*Alejandro Gualteros*  
*Carlos León*

A continuación se presenta una lista de indicadores con las respectivas unidades de medición, con el propósito de que marque con una cruz (X) la celda que corresponda con la evaluación que usted le otorga a cada ítem.

Unidades de medición: Muy adecuado (MA), Bastante adecuado (BA), Adecuado (A), Poco adecuado (PA), Muy inadecuado (MI).

Nº	INDICADORES	VALORACIÓN				
		MA	BA	A	PA	MI
1	Los niveles para la categorización del desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial, reflejan los sustentos teóricos de la propuesta.					
2	El marco de referencia presentado bajo el cual se sustenta la construcción de los niveles favorece el logro del objetivo por el cual se elaboró la propuesta.					
3	Los niveles e indicadores presentados permiten que un profesor (en el campo de la Educación Matemática) clasifique el desarrollo del razonamiento probabilístico frecuencial de sus estudiantes.					
4	El número de niveles propuestos es acorde con la complejidad del objeto de estudio (probabilidad frecuencial).					
5	De acuerdo a la propuesta, es necesario que para alcanzar un nivel determinado de razonamiento se deben transitar por los niveles anteriores. Es decir, los niveles son jerárquicos.					
6	La justificación de cada uno de los niveles es acorde con la teoría que se usa para fundamentar la propuesta.					

Ofrezca sus ideas y criterios sobre las bondades, deficiencias e insuficiencias que presenta la Alternativa Metodológica en su concepción teórica y que pudiera presentar al ser aplicada en la práctica escolar, con el fin de poder generar un perfeccionamiento de la misma. Para sus recomendaciones, tenga en cuenta los indicadores que valoró como: Adecuados (A), Poco adecuados (PA), Muy inadecuados (MI).

Fortalezas	
------------	--

Falencias	
Recomendaciones	