CONTINUAR INVESTIGANDO TRAS LA TESIS DOCTORAL. RÉPLICAS A "construyendo una identidad" y "del cero hasta más allá del infinito"

Bernardo Gómez Alfonso

Universidad de Valencia

INTRODUCCIÓN

Compartimos esta audiencia dos investigadores jóvenes y dos sénior, de este contraste de generaciones es obligado preguntarse: ¿qué podemos decirnos unos a otros en relación con el tema objeto de este seminario?

La intervención de los ponentes que me anteceden ha dado cuenta de su respuesta. Para organizar la mía, tomo el referente de Freudenthal en *Problemas mayores en educación matemática* (1981), y lo hago como hizo él, formulando lo que para mí son preguntas principales para un joven investigador en educación matemática.

PRIMERA PREGUNTA

Mi primera pregunta se refiere a las aportaciones. Para situar la pregunta me referiré a la normalización de la investigación española en educación matemática. Corrían los años del final de la Dictadura Franquista, y empezaba el proceso de transición política. En esos años la investigación en Didáctica de las Matemáticas era incipiente, y estaba en gran parte en manos de los movimientos de renovación pedagógica, a menudo influidos por el debate político y el deseo colectivo de trabajar por la renovación educativa, política y social. Consecuencia de la fuerza iniciática de este movimiento colectivo fue la creación de sociedades de profesores, revistas profesionales y la renombrada colección Síntesis: Matemáticas cultura y aprendizaje (1987).

Nuevas leyes educativas propiciaron un cambio en el panorama investigador. Se reformó el modelo de la formación del profesorado (LRU, 1984); se institucionalizó el Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática y se crearon los Departamentos homónimos (1986) que desarrollaron programas de doctorado específicos. Con esto se normalizó la investigación en Didáctica de la Matemática dentro del sistema universitario, facilitando el acceso a fuentes de financiación Nacionales e internacionales de I+ D+i, y la presencia y colaboración en congresos, publicaciones y estudios internacionales. En este panorama normalizador de la investigación en didáctica de la Matemática merece mención especial, la constitución de la SEIEM, como foro de comunicación e impulso para la investigación en educación matemática, y que a fecha de hoy logra su madurez con la reciente aparición de su revista oficial AIEM.

En gran medida gracias a estos logros se ha constituido una importante comunidad de investigadores, con proyección y visibilidad nacional e internacional. Los didactas de las matemáticas españoles cuentan hoy con un clima más favorable para su actividad investigadora que hace no tantos años. Aunque, este clima es el resultado de los esfuerzos de una generación que se renueva y de otra que empuja con gran vitalidad, los peligros están al acecho. El deterioro de las condiciones de trabajo, la escasez de medios y los obstáculos en la carrera profesional, está propiciando un cambio en los objetivos: Acreditación e impacto son los nuevos sacramentos.

De esta digresión se sigue mi primera pregunta: ¿Qué aportan o que deberían aportar nuestros jóvenes investigadores en relación con la educación matemática?

Gómez, B. (2013). Réplicas a "Construyendo una identidad" y "Del cero hasta más allá del infinito". En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 109-115). Bilbao: SEIEM.

SEGUNDA PREGUNTA

Mi segunda pregunta se dirige hacia lo importante. Para introducir la pregunta he elegido un ejemplo del lúcido texto de Kline (1978): *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?*

> "La maestra pregunta:
>
> «¿Por qué es 2+3=3+2?»
>
> Los estudiantes responden decididamente:
>
> «¿Por qué ambos son iguales a 5?»
>
> «No -reprueba la profesora-. La respuesta correcta es: por qué se cumple la propiedad conmutativa de la suma» …
>
> Los padres, ansiosos por conocer los progresos hechos por sus niños, también les preguntan. Un padre le pregunta a su hijo de ocho años: «¿Cuántas son 5+3??» Por toda respuesta obtiene que 5+3=3+5, por la propiedad conmutativa". (p. 6)

Con este ejemplo, doy pie a mi segunda pregunta: ¿Qué debería ser lo importante para un joven investigador en educación matemática?

TERCERA PREGUNTA

Mi tercera pregunta se dirige a la ruta para ser experto. Para introducirla recurro a un extracto del libro *Matemática moderna y nueva pedagogía,* de Stephen White (1973).

