# ESTUDIO DE LAS VARIACIONES Y COVARIACIONES PROPORCIONALES DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS HASTA CUARTO GRADO, COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA A PARTIR DE RAZONES DE CAMBIO CORRELACIONADAS

HECTOR BARRETO
JUAN PABLO CARO QUINTERO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA: DIDÁCTICA DEL CÁLCULO
2012

ESTUDIO DE LAS VARIACIONES Y COVARIACIONES PROPORCIONALES DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS HASTA CUARTO GRADO, COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA A PARTIR DE RAZONES DE CAMBIO CORRELACIONADAS

HECTOR BARRETO
Cód: 2012182004

JUAN PABLO CARO QUINTERO
Cód: 201282010

DIRIGIDO POR:
ORLANDO AYA CORREDOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA: DIDÁCTICA DEL CÁLCULO
2012

*Esta propuesta de trabajo esta dedica a Adriana, mi esposa y mis hijos Miguel Ángel e Isabella por su paciencia y tiempo para la construcción de este trabajo.*

*Hector*

*A Dios mi creador, mis padres y mi hermana, por la oportunidad y el apoyo incondicional para el desarrollo y conclusión de esta etapa del camino*

*Juan Pablo*

*Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos*

| 1. Información General | |
|---|---|
| Tipo de documento | Trabajo de Grado |
| Acceso al documento | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| Titulo del documento | ESTUDIO DE LAS VARIACIONES Y COVARIACIONES PROPORCIONALES DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS HASTA CUARTO GRADO, COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA A PARTIR DE RAZONES DE CAMBIO CORRELACIONADAS |
| Autor(es) | **BARRETO** Pulido Hector Eduard y **CARO** Quintero Juan Pablo. |
| Director | Orlando Aya Corredor |
| Publicación | Bogotá, 2012, págs. 76 |
| Unidad Patrocinante | Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas. |
| Palabras Claves | Análisis de variaciones y covariaciones, propuesta de enseñanza de la derivada, representaciones semióticas. |

| 2.**Descripción** |
|---|
| El principal objetivo de esta propuesta es diseñar una secuencia de actividades como ruta de aproximación al concepto de derivada; a partir del análisis de las variaciones y covariaciones de funciones polinómicas, sin requerir los conceptos previos usados tradicionalmente como la noción de limite, o las definiciones de recta secante en un intervalo dado y de recta tangente a una curva en un punto dado, las cuales dan una visión parcial de la derivada y dejan de lado el análisis del comportamiento de la variación de las magnitudes y la conceptualización fuerte del pensamiento variacional; formalizado con la derivada; aplicado al análisis de diversas situaciones de cambio de la vida cotidiana. El estudio se amplia a una exploración de las funciones seno, coseno y exponencial. |

| 3.**Fuentes** |
|---|
| Se consultaron diversas fuentes frente a los aspectos relacionados con los referentes teóricos y didácticos. Frente a los primeros se retoman los trabajos sobre la función, la derivada, la variación y la covariación entre otros los trabajos de Carlson, M., Jacobs, S. Coe E, Et al (2003). Razonamiento Covariacional Aplicado a la Modelación de Eventos Dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. Revista EMA *8(2)*.121 – 156. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1520/1/98_Carlson2003Razonamiento_RevEMA.pdf. Jain B. y Sheng A. An Exploration of the Approximation of Derivative Functions via Finite Differences. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal *8(2)*. Recuperado de http://arxiv.org/pdf/1006.1620v1.pdf.<br><br>Desde el contexto didáctico se tomaron como referentes los documentos del Ministerio de Educación Nacional (2006) relacionados con los Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas |

(1a. ed.) Bogotá. Ministerio de Educación Nacional (1998) Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas (1a. ed.) Bogotá; el trabajo de Vasco Carlos E. (2009) Seminario de Matemática Educativa Fundamentos de la Matemática Universitaria. Conferencia de sobre t*res ideas fuertes de*l cálculo, Escuela Colombiana de Ingeniería. Bogotá, Colombia. Vrancken, S., Engler, A. y Müller D. (2009). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. Actas de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática. Sociedad Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires. 129 - 138. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/Actas%20de%20la%20VII%20Carem.pdf.

| 4.**Contenidos** |
| --- |
| El trabajo se estructura de la siguiente manera: en capítulo uno se presenta una justificación del estudio, el problema de investigación, y los objetivos del mismo; en el segundo capítulo se analizan los referentes teóricos del mismo trabajando lo relacionado con función, derivada, variación y covariación; en el capítulo tres se presenta el marco didáctico, que fundamentalmente se encuentra soportado en la teoría representaciones semióticas y en particular en los sistemas de representación de un concepto. En este mismo capítulo se aborda la importancia de los SAC (CAS: ***C***omputer ***A***lgebra ***S***ystem) en los procesos de conceptualización y en particular la relevancia que tiene en el proceso de visualización. |

| 5. **Metodología** |
| --- |
| La metodología esta fundamentada en un proceso investigativo que parte de la revisión de los referentes teóricos disciplinares relacionados con los objetivos del trabajo en particular de la función, la derivada, la variación y la covariación. Esta revisión permitió desde el contexto histórico analizar el proceso mediante el cual ha conceptualizado el objeto matemático derivada y dio los elementos pertinentes para estructurar desde lo disciplinar la propuesta.<br><br>De forma paralela se trabajaron los referentes didácticos y los trabajos de educadores matemáticos en el campo de la conceptualización y en particular desde los sistemas de representación semióticos de un concepto. Los elementos analizados fueron articulados e incorporados a la elaboración de una propuesta que permita aproximar el concepto de derivada desde el análisis covariacional. |

| 6. **Conclusiones** |
| --- |
| 1. En el proceso de construcción tanto desde los disciplinar como desde los procesos de enseñanza y aprendizaje, los aspectos históricos de la forma como el concepto se desarrollo deben ser reconocidos.<br><br>2. El análisis de los conceptos relacionados con la variación y en particular la covariación entre las variables de una función en general ofrecen elementos teóricos importantes para aproximar el concepto de derivada sin recurrir de manera explícita al proceso del paso al límite.<br><br>3. La propuesta ofrece una alternativa a la construcción conceptual de la derivada desde una perspectiva no convencional. |

4. Los CAS (Computer Algebra System) ofrecen una poderosa herramienta para explotar la importancia que tienen los procesos de visualización la objetivización de conceptos matemáticos.

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | **BARRETO** Pulido Hector Eduard y **CARO** Quintero Juan Pablo. |
| **Revisado por:** | Orlando Aya Corredor |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | **04** | **11** | **2012** |

**TABLA DE CONTENIDO**

# INTRODUCCIÓN

La intención del presente planteamiento didáctico es proponer una ruta de aproximación al concepto de derivada de funciones polinómicas a partir del análisis de las variaciones y covariaciones proporcionales de éstas, incluyendo en el estudio hasta las de cuarto grado, sin requerir conceptos previos usados tradicionalmente como el de limite, el de recta secante de una curva en un intervalo dado y de recta tangente a una curva en un punto dado. Esta propuesta se aparta de la metodología propuesta usualmente en los textos escolares y plantea el desarrollo de estructuras cognitivas asociados al análisis de diversas situaciones enmarcadas en distintos registros semióticos de representación.

En esta línea de trabajo se debe tener presente que se requieren unas concepciones claras en las construcciones conceptuales de estructura multiplicativa, función, variación, covariaciones que posibiliten el desarrollo de esta propuesta; de igual manera los docentes que lleguen a implementarla deben conocer a profundidad estas temáticas ya que una de las fortalezas de este trabajo es que las conjeturas y razonamientos de los estudiantes pueden tomar rutas inesperadas que deben ser canalizadas por la acción docente.

A partir del análisis de las diferentes actividades propuestas; en las cuales se presentan algunas situaciones de variación, en particular para funciones polinómicas donde su grado va ascendiendo a medida que avanza la propuesta, del análisis de las funciones trigonométricas seno, coseno y la función exponencial, se posibilita realizar procesos de generalización, se pretende crear una estructura mental donde se articulen el comportamiento de las variaciones y se aproxime a los estudiantes al concepto de derivada.

Al analizar el comportamiento variacional y covariacional de las funciones polinómicas, trigonométricas seno y coseno, y de la función exponencial; los cambios en las variables independientes en diferentes situaciones; algunas covariaciones de las variables dependientes; donde se puede establecer una analogía con el comportamiento de la familia de funciones derivadas de una función;  se pretende guiar  a los estudiantes en la construcción del concepto de la derivada a partir del estudio del comportamiento de la función de covariación, cuando la variación de la variable independiente tiende a cero.

# 1. MARCO CONCEPTUAL

## 1.1. JUSTIFICACIÓN

En su conferencia sobre tres ideas fuertes del cálculo, el profesor Vasco (2009), señala que en nuestro país a los estudiantes de grado once y primer año de universidad se les enseña el calculo diferencial como ejercicios de manejo simbólico de expresiones…sin necesidad de entender ninguna idea fuerte de las matemáticas conceptuales (Vasco C.,2009) lo que refleja la priorización que la enseñanza tradicional del cálculo le ha dado a los enfoques de tipo algebraico, numérico y formal conjuntista con definiciones rigurosas respecto a los números, la continuidad, el límite. etc. Esta tendencia no facilita a los estudiantes una aprehensión clara y significativa de los conceptos fundamentales del cálculo.

Por otra parte el Ministerio de Educación Nacional plantea desde los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006) , los tipos de pensamiento que deben ser abordados por la educación matemática en Colombia, ellos son: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el pensamiento aleatorio y el pensamiento variacional; siendo este último, junto con los sistemas algebraicos, en donde se hace énfasis en el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos para el desarrollo del estudio de la variación como actividad matemática implícita en los diferentes aspectos de la vida.

Diferentes trabajos de investigación en educación matemática, por ejemplo el de Vrancken y Engler (2009); evidencian un creciente interés en dar mayor importancia al análisis de la variación y la covariación como puerta de entrada a conceptos básicos del cálculo; planteando a los estudiantes actividades de análisis variacional y covariacional tanto de la variable independiente como de la propia función, para determinar razones de cambio que puedan ser representadas como funciones que modelen las variaciones entre la variable independiente, la función y las variaciones de la función.

Por lo expuesto anteriormente se presenta una propuesta válida para la enseñanza del concepto de derivada que atienda más a la conceptualización que al trabajo meramente mecánico y algorítmico; en la cual el estudiante se aproxime a conceptos tales como: la variación y la covariación proporcional de las cantidades de distintas magnitudes relacionadas en una situación dada; las razones, tasas de cambio y acumulación, con la cual se pretende proponer una ruta de aprendizaje hacia la derivada sin usar la ruta convencional que parte de la definición de limite, para usar la recta tangente a una curva en un punto dado y construir con ella la función derivada.

## PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

¿Es posible tener un acercamiento a la noción matemática de derivada, que atienda más una construcción conceptual que a una repetición mecánica de diferentes algoritmos; desde el análisis de la variación y covariación proporcional de las razones de cambio de las funciones polinómicas, hasta grado cuatro, y la exploración de otro tipo de funciones?

## 1.2. OBJETIVO GENERAL

Diseñar una propuesta didáctica que tenga como eje central el estudio de las variaciones y covariaciones proporcionales de las funciones polinómicas; como introducción a la enseñanza del concepto de derivada a partir del análisis de razones de cambio correlacionadas; con sus diferentes registros semióticos de representación (tabular, gráfico, y algebraico).

## 1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Realizar un análisis de los conceptos inmersos en las variaciones y covariaciones proporcionales de las funciones polinómicas hasta cuarto grado y su relación matemática con el concepto de derivada.

2. Diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada teniendo como punto de partida el estudio de la variación de las funciones polinomiales.

3. Plantear actividades con las herramientas CAS, (computer algebra system) para modelar los procesos de la variación de funciones polinomiales que permitan la visualización y aproximación del concepto de derivada.

# 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los aspectos conceptuales que, desde lo disciplinar y desde el desarrollo de las estructuras de pensamiento, se deben considerar para comprender los fines de la propuesta; así como para orientar su implementación. Se trabajarán las concepciones teóricas del concepto de función, desde un enfoque histórico que permita ver las diferentes concepciones frente a este objeto matemático; el concepto de derivada y las definiciones que han surgido en su desarrollo histórico, y la relación que este guarda con la variación y la covariación de magnitudes. Se presentan además algunos planteamientos frente al razonamiento y pensamiento variacional así como los niveles en los que se da el razonamiento covariacional.

