Resolución de problemas geométricos: estrategias heurísticas novedosas para un problema variacional

Ana María Palacios Rojas, Sandra Liceth Solarte Alvear

Universidad del Valle, Santiago de Cali- Colombia
anyta-0306@hotmail.com, sandra-lsa@hotmail.com

Resumen

Nuestra propuesta de charla corta tiene como propósito promover la discusión sobre la importancia de que los profesores elaboren tareas matemáticas en un contexto de pensamiento geométrico; que haga que sus alumnos apliquen diferentes estrategias heurísticas en la resolución de un problema geométrico específico. Así se propone presentar aspectos relativos al proceso de resolución de problemas geométricos, en particular la pertinencia de trabajar en distintas estrategias heurísticas y mostrar algunas de las más usadas en la resolución de problemas geométricos, posteriormente mostrar la importancia de estas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría a nivel de la formación básica secundaria.

Introducción

Esta comunicación breve surge en el interior del curso de práctica profesional y en el contexto del Laboratorio de Matemáticas (LabMatUV) del Programa Licenciatura en educación básica, énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Aborda la resolución de problemas que es considerada desde hace décadas una parte esencial de la educación matemática y se reconoce como un campo abierto de estudio para aportar ideas en el sentido de que se reconoce que hay métodos, procedimientos y actitudes que favorecen el éxito de la mayoría de los alumnos de una clase en la resolución de problemas. En efecto, algunas investigaciones dan cuenta que el proceso de enseñanza y el proceso de resolución de problemas geométricos demanda mucho tiempo y que en ocasiones los resultados tardan en llegar. En este sentido, se señala la importancia de llevar a cabo situaciones que ofrezcan alternativas para que los profesores puedan ayudar a sus estudiantes en la adquisición y consolidación de herramientas para la resolución de problemas y mejorar las condiciones de tiempo y continuidad para trabajar este enfoque en las clases de geometría.

Aunque no existe un consenso definitivo sobre el asunto, son numerosos estudios los que confirman que la enseñanza de pautas, estrategias y técnicas consigue más y mejores resolutores que el trabajo excesivo de resolución de problemas o la mera práctica espontánea de resolver problemas que aparecen en los libros de texto, que la mayoría de las veces suelen presentar ejercicios en lugar de problemas; tareas estereotipadas que por lo general favorecen la rutina y la práctica reiterada de algoritmos y fórmulas.

Se considera así, que la habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere resolviendo muchos problemas, sino habituándose y tomando partido por un amplio espectro de decisiones y técnicas de resolución, conocidas como *estrategias heurísticas,* aunado al esfuerzo de los profesores para ayudar a sus estudiantes a ganar *confianza* para abordar y resolver problemas.

Marco Teórico

En el campo de la didáctica de las matemáticas se considera que los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamientos que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes. Así se logra resaltar que la introducción de estos procedimientos en la clase y su aplicación por parte de los alumnos propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas para los cuales no existen procedimientos algorítmicos y el desarrollo del pensamiento lógico. La implementación de las estrategias heurísticas, nace como la necesidad de buscar métodos concretos que den solución a problemas matemáticos o geométricos. Cabe traer a colación la estrategia del trabajo hacia atrás o método analítico, para hacer un buen uso de esta estrategia es necesario sacar la conclusión de las conjeturas del problema, suponiendo que estas son verdaderas. Si se llegase a una conclusión falsa, entonces evidentemente la conjetura también será falsa. Si, se llega a una conclusión verdadera, entonces la conjetura será probamente verdadera. Y para corroborar lo anterior se debe invertir el proceso, del trabajo hacia atrás, e intentar deducir la conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura inicialmente planteada y dudosa. Y el proceso es exitoso entonces, la conjetura se habrá probado indudablemente y el problema será solucionado; precisamos también que en cada una de esas conjeturas y conclusiones que se obtienen son el resultado de incluir en las mismas otras estrategias heurísticos como lo son; empezar por el final, elegir la incógnita, expresar relaciones en forma algebraica, plantear ecuaciones, hacer un esquema, reducir el problema a otros conocidos, particularizar y generalizar e imaginar el problema resuelto. Las anteriores estrategias están enfocadas a la solución de problemas geométricos, los cuales implican una reflexión previa a llegar a su solución pues, es importante caracterizar su paso a paso para hallar el proceso correcto que lleva al desenlace. Así pues, para resolver algún problema geométrico es importante tener conceptos, propiedades y procedimientos geométricos y matemáticos claros entre otras cosas. Ya que, remitirse a la tarea de resolver alguna problemática de este tipo puede resultar todo un reto interesante y divertido que requiere de cierto tiempo en particular.

