Distancia usual entre dos puntos en diferentes sistemas coordenados del plano y el espacio.

Victor Armando Mendigaño Triana

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas

Bogotá
2016

Distancia usual entre dos puntos en diferentes sistemas coordenados del plano y el espacio.

Victor Armando Mendigaño Triana

2010240039

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor de Trabajo de grado

William Alfredo Jiménez Gómez

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá
2016

DEDICATORIA

La concepción de esta tesis está dedicada a mis padres, pilares fundamentales en mi vida. Sin ellos, jamás hubiese podido conseguir lo que ahora soy. Su tenacidad y lucha insaciable han hecho de ellos el gran ejemplo a seguir y destacar, no solo para mí, sino para mis hermanos y familia en general.

También dedico este proyecto a mi novia, compañera inseparable de cada jornada, ella representó gran esfuerzo y tesón en momentos de decline y cansancio. A ellos esta tesis, que sin ellos, no hubiese podido ser.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar a Dios por haberme guiado por el camino de la felicidad hasta ahora; en segundo lugar a cada uno de los que son parte de mi familia; a mi padre, mi madre, a mis hermanos y a todos mis demás allegados; por siempre haberme dado su fuerza y apoyo incondicional que me han ayudado y llevado hasta donde estoy ahora. Por último a mis compañeros y profesores a quienes les debo gran parte de mis conocimientos, gracias a su paciencia, enseñanza y afecto, junto a esto un agradecimiento a esta prestigiosa universidad la cual me abrió abre sus puertas.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Distancia usual entre dos puntos en diferentes sistemas coordenados del plano y el espacio.
Autor	Mendigaño Triana, Victor Armando.
Director	William Alfredo Jiménez Gómez
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 76 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	DISTANCIA, LOCALIZACIÓN, COORDENADAS, PLANO, ESPACIO.

2. Descripción

Este es un documento en el que se aborda el estudio de la distancia usual entre dos puntos pero en sistemas no usuales, ya que se modifica el ángulo de intersección entre los ejes coordenados y por lo tanto se debe establecer una forma para localizar los puntos por medio de rectar paralelas y rectas perpendiculares, esto en el plano y para luego generar una extensión hacia el espacio, junto a esto se presentan ilustraciones de los applets construidos con el software Geogebra como ayuda visual, de ser necesario consultarlos estos se encuentran vinculados en la página web del software.

3. Fuentes

Angel, J. (2008). *El plano*, México, Mathcon.

Chávez, J, Fernández, F, (2011). *Un estudio de las rectas en planos oblicuos perpendiculares*, Tesis (Pregrado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Denis, A. (n.f). *Matemáticas II Vectores en R^2 y R^3*, Buenos Aires, Argentina, Escuela de Ciencia y Tecnología.

Hidalgo, L. (2012). *Geometría en el espacio puntos y vectores*, Ciudad de México, México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Millman, R. Parker, G. (n.f). *Geometry (A Metric Approach with Models)*. USA: Springer.

Moise, E. (1990). *Elemtary Geometry from an advanced standpoint*. New Your. USA: The Book Company.

Moreno, L, Carreño, O. (2011). *Un tratamiento de las cónicas a partir de diferentes sistemas de coordenados*, Tesis (Pregrado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Neira, C. (2011). *Topología General*, Bogotá, Colombia, Universidad Nacional de Colombia.

Quintero R. (2001). *La invención de Fermat de la geometría analítica*, Bogotá, Colombia: SMM, IPN.

Soto, E. (2010). *Geometría Analítica*, México.v

Soto, M. (2011). *Geometría y Trigonometría*, Cajamarca, Perú, I.E.P. María de Nazaret.

Smith, E. Salkover, M. Justice, H. (s.f). *Analyric Geometry*, EEUU, University of Cincinnati.

Swokowski, E, Cole, J. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Distrito Federal, México, Cengage Learning.

Zill, D, Dewar, J. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, México.

4. Contenidos

El trabajo está compuesto por cinco capítulos:

El primero de ellos es el marco teórico el cual se enfoca en dar a conocer algo de la historia que existe alrededor de la distancia, junto a su construcción matemática de la misma, estableciendo los caminos para construir una geometría que tenga como característica algún tipo de distancia, también se establecen los parámetros que se van a seguir a lo largo del documento como, las notaciones y nomenclaturas, las características y sistemas que se van a utilizar, el segundo se enfoca en la construcción de la ecuación de distancia en el plano, estableciendo el sistema coordenado y la forma de localización, para los puntos A y B, con esto se presentan los resultados por medio de tablas, apoyado visualmente por ilustraciones.

Para el tercer capítulo se establecen las ecuaciones de distancia en el espacio, teniendo en cuenta la modificación de uno de los ángulos diedros del mismo, se muestran algunas imágenes del sistema a trabajar junto a una tabla donde se resume las ecuaciones de cada sistema.

En el cuarto capítulo se encontraran las conclusiones producto del trabajo desarrollado, por último en el quinto capítulo se encuentran algunos aspectos que quedaron abiertos durante el desarrollo del mismo que se pueden investigar en posteriores trabajos.

5. Metodología

La metodología que se utiliza es primero establecer el tipo de distancia con la que se va a trabajar, luego se establece el sistema de ejes coordenados, luego el método de localización de puntos, con todo lo anterior se modela el sistema y por último con estrategias algebraicas y geométricas se establece la ecuación o ecuaciones que permitan determinar la distancia entre un par de puntos cualesquiera.

6. Conclusiones

Durante la investigación se indago sobre desarrollo cronológico de la construcción de la distancia pero se evidencio que presenta vacíos, como por ejemplo la construcción del plano cartesiano, ya que se da por entendido que fue dedicado a Descartes, así que a la hora de consultar documentos específicos y de historia relacionados con esta construcción, se encuentro que no se especifica quien fue el autor de dicho plano, así que muchos documentos al igual que en este se deja como un desarrollo colectivo de los matemáticos de la época.

A lo largo de la deducción de las ecuaciones se perciben las equivalencias con los sistemas de coordenadas polares y cilíndricas, así que se vislumbra la importancia que tiene el estudio de la trigonometría, por ende este tipo de ejercicios son de apoyo para el estudio de la Geometría Analítica o en un curso de Pre-Calculo donde se llevan a cabo este tipo de transformaciones y construcciones, ya que brinda herramientas para abordar caminos de construcción equivalentes.

El uso de un software como Geogebra que permite con facilidad la modelación de los problemas, esto fue indispensable ya que la visualización es un aspecto de suma importancia y sin este el camino para la deducción de las ecuaciones sería complicado y engorroso, junto a esto se tiene la posibilidad de los vínculos en la página web del mismo software, así que se tiene la posibilidad de tener los applets a mano, para la verificación de la deducción de las ecuaciones.

Otro aspecto importante y que cabe resaltar es que el trabajo al enmarcarse en una estructura tan compleja como la distancia, a la hora de su desarrollo se reduce a un tema menos complejo como la solución de triángulos por medio de estrategias algebraicas y geométricas, a su vez el poder deducir para cada caso presentado la ecuación que determina la distancia para cada sistema, por otro lado se puede establecer una vista más compleja de la distancia por medio de las transformaciones lineales que permita una generalización más fuerte.

Así pues la culminación de este trabajo me permitió poner en juego los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, también fue posibles evidenciar errores que se pueden cometer y dificultades que podrían tener los estudiantes que lleguen a estudiar este tema de la distancia, enriqueciendo así el sendero de enseñanza que se puede abordar a la hora de ejercer la docencia, también permitió ver que acerca de este tipo de sistemas es muy poco lo que se ha escrito de manera formal, así que hay mucho por escribir y estudiar puesto que estos aspectos se trabajan en clases de la línea de la geometría y la aritmética de la universidad, pero estos resultados no se consolidan en documentos publicables llevando a que los desarrollos sobre el tema solo existen algunos trabajos de grado que se trabajaron en simultáneo a este.

Elaborado por:	MENDIGAÑO TRIANA, Victor Armando.
Revisado por:	William Alfredo Jiménez Gómez.

• **Fecha de elaboración del Resumen:**	27	Octubre	2016

CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en torno al problema de encontrar una ecuación de distancia entre un par de puntos sobre un plano no usual y un espacio no usual, este problema se presenta durante las clases de Geometría Analítica y algunas de la línea del Álgebra de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica, con el objetivo de indagar sobre estos planos y espacios, ya que no se encuentra bibliografía que se centre en este tema, siendo la distancia la base para estudios más profundos de la geometría y el cálculo.

Así que siempre se apoya geométrica y algebraicamente lo desarrollado en el trabajo, aportando así una base para el avance de estudios asociados a la distancia para posteriores investigaciones, para eso en el primer capítulo se presenta la construcción de la distancia, por medio de la de una geometría métrica la cual nos permite hablar de distancias, una vez se construya se proponen algunos ejemplos de distancias tanto en el plano como en el espacio, a lo largo del mismo se define cual será la distancia utilizada en el trabajo, junto a las notaciones y nomenclaturas a utilizar, el siguiente capítulo se procede a la construcción de planos no usuales, con esto el primer paso es la localización de puntos en cada sistema coordenado, luego por medio de estrategias geométricas y algebraicas se establece cuál es la ecuación que permite determinar la distancia entre un par de puntos.

Para siguiente capítulo se hará una extensión de lo encontrado en los planos no usuales hacia los espacios no usuales donde también por medio de estrategias geométricas y algebraicas se encontrara la ecuación de la distancia entre un par de puntos, posterior a esto se encontraran las conclusiones donde se evidencia lo encontrado a lo largo del trabajo y por último se tienen algunas cuestiones abiertas que se presentaron en el mismo y que son de gran interés para una investigación.

Todo esto se apoya en un software en este caso fue Geogebra el cual permite modelar los sistemas de localización mencionados en el trabajo, a su vez sirven para visualizar y verificar las deducciones presentadas, estos modelos (applets) se encuentran anclados en la página web del software ya que el caso del espacio no es del todo claro por medio de imágenes planas.

JUSTIFICACIÓN

Para iniciar es necesario remitirnos a la época de Descartes y Fermat hacia el año1600, donde a lo largo de los estudios se planteó un sistema coordenado como base para la modelización de problemas que venían desde la época de Apolonio, con esto se genera la Geometría Analítica, para ello se planteó un plano el cual lleva el nombre de plano cartesiano en honor a Descartes el cual consiste en intersecar un par de rectas en forma perpendicular, para así dar paso al estudio de rectas, ecuaciones lineales, etc…

Pero este plano cartesiano presenta un limitante, la intercesión en ángulo recto deja de lago la posibilidad de modificar dicha intersección, así que con este trabajo se buscará romper dicha brecha y permitir la existencia de planos donde el ángulo de intersección sea distinto al ángulo recto, posterior a esto se pretende establecer ecuaciones que permitan determinar la distancia entre un par de puntos para ello se tienen algunos indicios alrededor de planos no usuales donde algunos compañeros y docentes de la Universidad han realizado estudios.

OBJETIVOS

General

- ✓ Determinar la ecuación de distancia entre un par de puntos en diferentes sistemas coordenados tanto en el plano como en el espacio.

Específicos

- ✓ Realizar una indagación en la literatura referente a la distancia entre un par de puntos.
- ✓ Generar sistemas de localización de puntos en planos no usuales.
- ✓ Generar sistemas de localización de puntos en espacios no usuales.
- ✓ Ubicar puntos en los diferentes sistemas coordenados.
- ✓ Modelar los sistemas coordenados en Geogebra.

MARCO TEÓRICO

El primer paso es entender qué es a lo que le llamamos distancia, así pues todo inicia con los problemas planteados hacia el año 1600 donde los matemáticos buscaban la comprensión de su entorno, para eso se utilizó la geometría la cual durante los años fue adaptándose de tal forma que otras ciencias la complementaron, hasta el punto de concebir la Geometría Métrica, esto bajo un sistema el cual juega un papel fundamental, este consiste en permitir que los números reales desempeñen el papel de ordenar, esto consiste en poner el sistema de números reales en correspondencia a los objetos geométricos que se tienen en primera instancia puntos y rectas, la intención es proporcionarle a la geometría ciertas características muy útiles para el propósito de encontrar distancias.

En primera medida es necesaria una estructura algebraica que en este caso será un triplete notado como $[\mathbb{R}, +, *]$, donde, se cumplen las propiedades básicas del sistema de números reales. del cual el conjunto de $\mathbb{R}$ sus elementos se llaman números reales, junto a esto son dadas dos operaciones, estas son adición y multiplicación, indicados por $+$ y $*$, respectivamente; Sobre esto se pensó en darle un orden a dicha estructura de tal forma que sujeta a ciertas condiciones se logra ordenarlos, para eso se notará dicho orden como
$[\mathbb{R}, +, *, <]$, con esta estructura es posible obtener una geometría denominada abstracta donde α consiste en un subconjunto de δ, cuyos elementos son llamados puntos, junto con una colección ℓ no vacía denominada líneas, de manera que.

- ✓ Para dos puntos $A, B \in \delta$, hay una línea $l \in \ell$, con $A \in l$ y $B \in l$.
- ✓ Toda línea tiene al menos dos puntos.

De acá que si $\alpha = \{\delta, \ell\}$, es una geometría abstracta, donde $A \in \delta$ y $l \in \ell$ de tal forma que $A \in l$, podemos generar un axioma que nos asegura que, cada par de puntos se encuentran en alguna línea de ℓ.

Para seguir en el camino de encontrar la distancia es necesario abordar otro nivel del desarrollo geométrico denominada, geometría incidente en donde $\{\delta, \ell\}$, se tiene.

- ✓ Cada dos puntos en ℓ es una línea única.
- ✓ Existen tres puntos A, B, C en δ que no se alinean en una sola línea.

Notación. Si $\{\delta, \ell\}$ es una geometría de incidencia y $P, Q \in\ l$, hace que dicha línea sea única.

Por último para llegar a hablar de distancia se tiene en cuenta lo planteado por Millman. R y Parker. G, donde hacen referencia a algunos autores como Borsuk y Szmiclew (1960) además de Greenberg (1980), buscando una definición para lo que se determina "Distancia", para ello se le denomina por medio de una función la cual asigna un número y se denota $d(A, B)$, donde A y B son puntos, además no hay relevancia si se tiene de A a B o de B a A de acá se tiene la primer propiedad y es que $d(A, B) = d(B, A)$, a lo anterior es posible apreciar también que la distancia entre dos puntos es cero si los puntos son el mismo, así que desde un punto de vista más formal se tiene.

Dada una función distancia en un conjunto l es una función $d: l\ X\ l\ \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, tal que para todo $A, B \in l$ se tiene.

$i)\ d(A, B) \geq 0.$
$ii)\ d(A, B) = 0$, Sii $A = B$.
$iii)\ d(A, B) = d(B, A).$
$iv)\ d(A, B) \leq\ d(A, C) +\ d(C, B).$

De tal modo que esta es considerada como una Geometría Métrica donde se tiene la terna $[\ \delta, \ell, d]$ y la distancia se comporta de la siguiente forma $d\ :\ \delta\ X \delta\ \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, para cada $l\ \in \ell$, existe $f\ :\ \ell\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ de modo que para todo $A\ , B\ \in\ \ell$, la distancia
$d(A, B) = |f(A) - f(B)|$. (Moise, 1990).

Así pues es posible definir formas de encontrar la distancia, como por ejemplo si

$l = \mathbb{R}^2$, donde $A = (x_i, y_i)$ y $B = (x_j, y_j)$, la distancia usual (Euclidiana), está dada por la ecuación $d(A,B) = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}$, siendo esta la que se tendrá en cuenta a lo largo del trabajo pero se tienen otras distancias en base a otras métricas como por ejemplo.

La distancia mencionada por Millman y Parker (n.f) es la del taxista donde dados A y B se tiene,

$$d_T(A,B) = \left|x_i - x_j\right| + \left|y_i - y_j\right|.$$

Otra es la correspondiente a las coordenadas polares , donde $l = \mathbb{R}^2$ con,
$A = (r_i, \theta_i)\ y\ B = \left(r_j, \theta_j\right)$, definida como:

$$d_\theta = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j Cos(\theta_i - \theta_j)}.$$

Otra exótica es la de Poincaré la cual mencionan Millman y Parker (n.f), teniendo en cuenta que ahora se trabaja sobre el plano de Poincaré, esta se define de la siguiente forma.
$d_P(A,B) = \left|\ln\left(\frac{y_j}{y_i}\right)\right|$ Cuando $x_i = x_j$,

$$d_P(A,B) = \left|\ln\left(\frac{\frac{x_i - c + r}{y_i}}{\frac{x_j - c+r}{y_j}}\right)\right|$$ Donde A y B en l.

Así de esta manera encontramos distintas formas en las que se puede encontrar la distancia entre un par de puntos.

Por otro lado también en el espacio existen distintos sistemas de localización de puntos, entonces se tiene por medio de una terna y la siguiente función $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} = \{(x,y,z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$, ahora bien si dadas las ternas (x,y,z) y $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ estas serán iguales si y solo si $x = x', y = y', z = z'$;

De esta forma dados los puntos $A = (x, y, z)$ y $B = (x_1 , y_1, z_1)$ la ecuación de su distancia será:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

También se tienen distintos sistemas de localización de puntos como los siguientes:

El sistema de coordenadas cilíndricas por ejemplo el cual se establece por medio de una terna (r, θ, z) donde $r > 0, y\ 0 \leq \theta < 2\pi$, con esto se logra obtener la localización presentada en la ilustración 1.