Lo anterior pretende dar la justificación disciplinar de la propuesta, que se verá evidenciada en el capítulo dedicado a las actividades que se sustentan, en particular, en el trabajo con funciones polinómicas de diversos grados. En este sentido se parte de analizar el cambio de la variable dependiente e independiente, primero desde la razón por diferencia, posteriormente se analiza el cambio del cambio en los valores de la variable dependiente hasta un orden $\boldsymbol{n}$, que permitirá hacer conjeturas y análisis del cambio de orden $\boldsymbol{n}$. Finalmente se realiza el estudio del cambio por medio del cociente incremental entre la función y la variable independiente, es decir, el análisis covariacional del comportamiento de las funciones; lo anterior facilitará la descripción del comportamiento de estas variaciones como afines al comportamiento de las familias de derivadas de una función. Es necesario tener clara la noción de derivada como el cociente incremental presente en las variaciones de una función cuando la variación de la variable independiente, $\Delta\boldsymbol{x}$, tiende a cero.

## 2.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

El concepto de función ha evolucionado a lo largo de la historia, siendo objeto de numerosas precisiones y generalizaciones así como también ha sido influenciado por diversas concepciones que históricamente se han configurado. Ruiz A. (2002) organiza el análisis histórico e identifica las siguientes concepciones predominantes en distintos períodos de la evolución de la noción de este concepto**.**

Desde los babilonios se logra hacer uso de una intuición primitiva del concepto de función, ya que evidencias históricas muestran que esta cultura buscaba regularidades en los fenómenos naturales, mediante la elaboración de tabulaciones que después intentaban aritmetizar y generalizar para poder predecir el comportamiento de tales fenómenos. Establecieron relaciones sistemáticas entre variaciones de las causas y los correspondientes efectos; evidenciaron que los fenómenos sujetos a cambios, tales como el calor, la luz, la distancia la velocidad, etc., pueden poseer distinto grado de intensidad y cambiar continuamente entre ciertos límites dados. Lo anterior dio origen a las tablas de cálculo en las cuales a su vez está presente una relación general ya que en estas se asocian elementos de dos conjuntos. Sin embargo, “existe una distancia muy grande entre instinto de funcionalidad y la noción de función” (Ruiz L. 1998). La función entendida desde la variación es la concepción predominante en este período.

Por otra parte surge la noción de la función como proporción originada principalmente en la matemática griega; si bien las ideas de cambio y de cantidad variable estaban en el pensamiento griego, se consideraba el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas y más propio de la física. El considerar los entes matemáticos como algo estático llevó a los matemáticos de esta época a hablar en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables, lo que en términos de Ruiz L.(1998) "conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones".

Dado el significado geométrico que tenían para los griegos las magnitudes variables, ellos sólo establecían en forma homogénea sus proporciones: comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas, volúmenes con volúmenes; no obstante la búsqueda del concepto general de proporcionalidad albergaba la relación privilegiada entre magnitudes variables, es decir, persistía la idea de la variabilidad atada a las magnitudes de índole físico, pues desde la física si se podían establecer relaciones entre magnitudes de diferente naturaleza. Las nociones más negativas en la evolución del concepto de función fueron, por lo tanto, en términos de Cotret (1985, c.p. Posada & Villa, 2006) "la proporcionalidad, la inconmensurabilidad, y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud".

A principios del siglo XVII, Fermat y Descartes descubren el mundo de la representación analítica al conectar los problemas de dos ramas de la matemática: la Geometría y el Álgebra. Se renuncia a las concepciones griegas de número y magnitud y se logra fusionarlas, y según Youschevitch (1976, c.p. Sánchez L. 2009), es aquí donde por primera vez, se sostiene la idea de que una ecuación es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que se permita el cálculo de los valores de una de ellas correspondientes a los valores dados o conocidos de la otra. Collette (1986) retoma a Descartes y sostiene que "cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva"**,** dando origen a la noción de función y de dependencia de las variables, de igual manera se pone en escena la posibilidad de una representación gráfica de estos objetos matemáticos.

La concepción de función como expresión analítica nace en el siglo XVII y continúa con los trabajos de Euler y Lagrange en el siglo XVIII. Durante algún tiempo se pensó que las únicas funciones dignas de estudio eran aquellas que podían ser descriptas por medio de expresiones algebraicas; Aún permanece la idea de asignar la variación a las “cantidades” y aparece la idea de la existencia de funciones no continuas.

Leibnitz usa por primera vez el término función, ya que según Youschevitch (1976, c.p. Sánchez L. 2009), a falta de un término general para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, va a conducir al uso de la palabra en el sentido de una expresión analítica. Con Bernoulli y Euler, la noción de función empieza a ser considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra $\boldsymbol{f}$ para la característica de una función, escribiendo entonces: $\ll \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{x} \gg$ lo que evolucionará con Euler, para escribirse como se utiliza en la actualidad $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Euler y Bernoulli, según Boyer (1986), define el concepto de función de una cantidad variable como una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.

En los últimos años el concepto de función, en el contexto escolar, se ha venido desarrollando de acuerdo a diferentes representaciones que buscan la ruta de aprendizaje mas apta para un contexto determinado, de estas incluimos cuatro definiciones diferentes de función, las tres primeras las señala Nicholas (1966, c.p. Hitt y Torres, 1994).

1. En términos de variables: Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.

2. En término de conjunto de pares ordenados: Una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares tiene el mismo

primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos rango de la función.

3. En término de regla de correspondencia: Una función $\boldsymbol{f}$ es una correspondencia de un conjunto $\boldsymbol{A}$ en un conjunto $\boldsymbol{B}$ que asigna a cada valor de $\boldsymbol{x}$ de cierto subconjunto $\boldsymbol{D}$ de $\boldsymbol{A}$ un elemento determinado de manera única $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ de $\boldsymbol{B}$.

La cuarta definición, planteada por Dubinsky, Schwingendorf & Mathews (1995) plantea la función como un procedimiento $[\boldsymbol{P}]$ que toma una o más entrada que salidas, y que tiene la propiedad de que cualesquiera dos llamadas $[\boldsymbol{P}]$ con la misma entradas regresa la misma salida.

Hitt (1994) expone la importancia de desarrollar la idea intuitiva de variación para la adquisición del concepto de función. Por esta razón, se considera que la definición en términos de variable independiente y dependiente resulta ser la más adecuada para el nivel de educación básica y media. Esta definición a la que se refiere está vinculada a problemas de contexto real.

Un aspecto relevante en educación matemática es que las definiciones de un objeto están relacionadas con las diferentes representaciones que del mismo se tenga, para el caso de la función Larson & Hostetler (2001) proponen, retomando algunas corrientes que estudian el papel de las representaciones en el aprendizaje, que las funciones en el contexto de la enseñanza comúnmente están representadas en cuatro formas, a saber:

1. Verbalmente, por una oración que describe la forma en que la variable de entrada está relacionada a la variable de salida.

2. Numéricamente, por una tabla o lista de pares ordenados que hace corresponder un valor de entrada con un valor de salida.

3. Gráficamente, por puntos sobre una gráfica en un plano coordenado en el cual los valores de entrada son representados en el eje horizontal y los valores de salida en el eje vertical de un plano cartesiano.

4. Algebraicamente, por una ecuación de dos variables (Larson & Hostetler, 2001 p. 126).

Estas representaciones se trataran en el marco didáctico en el contexto de las representaciones semióticas.

Para contextualizar el objeto función en su relación como objeto de estudio en el contexto escolar, se retoman dos definiciones presentadas por Planchart (2002) tomadas de textos universitarios para ver cómo se presenta, explica y define la función. En el precálculo de Almgren y Clark (1998 c.p. Planchart 2002) señalan que "… cuando pensamos de una variable dependiendo de otra, hablamos de una variable siendo función de otra. Más formalmente, usamos el término función de una manera más precisa. Una variable y se dice que es función de otra variable $\boldsymbol{x}$ si cada valor de $\boldsymbol{x}$ determina un único valor de $\boldsymbol{y}$. Las gráficas de las funciones son trazadas tradicionalmente con la variable independiente con sobre el eje horizontal y la variable dependiente sobre el eje vertical…"( Planchart pag.34).

Por su parte Callahan & Hoffman (1995 c.p. Planchart 2002), expresan que: "…Una función describe como una cantidad depende de otra". En la función $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ la variable $\boldsymbol{t}$ es llamada input (entrada) y la variable $\boldsymbol{S}$ es llamada output (salida)**.** Una función es una regla que especifica como el valor de una variable, la entrada determina el valor de la segunda variable, la salida". (Planchart 2002 p. 24). Al reconocer las características de las funciones es necesario para el desarrollo de esta propuesta analizar el comportamiento de las variables de las funciones por medio del cálculo diferencial donde se analiza el cambio de las magnitudes.

## 2.2. CONCEPCIONES SOBRE LA DERIVADA

El cálculo diferencial trata del estudio del cambio de una cantidad cuando otra cantidad, que está relacionada con la primera varía. A continuación se presentan distintas definiciones del concepto de derivada desde un enfoque clásico formal y una definición dentro del contexto del desarrollo de la propuesta.

### 2.2.1 *Una definición formal.*

Si $\boldsymbol{f}$ está definida sobre un intervalo abierto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, entonces para cada dos puntos distintos $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{c}$ tales que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ se puede considerar el cociente de diferencias, llamado cociente incremental, como:

$$\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}}$$

Entonces si $\boldsymbol{f}$ una función real definida en un intervalo abierto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, y supongamos que $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, se dice que $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{c}$ siempre que el límite del cociente incremental exista. El limite, denotado por $\boldsymbol{f}'$ se llama derivada de en $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{c}$ y por lo tanto equivale a:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}}$$

### 2.2.2 *Una Definición como pendiente*

Fermat durante 1630 desarrollo un método para calcular tangentes a curvas planas en un punto dado de la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, este método aunque “no es riguroso es tan exacto como el utilizado posteriormente por Newton y Leibnitz” (Lozano, Y. 2011, p. 20) y establece que la pendiente de la tangente a un función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es igual al cálculo del límite cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a cero, ( $(\boldsymbol{e} \rightarrow \mathbf{0})$ siendo $\boldsymbol{e}$ un número que se suma a $x$

$$\boldsymbol{m_{tan}} = \lim_{e \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{e}}$$

2.2.3. *Definición como cociente incremental*

Leibniz propone como método general para hallar la tangente a una curva dada por la función $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, "el cociente incremental o cociente de las diferencias de una función" (Lozano, Y. 2011, p. 20) que se calcula de acuerdo con la expresión:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x}}$$

Para Leibniz $\Delta \boldsymbol{x}$ no se aproxima a cero sino que es una diferencial "$\boldsymbol{dx}$" que representa una cantidad infinitamente pequeña, del mismo modo $\Delta y$ también es una diferencial "$\boldsymbol{dx}$" con un último valor infinitamente pequeño. El cociente resultante entre estas dos diferenciales "…es un número ordinario llamado derivada…" (Lozano, Y. 2011, p. 21). En resumen, la derivada de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es: $\boldsymbol{f^l}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$

2.2.4 *Definición con el método de fluxiones de Newton*

"Newton en libro "Methodus Fluxiorum et Serierum Infinitorum" que fue escrito en 1671 y publicado en 1736. Incluyó el método de fluxiones en la paginas 390–396 de su Algebra.

Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades variables que aparecen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$,.., las llama "fluentes" y sus velocidades, designadas por $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\dot{\boldsymbol{y}}$ las llama "fluxiones". La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad infinitesimal de tiempo $\boldsymbol{o}$, es $\boldsymbol{o\dot{x}}$, el momento del fluente.

El problema fundamental es, dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones, y recíprocamente, dada una relación entre fluxiones hallar la correspondiente relación entre fluentes". (Lozano, Y. 2011, p. 21).

Esta definición presenta, a diferencia de las anteriores, elementos dinámicos en ella, las razones están en que su origen se encuentra en el estudio de fenómenos físicos.

### *2.2.6 Postura de la Derivada dentro de la propuesta*

Para el contexto del presente trabajo se asume la derivada como una función dinámica que describe la variaciones entre, la variación de las imágenes de una función $f(x)$, calculadas como $\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$[1] y la variación de la variable independiente dados dos de sus valores $(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{x})$, siempre y cuando la posición de $\boldsymbol{x_i}$ sea tan arbitrariamente cercana a la de $\boldsymbol{x}$ como se quiera, sin faltar al principio físico de que dos "objetos" diferentes no pueden ocupar el mismo espacio.
Así, si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es una función, su derivada es la función que representa la relación de covariaciones dada por $\frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}{(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x})} = \frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}}$ cuando a $\Delta x$ se le asigna un valor infinitamente pequeños que se aproxima a cero sin llegar a cero, esto permite establecer la cantidad de cambio de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ por unidad infinitesimal de cambio de la variable independiente $x$.