Por tanto, hacer uso de algunas de estas estrategias, permite el desarrollo de ciertas habilidades puesto que, un problema es más que un enunciado que requiere de alguna respuesta en particular. De esta manera, se trata de hallar una idea que lleve a una solución concreta y correcta, aunque en ocasiones se pueda involucrar más de una estrategia. Reducir el problema a otro ya conocido, hacer un esquema, particularizar y generalizar son la forma de configurar el plan de solución; mientras que imaginar el problema resuelto es darle una mirada hacia atrás a ese problema.

Finalmente, algunos investigadores sugieren abordar la compleja relación entre el desarrollo de una alfabetización heurística y los cambios en los logros geométricos de los estudiantes en distintos niveles de escolaridad. Por alfabetización heurística se refieren a: Una capacidad individual para usar vocabulario heurístico en el discurso de la resolución de problemas y para aproximarse escolásticamente a la resolución de problemas matemáticos usando una variedad de heurísticas.

En este tipo de aproximaciones, se reconoce una hipótesis subyacente, reportada en variados estudios, a saber, que los experimentos de clase que tratan con la enseñanza de estrategias tienen efectos significativamente pequeños o moderados, en términos de medidas estandarizadas (Hembree, 1992; Schoenfeld, 1992).

Desde un aporte matemático se resalta la importancia de pensar el sentido de las estrategias heurísticas de la siguiente manera según   Koichu, Berman como:

- Reglas generales o recomendaciones para los resolutores de problemas (Larson, 1983; Polya, 1945/1973; Perkins, 1981; Schoenfeld, 1985)
- Unidades útiles en la descripción y análisis de las formas de pensamiento matemático (De Bono, 1984; Goldin, 1998; Newell & Simon, 1972) y
- Herramientas cognitivas / metacognitivas en la real resolución de problemas matemáticos (De Bono, 1984; Goldin, 1998; Martínez, 1998; Newell & Simon, 1972; Verschaffel, 1999).

Metodología

A partir de una situación en un contexto de pensamiento geométrico, se ilustrara la complejidad de las estrategias heurísticas utilizadas en la resolución de un problema geométrico específico, también se ofrecen ejemplos contextualizados sobre la eventual integración de las mismas en el trabajo en el aula de geometría, en conexión con estrategias propias de problemas matemáticos en el campo de la aritmética y el algebra.

Situación

Escoja un punto P en el segmento de línea AB y construya dos cuadrados: un lado de un cuadrado es AP y un lado del otro cuadrado es PB. ¿Dónde se debe ubicar al punto P para satisfacer la condición que la suma de las áreas de los dos cuadrados sea mínima?

Los cuadrados, pueden tener cualquier configuración[10].

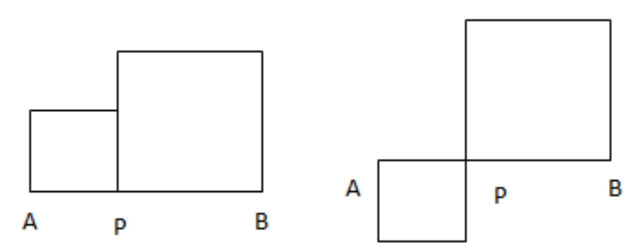

Figura. 1 Posible configuración

El problema puede ser resuelto utilizando cuatro estrategias heurísticas diferentes. Las cuales son:

1. *Considerar el problema resuelto*; a sumiendo una solución para el mismo.

Como el problema pide el mínimo de la suma de las áreas de dos cuadrados; entonces se puede considerar que los dos lados del cuadrado se extienden en un bosquejo para formar un cuadrado de longitud AB en cada lado, se forman cuatro regiones:

Los lados del cuadrado $(AP)^2$ y $(PB)^2$

Cada rectángulo AP y PB

El área total de las cuatro regiones es AB^2

Por lo tanto, la suma mínima de los cuadrados $(AP)^2$ y $(PB)^2$ ocurre cuando los dos rectángulos tienen área máxima. Pero, un rectángulo tiene área máxima cuando es un cuadrado o cuando AP = PB.

10 Recuperado en: http://iwilson.coe.uga.edu/EMT725/twosmosquares/TwoSquares.html; Traduccion y adaptacion: Octavio Augusto Pabon, LabMatUV

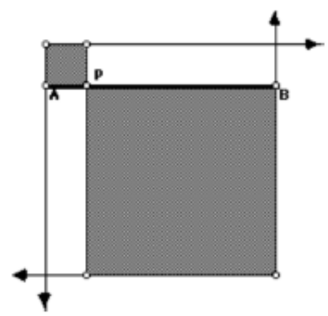

Figura 2. Solución estrategia 1

2. *Reducir el problema a otro conocido*; determinado relaciones algebraicas y haciendo variaciones sobre las aproximaciones establecidas.