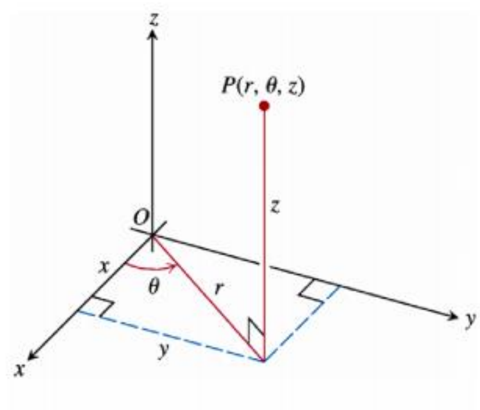


Ilustración 1. Sistema Cilíndrico.

Ya que se conoce la localización existe el método en que se conoce la distancia entre dos puntos, para ello una vez dadas las coordenadas de los puntos, se utiliza una transformación lineal que permite transformar las coordenadas cilíndricas a las coordenadas cartesianas, con esto una vez hecho el cambio se aplica la ecuación de distancia menciona anteriormente, estas trasformaciones son:

$$x = r * \cos(\theta),$$

$$y = r * sen(\theta),$$

$$z = z.$$

Así que la ecuación de distancia será, dados los puntos $A\ y\ B$ donde $A = (r, \theta, z)$ y

$B = (r_1, \theta_1, z_1)$,

$$d(A,B) = \sqrt{(r * \cos\theta - r_1 * \cos\theta_1)^2 + (r * \operatorname{sen}\theta - r_1 * \operatorname{sen}\theta_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

También se tiene otra opción para la localización de puntos en el espacio, este se conoce como sistema coordenado esférico el cual consiste de lo siguiente.

Una terna dada por (ρ, θ, ϕ), donde $\rho \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi$, con esto en mente tendremos el sistema de localización de puntos presentado en la ilustración 2.

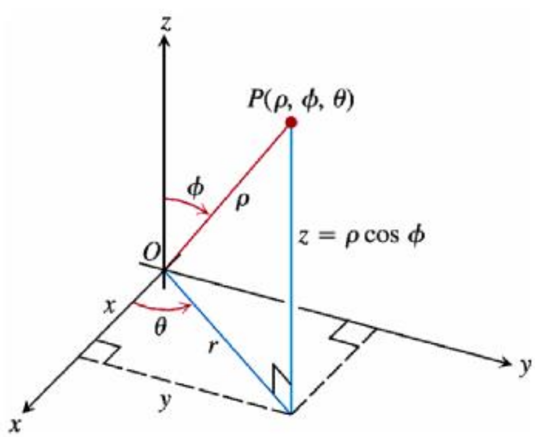


Ilustración 2. Sistema Esférico.

Para la encontrar la distancia en este sistema existe una transformación lineal que permite el paso del sistema cartesiano al sistema esférico, para luego aplicar la ecuación de distancia en el espacio, así que estas son las transformaciones.

$$x = \rho * \cos(\theta) * \operatorname{sen}(\phi),$$

$$y = \rho * \operatorname{sen}(\theta) * \operatorname{sen}(\phi),$$

$$z = \rho * \cos(\phi).$$

Así que la ecuación de distancia será, dados los puntos A y B donde $A = (\rho, \theta, \phi)$ y $B(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$,

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\rho * \cos(\theta) * sen\,(\phi) - \rho_1 * \cos(\theta_1) * sen\,(\phi_1)\right)^2 + \left(\rho * \operatorname{sen}(\theta) * sen\,(\phi) - \rho_1 * \operatorname{sen}(\theta_1) * sen\,(\phi_1)\right)^2 + \left(\rho * \cos(\phi) - \rho_1 * \cos(\phi_1)\right)^2}.$$

Adicional a esto es necesario tener en cuenta la siguiente desigualdad para poder desarrollar las demostraciones del teorema número iv, la cual se conoce como la desigualdad de Minkowski donde se tiene que,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

Para $p = 1$ la desigualdad es siempre verdadera. Si $p > 1$, sea $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Usando que $(p-1)q = p$ y la desigualdad de Hölder, se tiene.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\,(a_k + b_k)^{P-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k\,(a_k + b_k)^{P-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

De acá se obtiene,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■.

Construcción de la ecuación de distancia para planos no usuales

Teniendo en cuenta cual será nuestra función de distancia, ahora se establecerá la regla o reglas para localizar los puntos, para ello lo primero que se debe establecer es el sistema de ejes coordenados ya que el caso usual es cuando este sistema está conformado por un par de rectar que se intersecan de forma perpendicular como en la ilustración 3.

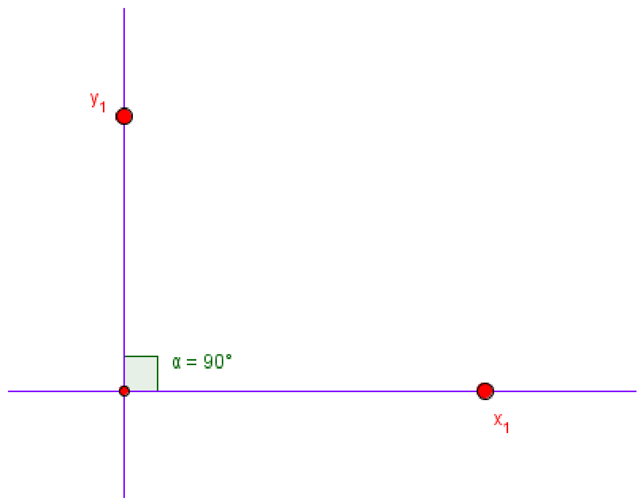
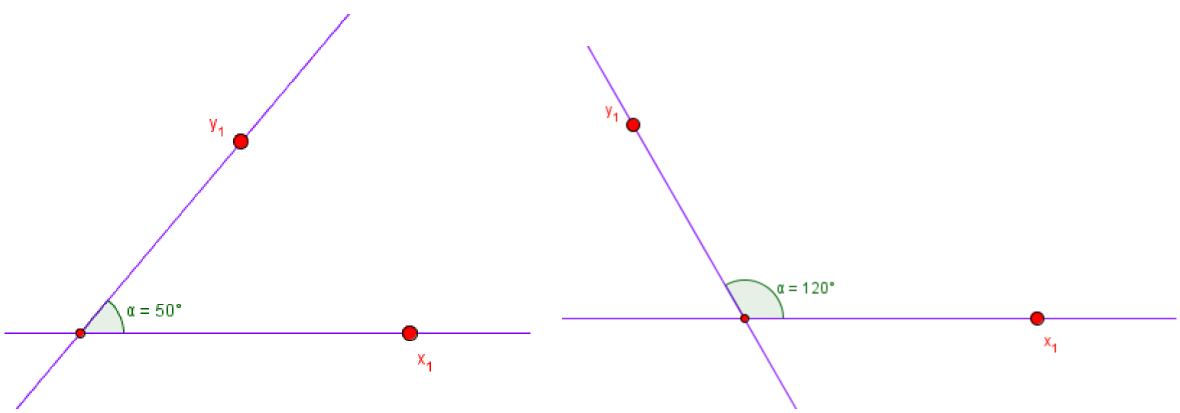


Ilustración 3. Caso usual de sistema de ejes coordenados.

Por otro lado también se pueden establecer sistemas donde el ángulo que forman los ejes no es recto como en la ilustración 4.



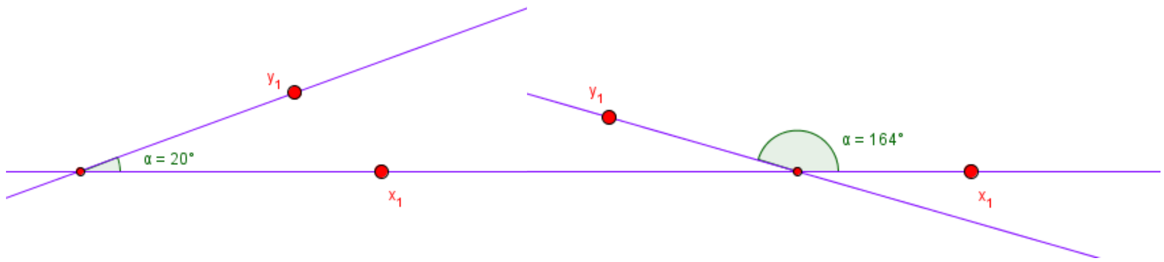


Ilustración 4. Sistemas de coordenados a trabajar.

Así pues que de forma general a lo largo del trabajo veremos que este ángulo será notado como α, lo siguiente será establecer las componentes de las coordenadas sobre los ejes esto será de la forma usual donde a cada punto de la recta se le asigna un número real como en la ilustración 5.

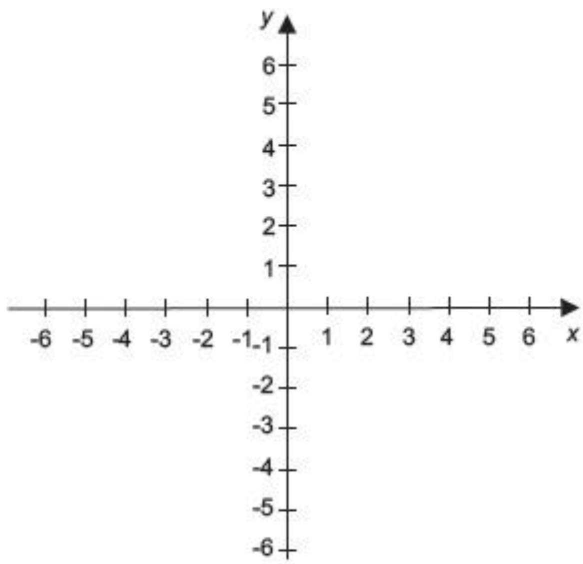


Ilustración 5. Asignación de valores sobre los ejes.

Del mismo modo tendremos una forma general para denotar dichos números así que se verán las notaciones $x_1, x_2, .., x_n$ para la componente de las coordenadas sobre el eje X y $y_1, y_2, ..., y_n$ para la componente de las coordenadas sobre el ejes Y, ahora bien para la localización de puntos se establece una nomenclatura la cual indica cómo debe trazarse las rectas.

Pa, se traza una recta paralela al eje opuesto de la componente de la coordenada, que pase por la componente de la coordenada esta se verá de color verde durante el documento, como lo muestra la ilustración 6 siendo x_1 una componente de la coordenada del punto.

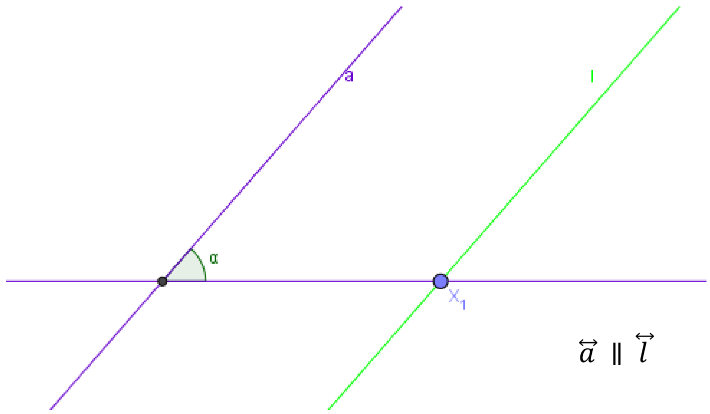


Ilustración 6. Nomenclatura Pa.

Pe, se traza una recta perpendicular al eje al que pertenece la componente de la coordenada por la componente, esta se verá de color rosa durante el documento como lo muestra la ilustración 7 siendo y_1 una componente de la coordenada del punto.

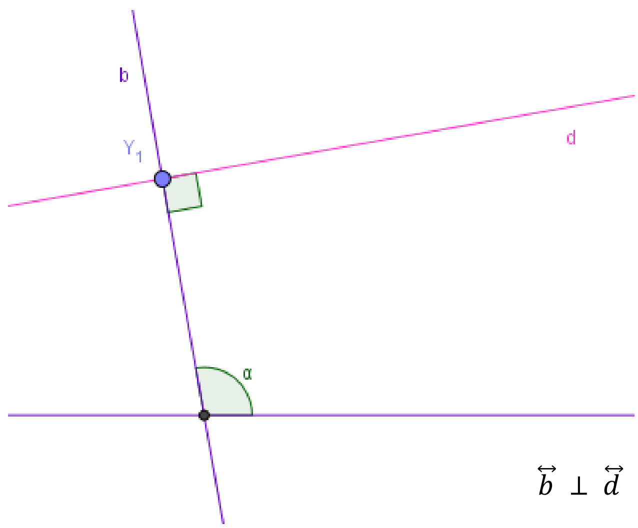


Ilustración 7. Nomenclatura Pe.

Per, se traza una recta perpendicular al eje opuesto que contiene la componente de la coordenada que pase por la componente esta se verá de color naranja durante el documento como lo muestra la ilustración 8, siendo x_1 una componente de la coordenada del punto.

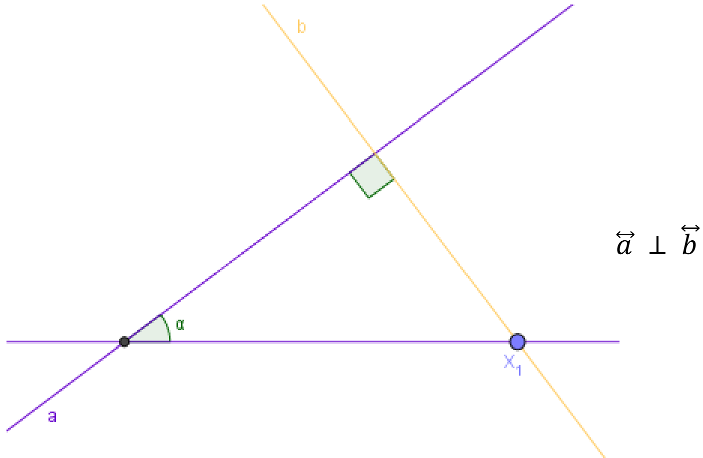


Ilustración 8. Nomenclatura Per.

Ahora se tienen los siguientes casos de sistemas de localización, dado $A = (x_i, y_i)$ se tiene $(PaPa)$, el cual consiste en trazar por x_i y y_i, una recta que cumpla con las características de ser Pa de tal forma que al intersecar las rectas trazadas se encontrara A como en la ilustración 9, otro ejemplo será $(PaPe)$, el cual consiste en trazar por x_i una recta que cumpla con las características de ser Pa y por y_i una recta que cumpla con las características de ser Pe, de esta forma al intersecar las rectas trazadas se encontrara A como en la ilustración 10, de esta forma se tendrán otros posibles sistemas de localización como: $(PaPer), (PePa), (PerPa), (PePe), (PerPer), (PePer), (PerPe)$, pero cabe aclara que para los casos de $PePer$ y $Perpe$ las rectas que se trazan resultan ser paralelas por lo tanto no hay intersección llevándonos a que no habrían puntos, las siguientes ilustraciones ayudaran a visualizar lo mencionado con anterioridad, entonces dado $A = (x_1, y_1)$ se tiene.

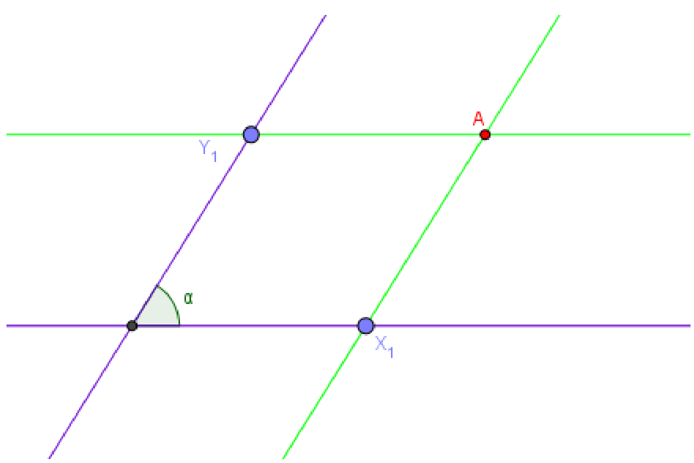


Ilustración 9. Sistema de localización PaPa.

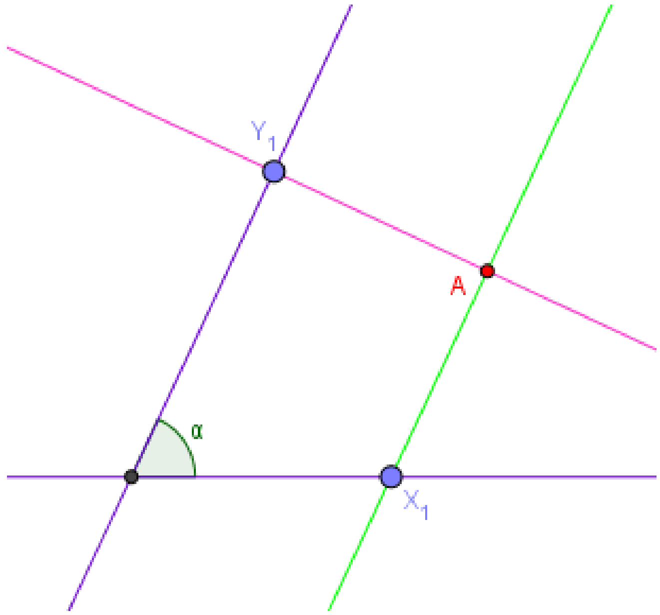


Ilustración 10. Sistema de localización PaPe.