[1] Por sugerencia del lector, esta notación no es la más conveniente para representar la situación a la que hace referencia. Sin embargo no encontramos una conveniente ya que tanto $x_i$ como $x$ pueden variar.

En otro sentido, la derivada es una función que representa la relación dinámica entre dos variaciones, una variación independiente y la otra variación dependiente, cuando se calcula la razón de cambio entre las imágenes de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y una unidad infinitesimal de variación cuando la variación de $\boldsymbol{x}$ tiende a cero.

## 2.3. CONCEPTO DE VARIACIÓN

La variación es un concepto que se ha desarrollado a lo largo de la historia y su auge se dio en el periodo comprendido entre los siglos XIV y XVII, en el que se centró el interés por el estudio de las cualidades, en situaciones de movimiento, la intensidad luminosa o la intensidad de calor, inspirados en los trabajos científicos de Aristóteles y de los filósofos escolásticos sobre tópicos como el infinito, el infinitesimal y la continuidad (Zubieta &, Moreno 1996, Pág. 457).

La tasa de variación o razón de cambio ha sido un concepto que ha llamado la atención de diversos investigadores, en parte, porque se encuentra relacionado con otros conceptos fundamentales del análisis matemático; por ejemplo con la derivada (Cantoral, 2004; Dolores C., 2007) y el de función (Posada y Villa, 2006). Por otro lado, Tall (1992) resalta la importancia de abordar el estudio de conceptos del análisis matemático haciendo énfasis en los procesos dinámicos que subyacen a ellos, por ejemplo, las funciones y la derivada en relación con la variación y tasa de variación respectivamente**.**

En un conjunto numérico ordenado se define la variación como el cambio que se presenta de un elemento con el elemento posterior o anterior es decir que el cambio se define como

$$\Delta \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x})$$

Donde $\Delta \boldsymbol{x}$ representa la variación de los elementos del conjunto, $\boldsymbol{x}_i$ y $\boldsymbol{x}$ son dos elementos del conjunto numérico ordenado; es decir que podemos establecer la variación en cualquier conjunto numérico comparando el cambio de sus elementos al estar ordenados de acuerdo al orden establecido, dichas variaciones pueden modelarse por medio de una función o presentar un comportamiento aleatorio.

## 2.4. RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

El Análisis Covariacional se fundamenta en dos elementos básicos: de una parte, el pensamiento y el lenguaje covariacional, y de otra, el razonamiento covariacional. El primer aspecto es caracterizado por Cantoral y Farfán (2000) como el campo en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, haciendo énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. En segundo lugar Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, (2002) plantean el razonamiento covariacional como el conjunto de actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo a las formas en que cambian una con respecto de la otra. Estas actividades cognitivas implican acciones mentales propias de la covariación, que proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación. Sin embargo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo relativa a una tarea particular, se puede caracterizar por medio de 5 niveles de desarrollo de las imágenes de covariación y que están asociadas a la coordinación de los cambios, su dirección de cambio, la coordinación cuantitativa, la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea.

Las cinco acciones mentales y los cinco niveles de desarrollo del pensamiento covariacional se muestran en las siguientes tablas:

| **ACCIÓN MENTAL** | **DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN MENTAL** | **COMPORTAMIENTOS** |
|---|---|---|
| **AM1** | Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. | Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., *y* cambia con cambios en *x*). |
| **AM2** | Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable. | Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada. |
| **AM3** | Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable. | Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada. |
| **AM4** | Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada. | Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada. |

| | | |
|---|---|---|
| **AM5** | Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función. | Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos). |

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación Tomada de Carlson M., Jacobs, S. Coe E. et al (2003)

| ***NIVELES DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL*** |
|---|
| El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen. |
| **Nivel 1 (N1). Coordinación** |
| En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1). |
| **Nivel 2 (N2). Dirección** |
| En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2. |
| **Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa** |
| En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3. |

| |
|---|
| **Nivel 4 (N4). Razón promedio**<br>En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.<br>***Nivel 5 (N5). Razón instantánea***<br>En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5 |

Tabla 2 Marco conceptual para los niveles a covariación Tomada de Carlson M., Jacobs, S. Coe E. et al (2003)

En las representaciones gráficas de las funciones, el razonamiento covariacional de los estudiantes les permite, entre otras cosas, establecer e interpretar las relaciones de dependencia entre las variables, identificar situaciones de crecimiento o decrecimiento, coordinar magnitudes relativas de cambios de las variables, y entre las variables, Carlson et al. (2002), lo cual facilita entrever el hecho de que se da una variación constante de la variable independiente mientras que la variación de la variable dependiente es afectada por la relación matemática entre las dos variables. Sin embargo, también se debe establecer una relación de covariación que describa la razón de cambio entre las variables, tomada en un intervalo cualquiera o tomada en intervalos cada vez más pequeños que le permitirán llegar a la noción de razón de cambio instantánea.

Por otra parte Jain & Sheng (2007) plantean una exploración de la aproximación de las funciones derivadas a través de diferencias finitas, presentando el sustento matemático desde el campo del análisis, al análisis covariacion por medio de 5 teoremas, 6 colorarios y algunas definiciones.

Los conceptos matemáticos presentados anteriores son necesarios para la implementación de esta propuesta, se hace prioritario que el equipo de docentes que desea implementarla dominen de manera suficiente estas temáticas para lograr orientar a los estudiantes de manera correcta en la ruta propuesta, a continuación se plantean los aspectos didácticos de la misma, que al articularse con los aspectos matemáticos dan el sustento general a la propuesta.

# 3. MARCO DIDÁCTICO

En este capítulo se resumen los aspectos más relevantes de la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval y su relación con la secuencia didáctica propuesta. También se describen los elementos sugeridos por la teoría que son necesarios para que los estudiantes logren la comprensión o conceptualización de un objeto matemático empleando diferentes tipos de representación del mismo. Además se hace una presentación de la importancia del uso de la tecnología como apoyo a los procesos de visualización y conceptualización.

## 3.1. REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

El aprendizaje de las matemáticas esta mediado por la utilización de diferentes representaciones semióticas que permiten la adquisición, construcción y manipulación de diversos conceptos matemáticos; por ejemplo, si se piensa en un punto, una recta ó un cuadrado resulta casi imposible actuar sobre estos objetos matemáticos sin recurrir a una imagen mental o una representación gráfica que de ellos se tenga.

En el caso de conceptos como  función y derivada se hace necesario que quien pretenda alcanzar un cierto grado de comprensión transite entre sus diferentes registros semióticos y sistemas de representación; sin embargo esto no es suficiente ya que puede darse el caso, de que a pesar de dominar las representaciones algebraicas, tabulares, gráficas o las del lenguaje natural, no se pueda coordinar con facilidad la transformación de las unidades significantes propias de un sistema de representación en unidades significantes de otro sistema y por lo tanto el grado de conceptualización sea bajo o inexistente.

Cuando se busca la comprensión de un objeto matemático, desde el enfoque teórico que se quiere manejar, se deben tener en cuenta diversos aspectos dentro de los cuales se deben resaltar:

- Los grados de libertad, es decir, “los registros de representación semiótica de los que dispone un sujeto [en este caso el estudiante] para objetivarse él mismo [un concepto matemático o] una idea aún confusa” (Duval, 1999, p. 29). Para la presente propuesta se van a manejar los registros tabular, gráfico, algebraico y de expresión verbal.

- “Las representaciones semióticas son a la vez externas y conscientes, y cumplen con las funciones cognitivas de transformación intencional, expresión y objetivación.” (Duval, 1999, p. 34). En este sentido son externas y conscientes toda vez que posibilitan al individuo comunicar su comprensión acerca de un objeto.

- Se debe lograr la congruencia entre representaciones, posibilitando una correspondencia semántica de los elementos significantes [de cada representación.] (Duval, 1999, p. 50) es decir que los elementos característicos del objeto permanezcan invariantes ante el cambio de registro de representación.

- Se debe dar la univocidad semántica terminal: de tal modo que “a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significan elemental en el registro de la representación de llegada” (Duval, 1999, p. 50)

- Cuando se comparan dos representaciones, por ejemplo la tabular y la gráfica en el caso de una función, “Las organizaciones respectivas de las unidades significante de las dos representaciones comparadas, [conducen] a que las unidades en correspondencia semántica sean ***aprehendidas*** en el mismo orden en las dos representaciones. (Duval, 1999, p. 50-51)

- Las transformaciones al interior de los registros, los tratamientos, las transformaciones externas, y conversiones de un objeto matemático evidencian el grado de conceptualización que ha alcanzado el estudiante.

Teniendo en cuenta que la conceptualización en matemáticas se alcanza solo sí se coordinan las diferentes de representaciones, a la luz de la presente propuesta, se buscará que los estudiantes construyan la relación de congruencia entre las representaciones , para lo cual se propone el siguiente orden, el cual sólo podrá ser evaluado en sus aportes una vez que sea implementado, se prevé que según sean las realidades particulares de un grupo, el docente tenga dentro de esta propuesta elementos que le permitan determinar la posible pertinencia de cambiar la estructura sugerida. La secuencia que se propone es:

1. Relación entre la expresión algebraica y la representación tabular.
2. Relación entre la representación tabular y la representación gráfica.
3. Relación entre la expresión algebraica y la representación gráfica.
4. Cambios de la variación de la variable independiente con los cambios de los valores de la función observables en un entorno del programa GeoGebra
5. Cambios observables entre la variación del $\Delta x$ y los valores de las tablas y las gráficas en un entorno de GeoGebra.
6. Relación entre el cambio del valor funcional de la función que se esté analizando y la variación de su variable independiente.

**7.** Variación entre el $\Delta x$ y su relación de covariación con la variación de la imagen de la función y la variable independiente: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

En este punto, se empleará una razón geométrica entre la variación de la función y la variación de la variable independiente para determinar la relación función de covariación.

**8.** Introducción al concepto de derivada, haciendo que el $\Delta x$ sea lo mas pequeño posible sin llegar a ser cero.

## 3.2. Uso de la tecnología para la visualización de representaciones en matemáticas

Teniendo en cuenta que nos encontramos en un mundo cada vez más tecnificado que emplea con mayor frecuencia las nuevas herramientas computacionales (ordenadores, calculadoras, tableros interactivos, TICS, Software especializado, etc.,) que le permiten al ciudadano moderno un mayor dominio de habilidades y competencias como sujeto creativo, activo, crítico y productivo de una sociedad en constante desarrollo; es necesario entender que la enseñanza de las matemáticas debe alejarse de su carácter instruccional para acercarse al estudiante como apoyo indispensable en el desarrollo de sus habilidades analíticas y el perfeccionamiento de la abstracción, la representación y la manipulación simbólica, utilizando nuevas herramientas en el aula de clase.

En seminario nacional "*Incorporación de nuevas tecnología al currículo de matemáticas de la educación media en Colombia"* (Ministerio de Educación, enero 2002) se menciona que:

"…El estudio de procesos de variación y cambio constituye uno de los aspectos de gran riqueza en el contexto escolar. El énfasis actual en la educación

> matemática orientado hacia el desarrollo del pensamiento matemático a partir de situaciones problemáticas significativas para los estudiantes, hacen del estudio de la variación y el cambio; con mediación de herramientas tecnologías computacionales gráficas y algebraicas; un campo de acción y formación potente en la educación matemática del país…" (Ministerio de Educación Nacional, 2002a, p. 16)

Donde resulta clara la importancia que tiene el estudio de la variación y el cambio, y como buscar situaciones significativas para los estudiantes y el apoyo que los entornos computacionales brindan a este tipo de actividades.

Además de lo ya expuesto la visualización en educación matemática no es simplemente la acción de ver "…la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende" "...al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales…" (Cantoral, R. y Montiel, G. sf). Así en el marco de la presente propuesta y de manera coherente con lo expuesto en la secuencia didáctica se busca que los estudiantes no solo tengan aproximación a la representación en diferentes registros semióticos sino que además por una parte logren transitar entre los diferentes registros de representación y los elementos que del concepto resultan evidenciados a partir de cada uno de los registros sino que además logren articularlos en vía de conceptualizar la derivada.

# 4. PROPUESTA

En este capítulo se presenta la secuencia de actividades propuesta para acercar a los estudiantes al concepto de derivada a partir de razones de cambio correlacionadas; empleando el estudio de variaciones y covariaciones proporcionales en situaciones de cambio variable, y el análisis variacional y covariacional de funciones polinómicas hasta cuarto grado; por último se presenta una ampliación del estudio al análisis de las funciones trigonométricas seno y coseno así como a la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$.