Las variaciones en la aproximación anterior, incluyen las siguientes:

Sean AB = x y PB = y

Entonces deseamos minimizar $x^2 + y^2$

Por la desigualdad de la media aritmética y la media geométrica $x^2 + y^2 \geq 2xy$, con igualdad si y solo si $x = y$.

Por lo tanto, la suma de las áreas de los dos cuadrados es siempre mayor que las áreas combinadas de los dos rectángulos, excepto cuando $x = y$. así el área mínima ocurre cuando P es el punto medio.

3. *Hacer un esquema;* recurriendo a software geométricos, para lograr formular el área de los cuadrados como función de una única variable.

Se formula el área como función de única variable.

Sean AP $= x$ y PB = AB – x

El área es: $f(x) = x^2 + (AB - x)^2 = 2x^2 - 2(AB)x + (AB)^2$.

Esto es una parábola como el grafico siguiente

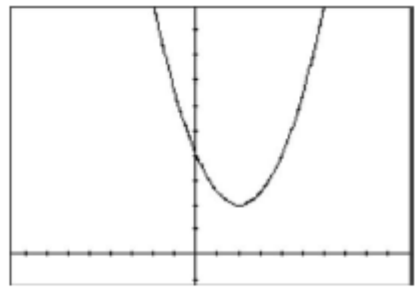

Figura 3. Solución estrategia 3

Donde el vértice esta en (AB/2, AB/2)

4. *Hacer una tabla;* en la cual se particulariza la longitud del segmento AB y se registra una secuencia de los valores para la suma de los cuadrados en la medida que P se coloca en los puntos del segmento de línea.

Sea AB = 10 y x = AP. Entonces la tabla siguiente se puede generar rápidamente.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 - x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
suma	100	82	68	58	52	50	52	58	68	82	100

Figura 4. Solución estrategia 4

Esto proporciona una buena intuición de la ubicación del punto P, este está en el punto medio de AB.

Cabe resaltar que el anterior problema, hace parte de los denominados *problemas no rutinarios*, en los cuales el resolutor se debe dar a la tarea de poner en juego la creatividad, imaginación y originalidad del proceso de resolución del mismo, dado que en este tipo de problemas es muy difícil de identificar de forma directa el modelo de solución, pues de ahí la necesidad de recurrir a la utilización de una variedad de estrategias heurísticas como; hacer conjeturas, explorar patrones y argumentar.

Nivel al que va dirigido: profesores de Educación Básica, estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

Conclusiones

Aunque no existe un consenso definitivo sobre el asunto, son numerosos estudios los que confirman que la enseñanza de pautas, estrategias y técnicas consigue más y mejores resolutores que el trabajo excesivo de resolución de problemas o la mera práctica espontánea de resolver problemas que aparecen en los libros de texto, que la mayoría de las veces suelen presentar ejercicios en lugar de problemas, tareas estereotipadas que por lo general favorecen la rutina y la práctica reiterada de algoritmos y fórmulas.

De manera análoga las orientaciones profesionales sugieren la creación de ambientes para que los estudiantes puedan explorar ideas geométricas. Así, los futuros profesores deberían ser formados conforme a las expectativas de enseñanza explorando, elaborando conjeturas, comunicándose y razonando.

No obstante, la utilización de las estrategias heurísticas empleadas en la resolución del problema propuesto, si bien fueron consideradas como necesarias, no fueron consideradas como condiciones suficientes para que los estudiantes adquirieran el conocimiento didáctico necesario para el eficaz desenvolvimiento en las aulas durante una clase de geometría, pero esto garantiza que el estudiante adquiere la habilidad para resolver problemas habituándose y tomando partido de una amplia visión en la toma de decisiones y técnicas de resolución, es decir utilizando *estrategias heurística.*

Referencias

Blanco, L. J. La resolución de problemas en primaria. Una propuesta para la formación inicial del profesorado. EN: Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos. Editorial Hergué.

Koichu, Boris; berman, Abraham; Moore Michael (2006) Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. p. 3

Nunokawa Kazuhiko (2000) Heuristic strategies and problem situations. EN: Resolución de problemas en los albores del siglo XXI. José Carillo Yánez, Luis Carlos Contreras. Editorial Hergué

Santos Trigo L. M. (1996) Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. Educación Matemática, 8 (2). México.

Schoenfeld, A. (1985) Mathematical problem solving. Orlando Academic Press