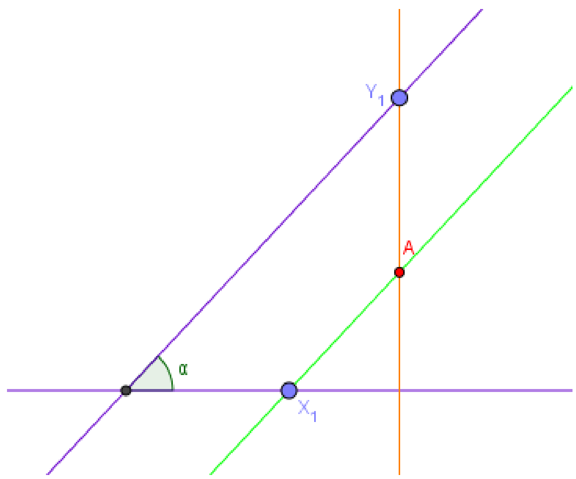


Ilustración 11. Sistema de localización PaPer.

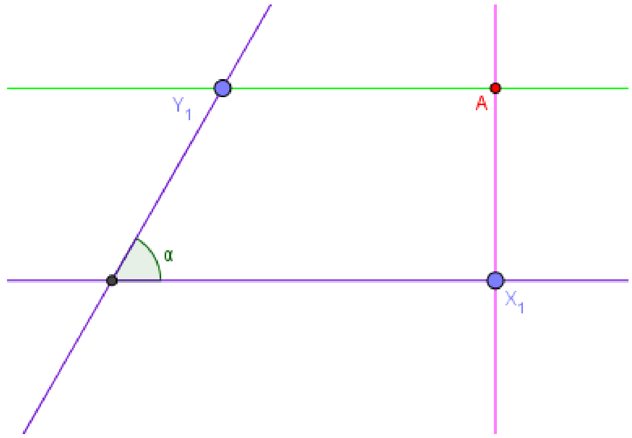


Ilustración 12. Sistema de localización PePa.

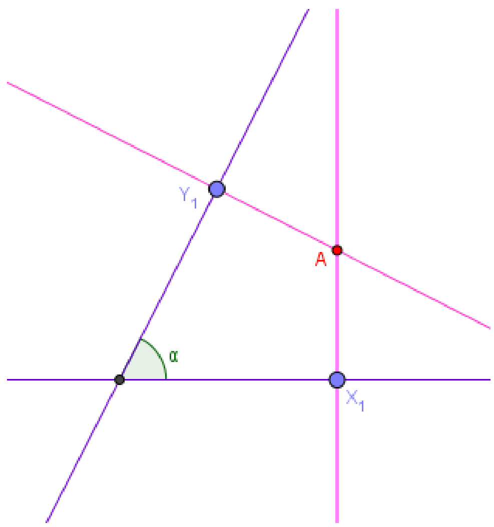


Ilustración 13. Sistema de localización PePe.

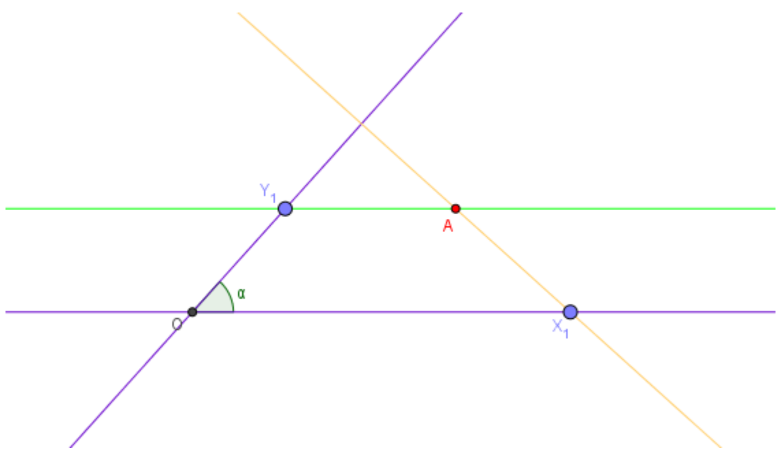


Ilustración 14. Sistema de localización PerPa.

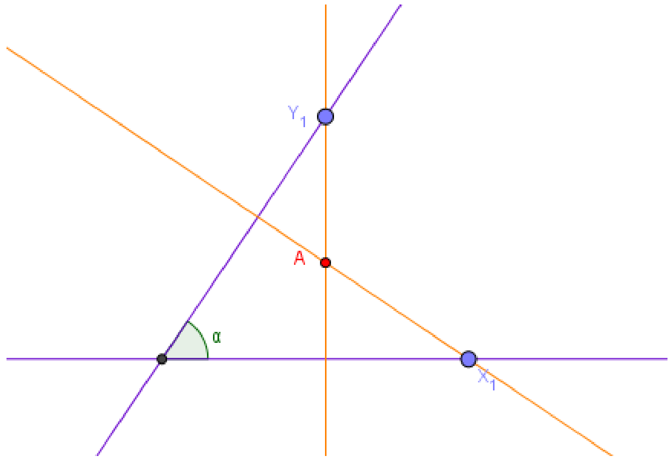


Ilustración 15. Sistema de localización PerPer.

Así pues para generar las distintas ecuaciones de distancia, es necesario generar algunas notaciones adicionales, siendo las siguientes.

$$\Delta x = |x_2 - x_1|$$

$$\Delta y = |y_2 - y_1|$$

$$\Delta z = |z_2 - z_1|$$

$$(\Delta x)^2 = \Delta^2 x$$

$$(\Delta y)^2 = \Delta^2 y$$

$$(\Delta z)^2 = \Delta^2 z$$

$$\Delta y \Delta x = \Delta x \Delta y = \Delta xy$$

$$\Delta z \Delta x = \Delta x \Delta z = \Delta zx$$

$$\Delta y \Delta z = \Delta z \Delta y = \Delta yz$$

Los siguientes ejemplos ayudaran a aclarar el uso de esta notación y a qué casos corresponde de la siguiente forma,

Dados los puntos $A = (2, 5)$ y $B = (3, 8)$

$$\Delta x = |x_2 - x_1| = |3 - 2| = 1\,.$$

$$\Delta y = |y_2 - y_1| = |8 - 5| = 3.$$

$$(\Delta x)^2 = \Delta^2 x = 1^2 = 1.$$

$$(\Delta y)^2 = \Delta^2 y = 3^2 = 9.$$

$$\Delta y \Delta x = \Delta xy = 1 * 3 = 3.$$

Otro ejemplo del uso de esta nomenclatura será.

Dados los puntos $A = (-1, 4, 7)$ y $B = (2, -7, 9)$ se tiene lo siguiente.

$$\Delta x = |x_2 - x_1| = |2 - (-1)| = 3$$

$$\Delta y = |y_2 - y_1| = |-7 - 4| = -11$$

$$\Delta z = |z_2 - z_1| = |9 - 7| = 2$$

$$(\Delta x)^2 = \Delta^2 x = 3^2 = 9$$

$$(\Delta y)^2 = \Delta^2 y = (-11)^2 = 121$$

$$(\Delta z)^2 = \Delta^2 z = 2^2 = 4$$

$$\Delta y \Delta x = \Delta xy = 3 * -11 = -33$$

$$\Delta z \Delta x = \Delta zx = 3 * 2 = 6$$

$$\Delta y \Delta z = \Delta yz = -11 * 2 = -22.$$

Por medio de la modelización en Geogebra es posible estableces relaciones que permiten determinar la ecuación de distancia entre dos puntos, todas estas enmarcadas por la Geometría de Hilbert, la cual nos permite establecer congruencia, semejanzas, aplicación de teoremas asociados a la trigonometría, entre otros, siempre y cuando sean válidos se usaran, el primer de estos modelo será.

PaPa

Dado los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ y α, se generan casos para $d(A, B)$, para el primer caso será cuando se tiene, $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, el segundo caso será cuando $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, también donde $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$, Una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas y geométricas en busca de la distancia entre los puntos A, B, de la siguiente forma.

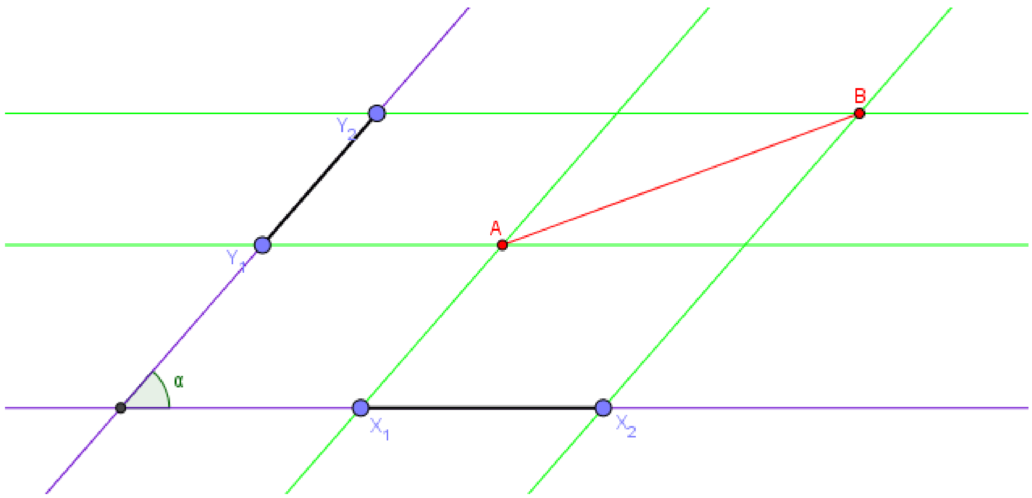


Ilustración 16. Caso 1 PaPa.

Lo primero que se puede apreciar son las cosas que son equivalentes, ya que tienen rectas paralelas así que en la siguiente ilustración se observaran dichas cosas.

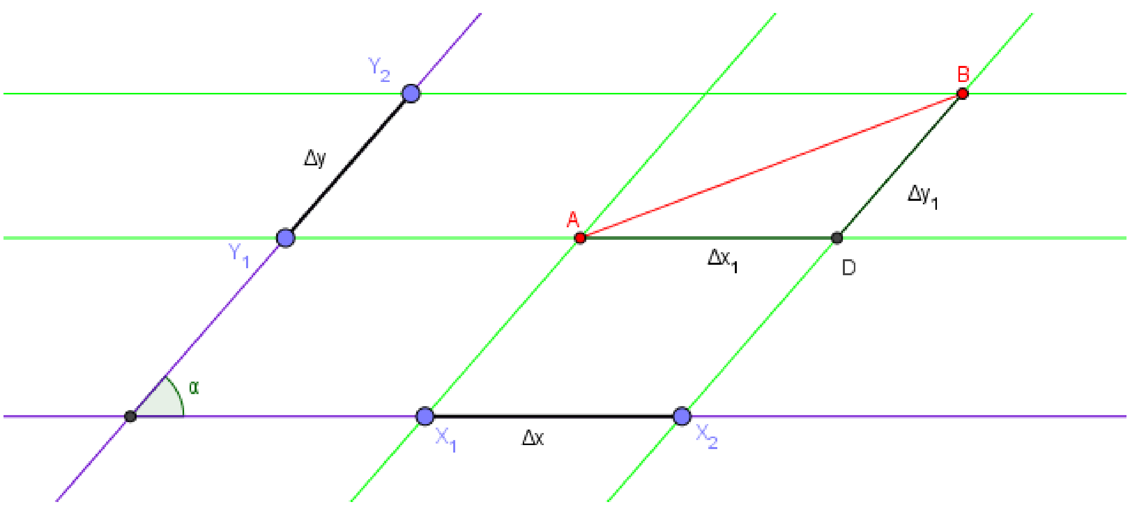


Ilustración 17. Primer paso deducción PaPa.

Se tiene que $\Delta x = \Delta x_1$ y $\Delta y = \Delta y_1$ por el paralelismo, podemos afirmar la existencia del triángulo $A, D, B,$ ahora el siguiente paso será ver la correspondencia entre ángulos de la siguiente forma.

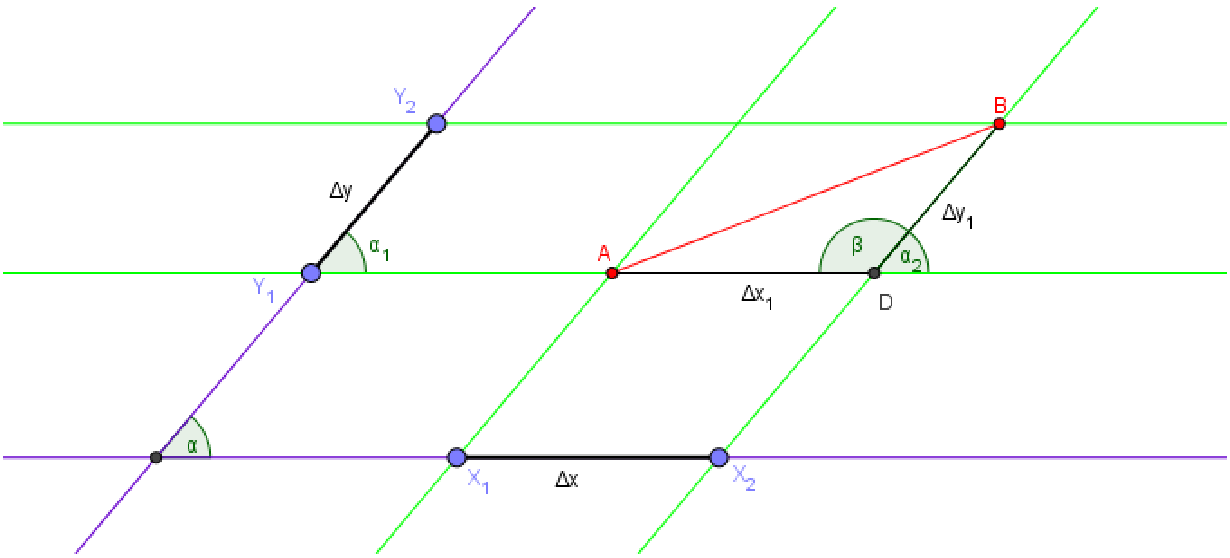


Ilustración 18. Segundo paso deducción PaPa.

De lo anterior tenemos que los ángulos α, α_1 y α_2, resultan ser iguales gracias al teorema de ángulos internos alternos entre paralelas, ahora como α es dado se puede encontrar el valor de β al ser estos complementarios de la siguiente manera,

$$\alpha + \beta = 180°,$$

$$\beta = 180° - \alpha,$$

con esto se puede aplicar el teorema del coseno para encontrar $d(A, B)$ de la siguiente forma.

$$\left(d(A,B)\right)^2 = \Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha),$$

$$d(A, B) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha)}.$$

$\blacksquare$

Ahora bien hace falta probar que esta ecuación es una métrica para el sistema construido así que con apoyo en esta deducción se demostraran los cuatro axiomas mencionados en el marco teórico.

$i)\ d(A,B) \geq 0.$

Este es verdadero ya que si vemos en su deducción al utilizar el teorema del coseno tenemos $\left(d(A,B)\right)^2$ el valor de $d(A,B)$ al estar elevado al cuadrado siempre será positivo.

$ii)\ d(A,B) = 0$, Sii $A = B$.

$$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha)} = 0\ Sii, A = B$$

Entonces esto es verdad ya que:

$$\Delta^2 x = 0 \text{ , ya que, } \Delta x\ = |x_2 - x_1| = 0, \text{ porque } \ x_2 = x_1,$$

$$\Delta^2 y = 0 \text{ , ya que, } \Delta y\ = |y_2 - y_1| = 0, \text{ porque } \ y_2 = y_1,$$

Así que reemplazando lo anterior en la ecuación tendremos que.

$$\sqrt{0 + 0 - 2(0)\ Cos\ (180 - \alpha)} = 0.$$

■.

$iii)\ d(A,B) = d(B,A)$.

Para este punto se tiene que, $\Delta x = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ de igual forma para Δy, de esta forma tendremos la misma distancia sin importar su orden, apoyado en la siguiente propiedad del valor absoluto $|x_1 - x_2| = \ |-(x_1 - x_2)| = |x_2 - x_1|$.

■.

$iv)\ d(A,B) \leq\ d(A,C) +\ d(C,B)$.

Donde $A = (x,y), B = (x_1,y_1)$ y $C = (x_2,y_2)$ se tiene lo siguiente por las definiciones de delta, siempre cuando se tenga que $x < x_2 < x_1$ y $y < y_2 < y_1$.

$$\Delta x = |x - x_1|,$$

$$\Delta x_1 = |x - x_2|,$$

$$\Delta x_2 = |x_2 - x_1|,$$

$$\Delta y = |y - y_1|,$$

$$\Delta y_1 = |y - y_2|,$$
$$\Delta y_2 = |y_2 - y_1|,$$
$$\Delta xy = |x - x_1| * |y - y_1|,$$
$$\Delta xy_1 = |x - x_2| * |y - y_2|,$$
$$\Delta xy_2 = |x_2 - x_1| * |y_2 - y_1|,$$

Con esto se debe demostrar que.

$$d(A,B) \leq \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 y_1 - 2\Delta xy_1 \, Cos\,(180 - \alpha)} + \sqrt{\Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_2 - 2\Delta xy_2 \, Cos\,(180 - \alpha)}\ ,$$

Para su demostración hace falta aplicar la desigualdad de Minkowski mencionada y demostrada en el marco teórico.