La secuencia de actividades esta divida en dos partes: la primera esta conformada por dos actividades introductorias, con las cuales se busca que los estudiantes reconozcan la variación como un fenómeno que esta presente en su cotidianidad y de la misma forma que se cuestionen sobre aspectos de cambio y variación inmersos en dichas situaciones. Posteriormente se plantea a los estudiantes el análisis de la variación y covariaciones de tres funciones polinómicas donde estos deben determinar las covariaciones de las variables dependientes, construir tablas, realizar las graficas (de las funciones dadas, sus variaciones y sus covariaciones) y responder algunos cuestionamientos relacionados con el cambio y la variación.

La segunda parte de la secuencia de actividades esta conformada por siete applets de geogebra, en los cuales los estudiantes pueden realizar manipulaciones dinámicas de funciones (polinómicas hasta cuarto grado, trigonométricas y exponenciales) en su expresión algebraica, la variación de la variable independiente, donde estas manipulaciones incidencias directas sobre la representación grafica y tabular de dichas funciones en tiempo real. Los estudiantes tienen las orientaciones del docente que orienta las actividades con los respectivos cuestionamientos sobre la variación y covartación de las funciones estudiadas, que dan origen a la noción de derivada desde el comportamiento de la covariaciones de funciones cuando el valor de $\Delta\boldsymbol{x}$ se hace tan pequeño que es casi cero.

## 4.1 ACTIVIDAD INTRODUCTORIA.

Esta actividad se plantea con el propósito acercar a los estudiantes a las diferentes nociones o conceptos matemáticos manejados a lo largo de toda la propuesta; la simbología a utilizar, la forma de realizar diferentes cálculos y a las ideas de cambio y cuantificación del cambio

### *4.1.1* Actividad Introductoria 1*:*

***Todo cambia todo el tiempo, nada permanece en el mismo estado o en la misma posición por siempre***

Planteada a partir de una situación de variación muy cotidiana en donde se busca reconocer matemáticamente el cambio en el tamaño de la sombra de un niño y como este cambio no es constante, sino que se presenta una variación de la variación.

Duración: 2 sesiones de clase

- ✓ Objetivos:
  1. Plantear el cambio como un fenómeno fácilmente apreciable en cualquier entorno.
  2. Mostrar que se puede establecer la causa de un fenómeno de cambio.
  3. Establecer la posibilidad de cuantificar el cambio y su variación utilizando herramientas matemáticas.

4. Familiarizar al estudiante con la simbología matemática empleada para expresar algebraicamente la variación y la covariación de dos magnitudes observadas, la longitud y el tiempo.
5. Facilitar al estudiante la transición entre un registro algebraico y el registro tabular.

✓ Prerrequisitos:

1. Conocimientos de trigonometría: Ángulos, funciones trigonométricas, manejo de representaciones algebraicas, tabulares y gráficas de funciones.

2. Contar con los siguientes recursos Tecnológicos: lápiz, regla, colores, esfero, cuaderno, papel milimetrado, curvígrafo, calculadora científica o graficadora, opcionalmente computador y software de geometría dinámica.

Rol del docente

El docente al momento de implementar esta actividad debe tener un rol activo es decir debe realizar las orientaciones necesarias para el desarrollo de la actividad sin intervenir en la construcción de conjeturas del estudiante de tal manera que el estudiante pueda identificar las variaciones presentes en la situación, conjeturar y realizar proyecciones de la situación en el tiempo.

### *ACTIVIDAD INTRODUCTORIA 1*

### *TODO CAMBIA TODO EL TIEMPO, NADA PERMANECE EN EL MISMO ESTADO O EN LA MISMA POSICIÓN POR SIEMPRE*

Recuerdo que cuando era muy pequeño,…si lo sé… hace casi diez mil años; cuando la escritura apenas esbozaba sus primeros trazos…, me encantaba jugar con mi sombra tratando de no pisarla o dejarla atrás como quien deja una mascota, pero nunca pude; mi sombra siempre me seguía, unas veces más grande y otras veces apenas un poco más grande que mis pies, pero el culpable de que la sombra no se alejara fue, y es, el señor sol. Que todas las mañanas sale detrás de una montaña azulosa, camina hasta la mitad del cielo, se cansa y poco a poco desciende a esconderse detrás de otra montaña azulosa; lo mismo hacía la luna, que además cambia de forma de tanto en tanto. ¡Que vaina! Me dije, estas cosas no se quedan quietas, ¿todo será así o habrá algo que no cambie? Me pregunte en silencio;… y poco a poco … mientras crecía observaba como las personas que conocía iban tiñendo sus cabellos con delgados hilos blancos; mi abuelo ya no montaba sobre el caballo, mi abuela no volvió a preparar esa arepas que parecían tortas, y el fogón ya no necesitaba más ramitas de leña; los televisores ya dejaron de ser algo extraño para convertirse en algo tan común como las camas o las mesas. Ya grande, de 13 ó 14 años, comprendí que sin importar lo que haga, todo cuanto me rodea cambia, se transforma, se mueve o se deteriora y lo único que parece mantenerse siempre en el mismo estado es el tiempo, que nos atraviesa inclementemente a todos sin importar la edad, el color de los ojos, la estatura o cualquier otro atributo.

De acuerdo a la lectura anterior y a su experiencia conteste:

1. ¿Cuándo o dónde nuestro protagonista observó que se presentaban cambios?

2. ¿Qué es aquello que lo cambia todo, pero que el mismo parece no cambiar?

3. ¿Por qué el protagonista de nuestra historia ve su sombra unas veces más grande y otras más pequeña?

4. ¿La afirmación de que “el sol atraviesa el cielo” es cierta o falsa?

5. Si el movimiento que se da entre el sol y la tierra describiera una órbita circular perfecta, de tal manera que a las 6:00 am. Su ángulo de elevación fuera de 0°, al medio día 90° y a las 6:00 pm. 180° ¿Sería posible que le ayudara al niño a calcular que tan grande es su la sombra a diferente hora del día?

| Estatura del niño 1 metro | | |
|---|---|---|
| Hora | Ángulo de elevación | Tamaño de la sombra en centímetros |
| 7:00 a.m. | | 373.2 cm. |
| 8:00 a.m. | 30° | |
| 9:00 a.m. | | 100.0 cm. |
| 10:00 a.m. | 60° | |
| 11:00 a.m. | | |
| 12:00 a.m. | | 000.0 cm. |

Para estudiar fenómenos como los descritos en la historia anterior podemos realizar un análisis de variación y de covariación de las diferentes variables involucradas, para lo cual se debe acordar que se entiende como:

- Variable independiente:
  El tiempo que lo representaremos con la letra $\boldsymbol{x}$

- Variable dependiente:
  El tamaño de la sombra lo representaremos como $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

- Variación de la variable independiente
  Cambio observable y medible de la variable independiente que se calcula con la diferencia entre dos valores consecutivos; $\Delta\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x})$

  Por ejemplo si $\boldsymbol{x_i} = \mathbf{10{:}00}$ y $\boldsymbol{x} = \mathbf{9{:}00}$ tenemos que la diferencia entre $\boldsymbol{x_i}\ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{x}$ es de una hora y cero minutos. $\Delta\boldsymbol{x} = (\mathbf{10{:}00} - \mathbf{9{:}00}) = \mathbf{1{:}00}$

- Variación de la variable dependiente

Cambio observable y medible de la variable dependiente que se calcula con la diferencia entre dos valores consecutivos; $\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$

ó $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Por ejemplo si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) = \mathbf{160}\ \boldsymbol{cm}.$ y $f(x_0) = 125cm$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{125}\ \boldsymbol{cm}.$ tenemos que: $\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{160}\ \boldsymbol{cm}. - \mathbf{125}\boldsymbol{cm}) = \mathbf{35}\ \boldsymbol{cm}.$

- Covariación entre la variable independiente y la variable dependiente

  Razón o cociente entre la variación de la variable dependiente y la variación de la variable independiente:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}}$$

6. Teniendo en cuenta la situación anterior complete las siguiente tablas

| Variación de la variable independiente | |
|---|---|
| $\boldsymbol{x}$ | $\Delta \boldsymbol{x}$ |
| 7:00 | |
| 8:00 | 1 |
| 9:00 | |
| 10:00. | |
| 11:00 | |
| 12:00 | 1 |

| Variación de la variable dependiente $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ | |
|---|---|
| $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ | $\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ |
| 373.2 | ---- |
| 173.2 | -200 |
| | |
| | |
| | |
| 0 | -26.7 |

| Análisis de covariación | | |
|---|---|---|
| $\Delta x$ | $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ | $\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}}$ |
| 1 | | ------ |
| | | -200 |
| | | |
| 1 | | |
| | | |
| | | -26.7 |

7. De acuerdo a los datos de la tabla conteste las siguientes preguntas

a. ¿La sombra entre las 7 mañana y el medio día crece más y más? Justifique

b. ¿La sombra cada vez se hace más pequeña? Justifique.

c. ¿Es válido afirmar que la sombra decrece a un ritmo constante de 40 cm cada hora, y por lo tanto, si la sombra mide $200cm$ a las 7:00 a.m., pasa a $160cm$ a las 8:00 a.m. y a $120cm$ cm a las 9:00 a.m? Justifique.

8. Complete la siguiente tabla

| *Hora del día* | Tamaño de la sombra | Crecimiento ó Decrecimiento | Variación en el crecimiento o decrecimiento de la sombra |
|---|---|---|---|
| 6:30 a.m. | 759.5 cm. | ---- | --- |
| 7:00 a.m. | 373.2 cm. | – 386.3 | --- |
| 7:30 a.m. | 241.4 cm. | – 131,8 | 254.5 |
| 8:00 a.m. | 173.2 cm. | – 68.2 | 63,6 |
| 8:30 a.m. | | | |
| 9:00 a.m. | | | |
| 9:30 a.m. | | | |
| 10:00. a.m. | | | |
| 10:30 a.m. | | | |
| 11:00. a.m. | | | |
| 11:30 a.m. | | | |
| 12:00 m. | | | |

9. Conteste las siguientes preguntas

a. ¿La variación en el tamaño de la sombra es constante o no? Justifique

| |
|---|
| |
| |

b. ¿Es posible analizar la variación de la variación? Justifique

| |
|---|
| |
| |

### 4.1.2 Actividad introductoria 2

Duración: 2 sesiones de clase

Planteada como un problema de producción de cajas de madera en donde es importante analizar la variación en la cantidad de materia prima a utilizar dependiendo del modelo que se elija fabricar.

- ✓ Objetivos:
  1. Mostrar al estudiante una situación problema en donde se aplica el análisis variacional y covariaciona para solucionarla.

  2. Familiarizar al estudiante con el análisis variacional y covariacional de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas.

  3. Mejorar la destreza del estudiante en el uso de registros de representación semiótica (algebraicos, tabulares y gráficos) para lograr una mejor comprensión de una situación dada.

  4. Brindar al estudiante las herramientas necesarias para representar funciones polinomicas con el programa GeoGebra o con calculadora graficadora.

  5. Fortalecer en el estudiante las habilidades para diferenciar las características de las funciones polinomicas de primer grado, de las funciones cuadráticas y de las funciones cubicas.

- ✓ Prerrequisitos:

1. Conocimientos de álgebra: Multiplicación de monomios, concepto de variable, representación de funciones como gráficas, formulas algebraicas y tablas.

2. Conocimientos de geometría: Superficie, áreas, volúmenes

3. Conocimientos sobre manejo de las unidades de longitud, área y volumen del Sistema Internacional de Medidas.

4. Contar son los siguientes recursos Tecnológicos: lápiz, regla, colores, esfero, cuaderno, papel milimetrado, curvígrafo, calculadora científica o graficadora, computador y software de geometría dinámica.

Rol del docente

El docente al momento de implementar esta actividad debe tener un rol activo es decir debe realizar las orientaciones necesarias para el desarrollo de la actividad haciendo énfasis en el trabajo con las tablas, el análisis de las expresiones matemáticas y la contextualización de la situación. Sin intervenir en la construcción de conjeturas del estudiante de tal manera que el estudiante pueda identificar las variaciones presentes en la situación, conjeturar y realizar el modelo mental del cambio de las diferentes cajas de la compañía.

**ACTIVIDAD INTRODUCTORIA 2**

PRIMERA SEMANA DE TRABAJO

Lo han contratado para trabajar como director de costos de producción en una carpintería de Bogotá que se dedica a la elaboración de diferentes tipos de cajas en madera, como la que se muestra en la figura.