"Me propongo darte alguna idea de las etapas que ordinariamente hay que recorrer para llegar a la categoría de experto jugador de bridge. El tema, después de todo, sigue siendo aquí la educación…. Se empieza con un vivo deseo de aprender a jugar muy bien al bridge. Este afán puede venir de una o de varias fuentes: … de alguna necesidad social, real o imaginaria… en la mayoría de los casos, el aprendiz empieza procurándose algunos libros sobre el bridge y estudiándoselos. Libros de iniciación los hay a docenas. El interesado elige uno que le recomienda algún jugador de bridge conocido suyo, y se pone a aprendérselo … Como los expertos todavía no quieren jugar con él, en esta fase se tendrá que buscar parejas y contrincantes entre los jugadores cuya habilidad sea más o menos parecida a la suya. Así y todo, va adquiriendo un poco de soltura, y, si siente verdadera afición por el juego, empieza a tomar nota de sus aciertos y sus fallos y a reflexionar sobre las causas de unos y otros… Esta etapa del proceso de aprendizaje se hace muy cuesta arriba y requiere trabajar de firme, es preciso superarla si se quiere llegar a ser un experto… El aprendiz conversa, discute y contrasta sus opiniones dentro del círculo de sus compañeros de juego. La mayoría de ellos saben de bridge no más que él, pero, al verse forzado a defender sus puntos de vista y a analizar los de los otros, va aprendiendo poco a poco. Es esta una extraña serie de contrastes y verificaciones, por las que un grupo logra elevar rápidamente el nivel de sus conocimientos (p. 121-133).

Con este texto, formulo mi tercera pregunta: ¿Cómo se llega o cómo se debería llegar a ser experto investigador en educación matemática?

"CONSTRUYENDO UNA IDENTIDAD…"

P.1. En el texto de Javier: "Construyendo una identidad…", lo que parece más importante, lo que va por delante, lo que viene en el primer apartado es el relato de su pertenencia a unas CP (Comunidad de Práctica) y CdI (Comunidad de investigación), cuya actividad se describe bajo el modelo general de la TAD (Teoría antropológica de la didáctico), y específicamente en el marco de los PIs (Praxeologías, de *Praxis*: Práctica, en oposición a teoría o teórica, y *Logos*: razón: principio racional del universo. RAE) que son una manifestación de un plan de investigación descompuesto en cuatro componentes: tareas, técnicas, tecnologías y teorías. No queda claro dónde se ubican otras componentes de la investigación didáctica como, por ejemplo, las de comunicación, las de cognición, o las de representación.

Especial importancia atribuye al uso del patrón heurístico de desarrollo de problemas didácticos P_δ, dado por el esquema: $P_0 \oplus P_1 \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_3 \hookrightarrow P_\delta$. Mediante este diagrama, diferencia entre problema docente (P_0) y problema didáctico (P_δ). El P_0 es pre-científico, por lo que requiere ser reformulado para generar un verdadero problema de investigación, a través de las dimensiones epistemológicas (P_1), económicas (P_2) y ecológicas (P_3), para llegar a ser un problema didáctico.

Con este bagaje el ponente deja clara su intención, señala su prioridad, e identifica la hermandad a la que se adscribe, esto es la terna formada por correligionarios, creencias y votos compartidos (traducción coloquial de lo que es denomina: Comunidad, empresa y compromiso), y como tal reservada a los iniciados, cuyo riesgo es verse aislados y renunciar a lo que está fuera de su mundo. Sentimiento que se ve reforzado por las referencias que utiliza para sustentar su documento.

P.2. En el siguiente apartado, tras la declaración de principios introductoria, el investigador da cuenta de lo que aporta en su trabajo de tesis doctoral. Tras plantearla en términos de congruencia módulo praxeología + problema docente, señala que su problema docente es la enseñanza de la proporcionalidad, pero nos hurta su razón de ser al no dar cuenta de por qué es un problema docente, ni cómo lo caracteriza; pero eso sí, lo sitúa ligándolo a las dos primeras de las cuatro preguntas iniciáticas: el qué, el cómo, el cuándo y el porqué de su enseñanza.