De tal forma que:

$a_i = \Delta^2 x_1 + \Delta^2 y_1 - 2\Delta xy_1 \, Cos\,(180 - \alpha)$ y $b_i = \Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_2 - 2\Delta xy_2 \, Cos\,(180 - \alpha)$

Para así tener la desigualdad de la siguiente manera:

$$(a_i + b_i)^{\frac{1}{2}} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 y_1 - 2\Delta xy_1 \, Cos\,(180 - \alpha) + \Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_2 - 2\Delta xy_2 \, Cos\,(180 - \alpha)} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 - \big(2\, Cos\,(180 - \alpha)\big)(\Delta xy_1 + \Delta xy_2)} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\, Cos\,(180 - \alpha))\,(\Delta xy)} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \, Cos\,(180 - \alpha)} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}.$$

Por último se tiene que efectivamente.

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B).$$

■.

De esta forma se deduce y comprueba que la ecuación de la distancia para el primer caso del sistema $PaPa$, satisface los teoremas para una métrica, de acá en adelante se omitirán dichas pruebas ya que se establecen de forma análoga a la presentada, para el caso cuando $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, se deduce de forma análoga a la presentada.

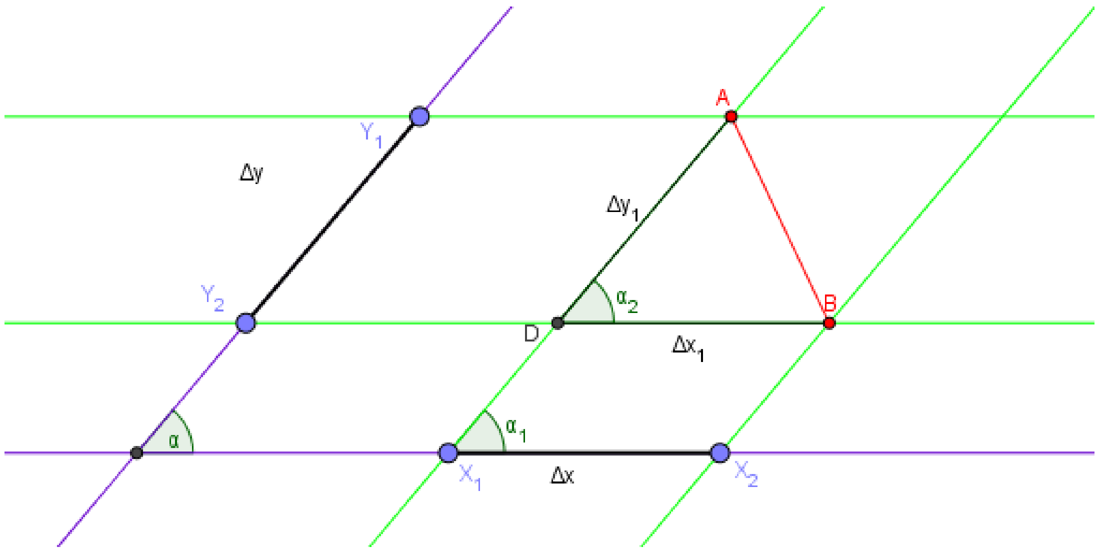


Ilustración 19. Caso 2 PaPa.

Para este caso se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (\alpha)}.$$

Por otro lado esto nos permite construir la tabla 1 donde se podrá visualizar mejor los casos análogos entre las distancias.

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (\alpha)}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (\alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha)}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	Δy
	$y_1 < y_2$	Δy
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	Δx
	$x_1 < x_2$	Δx

Tabla 1. Distancias PaPa.

PaPe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1)\ y\ \ B = (x_2, y_2)$ y α, no se presentan casos para $d(A, B)$, sin importar que, $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, tampoco cuando $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, tan solo se modificara $d(A, B)$ donde $x_1 = x_2 \ \vee\ y_1 = y_2$, Una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas y geométricas en busca de la distancia entre los puntos A y B, de la siguiente forma.

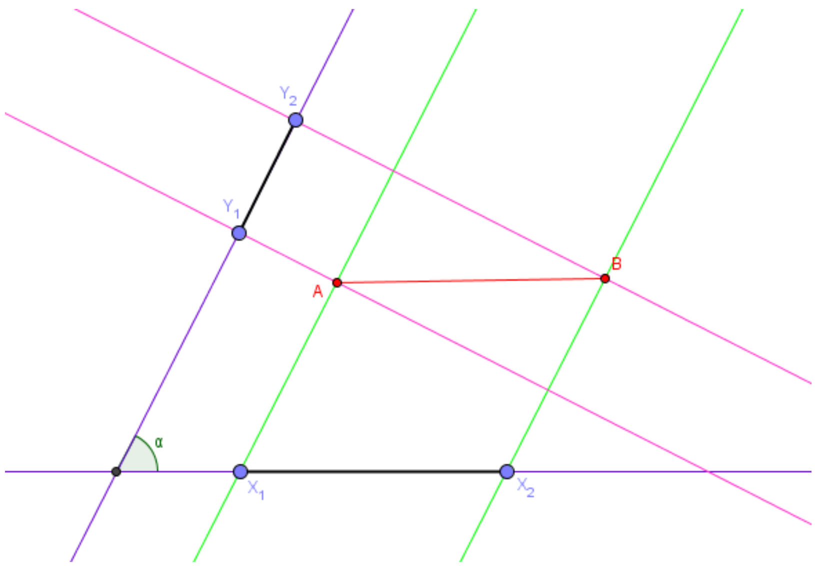


Ilustración 20. Sistema de localización PaPe.

El primer paso para la deducción de la distancia será trazar una recta paralela al eje X que pase por el punto E el cual corresponde a la intersección entre las rectas que contienen a y_1 y x_2, de la siguiente forma.

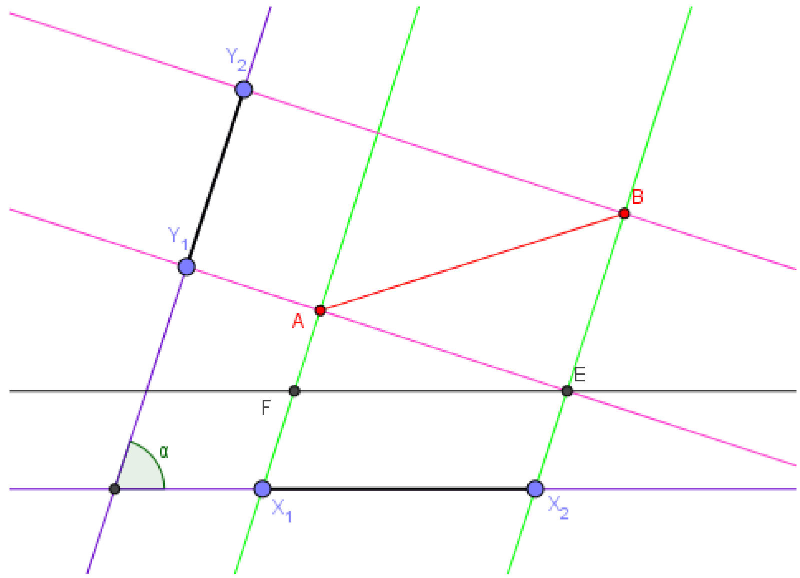


Ilustración 21 Primer paso de la deducción PaPe.

Ahora bien se verá las equivalencias que se encuentran, estas son $\Delta x = \Delta x_1, \Delta y = \Delta y_1$ estas por estar entre rectas paralelas, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ por ser ángulos internos alternos entre rectas paralelas lo cual se puede ver en la siguiente ilustración.

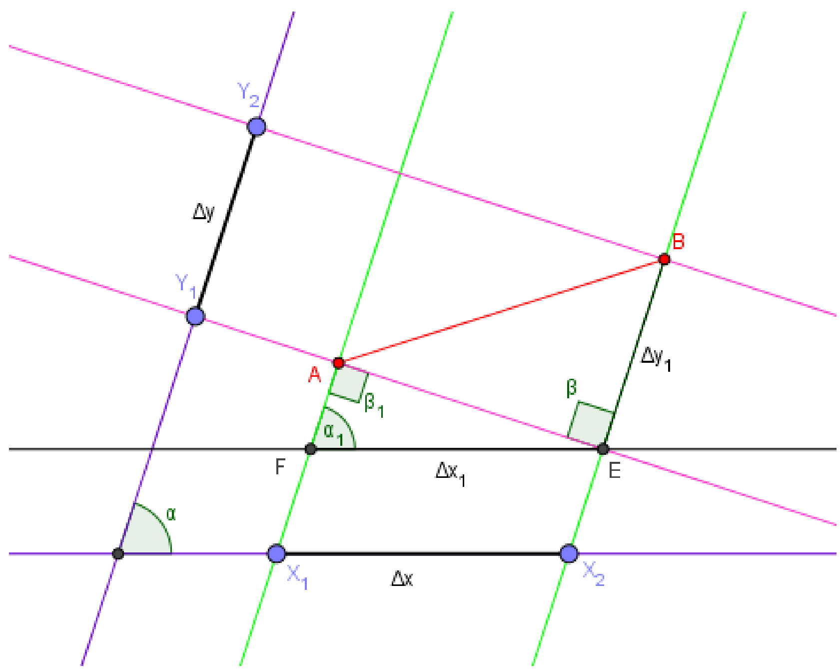


Ilustración 22. Segundo paso de la deducción PaPe.

Se construyen de esta forma los triángulos, A, F, E y A, E, B, ahora bien del triángulo A, F, E se obtiene $d(A, E)$, por medio del teorema del seno de la siguiente forma,

$$\frac{d(A,E)}{sen\ (\alpha)} = \frac{\Delta x}{sen(90)}\,,$$

$$d(A,E) = \Delta x * \ sen\ (\alpha),$$

De esta forma como se tiene que el triángulo A, E, B es rectángulo, tan solo hace falta aplicar el teorema de Pitágoras para determinar $d(A, B)$, de la siguiente forma.

$$\big(d(A,B)\big)^2 = \Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x.$$

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}.$$

La demostración que esta es una distancia resulta análoga a la presentada en el caso $PaPa$.

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	Δy
	$y_1 < y_2$	Δy
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$\Delta x\ sen(\alpha)$
	$x_1 < x_2$	$\Delta x\ sen\ (\alpha)$

Tabla 2. Distancias Pape.

PaPer

Dado los puntos $A = (x_1, y_1)\ y\ \ B = (x_2, y_2)$ y α, se generan casos, uno donde se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, y para el segundo caso se tiene que, $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, y cuando se tiene $x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma, y la deducción de cada caso sale homologa a los ya presentados en los sistemas anteriores.

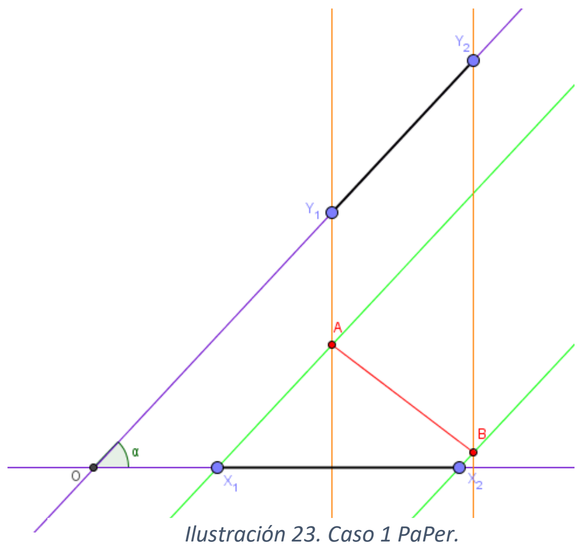


Ilustración 23. Caso 1 PaPer.

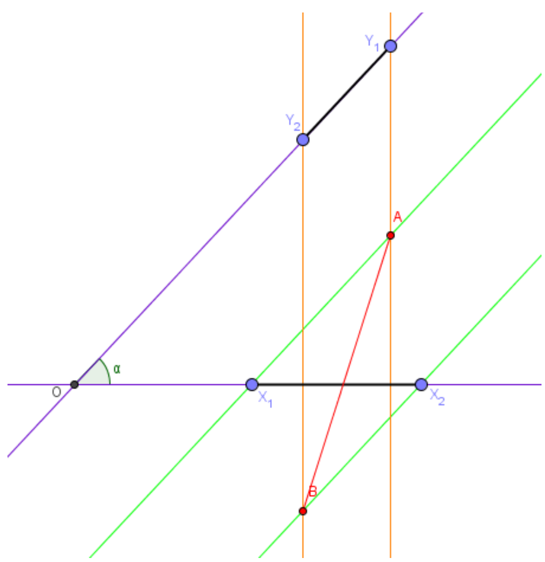


Ilustración 24. Caso 2 PaPer.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(180-\alpha))},$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(\alpha))}.$$

La demostración que estas son una distancia resulta análoga a la presentada en el caso *PaPa*.

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(180-\alpha))}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(\alpha))}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(\alpha))}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(180-\alpha))}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	Δy
	$y_1 < y_2$	Δy
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$\Delta x \tan(\alpha)$
	$x_1 < x_2$	$\Delta x \tan(\alpha)$

Tabla 3. Distancias PaPer.

PePa

Dado los puntos $A = (x_1, y_1)\; y\;\; B = (x_2, y_2)$ y α, para este sistema no se presentan casos por lo tanto su distancia viene dada por la siguiente ecuación, y la deducción de la ecuación de distancia es análoga a las ya presentadas en los sistemas anteriores, se presenta también su configuración en la ilustración 26.

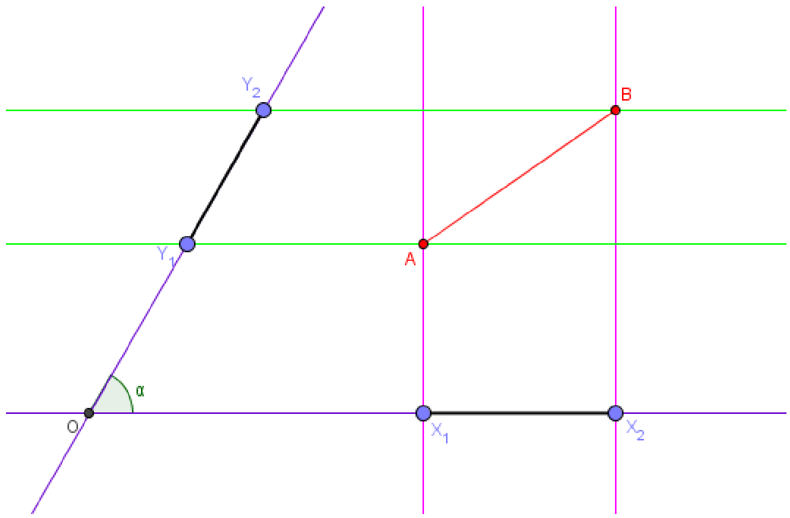


Ilustración 25. Caso PePa.

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ Sen\ (\alpha))}.$$

La demostración que esta es una distancia resulta análoga a la presentada en el caso $PaPa$.

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$\Delta y\ sen(\alpha)$
	$y_1 < y_2$	$\Delta y\ sen(\alpha)$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	Δx
	$x_1 < x_2$	Δx

Tabla 4. Distancias PePa.

PePe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1),\ B = (x_2, y_2)$ y α, se generan casos, el primero es donde se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, para el segundo caso se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma.

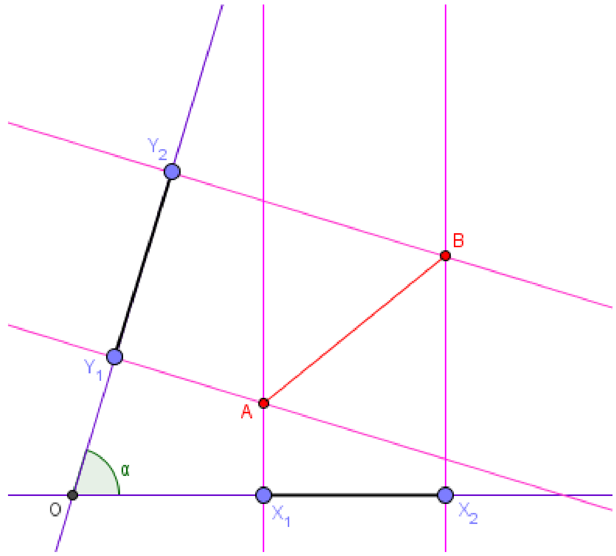


Ilustración 26. Caso 1 PePe.

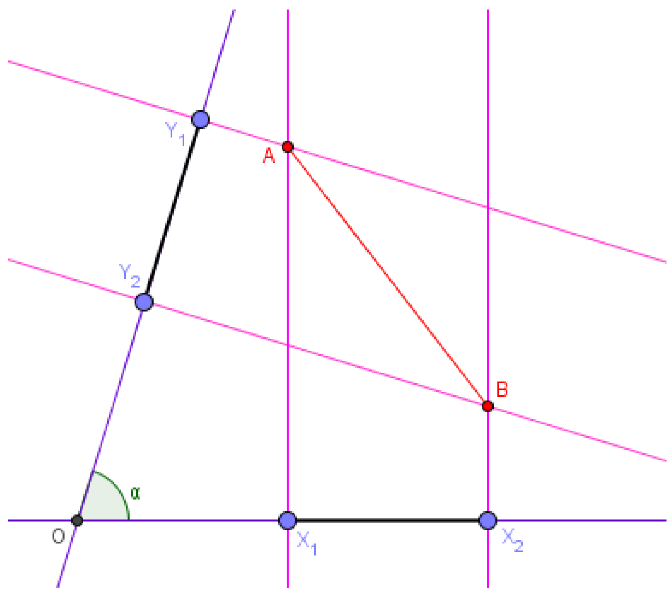


Ilustración 27. Caso 2 PePe.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\,\Delta xy\ Cos\ (180-\alpha)},$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\,\Delta xy\ Cos\ (\alpha)}.$$

La demostración que estas son una distancia resulta análoga a la presentada en el caso *PaPa*.