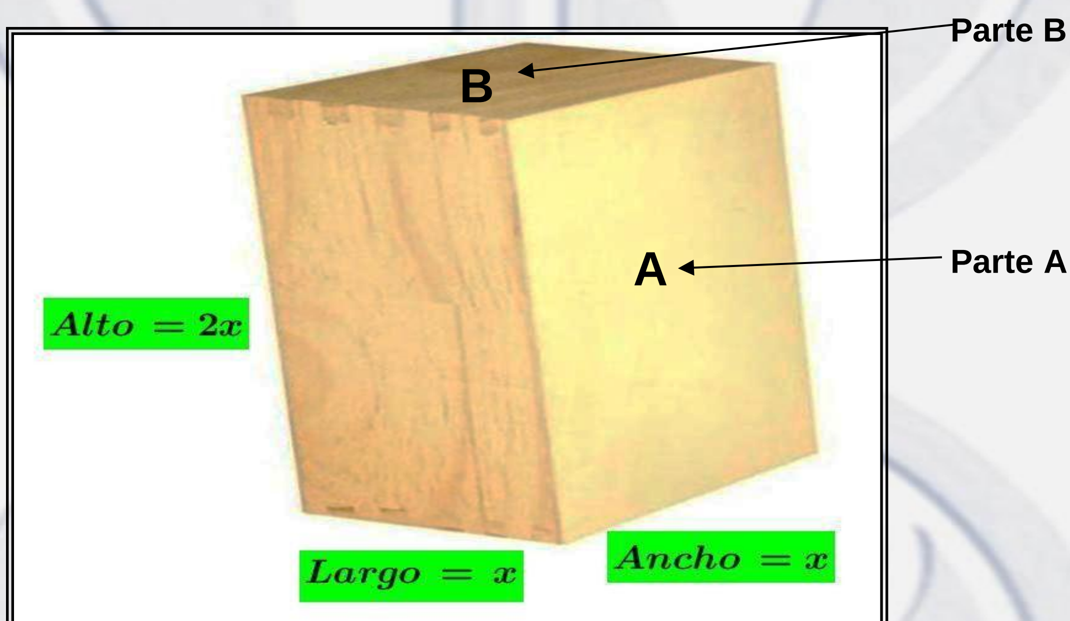



Figura 1. Modelo estándar de cajas

Su primera tarea es contestar al Gerente General las siguientes preguntas:

1. ¿Qué cantidad de madera se requiere para elaborar la caja?

2. ¿Qué volumen se alcanza con cada referencia?

Para desarrollar  la  tarea usted cuenta con la siguiente información:

1. Por razones técnicas y de mercadeo solo se fabrican las siguientes referencias o modelos de cajas,  que tiene en cuenta el largo de cada caja

| Ref.: | Largo $(x)$ | Ref.: | Largo $(x)$ |
|---|---|---|---|
| R01 | 6 cm | R06 | 11 cm |
| R02 | 7 cm | R07 | 12 cm |
| R03 | 8 cm | R08 | 13 cm |
| R04 | 9 cm | R09 | 14 cm |
| R05 | 10 cm | R10 | 15 cm |

2. Tanto el alto como el ancho se calculan de acuerdo a las siguientes formulas fórmulas:

$\boldsymbol{Alto = f(x) = 2x}$ y $\boldsymbol{Ancho = g(x) = x}$

3. Puede desarrollar sus cálculos a mano, en papel milimetrado y con calculadora o utilizar el computador de la compañía; pero al presentar el informe debe tener presente que un informe físico, que pueda ser rayado por usted y por el Gerente General, le permitirá comunicar mejor sus ideas y sus conclusiones.

4. Como usted es nuevo en la empresa, y quiere dar una muy buena impresión para  conservar su empleo, ha acudido al jefe del taller para que le oriente en su trabajo; y después de algunas horas le ha dado las siguientes recomendaciones.

- Construya tablas de datos y gráficas en donde relacione: El largo con el alto y el largo con el ancho; claro está que es mejor hacer las relaciones por separado.

- Construya tablas de datos y gráficas en donde relacione: El largo con el área de la parte $\boldsymbol{A}$ y el largo con el área de la parte $\boldsymbol{B}$

- Construya tablas de datos y gráficas en donde relacione: El largo con el volumen alcanzado por cada modelo.

- Si utiliza hojas milimetradas tenga en cuenta que es mejor utilizar hojas grandes si en sus cálculos observa valores para el largo de la caja mayores a $\boldsymbol{20cm}$.

Por otro lado el Gerente Financiero le ha solicitado, para la siguiente semana, que incluya en el informe un análisis respecto al cambio o variación tanto de las áreas como del volumen cuando varía el largo de cada modelo; y para ello establece con usted los siguientes acuerdos:

- La variación del largo se denotará por $\Delta\boldsymbol{x}$ (Delta $\boldsymbol{x}$) y es igual a la diferencia entre dos referencias consecutivas; $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x}$

  Por ejemplo: si $\boldsymbol{x_0}$ y $\boldsymbol{x_1}$ son dos referencias consecutivas; en donde $\boldsymbol{x_0}$ es la referencia inicial $(\mathbf{14\ cm.})$ y $\boldsymbol{x_1}$ es una referencia posterior $(\mathbf{15\ cm.})$; tenemos que

  $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{15cm.} - \boldsymbol{14cm.} = \boldsymbol{1cm}.$

- La relación entre la altura y el largo de la parte $\boldsymbol{A}$ se representa por la función: $\boldsymbol{f(x) = 2x}$

- El área de la parte $\boldsymbol{A}$ se puede representar por la función $\boldsymbol{h(x) = 2x^2}$

- El área de la parte $\boldsymbol{B}$ se puede representar por la función $\boldsymbol{j(x) = x^2}$

Después de la charla con el Gerente financiero y el jefe de taller quedaron las siguientes preguntas en el aire:

1. ¿A partir del largo se puede calcular el volumen de cada modelo de caja?

2. ¿Se puede encontrar una función $\boldsymbol{v(x)}$ que permita calcular el volumen de cada modelo de caja?

3. ¿Es posible establecer alguna relación entre las diferentes variaciones observadas, es decir, matemáticamente es posible hallar un vínculo entre la variación del largo, las variaciones de las áreas y las variaciones del volumen alcanzado por cada modelo?

4. ¿Es cierto o es falso afirmar que a medida que aumenta el largo también aumentan la altura, las áreas de las partes $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$ y el volumen?

5. Si es falso, ¿Por qué es falso?

6. Si la afirmación es verdadera ¿será posible cuantificar dicha relación con alguna operación matemática que indique cuanto varían, la atura, las áreas $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$, o el volumen cada vez que varia el largo de la caja?

Tiene dos semanas para trabajar en la solución de las preguntas de sus jefes.

Animo y mucha suerte.

### 4.1.3 Actividad de análisis covariacional de las funciones lineales

Duración: 1 sesión de clase

Planteada el análisis de las variaciones de una función línea cuando $\Delta \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ con valores de números enteros y con la siguiente terminología matemática:

$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{Variable\ Independiente}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Variable\ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ del\ cambio\ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

De igual manera se presentan en el instrumento tres tipos de registros de representación semiótica: el algebraico, el tabular (donde el estudiante debe completar la tabla) y el grafico (donde el estudiante debe realizar la representación graficas de las funciones de covariación (cambio de la variable dependiente) con el respectivo color) y responder los cuestionamientos planteados

- ✓ Objetivos:
  1. Mostrar al estudiante una situación matematica en donde se aplica el análisis variacional y covariacional para solucionarla.

  2. Familiarizar al estudiante con el análisis variacional y covariacional de funciones lineales.

  3. Mejorar la destreza del estudiante en el uso de registros de representación semiótica (algebraicos, tabulares y gráficos) para lograr una mejor comprensión de una situación dada.

  4. Brindar al estudiante las herramientas necesarias para representar funciones polinómicas con el programa GeoGebra o con calculadora graficadora.

- ✓ Prerrequisitos:

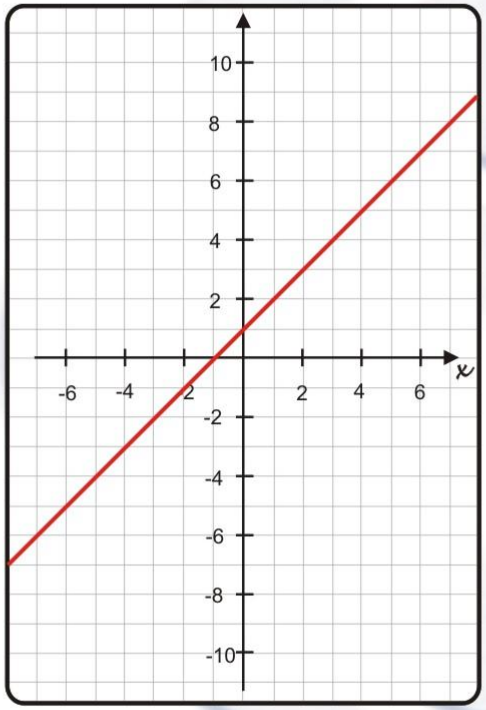
5. Conocimientos de álgebra: Multiplicación de monomios, concepto de variable, representación de funciones como gráficas, formulas algebraicas y tablas.
6. Representación grafica de puntos y funciones en el plano cartesiano.
7. Contar son los siguientes recursos Tecnológicos: lápiz, regla, colores, esfero, cuaderno, papel milimetrado, curvígrafo, calculadora científica o graficadora, computador y software de geometría dinámica.

Rol del docente

El docente al momento de implementar esta actividad debe tener un rol activo es decir debe realizar las orientaciones necesarias para el desarrollo de la actividad haciendo énfasis en el trabajo con las tablas, el análisis de las expresiones matemáticas y la contextualización de la situación. Sin intervenir en la construcción de conjeturas del estudiante de tal manera que el estudiante pueda identificar las variaciones presentes en la situación, conjeturar y realizar el análisis propuesto.

# Análisis Covariacional De Las Funciones Lineales

A partir de la función $f(x) = x+1$ y la gráfica dada completa la tabla propuesta:




| $x$ | $f(x)$ | $\Delta_1 f(x)$ | $\Delta_2 f(x)$ |
|---|---|---|---|
| -6 | -5 | | 0 |
| -5 | -4 | 1 | |
| -4 | -3 | 1 | |
| -3 | | | |
| -2 | | | |
| -1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | |
| 2 | 3 | | |
| 3 | 4 | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |

Si el cambio $\Delta_1 f(x)$ representa la variación de $f(x)$ cuando varía el valor de $x$ entonces:

1. realice las gráficas de $\Delta_1 f(x)$ y $\Delta_2 f(x)$ respectivamente con los colores propuestos.

2. A partir de los datos de la tabla puede determinar si la variación de $x$
   $\Delta x = (x_1 - x_2) =$

3. Las variaciones encontradas entre $\Delta_1 f(x)$ y $\Delta_2 f(x)$ guardan alguna relación entre sí?

4. ¿Es posible establecer una relación entre las gráficas de $\Delta_1 f(x)$ y $\Delta_2 f(x)$? describa con sus palabras esta relación.

$x$ → Variable independiente.

$f(x)$ → Variable dependiente.

$\Delta_1 f(x)$ → Cambio de la variable dependiente.

$\Delta_2 f(x)$ → Cambio del cambio de la variable dependiente.

### 4.1.4 Actividad de análisis de covariacional de las funciones cuadráticas

Duración: 1 sesión de clase

Planteada el análisis de las variaciones de una función cuadrática cuando $\Delta \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ con valores de números enteros y con la siguiente terminología matemática:

$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{Variable\ Independiente}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Variable\ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{1}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{2}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ del\ cambio\ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{3}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ del\ cambio\ del\ cambio\ \ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

De igual manera se presentan en el instrumento tres tipos de registros de representación semiótica: el algebraico, el tabular (donde el estudiante debe completar la tabla) y el grafico (donde el estudiante debe realizar la representación graficas de las funciones de covariación (cambio de la variable dependiente) con el respectivo color) y responder los cuestionamientos planteados

- ✓ Objetivos:

5. Mostrar al estudiante una situación matematica en donde se aplica el análisis variacional y covariacional para solucionarla.

6. Familiarizar al estudiante con el análisis variacional y covariacional de funciones lineales.

7. Mejorar la destreza del estudiante en el uso de registros de representación semiótica (algebraicos, tabulares y gráficos) para lograr una mejor comprensión de una situación dada.

8. Brindar al estudiante las herramientas necesarias para representar funciones polinómicas con el programa GeoGebra o con calculadora graficadora.

✓ Prerrequisitos:

8. Conocimientos de álgebra: Multiplicación de monomios, concepto de variable, representación de funciones como gráficas, formulas algebraicas y tablas.
9. Representación grafica de puntos y funciones en el plano cartesiano.