Como hipótesis adelanta su opinión de las causas del problema docente que ha elegido, señalando que procede del fenómeno de encierro o aislamiento en sí misma de la proporcionalidad, no solo en la investigación sino en su tratamiento escolar. Sustenta esta hipótesis de trabajo en el predominio de la dimensión cognitiva en la investigación precedente y en que está enfocada en el razonamiento proporcional. Esto es muy cuestionable, ya que es fruto de una mirada sesgada a los aportes de la investigación focalizada en la psicología cognitiva influida por el papel central que Piaget asignó a al razonamiento proporcional en el razonamiento formal (Hinhelder y Piaget, 1958). Es cierto que la psicología cognitiva es insuficiente para dar cuenta de los problemas educativos asociados a la proporcionalidad, por eso llama la atención que el ponente no mencione otras aportaciones más centradas en lo matemático, muchas de ellas presentes en la literatura en español (e.g., los trabajos de Freudhental, 1983 y 2001, Pluvinage y Dupuis 1981; Fiol y Fortuny, 1990; Vergnaud, 1981, 1983).

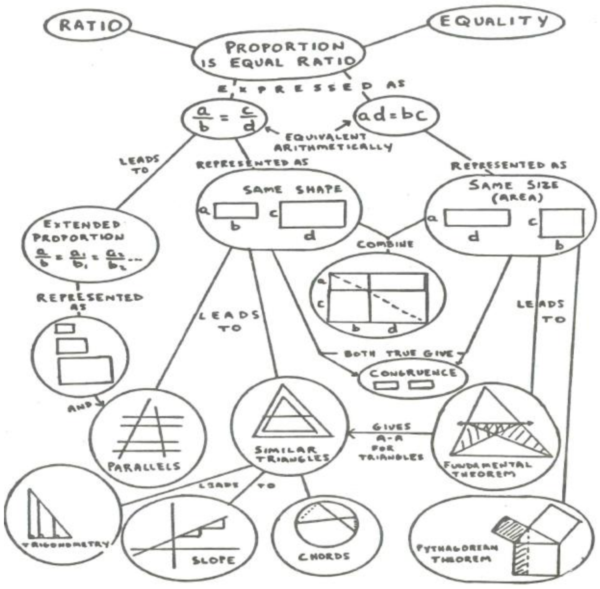
Su idea de partida es la existencia un modelo epistemológico de la proporcionalidad, que se desprende de los libros de texto y del diseño de la proporcionalidad. En sí mismo esto es un acto de fe, dado que no lo caracteriza, y no tiene en cuenta la variedad de ritos y los cambios que ha sufrido la enseñanza de la proporcionalidad a lo largo de los diferentes planes de estudio y la influencia de las inercias del pasado y de las culturas locales, en particular la terna matemáticas tradicionales, matemáticas modernas y matemáticas concretas (Pluvinage y Dupuis, 1981; Gómez, 2006).

Por otra parte, el fenómeno del aislamiento no parece que sea algo más que un lugar común, producto de un modelo de enseñanza diseñado para dar respuesta a las necesidades de la escuela graduada, donde las matemáticas no se organizan por ejes temáticos, sino por niveles, bloques temáticos y “ramas” de las matemáticas.

Pero, he aquí que el investigador parece caer en su propia red, ya que aísla su experimento sobre la enseñanza de la proporcionalidad a un par de cursos: 4º de la ESO y 1º de Bachillerato, perdiendo el referente de lo que ocurre antes y después de esos cursos, y en su proyección en otros ámbitos del curriculum (no solo de la matemática sino de las ciencias) donde está presente, como por ejemplo, en el cambio de unidades, porcentajes, escalas, mapas y maquetas, interpolación de medios en las progresiones, problemas de «clásicos» de regla de tres, de acciones simultáneas, teorema de Thales, funciones trigonométricas, semejanza de figuras, medición de distancias inaccesibles, pendiente, probabilidad, todos ellos modelados mediante la función lineal, etc.

Por añadidura, también aísla la proporcionalidad, al separarla de sus prerrequisitos: la co-variación simultánea y el resto de elementos del campo conceptual multiplicativo: multiplicación, división, fracciones, razón y proporción, linealidad y multilinealidad (Vergnaud, 1983).

También se aísla de sus problemas fundamentales: el tránsito de la razón interna a la razón externa (Freudenthal, 1983 y 2001, Fernández y Gómez, 2007), el paso del método aritmético al cartesiano en la linealidad (Gómez, 2007) y la interrelación entre la variedad de relaciones y significados que unifica la proporcionalidad en su diferentes niveles de complejidad, resaltando como fluyen (o se siguen) unas de otros como se muestra, por ejemplo, en el esquema de Solomon para la geometría.