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\,\Delta xy\ Cos\ (180-\alpha))}$

	$y_1 < y_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\,\Delta xy\ Cos\ (\alpha))}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\,\Delta xy\ Cos\ (\alpha))}$
	$y_1 < y_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\,\Delta xy\ Cos\ (180-\alpha))}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\,\Delta y$
	$y_1 < y_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\,\Delta y$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\,\Delta x$
	$x_1 < x_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\,\Delta x$

Tabla 5. Distancias PePe.

Perpa

Dado los puntos $A = (x_1, y_1),\ B = (x_2, y_2)$ y α, se generan casos, el primero se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, para un segundo caso se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma.

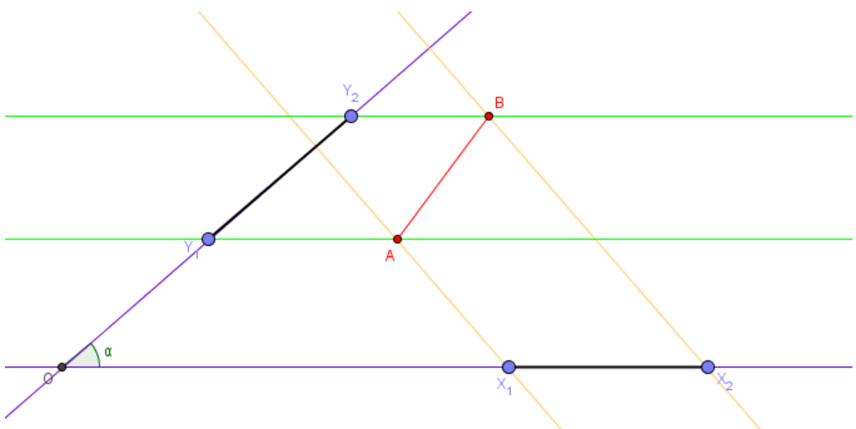


Ilustración 28. Caso 1 PerPa.

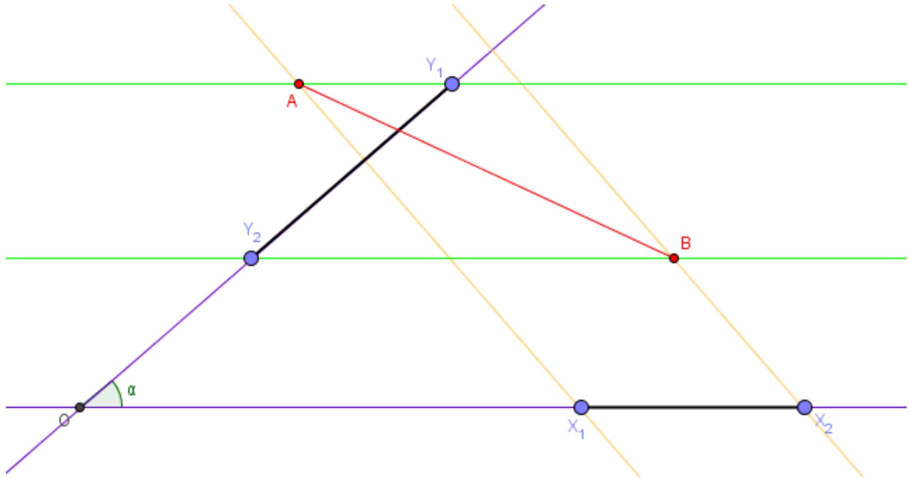


Ilustración 29. Caso 2 PerPa.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - 2\, \Delta xy\, Sen\,(180-\alpha)\, Tan(180-\alpha)},$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha)) - 2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha)}.$$

La demostración que estas son una distancia resulta análoga a la presentada en el caso *PaPa*.

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - 2\, \Delta xy\, Sen\,(180-\alpha)\, Tan(180-\alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\, Tan(\alpha) - 2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha)}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\, Tan(\alpha) - 2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - 2\, \Delta xy\, Sen\,(180-\alpha)\, Tan(180-\alpha)}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$\Delta y\, Tan(\alpha)$
	$y_1 < y_2$	$\Delta y\, Tan(\alpha)$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	Δx
	$x_1 < x_2$	Δx

Tabla 6. Distancias PerPa.

PerPer

Dado los puntos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ y α, se generan dos casos, uno donde se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, para el segundo caso se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma.

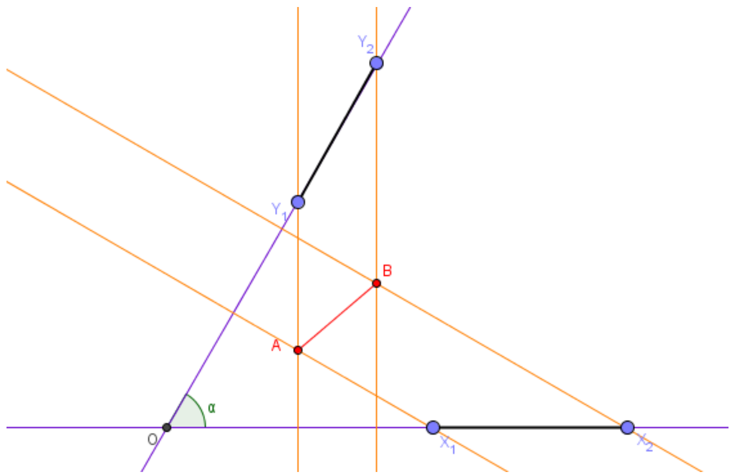


Ilustración 30. Caso 1 PerPer.

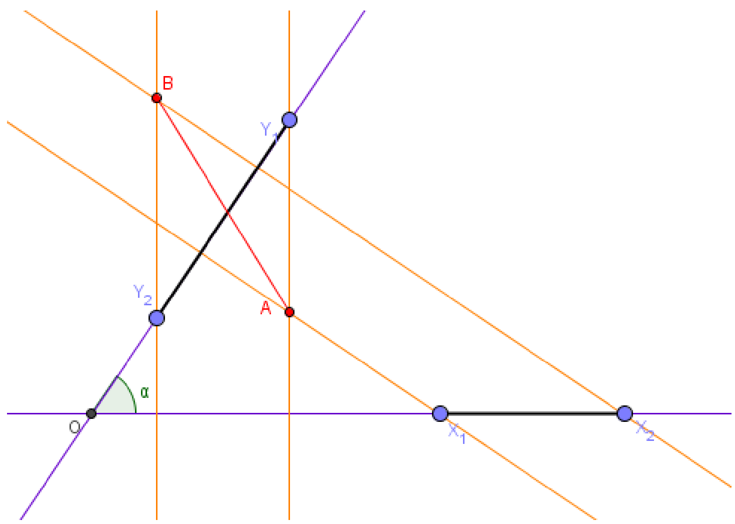


Ilustración 31. Caso 2 PerPer.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A, B) = ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y \; - 2\, \Delta xy\; Cos\,(\alpha)}\,,$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = ArcTan(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2x + \Delta^2y\ - 2\,\Delta xy\ Cos\ (180-\alpha)}\,.$$

La demostración que estas son una distancia resulta análoga a la presentada en el caso $PaPa$.

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2x + \Delta^2y\ - 2\,\Delta xy\ Cos\ (\alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$ArcTan(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2x + \Delta^2y\ - 2\,\Delta xy\ Cos\ (180-\alpha)}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$ArcTan(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2x + \Delta^2y\ - 2\,\Delta xy\ Cos\ (180-\alpha)}$
	$y_1 < y_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2x + \Delta^2y\ - 2\,\Delta xy\ Cos\ (\alpha)}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$ArcTan(\alpha)\ \Delta y$
	$y_1 < y_2$	$ArcTan(\alpha)\ \Delta y$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$ArcTan(\alpha)\ \Delta x$
	$x_1 < x_2$	$ArcTan(\alpha)\ \Delta x$

Tabla 7. Distancias PerPer.

Construcción de la ecuación de distancia para espacios no usuales.

El análisis del espacio se observan distintas formas en las que se puede determinar la ecuación de distancia entre dos puntos, adicionales a las mostradas en el marco teórico, para empezar sobre el espacio se construyen planos paralelos y perpendiculares a los planos que se muestras en la ilustración 33.

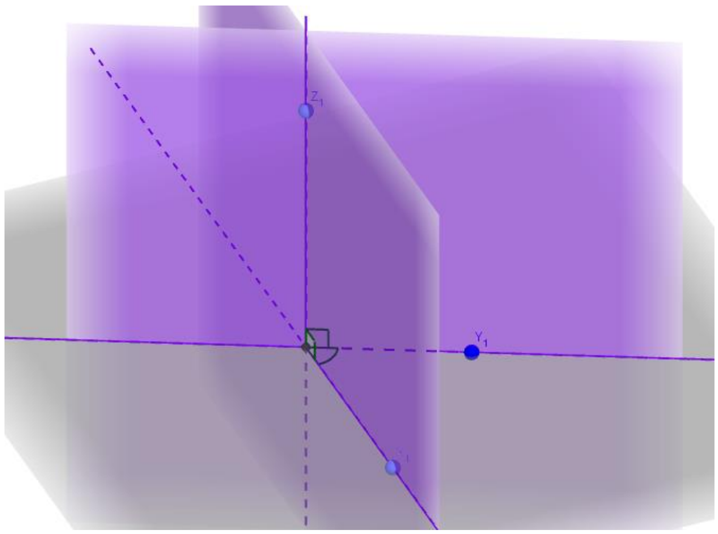


Ilustración 32. Nuevo sistema para el espacio.

En la construcción del espacio se tendrá esta nueva configuración donde el eje Z será perpendicular al plano determinado por los ejes x, y, con esta configuración se tiene que los planos determinados por los ejes x, z y y, z serán perpendiculares al plano x, y, así que el ángulo que se modificara es el determinado entre los plano x, z y y, z, tal como lo muestra la ilustración 34.

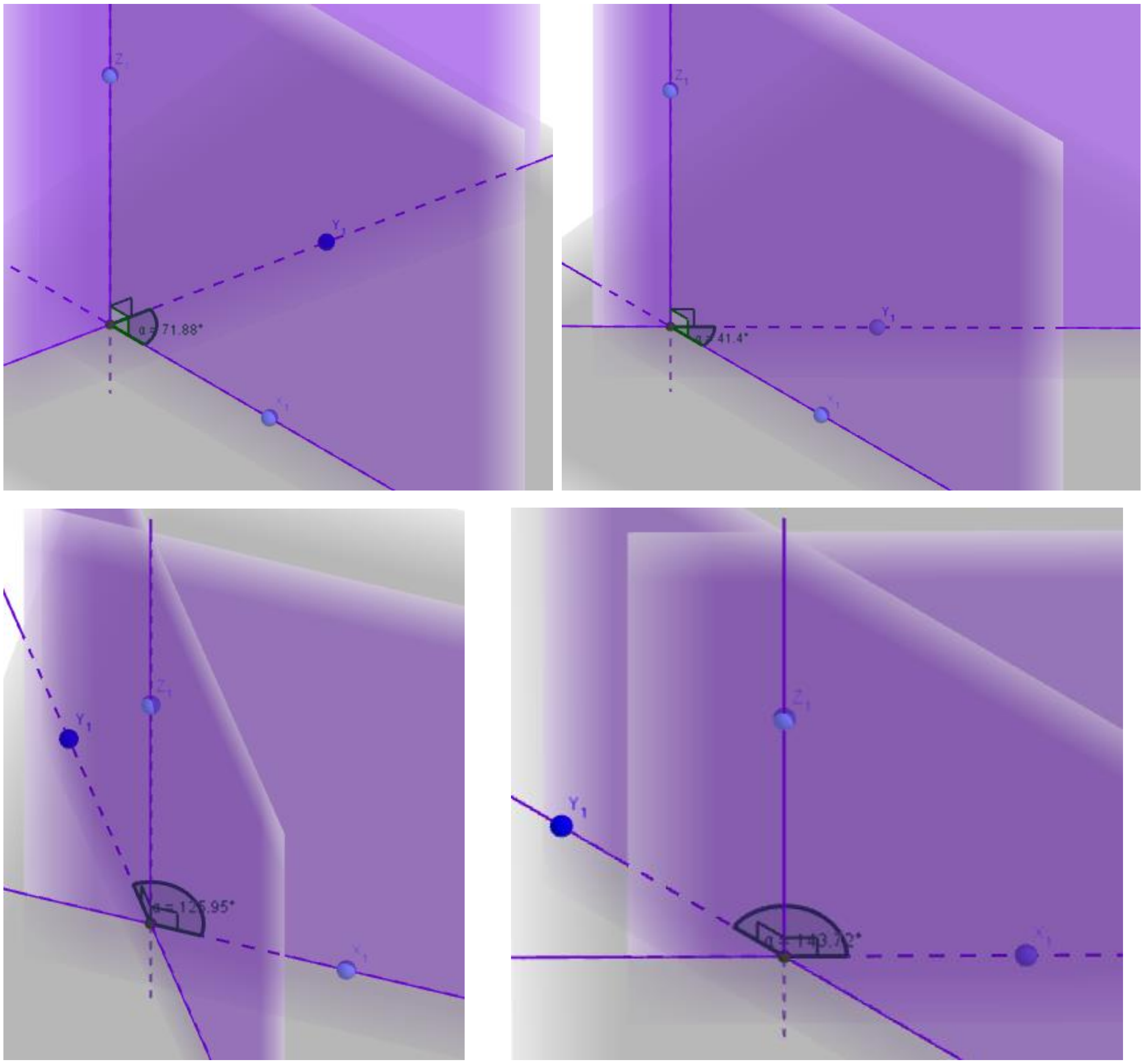


Ilustración 33. Sistemas de coordenados espacio.

A su vez, se seguirá con la convención de colores para el tipo de plano que se trazará, esto es los planos que se vean de color morado serán los que contiene las rectas de los ejes coordenados, el color rosa será un plano perpendicular por la componente coordenada correspondiente a su propio eje, el color verde será para un plano paralelo al plano opuesto de la componente de la coordenada por la componente, y el de color naranja que será un plano perpendicular al plano opuesto por la componente de la coordenada, como se muestra en la ilustración 35.

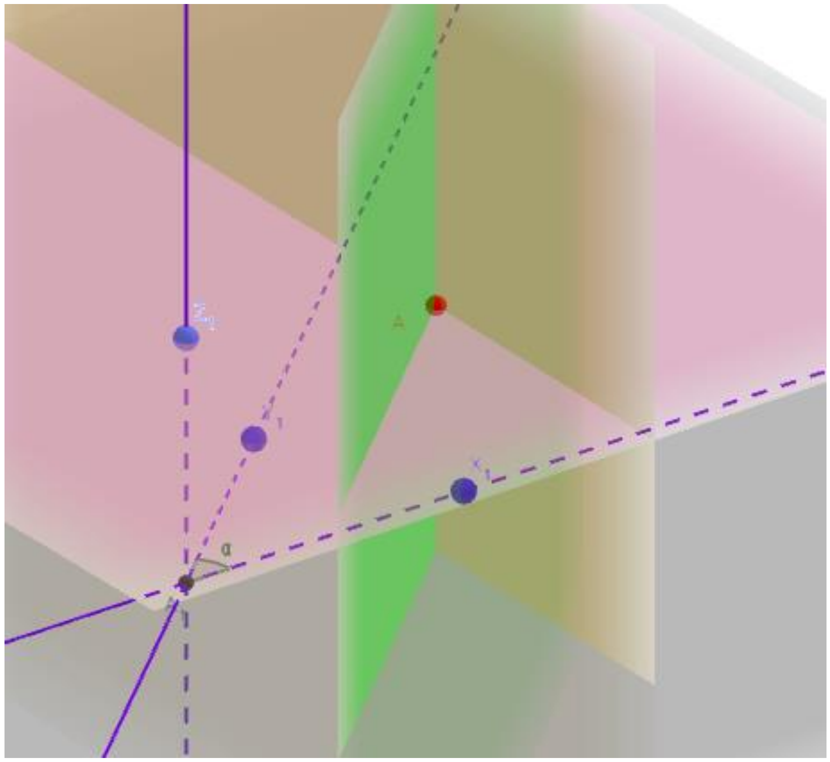


Ilustración 34. Ejemplo de localización de punto.

Modificación de un ángulo.

Ya que existe la posibilidad de modificar, tres ángulos diedros en el espacio se decide la modificación de uno de ellos, en este caso se modificará el comprendido entre los planos *x, z* y *y, z,* de este modo el eje Z, se mantendrá de forma perpendicular al plano comprendido entre los ejes x, y, así se tendrán los siguientes casos y haciendo una extensión de la nomenclatura utilizada en los planos hacia los espacios, por otro lado estos se encuentran apoyados con applets en la página oficial de Geogebra donde se puede interactuar con los mismo de ser necesario, para una mejor comprensión del espacio formado.

PaPaPe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1, z_1)\ y\ B = (x_2, y_2, z_2)$ y α, se generan algunos casos, el primero donde se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, un segundo caso será cuando $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, también cuando
$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas y geométricas en busca de la distancia entre los puntos A, B, de la siguiente forma.
Se mostrara el caso donde $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, no se tendrá en cuenta el caso de $Z_1 < Z_2\ \vee Z_1 > Z_2$ ya que Δz es el mismo para cada caso.