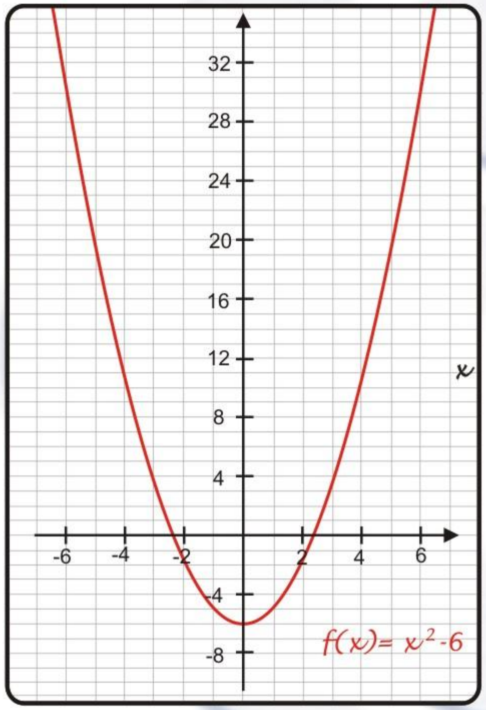
10. Contar son los siguientes recursos Tecnológicos: lápiz, regla, colores, esfero, cuaderno, papel milimetrado, curvígrafo, calculadora científica o graficadora, computador y software de geometría dinámica.

Rol del docente

El docente al momento de implementar esta actividad debe tener un rol activo es decir debe realizar las orientaciones necesarias para el desarrollo de la actividad haciendo énfasis en el trabajo con las tablas, el análisis de las expresiones matemáticas y la contextualización de la situación. Sin intervenir en la construcción de conjeturas del estudiante de tal manera que el estudiante pueda identificar las variaciones presentes en la situación, conjeturar y realizar el análisis propuesto.

# Análisis Covariacional de las Funciones Cuadráticas

A partir de la función $f(x)=x^2-6$ y la gráfica dada completa la tabla propuesta:




| $x$ | $f(x)$ | $\Delta_1 f(x)$ | $\Delta_2 f(x)$ | $\Delta_3 f(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| -6 | 30 | | | |
| -5 | 19 | 11 | | |
| -4 | 10 | 9 | 2 | |
| -3 | 3 | 7 | 2 | 0 |
| -2 | | | | |
| -1 | -5 | | | |
| 0 | -6 | 1 | | |
| 1 | -5 | -1 | 2 | |
| 2 | -2 | -3 | 2 | 0 |
| 3 | 3 | -5 | 2 | 0 |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |

$x$ Variable independiente.

$f(x)$ Variable dependiente.

$\Delta_1 f(x)$ Cambio de la variable dependiente.

$\Delta_2 f(x)$ Cambio del cambio de la variable dependiente.

$\Delta_3 f(x)$ Cambio del cambio del cambio de la variable dependiente.

Si el cambio $\Delta_1 f(x)$ representa la variación de $f(x)$ cuando varía el valor de $x$ entonces:

1. realice las gráficas de $\Delta_1 f(x)$ , $\Delta_2 f(x)$ y $\Delta_3 f(x)$ respectivamente con los colores propuestos.

2. A partir de los datos de la tabla puede determinar si la variación de $x$

   $\Delta x=(x_1 - x_2)=$

3. Las variaciones encontradas entre $\Delta_1 f(x)$ , $\Delta_2 f(x)$ y $\Delta_3 f(x)$ guardan alguna relación entre sí?

4. ¿Es posible establecer una relación entre las gráficas de $\Delta_1 f(x)$ , $\Delta_2 f(x)$ y $\Delta_3 f(x)$ ? describa con sus palabras esta relación.

5. ¿Es posible establecer la relación de variación siguiente?. Justifique su respuesta.

Dirigido por: Orlando Aya Corredor 2012

### 4.1.5 **Actividad de análisis covariacional de las funciones cubicas**

Duración: 1 sesión de clase

Planteada el análisis de las variaciones de una función cubica cuando $\Delta \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ con valores de números enteros y con la siguiente terminología matemática:

$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{Variable\ Independiente}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Variable\ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{1}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{2}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ del\ cambio\ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{3}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cambio\ del\ cambio\ del\ cambio\ \ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

$\Delta_{\mathbf{4}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Cuarto\ cambio\ \ de\ la\ Variable\ \ Dependiente}$

De igual manera se presentan en el instrumento tres tipos de registros de representación semiótica: el algebraico, el tabular (donde el estudiante debe completar la tabla) y el grafico (donde el estudiante debe realizar la representación graficas de las funciones de covariación (cambio de la variable dependiente) con el respectivo color) y responder los cuestionamientos planteados

- ✓ Objetivos:
  1. Mostrar al estudiante una situación matematica en donde se aplica el análisis variacional y covariacional para solucionarla.
  2. Familiarizar al estudiante con el análisis variacional y covariacional de funciones lineales.
  3. Mejorar la destreza del estudiante en el uso de registros de representación semiótica (algebraicos, tabulares y gráficos) para lograr una mejor comprensión de una situación dada.
  4. Brindar al estudiante las herramientas necesarias para representar funciones polinómicas con el programa GeoGebra o con calculadora graficadora.

5. Analizar el comportamiento de las variaciones de la función cubica y relacionar este comportamiento con el de las funciones lineales y cuadrático con sus variaciones realizadas en las dos actividades anteriores.

- ✓ Prerrequisitos:

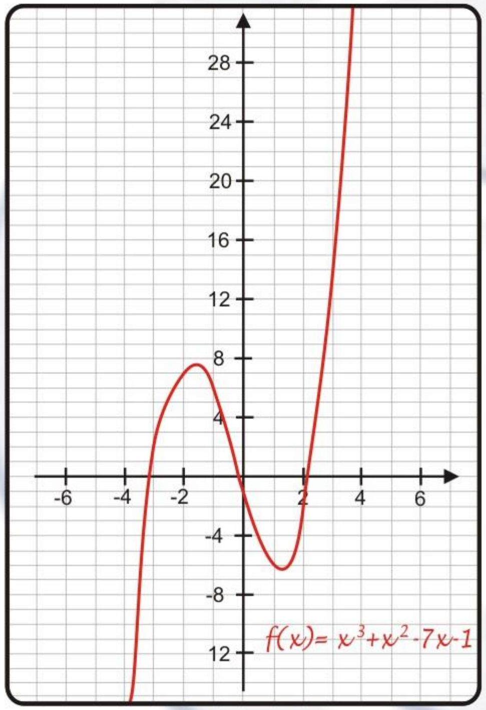
11. Conocimientos de álgebra: Multiplicación de monomios, concepto de variable, representación de funciones como gráficas, formulas algebraicas y tablas.
12. Representación grafica de puntos y funciones en el plano cartesiano.
13. Contar son los siguientes recursos Tecnológicos: lápiz, regla, colores, esfero, cuaderno, papel milimetrado, curvígrafo, calculadora científica o graficadora, computador y software de geometría dinámica.

Rol del docente

El docente al momento de implementar esta actividad debe tener un rol activo es decir debe realizar las orientaciones necesarias para el desarrollo de la actividad haciendo énfasis en el trabajo con las tablas, el análisis de las expresiones matemáticas y la contextualización de la situación. Sin intervenir en la construcción de conjeturas del estudiante de tal manera que el estudiante pueda identificar las variaciones presentes en la situación, conjeturar y realizar el análisis propuesto. Se debe relacionar las tre actividades evidenciando los comportamiento comunes de las tres actividades que están asociados a funciones polinómicas de diferentes grados, estableciendo comportamientos comunes e infiriendo reglas de generalidad del comportamiento de ls variaciones de una función polinómica de grado n.

# Análisis Covariacional De Las Funciones Cubicas

A partir de la función $f(x)= x^3+x^2-7x-1$ y la gráfica dada completa la tabla propuesta:




| $x$ | $f(x)$ | $\Delta_1 f(x)$ | $\Delta_2 f(x)$ | $\Delta_3 f(x)$ | $\Delta_4 f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -6 | -139 | | | | |
| -5 | -66 | 73 | | | |
| -4 | -21 | 45 | -28 | | |
| -3 | 2 | 23 | -22 | 6 | |
| -2 | 9 | 7 | -16 | 6 | 0 |
| -1 | 6 | | | | |
| 0 | -1 | -7 | | | |
| 1 | -6 | -5 | 2 | | |
| 2 | -3 | 3 | 8 | 6 | |
| 3 | 14 | 17 | 14 | 6 | 0 |
| 4 | 51 | 37 | 20 | 6 | 0 |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |

Si el cambio $\Delta_1 f(x)$ representa la variación de $f(x)$ cuando varía el valor de $x$ entonces:

1. realice las gráficas de $\Delta_1 f(x)$, $\Delta_2 f(x)$, $\Delta_3 f(x)$ y $\Delta_4 f(x)$ respectivamente con los colores propuestos.

2. A partir de los datos de la tabla puede determinar si la variación de $x$
$\Delta x = (x_1 - x_2) =$

3. Las variaciones encontradas entre $\Delta_1 f(x)$, $\Delta_2 f(x)$, $\Delta_3 f(x)$ y $\Delta_4 f(x)$ guardan alguna relación entre sí?

4. ¿Es posible establecer una relación entre las gráficas de $\Delta_1 f(x)$, $\Delta_2 f(x)$ y $\Delta_3 f(x)$ ? describa con sus palabras esta relación.

5. ¿Es posible establecer la relación de variación siguiente?. Justifique su respuesta.

$x$ → Variable independiente.
$f(x)$ → Variable dependiente.
$\Delta_1 f(x)$ → Cambio de la variable dependiente.
$\Delta_2 f(x)$ → Cambio del cambio de la variable dependiente.
$\Delta_3 f(x)$ → Cambio del cambio del cambio de la variable dependiente.
$\Delta_4 f(x)$ → Cuarto cambio de la variable dependiente.

Especialización en didáctila de la matemática 2012

diseñado por: Héctor Barreto, Juan Pablo Caro

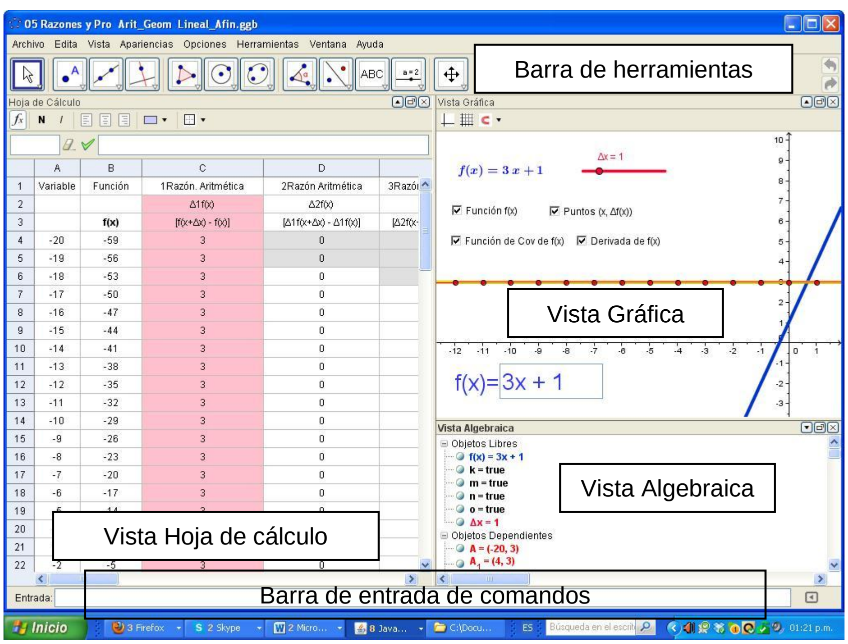
Dirigido por: Orlando Aya Corredor 2012

### 4.2. ACTIVIDADES CON GEÓGEBRA

GeoGebra es un software de matemáticas que permite la interacción dinámica entre el usuario y las representaciones algebraicas, geométricas y tabulares de objetos matemáticos cómo funciones lineales, afines, cuadráticas, cubicas, trigonométricas, polares, áreas bajo la curva, sumatorias superiores e inferiores, vectores, cónicas, derivadas, integrales, polígonos, rectas, segmentos de rectas, etc.

#### 4.2.1 Introducción básica a GeoGebra

A los estudiantes se les enseña a moverse dentro del entorno de GeoGebra a través de diversas actividades, orientadas a la representación de diferentes funciones y a manipular sus parámetros; por ejemplo, se les indica que utilicen la barra de comandos para introducir la función $\boldsymbol{f(x) = 3x + 1}$, que cambien su color, el tipo de línea, su grosor, etc.; después se les solicita que creen dos deslizadores para los parámetros $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ e introduzcan la función $\boldsymbol{g(x) = mx + b}$, se orienta al grupo a explorar lo que ocurre cuando varían los valores de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$.



A partir de una función de la forma $\boldsymbol{g(x) = mx + b}$ se dan las orientaciones necesarias para construir su representación tabular, y que exploren lo que ocurre con la visualización grafica y tabular al manipular los deslizadores que afectan a la función.