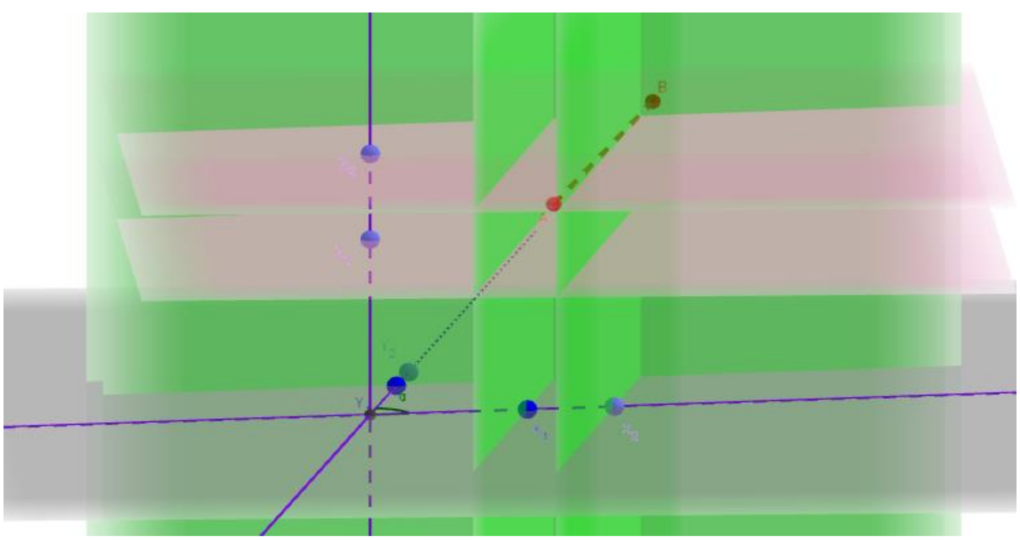


Ilustración 35. Caso 1 PaPaPe.

Para ayudar con la visualización se trazan las rectas de intersección entre los planos antes mostrados ilustración 36, tal como lo muestra la ilustración 37.

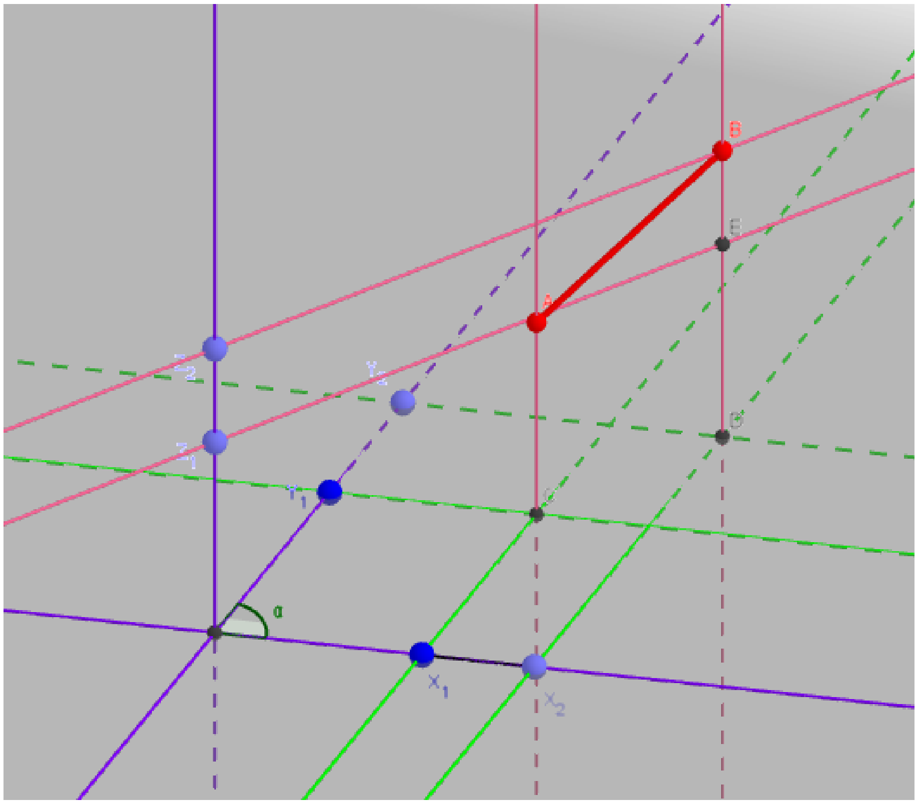


Ilustración 36. Intersección entre plano para deducción PaPaPe.

Ahora bien se puede construir los puntos A_1, B_1 sobre el plano x, y, en este plano ya conocemos $d(A_1, B_1)$ dado por la ecuación ya mencionada en el sistema $PaPa$, de la siguiente forma $d(A_1,\ B_1) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha)}$, esto se puede ver la ilustración 38.

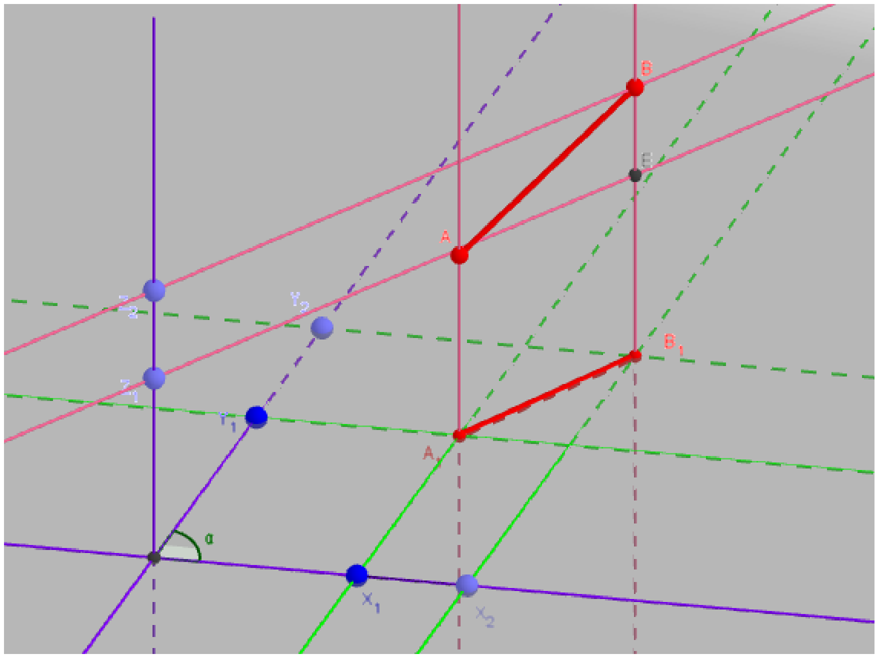


Ilustración 37. Deducción distancia sistema PaPaPe.

De esta forma se pueden establecer algunas equivalencias como $d(A_1,\ B_1) = \ d(A, E)$ ya que estas se determinan por rectar paralelas a su vez es posible encontrar que β es recto ya que es la intersección entre rectas perpendiculares de la siguiente forma, tal como lo muestra la ilustración 39.

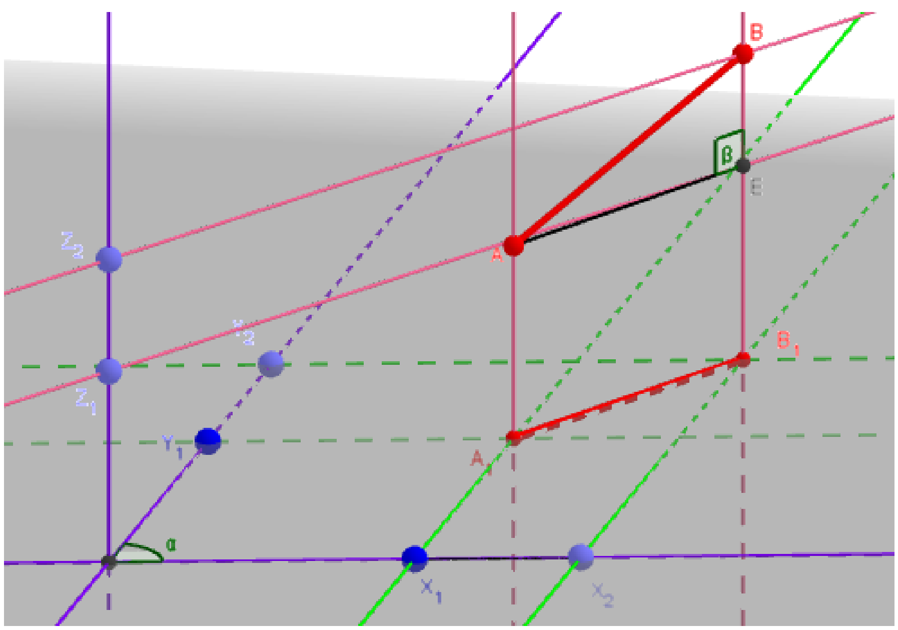


Ilustración 38. Ultimo paso de la deducción sistema PaPaPe.

De acá y con ayuda del triángulo A, E, B, al ser rectángulo se puede obtener $d(A,B)$ por medio del teorema de Pitágoras, de la siguiente manera,

$$\left(d(A,B)\right)^2 = \left(\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\, Cos\,(180-\alpha)}\right)^2 + \ \Delta^2 z,$$

$$\left(d(A,B)\right)^2 = \Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\, Cos\,(180-\alpha) + \ \Delta^2 z,$$

$$\left(d(A,B)\right)^2 = \Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\, Cos\,(180-\alpha) + \ \Delta^2 z,$$

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\, Cos\,(180-\alpha) + \ \Delta^2 z}.$$

$i)\ d(A,B) \geq 0.$

Este es verdadero ya que si vemos en su deducción al utilizar el teorema de Pitágoras tenemos $\left(d(A,B)\right)^2$ el valor de $d(A,B)$ al estar elevado al cuadrado siempre será positivo.

$ii)\ d(A,B) = 0$, Sii $A = B$.

$$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy\, Cos\,(180-\alpha) + \ \Delta^2 z} = 0\ Sii, A = B$$

Entonces esto es verdad ya que:

$\Delta^2 x = 0$, ya que, $\Delta x\ = |x_2 - x_1| = 0$, porque $x_2 = x_1$,

$\Delta^2 y = 0$, ya que, $\Delta y\ = |y_2 - y_1| = 0$, porque $y_2 = y_1$,

$\Delta^2 z = 0$, ya que, $\Delta z\ = |z_2 - z_1| = 0$, porque $z_2 = z_1$,

Así que reemplazando lo anterior en la ecuación tendremos que.

$$\sqrt{0 + 0 - 2(0) Cos\,(180-\alpha) + 0} = 0.$$

■.

$iii)\ d(A,B) = d(B,A).$

Para este punto se tiene que, $\Delta x = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ de igual forma para Δy y Δz, de esta forma tendremos la misma distancia sin importar su orden, apoyado en la siguiente propiedad del valor absoluto $|x_1 - x_2| = \ |-(x_1 - x_2)| = |x_2 - x_1|$.

■.

$iv)\ d(A,B) \leq\ d(A,C) +\ d(C,B).$

Donde $A = (x,y,z), B = (x_1,y_1,z_1)$ y $C = (x_2,y_2,z_2)$ se tiene lo siguiente por las definiciones de delta, además se debe cumplir que $x < x_2 < x_1$,$y < y_2 < y_1$ y
$z < z_2 < Z_1$.

$$\Delta x = |x - x_1|,$$
$$\Delta x_1 = |x - x_2|,$$
$$\Delta x_2 = |x_2 - x_1|,$$
$$\Delta y = |y - y_1|,$$
$$\Delta y_1 = |y - y_2|,$$
$$\Delta y_2 = |y_2 - y_1|,$$
$$\Delta z = |z - z_1|,$$
$$\Delta z_1 = |z - z_2|,$$
$$\Delta z_2 = |z_2 - z_1|,$$
$$\Delta xy = |x - x_1| * |y - y_1|,$$
$$\Delta xy_1 = |x - x_2| * |y - y_2|,$$
$$\Delta xy_2 = |x_2 - x_1| * |y_2 - y_1|,$$

Con lo anterior se quiere demostrar que

$$d(A,B)\ \leq\ \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 y_1 - 2\Delta xy_1\ Cos\ (180 - \alpha) +\ \Delta^2 z} + \sqrt{\Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_2 - 2\Delta xy_2\ Cos\ (180 - \alpha) +\ \Delta^2 z}$$

Para su demostración hace falta aplicar la desigualdad de Minkowski mencionada y demostrada en el marco teórico.
De tal forma que,

$$a_i = \Delta^2 x_1 + \Delta^2 y_1 - 2\Delta xy_1\ Cos\ (180 - \alpha) +\ \Delta^2 z_1$$
$$b_i =\ \Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_2 - 2\Delta xy_2\ Cos\ (180 - \alpha) +\ \Delta^2 z_2$$

Para así tener la desigualdad de la siguiente manera:

$$(a_i + b_i)^{\frac{1}{2}} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 y_1 - 2\Delta x y_1 \, Cos\,(180-\alpha) + \Delta^2 z_1 + \Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_2 - 2\Delta x y_2 \, Cos\,(180-\alpha) + \Delta^2 z_2} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \Delta^2 z_1 + \Delta^2 z_2 - \big(2\, Cos\,(180-\alpha)\big)(\Delta x y_1 + \Delta x y_2)} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z - (2\, Cos\,(180-\alpha))\,(\Delta x y)} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z - 2\Delta x y\, Cos\,(180-\alpha)} \leq (a_i)^{\frac{1}{2}} + (b_i)^{\frac{1}{2}}.$$

Por último se tiene que efectivamente.

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B).$$

De forma análoga es posible encontrar y demostrar que $d(A,B)$ cuando

$x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, también si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, con la configuración de la ilustración 40.

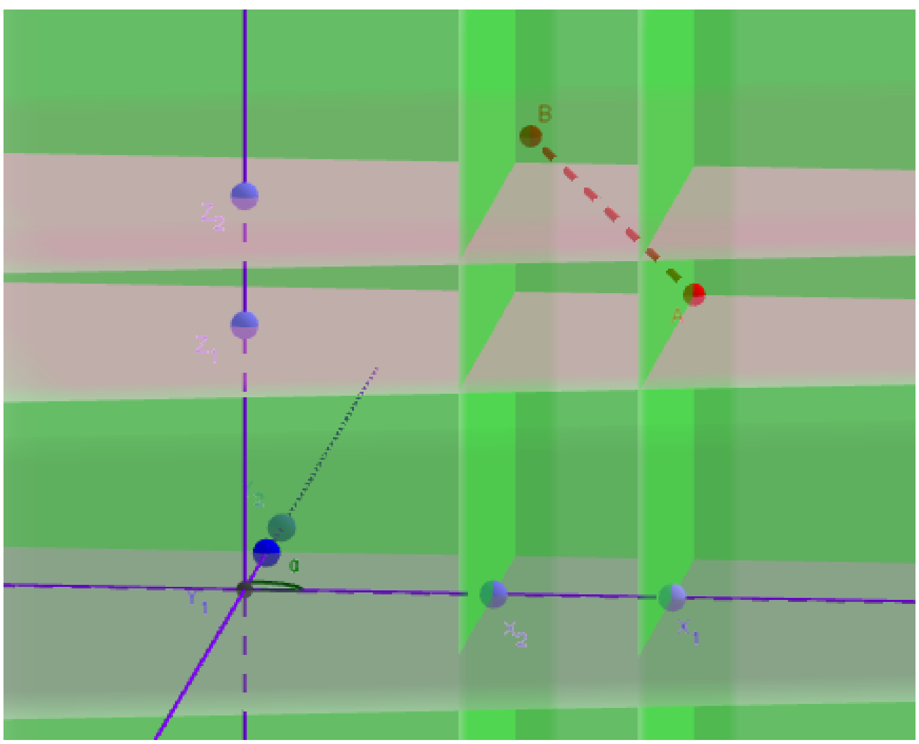


Ilustración 39. Caso 2 PaPaPe.

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(\alpha) + \Delta^2 z}\,.$$

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(180-\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(180-\alpha) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(\alpha) + \Delta^2 z}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(\alpha) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(180-\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(180-\alpha) + \Delta^2 z}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
	$x_1 < x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
$z_1 = z_2$	$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(180-\alpha)}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(\alpha)}$
	$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(\alpha)}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - 2\Delta xy \; Cos\;(180-\alpha)}$

Tabla 8. Distancias PaPaPe.

PaPePe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ y α, para esta configuración no se presentan casos lo cual se aprecia en la ilustración 41, por lo tanto su distancia viene dada por la ecuación.

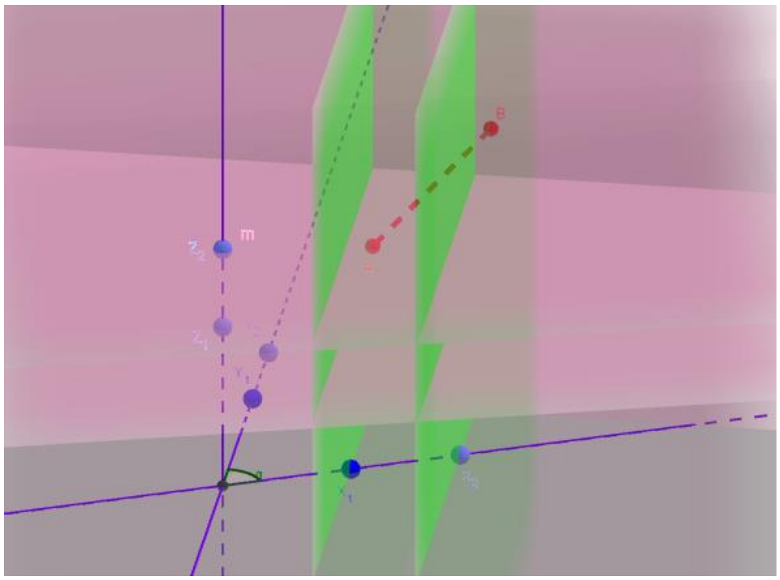


Ilustración 40. Caso PaPePe.

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}.$$

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$

		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
	$x_1 < x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{Sen^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
$z_1 = z_2$	$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$
	$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + Sen^2(\alpha)\Delta^2 x}$

Tabla 9. Distancias PaPePe.

PaPerPe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ y α, se generan dos casos, uno donde se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, y para el segundo caso se tiene que, $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma.

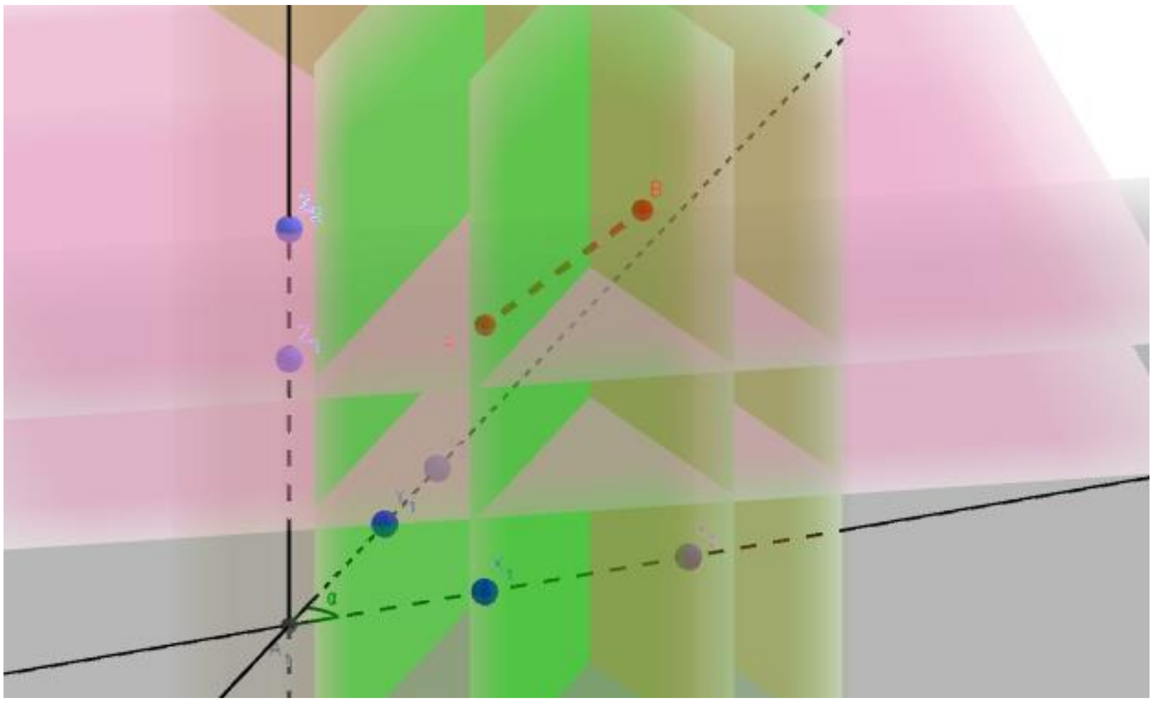


Ilustración 41. Caso 1 PaPerPe.

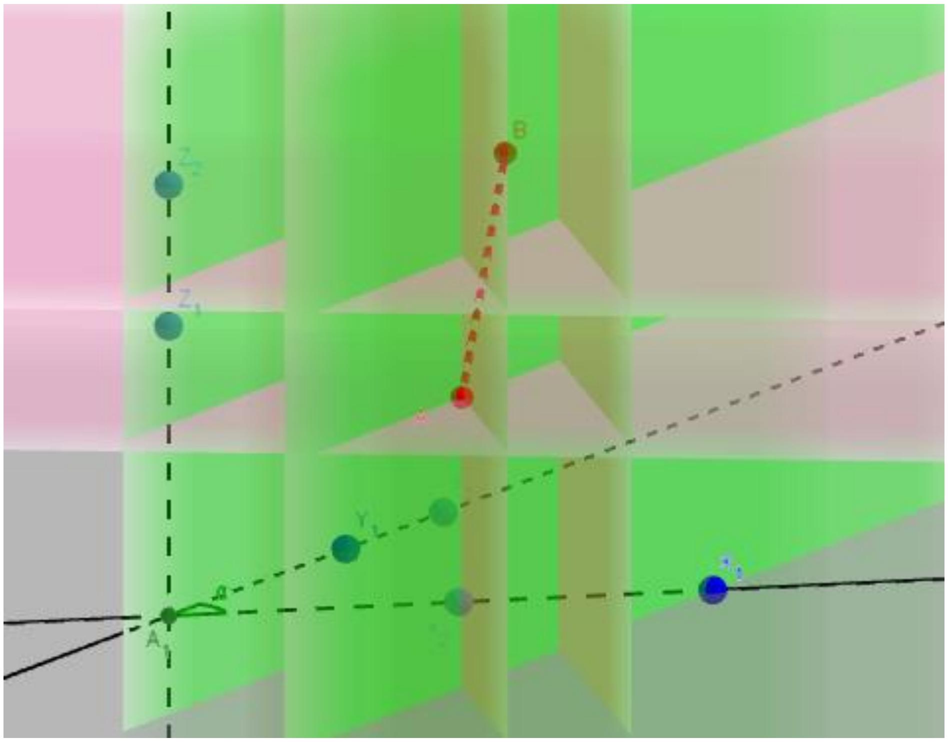


Ilustración 42. Caso 2 PaPerPe.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (180-\alpha)\big) +\ \Delta^2 z},$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}.$$

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (180-\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (180-\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - \big(2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\ Sen\ (180-\alpha)\big) +\ \Delta^2 z}$

		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - \left(2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(180-\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{Tan^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{Tan^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
	$x_1 < x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{Tan^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{Tan^2(\alpha)\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
$z_1 = z_2$	$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(180-\alpha))}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(\alpha))}$
	$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(\alpha))}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x \tan^2(180-\alpha) + \Delta^2 y - (2\tan(180-\alpha)\,\Delta xy\; Sen\;(180-\alpha))}$

Tabla 10. Distancias PaPerPe.

PePaPe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ y α, para esta configuración no se presentan casos por lo tanto su ecuación de distancia viene dada por la ecuación.

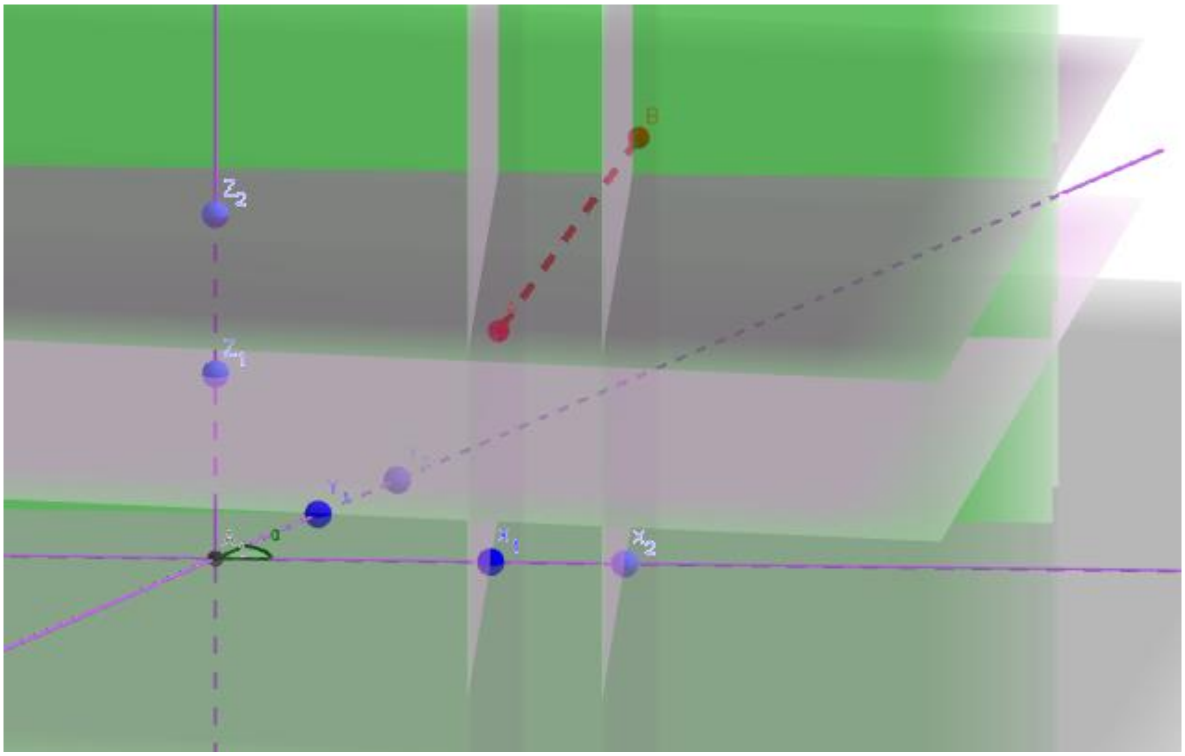


Ilustración 43. Caso PePaPe.

$$d(A, B) = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\, Sen\,(\alpha)) + \Delta^2 z}.$$

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$

		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \ \Delta^2 z}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y Sen^2(\alpha) + \Delta^2 z}$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
	$x_1 < x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
$z_1 = z_2$	$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$
	$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y Sen^2(\alpha)}$

Tabla 11. Distancias PePaPe.

PePePe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1, z_1),\ B = (x_2, y_2, z_2)$ y α, se generan dos casos, uno donde se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, para el segundo caso se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma.

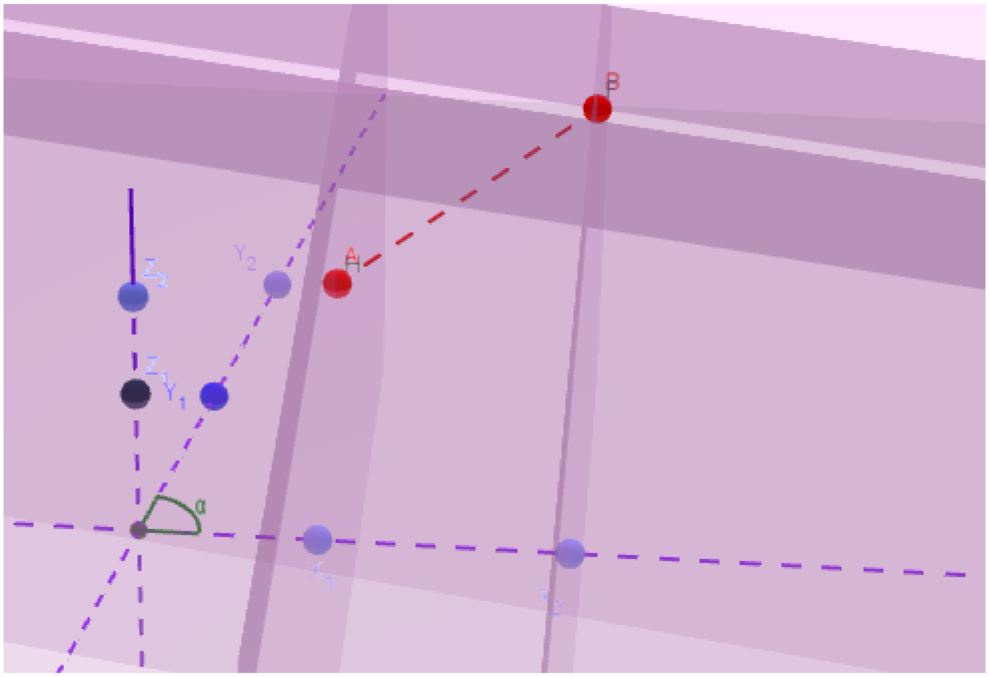


Ilustración 44. Caso 1 PePePe.

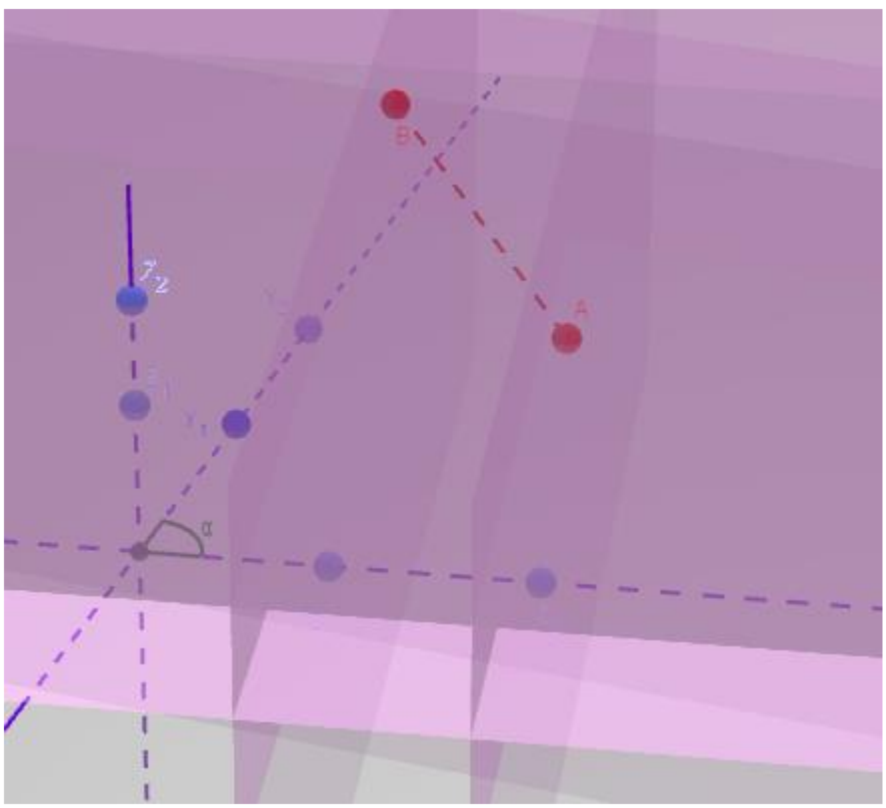


Ilustración 45. Caso 2 PePePe.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (\alpha)\right) + \Delta^2 z},$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (180-\alpha)\right) + \Delta^2 z}.$$

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (180-\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (180-\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (180-\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (180-\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - \left(2\, \Delta xy\, Cos\, (\alpha)\right) + \Delta^2 z}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 y + \Delta^2 z}$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
	$x_1 < x_2$	$z_1 > z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 z}$
$z_1 = z_2$	$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\, \Delta xy\, Cos\, (\alpha))}$
		$y_1 < y_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\, \Delta xy\, Cos\, (180-\alpha))}$
	$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\mathrm{Csc}(180-\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\, \Delta xy\, Cos\, (180-\alpha))}$
		$y_1 < y_2$	$\mathrm{Csc}(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y - (2\, \Delta xy\, Cos\, (\alpha))}$

Tabla 12. Distancias PePePe.

PerPaPe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2)$ y α, se generan dos casos, uno donde se tiene que $x_1 < x_2 \land y_1 < y_2 \lor x_2 < x_1 \land y_2 < y_1$, para el segundo caso se tiene que $x_1 < x_2 \land y_1 > y_2 \lor x_2 < x_1 \land y_2 > y_1$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma.

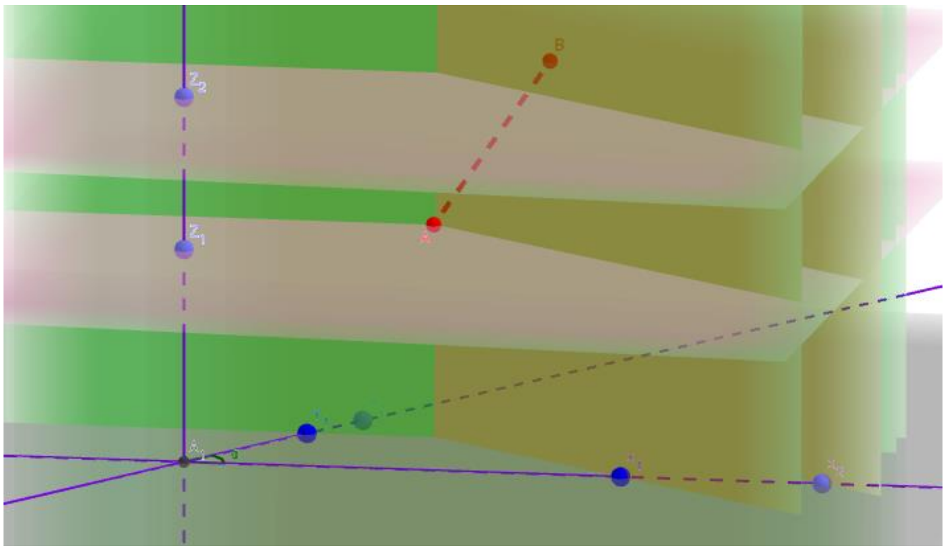


Ilustración 46. Caso 1 PerPaPe.