### 4.2.2 Descripción de las actividades desarrolladas con GeoGebra

Después de las orientaciones generales sobre el programa GeoGebra se inician las actividades interactivas en una sala de informática, en el siguiente orden:

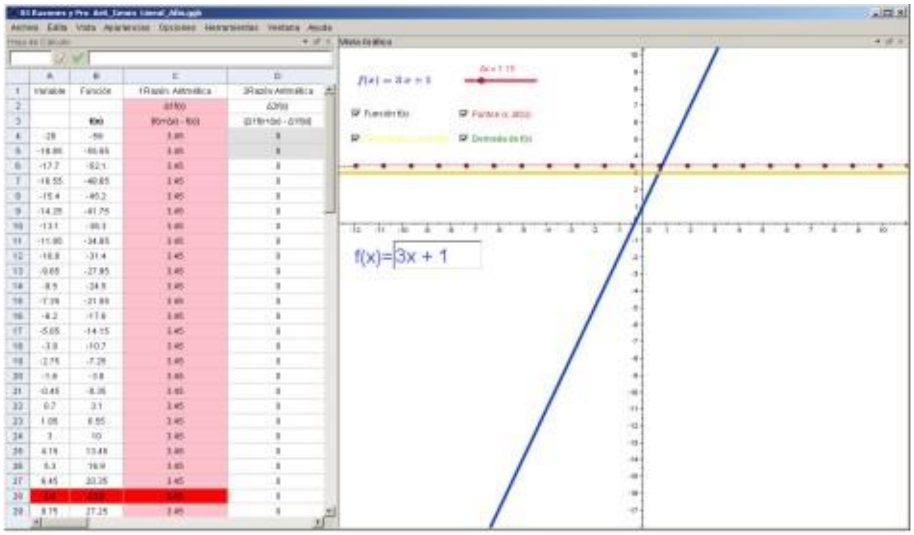
1. Análisis de las variaciones y covariacional de una función afín
2. Análisis de las variaciones y covariacional de una función cuadrática
3. Análisis de las variaciones y covariacional de una función cubica
4. Análisis de las variaciones y covariacional de una función de cuarto grado
5. Análisis de las variaciones y covariacional de una función $\boldsymbol{Sen}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{x})$

Se parte de lo más simple utilizando los datos de las actividades 4.1.3 a 4.1.5, es decir se retoma la información consignada en los formatos:

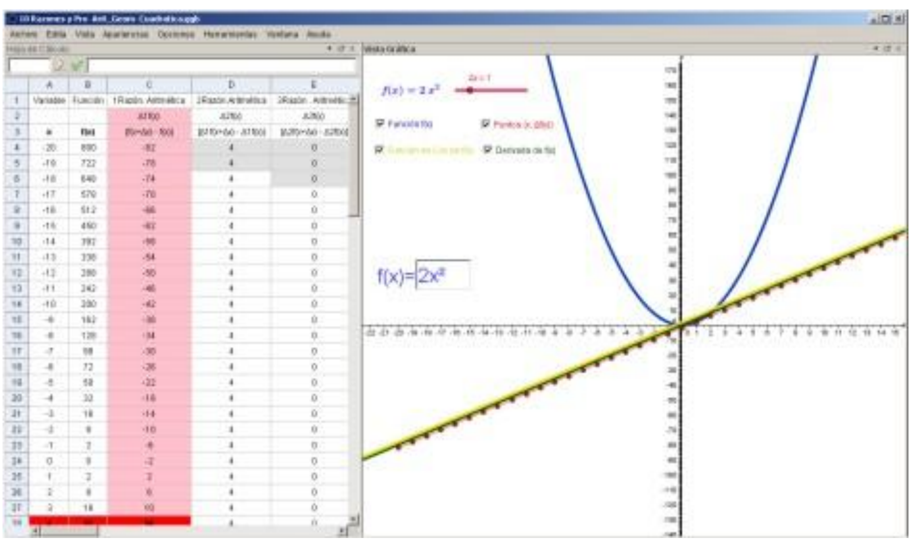
- Actividad covariaciones de las funciones lineales,
- Actividad covariaciones de las funciones cuadráticas y
- Actividad covariaciones de las funciones cubicas

El objetivo en cada una de ellas es representar cada función desde su representación algebraica, tabular y grafica para poder analizar tanto la variación de la variable independiente ($\Delta\boldsymbol{x}$), la variación de la variable dependiente ($\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$), y la covarición de la función dada por la expresión $\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta\boldsymbol{x}}$

El producto final esperado son los applets los siguientes:

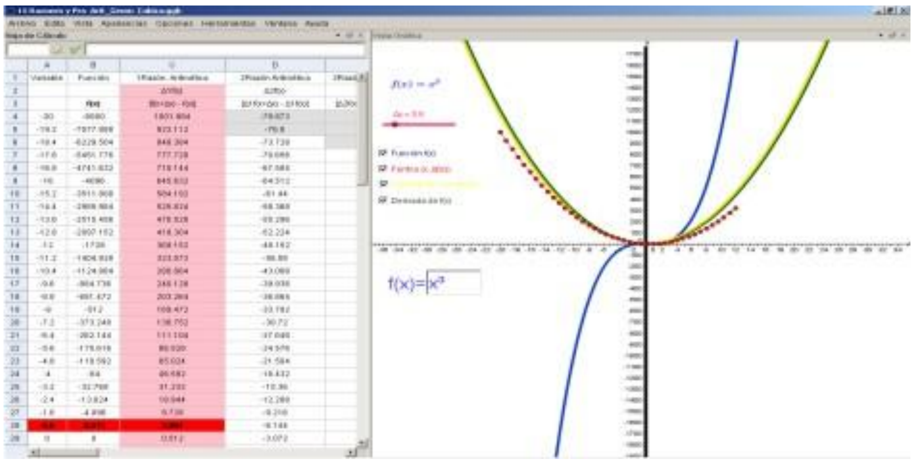



En este Applet los se analiza la variación, la covariación de la función lineal $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ cuando $\Delta\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ , de la misma manera se puede visualizar la función derivada $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x})$, la función de covariación y el comportamiento de la representación tabular. El estudiante puede mover el deslizador (herramienta que permite variar un valor en un intervalo determinado) variando $\Delta\boldsymbol{x}$ para ver el comportamiento de las variaciones de la función.

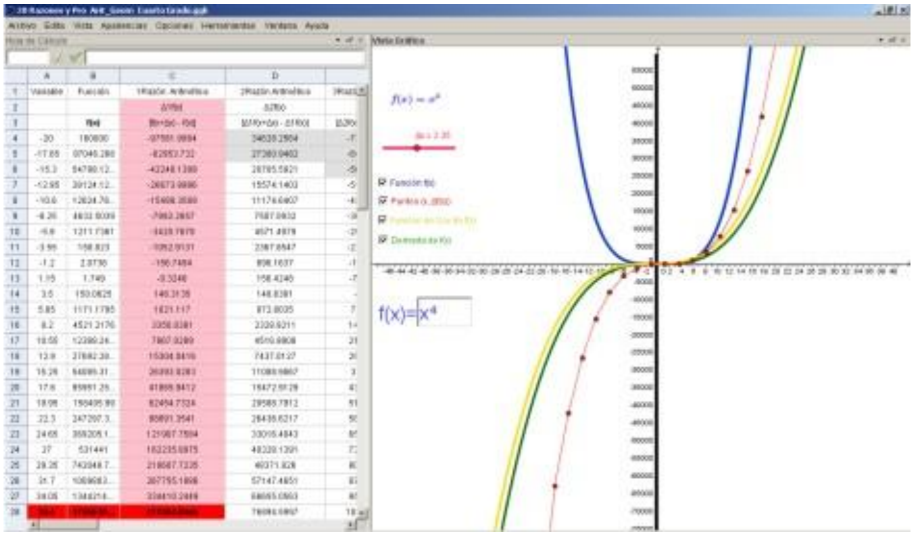



En este Applet los se analiza la variación, la covariación de la función cuadratica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ cuando $\Delta\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ , de la misma manera se puede visualizar la función derivada

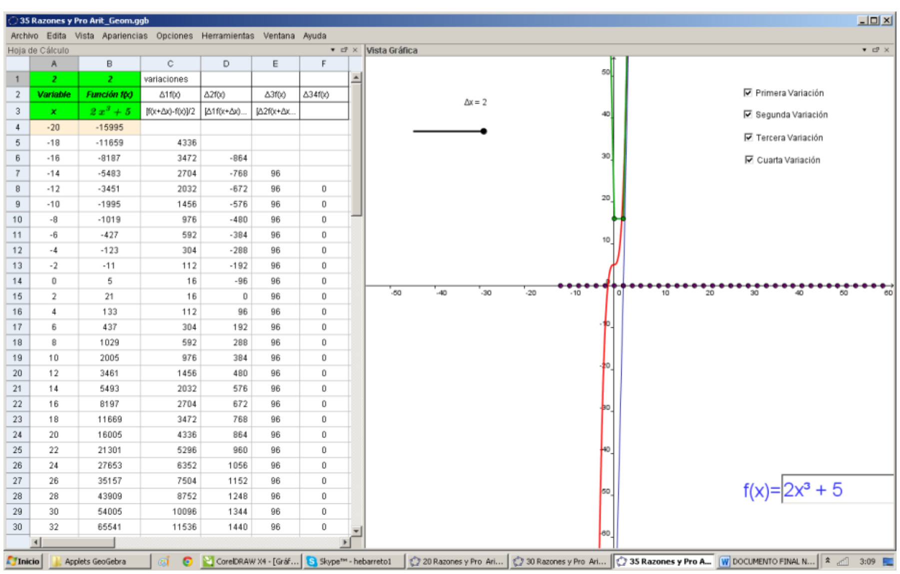
$f^l(x)$, las funciones de covariaciones y las transformaciones que sufren los valeres de la tabla asociado a puntos de las funciones $f(x)$ El estudiante puede mover el deslizador (herramienta que permite variar un valor en un intervalo determinado) variando $\Delta x$ para ver el comportamiento de las variaciones de la función.



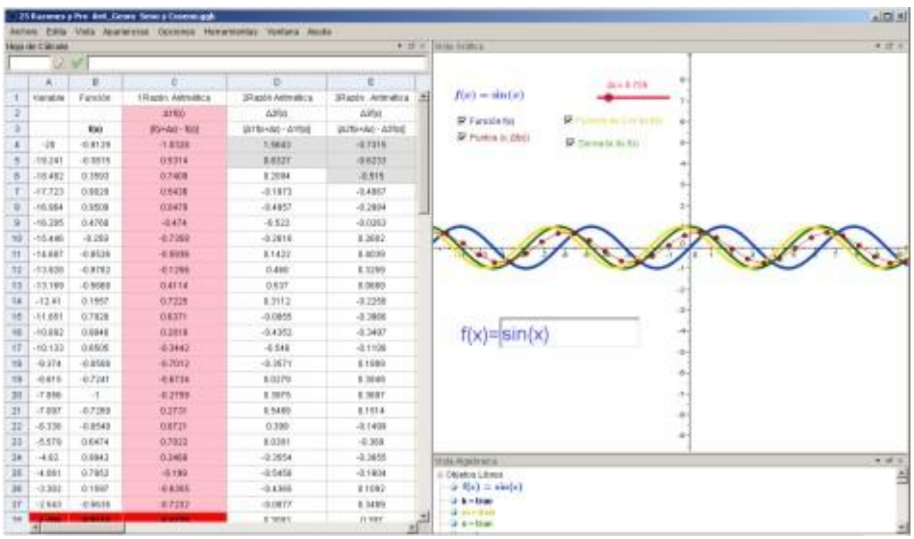
En este Applet los se analiza la variación, la covariación de la función cubica $f(x)$ cuando $\Delta x = 1$, de la misma manera se puede visualizar la función derivada $f^l(x)$, las funciones de covariaciones y las transformaciones que sufren los valeres de la tabla asociado a puntos de las funciones $f(x)$ El estudiante puede mover el deslizador (herramienta que permite variar un valor en un intervalo determinado) variando $\Delta x$ para ver el comportamiento de las variaciones de la función. A partir de esta herramienta el estudiante puede realizar conjeturas asociadas al grado de la función y el comportamiento de las variaciones y la cantidad de estas.



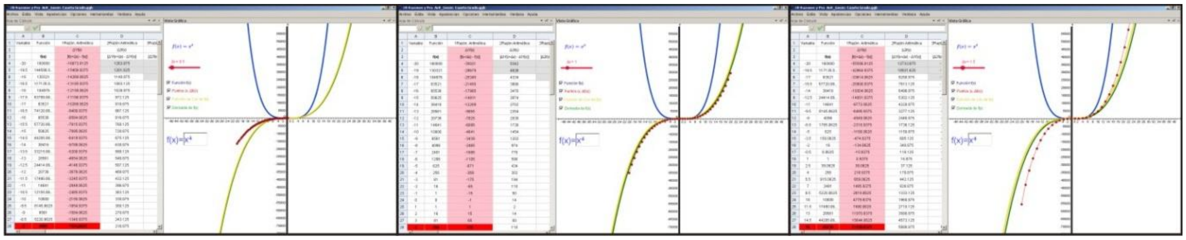

En este Applet los se analiza la variación, la covariación de la función polinomica de grado cuatro $f(x)$ cuando $\Delta x = 1$, de la misma manera se puede visualizar la función derivada $f^{l}(x)$, las funciones de covariaciones y las transformaciones que sufren los valeres de la tabla asociado a puntos de las funciones $f(x)$ El estudiante puede mover el deslizador (herramienta que permite variar un valor en un intervalo determinado) variando $\Delta x$ para ver el comportamiento de las variaciones de la función. A partir de esta herramienta el estudiante puede realizar conjeturas asociadas al grado de la función y el comportamiento de las variaciones y la cantidad de estas.



En este Applet I se analiza la variación, la covariación de la funciones polinómicas ya que se puede introducir cualquier función polinómicas hasta grado cuatro, donde el estudiante puede analizar el comportamiento de las covariaciones cuando $\Delta x$ varia en el intervalo $(\mathbf{0.001}\,,\mathbf{2})$. De la misma manera se pueden visualizar las covariaciones y las transformaciones que sufren los valeres de la tabla asociado a puntos de las funciones $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ El estudiante puede mover el deslizador (herramienta que permite variar un valor en un intervalo determinado) variando $\Delta \boldsymbol{x}$ para ver el comportamiento de las variaciones de la función. A partir de esta herramienta el estudiante puede realizar conjeturas asociadas al grado de la función y el comportamiento de las variaciones y la cantidad de estas.




En este Applet los se analiza la variación, la covariación de la función trigonométrica $\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$ cuando $\Delta \boldsymbol{x}$, varia de la misma manera se puede visualizar la función derivada $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x})$, las funciones de covariaciones y las transformaciones que sufren los valeres de la tabla asociado a puntos de las funciones $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$



En este imagen se muestra las transformaciones que se evidencian en las covariaciones de la funcion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ cuando se varia el valor de $\Delta\boldsymbol{x}$.

## 7. CONCLUSIONES

1. En el proceso de construcción del concepto de derivada deben tenerse en cuenta diferentes aspectos; desde los disciplinar, desde los procesos de enseñanza-aprendizaje y desde su desarrollo histórico; ya que la forma como se aborda ó se presenta en el aula y la notación que se emplea para simbolizarlo, pueden dar lugar a conceptualizaciones diferentes y por tanto a confusiones.

2. El análisis de los conceptos relacionados con la variación y en particular la covariación entre las variables de una función en general, ofrecen elementos teóricos importantes para aproximar el concepto de derivada sin recurrir de manera explícita al proceso del paso al límite. El definir la derivada como se hizo en la propuesta facilita ver a la derivada como un concepto de carácter no estático y por lo tanto permite describir la variación dinámica de la función que se esté analizando, que en el contexto del trabajo fueron las funciones polinomiales hasta cuarto grado, las funciones trigonométricas seno y coseno y la función exponencial. Este análisis puede ser extendido según unas intencionalidades didácticas y curriculares específicas.

3. La propuesta ofrece una alternativa a la construcción conceptual de la derivada desde una perspectiva no convencional. En ésta no se hizo un uso directo del paso al limite ni desde la definición teórica ni desde la notación, lo que podría traer una dificultad para el abordaje del estudio de la derivada pero que desde esta propuesta se puede hacer desde el contexto numérico y gráfico sin privilegiar lo meramente algebráico.

4. Los CAS (Computer Algebra System) son una poderosa herramienta que permiten aprovechar al máximo los procesos de visualización para alcanzar niveles importantes de objetivación de conceptos matemáticos. En esta propuesta se utilizan las representaciones verbales, gráfica y tabular. En particular la actividad presentada en los applets permite la visualización de las relaciones de variación y covariación de las variables independiente y dependiente de una función con su derivada

5. El desarrollo de la propuesta se potencia en los estudiantes la manipulación de procesos numéricos disminuyendo el trabajo algebraico que uno de los tópicos fuertes del trabajo convencional en la conceptualización de la derivada; de esta misma manera el trabajo por análisis de covariaciones de las variables de las funciones potencia la conceptualización de tópicos del calculo de una manera visible y eficaz.

6. Es posible que al momento de aplicar la propuesta sea permitente ajustar las actividades o rediseñarlas de acuerdo a las necesidades particulares de cada grupo en los cuales se desarrolle, de la misma manera esta metodología de trabajo en la cual los estudiantes transitan en diferentes registros semióticos de representación lo cual fortalece el proceso de conceptualización de los diversos tópicos matemáticos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Apostol T.M. (1976). Análisis matemático de Apóstol. Editorial Reverte. Madrid.

Apostol T. M. (1985). Calculus volumen 1. Editorial Reverte. Madrid.

Boyer, C. (1986). Historia de las matemáticas. Editorial Universidad.

Cantoral R. y Montiel G. Visualización y pensamiento matemático, (2003). Recuperado de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(Cantoral-Montiel2003)-ALME16-.pdf

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. Actas Latinoamerica de Matemática Educativa. 17, págs. 1-9. México D.F.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, Journal for Research in Mathematics Education, 33 (5), 352-378.

Collette, J.P. (1986). "Historia de las Matemáticas". Editorial Siglo XXI. México.

Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación Variacional a la derivada. Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero. México D.F

Dubinsky, Schwingendorf & Mathews (1995). Calculus, Concepts & Computers. Second Editión. Mc Graw Hill. USA.

Duval R. (1999). SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO, Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de Educación Matemática. Colombia.

Hitt F.(1994). Teacher' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. Focus Learning Problems in Mathematics. Fall Edition, 1994, Volume 16, Number 4. Center For teaching / Learning of Mathematics.

Jain B. y Sheng A. An Exploration of the Approximation of Derivative Functions via Finite Differences. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal *8(2)*. Recuperado de http://arxiv.org/pdf/1006.1620v1.pdf

Larson & Hostetler (2001). Precalculus. Fifth Edition. Houghton Miflin. USA.

Lozano, Y. (2011). Desarrollo del Concepto de Derivada sin la Noción de Límite. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1998) Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas (1a. ed.) Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2002). Proyecto "Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de Matemáticas de la educación media en Colombia. Conferencia Congreso internacional Tecnologías Computacionales. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2006) Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas (1a. ed.) Bogotá

Planchart, O. (2002). La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función. Tesis Doctoral en Especialidad de Matemática Educativa. Universidad del Estado de Morelos.

Posada, F., y Villa, J. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia. Medellín.

Ruiz, L. (1998). La Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico. Universidad de Jaén. Servicio de Publicaciones.

Ruiz, Á. (2002). Historia y filosofía de las matemáticas. Editorial EUNED, Madrid.

Sánchez, L. (2009). El concepto de función matemática entre los docentes a través de representaciones sociales. Tesis Doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Instituto Politécnico Nacional. México D.F.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity, and proof. En D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 495-511). New York-

Vasco Carlos E. (2009) Seminario de Matemática Educativa Fundamentos de la Matemática Universitaria. Conferencia de sobre t*res ideas fuertes del cálculo, Escuela Colombiana de Ingeniería. Bogotá Colombia*

Vrancken, S., Engler, A. y Müller D. (2009). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. Actas de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática. Sociedad Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires. 129 - 138. Recuperado de:

http://www.soarem.org.ar/Documentos/Actas%20de%20la%20VII%20Carem.pdf

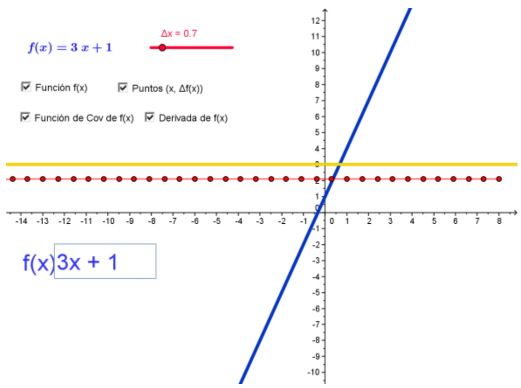
Zubieta, G., Moreno, L. (1996). Sobre el número y la Variación. En: Didáctica: Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamericana. México D.F.

## TABLA DE FIGURAS Y TABLAS

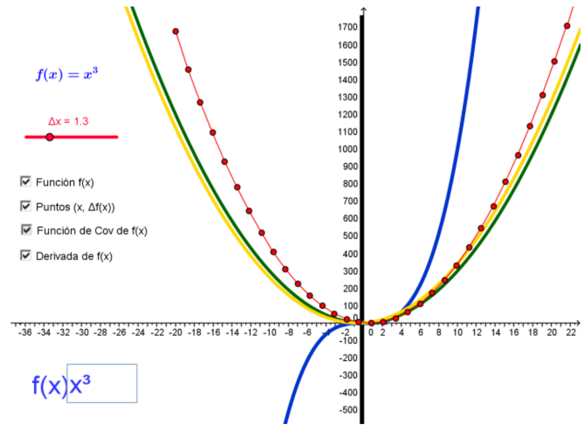


## TABLA DE ANEXOS

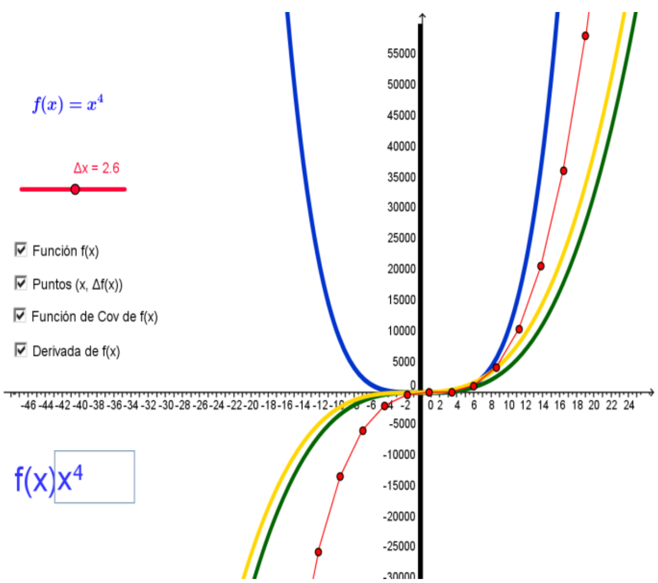
# ANEXOS



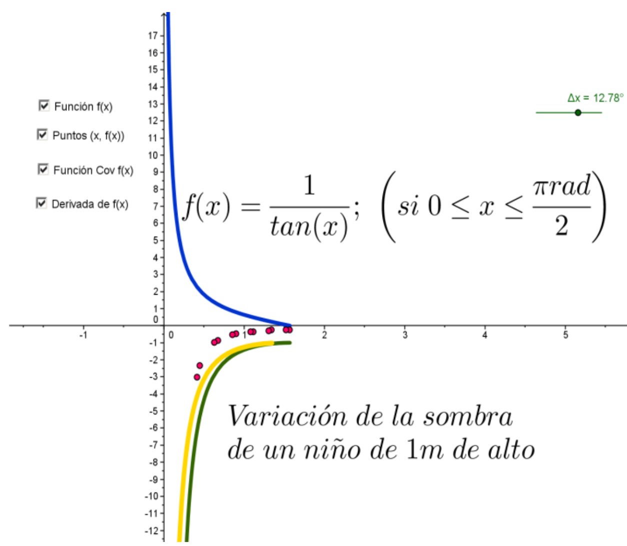
$f(x) = 3\,x + 1$
Δx = 0.7
Función f(x)
Puntos (x, Δf(x))
Función de Cov de f(x)
Derivada de f(x)
f(x) 3x + 1

$f(x) = x^3$
Δx = 1.3
Función f(x)
Puntos (x, Δf(x))
Función de Cov de f(x)
Derivada de f(x)
f(x) x³

$f(x) = x^4$
Δx = 2.6
Función f(x)
Puntos (x, Δf(x))
Función de Cov de f(x)
Derivada de f(x)
f(x) x⁴

Función f(x)
Puntos (x, f(x))
Función Cov f(x)
Derivada de f(x)
Δx = 12.78°
$f(x) = \frac{1}{tan(x)};\ \left(si\ 0 \leq x \leq \frac{\pi rad}{2}\right)$
Variación de la sombra
de un niño de 1m de alto