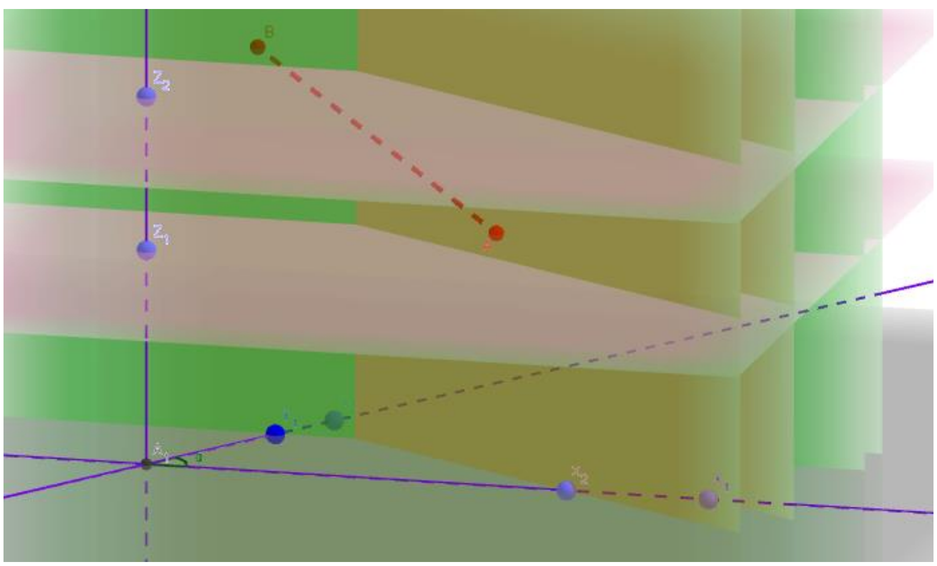


Ilustración 47. Caso 2 PerPaPe.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(180-\alpha))\; +\; \Delta^2 z},$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha)) +\; \Delta^2 z}.$$

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(180-\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(180-\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(180-\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(180-\alpha))\; +\; \Delta^2 z}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y\, Tan(\alpha) +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y\, Tan(\alpha) +\; \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y\, Tan(\alpha) +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 y\, Tan(\alpha) +\; \Delta^2 z}$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x\; +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x\; +\; \Delta^2 z}$
	$x_1 < x_2$	$z_1 > z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x\; +\; \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$\sqrt{\Delta^2 x\; +\; \Delta^2 z}$
$z_1 = z_2$	$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(180-\alpha))}$
		$y_1 < y_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha))}$
	$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$\sqrt{(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(\alpha))}$
		$y_1 < y_2$	$(\Delta^2 x + (\Delta^2 y\, Tan(180-\alpha) - (2\, \Delta xy\, Sen\,(\alpha)\, Tan(180-\alpha))$

Tabla 13. Distancias PerPaPe.

PerPerPe

Dado los puntos $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2)$ y α, se generan dos casos, uno donde se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 < y_1$, para el segundo caso se tiene que $x_1 < x_2 \wedge y_1 > y_2 \vee x_2 < x_1 \wedge y_2 > y_1$, una vez visto esto se pueden realizar estrategias algebraicas, de la siguiente forma.

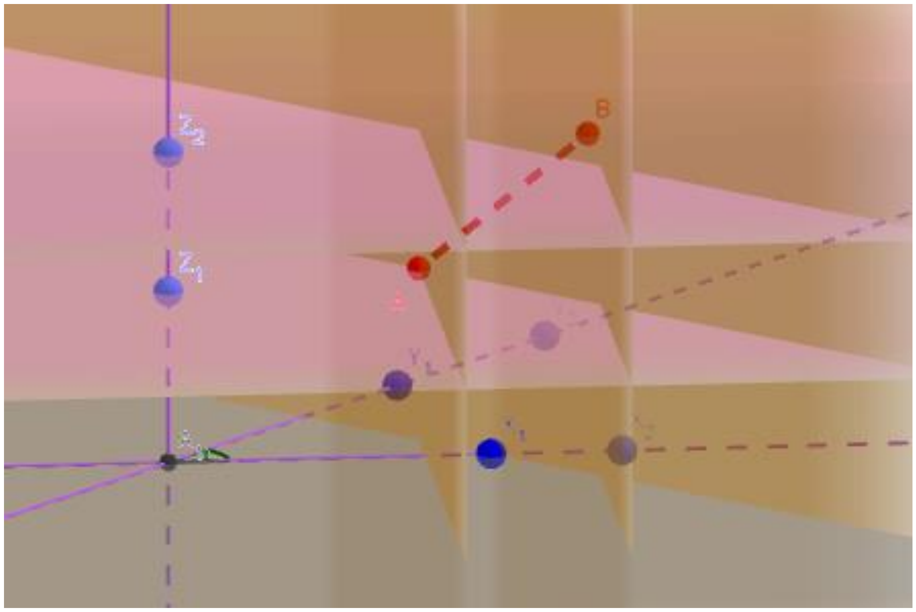


Ilustración 48. Caso 1 PerPerPe.

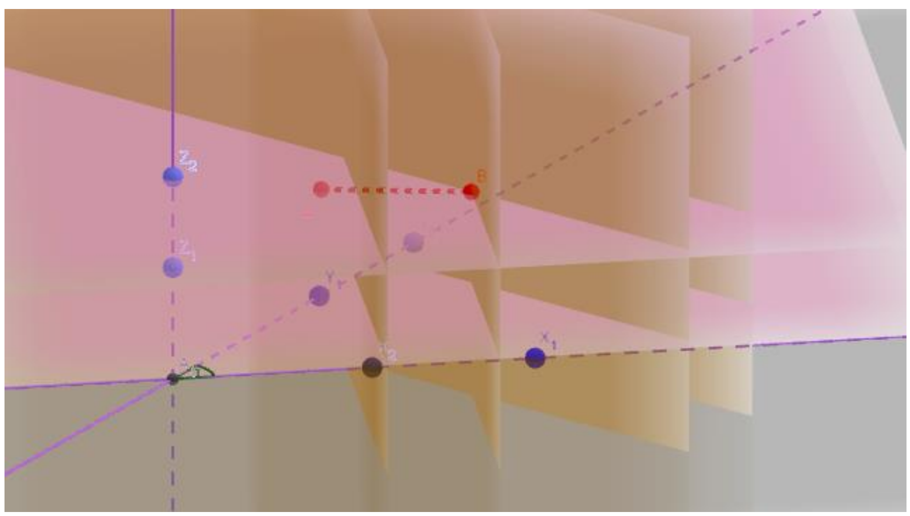


Ilustración 49. Caso 2 PerPerPe.

Para el *caso 1* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (\alpha) + \Delta^2 z}\,,$$

Para el *caso 2* se tiene como ecuación para la distancia,

$$d(A,B) = ArcTan(180 - \alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha) + \Delta^2 z}.$$

$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (\alpha) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(180 - \alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(180 - \alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha) + \Delta^2 z}$
$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(180 - \alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(180 - \alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha) + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (\alpha) + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (\alpha) + \Delta^2 z}$
$x_1 = x_2$	$y_1 > y_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 y\ + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 y\ + \Delta^2 z}$
	$y_1 < y_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 y\ + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 y\ + \Delta^2 z}$
$y_1 = y_2$	$x_1 > x_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x\ + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x\ + \Delta^2 z}$
	$x_1 < x_2$	$z_1 > z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x\ + \Delta^2 z}$
		$z_1 < z_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x\ + \Delta^2 z}$
$z_1 = z_2$	$x_1 > x_2$	$y_1 > y_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (\alpha)}$
		$y_1 < y_2$	$ArcTan(180 - \alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha)}$
	$x_1 < x_2$	$y_1 > y_2$	$ArcTan(180 - \alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (180 - \alpha)}$
		$y_1 < y_2$	$ArcTan(\alpha)\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y\ - 2\ \Delta xy\ Cos\ (\alpha)}$

Tabla 14. Distancias PerPerPe.

CONCLUSIONES

Un aspecto importante es ver como en muchos documentos se presentan las distancias por medio de una transformación lineal o algebraica de tal forma que se lleva a aplicar la ecuación de la distancia usual, así que no se respeta o tiene en cuenta el sistema en el que se encuentra, siendo esto una desventaja para la generalización.

A lo largo de la deducción de las ecuaciones se perciben las equivalencias con los sistemas de coordenadas polares y cilíndricas, así que se vislumbra la importancia que tiene el estudio de la trigonometría, por ende este tipo de ejercicios son de apoyo para el estudio de la Geometría Analítica o en un curso de Pre-Calculo donde se llevan a cabo este tipo de transformaciones y construcciones, ya que brinda herramientas para abordar caminos de construcción equivalentes.

El uso de un software como Geogebra brindo la facilidad de modelación de los sistemas propuestos tanto de los planos como en los espacios, ayudando en la deducción y verificación de cada una de las ecuaciones de distancia desarrolladas, por otro lado es importante que para cada sistema propuesto se logró deducir una ecuación de distancia.

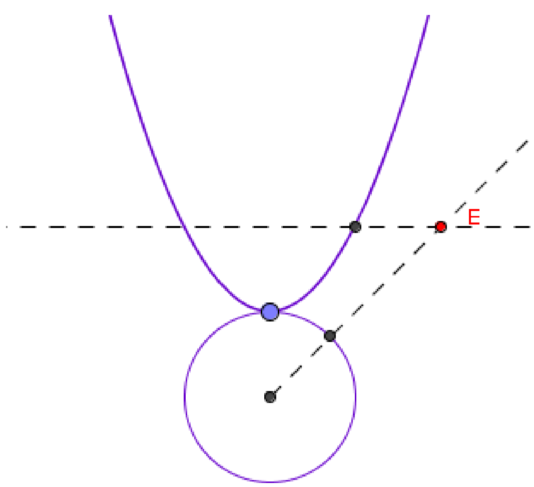
Así mismo es importante que el trabajo al enmarcarse en un tema tan complejo como la distancia, a la hora de sus desarrollos se reduce a un tema menos complejo como la solución de triángulos con ayuda de la trigonometría, entonces se puede percibir como un tema más sencillo de lo que parece.

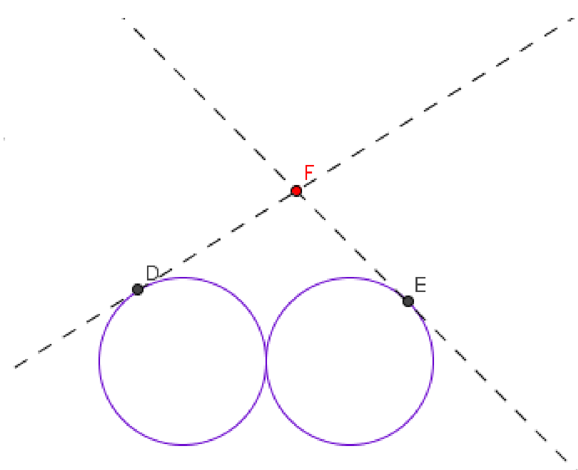
Así pues la culminación de este trabajo me permitió poner en juego los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, encontrando errores y dificultades que desde la vista de estudiante se pueden llegar a cometer, enriqueciendo así el sendero de enseñanza que se puede abordar a la hora de ejercer la docencia, también me permitió ver que acerca de este tema es muy poco lo que sea escrito de manera formal, así que hay mucho por escribir y estudiar, puesto que estos aspectos estudiados se hacen tanto en clases de la línea de la geometría y la aritmética de la universidad pero estos resultados no se formalizan, así que los desarrollos del tema solo existen algunos trabajo de grado que se trabajaron en simultánea a este, con la esperanza que sea visto como una base para la construcción de plano y espacios que enriquezcan el trabajo en la universidad.

CUESTIONES ABIERTAS.

A lo largo de la investigación cronológica de la construcción de la distancia se presentan vacíos como ejemplo en la construcción del plano cartesiano, ya que se da por entendido que fue dedicado a Descartes, pero al indagar en documentos específicos y de historia relacionados con el tema de la distancia se encuentra que no se especifica quien fue el autor de dicho plano, así que muchos documentos se deja como un desarrollo colectivo de los matemáticos de la época, así que queda abierto el seguir investigando al respecto para lograr completar dicho vacío.

Por otro lado se puede pensar aparte de modificar el ángulo determinado entre los ejes coordenados, que los ejes no sean rectas, así que se presentan algunas configuración tentativas para la medicación de dichos ejes tal como en la ilustración 51, además también se puede reproducir el camino de este trabajo pero viéndolo con otros tipos de métrica tal vez con alguna de las presentadas en el marco teórico.





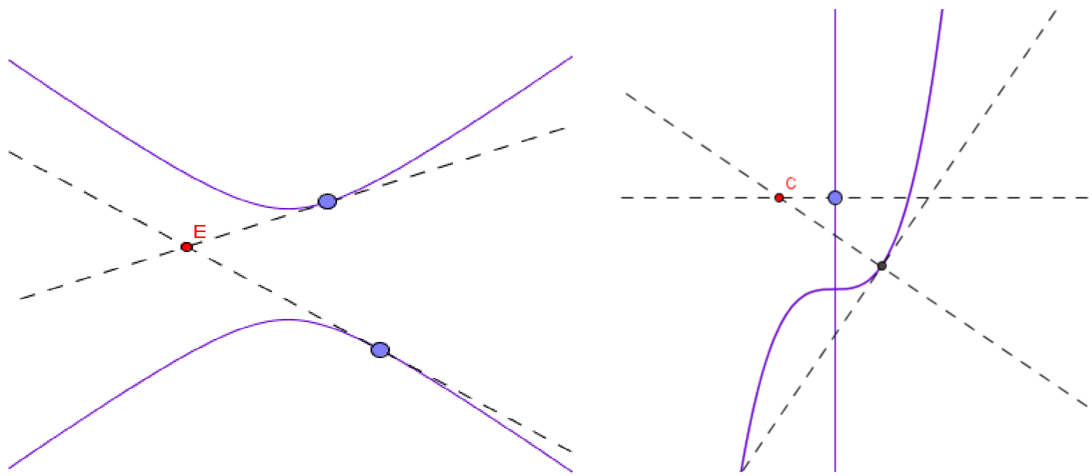


Ilustración 50. Nuevos ejes coordenados.

Otro aspecto importante que se puede trabajar es determinar las trasformaciones lineales que permitan llevar de un sistema, así como las matrices de transformación se existen para así llegar a una generalización del plano y el espacio sin importar los tipos de ejes y localización.

Por ultimo un aspecto que hace falta determinar en los espacios no usuales es la modificación total de los ángulos que lo determinan, a lo largo de la investigación se logró apreciar que se genera un plano que a partir de combinaciones de los casos de los planos se puede llegar a generalizar por completo las ecuaciones del espacio, pero el inconveniente es determinar el valor del ángulo que en dicho plano se determina como se muestra en la ilustración 52, y que sea a partir de las cosas dadas.

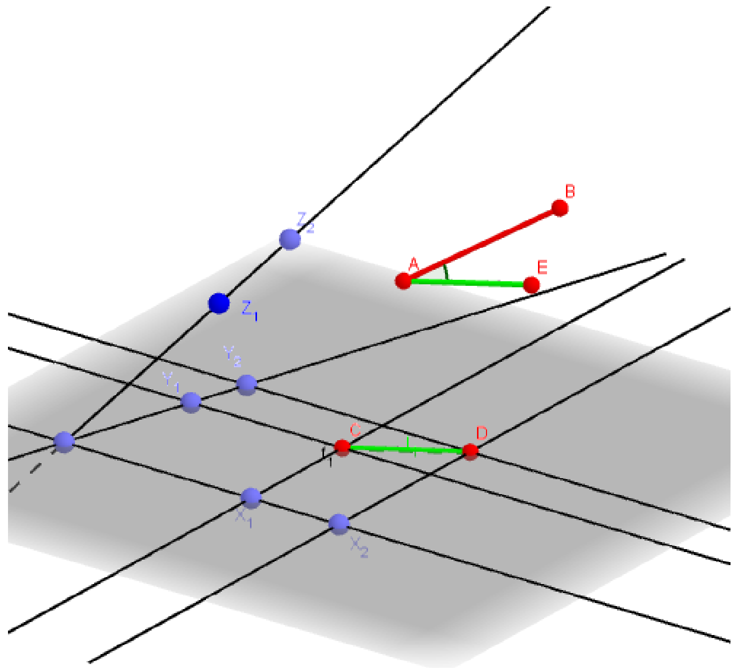


Ilustración 51. Sistema coordenado con modificación de los ángulos.

BIBLIOGRAFÍA

Angel, J. (2008). *El plano*, México, Mathcon.

Chávez, J. Fernández, F. (2011), *Un estudio de las rectas en planos oblicuos perpendiculares*, Tesis (Pregrado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Denis, A. (n.f). *Matemáticas II Vectores en* R^2 *y* R^3, Buenos Aires, Argentina, Escuela de Ciencia y Tecnología.

Hidalgo, L. (2012). *Geometría en el espacio puntos y vectores*, Ciudad de México, México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Millman, R. Parker, G. (n.f). *Geometry (A Metric Approach with Models).* USA: Springer.

Moreno, L. Carreño, O. (2011), *Un tratamiento de las cónicas a partir de diferentes sistemas de coordenados*, Tesis (Pregrado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Neira, C. (2011). *Topología General*, Bogotá, Colombia, Universidad Nacional de Colombia.

Quintero, R. (2001). *La invención de Fermat de la geometría analítica*, Bogotá, Colombia: SMM, IPN.

Smith, E. Salkover, M. Justice, H. (s.f). *Analyric Geometry*, EEUU, University of Cincinnati.

Soto, E. (2010). *Geometría Analítica*, México.

Soto, M. (2011). *Geometría y Trigonometría*, Cajamarca, Perú, I.E.P. María de Nazaret.

Swokowski, E, Cole, J. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Distrito Federal, México, Cengage Learning.

Zill, D, Dewar, J. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, México.