Esquema conceptual de Solomon (1987)

P.3 En el tercer apartado del documento se nos da a conocer el camino que ha seguido el investigador para llegar a ser considerado un experto. Siguiendo la lógica del jugador de Bridge en esta fase se busca jugadores cuya habilidad sea más o menos parecida a la suya, donde al verse forzado a defender sus puntos de vista y a analizar los de los otros, va aprendiendo poco a poco, logrando elevar rápidamente el nivel de sus conocimientos.

Aquí, se produce el mestizaje y la tensión por el conflicto de ideologías. Su recorrido por el LEMA, COMPASS, PRIMAS, enriquece y diversifica su identidad y deja entrever el coste que le supone en términos de alejamiento de su hermandad inicial BAHUJAMA. En este sentido es significativo el giro copernicano dado a su problema docente inicial hacia lo cognitivo (p. 15) e incluso hacia lo no matemático: creencias y ciencias experimentales.

No queda si en este giro el ponente mantiene su posicionamiento en la modelización y aplicaciones, pero en cualquier caso le falta por definir cuál es su posición. Ya que, al igual de lo que ocurre con la “resolución de problemas” (ver Schroeder y Lester, 1989), el propósito de incorporar la modelización puede ser para enseñar *sobre* modelización, *para* modelizar, o *vía* modelización, según que lo que se desee es que los estudiantes aprendan estrategias de modelización, que apliquen los conocimientos matemáticos ya aprendidos a la modelización, o que usen la modelización para aprender nuevos conocimientos matemáticos. Aquí, la experiencia de lo que ha pasado en la resolución de problemas nos enseña mucho.

"DEL CERO HASTA MÁS ALLÁ DEL INFINITO…"

P.1 En el texto de Miguel: "Del cero hasta más allá del infinito…", lo primero, su punto de partida, es un problema de enseñanza (no es ni docente, ni didáctico en el sentido de Javier, ni tampoco es de aprendizaje). El ponente, identifica su problema de enseñanza desde la reflexión sobre la propia práctica: el descontento que le produce el modelo de formación de profesores en su país, y decide constituirse en un agente de cambio del sistema educativo. Pero para esta empresa hace falta saber qué es lo que está mal y porqué, de lo cual no dice nada.

Coincido en que la reflexión sobre la propia práctica es importante, pero no me queda claro si es un buen punto de partida, porque si no se reflexiona sobre el propio aprendizaje: lo que uno sabe y es o no es capaz de hacer, y lo que uno está dispuesto a hacer, la reflexión puede quedar en el vacío.

A continuación, el ponente, hace una reflexión sobre su propio proceso de elaboración de tesis doctoral, señalando que hay una analogía o paralelismo con el proceso de resolución de problemas. Incluso señala que hacer la tesis hace ser un mejor resolutor de problemas (¿a qué clase de problemas se refiere con esta afirmación?). Qué duda cabe que hacer la tesis ayuda a mejorar el conocimiento de cómo se hace una tesis doctoral, pero no está tan claro que ayude a ser mejor resolutor de problemas aritméticos, o algebraicos, pongo por ejemplo. Sería muy enriquecedor que el ponente nos iluminara acerca de cómo las heurísticas de resolución de problemas matemáticos son análogas a las de la resolución de una tesis doctoral.

P.2

Sitúa su trabajo en la línea de investigación conocida como desarrollo y conocimiento profesional del profesor. Parafraseando a Mendoza en "el tocador de señoras", se propone "tirar un tiro", pero su ángulo de tiro es muy elevado ya que su objetivo es formar profesionales activos, críticos, reflexivos y conocedores de los contenidos y temas que han de enseñar. Esto está muy bien, pero ¿cómo se logra? Su propuesta es indagar en las socorridas "dimensiones y subdimensiones" del conocimiento profesional descritas por Ball y su colegas (Ball et al. 2008). Pero al poner el ojo en un imaginario conocimiento ideal del profesor parece prescindir de lo que ha sido siempre un referente seguro: el conocimiento del profesor ideal imaginario; es decir, del profesor que acredita las mejores prácticas.

El desarrollo de instrumentos para la caracterización del "Conocimiento matemático para la enseñanza" (CME en español, MKT en inglés) descritas por el equipo de la U. de Michigan (D. Ball, H. Hill, H. Bass y otros, a partir de las ideas de Shulman) es una línea de investigación de interés y actualidad para la Didáctica de la Matemática. Sin embargo, conviene no perder de vista que al igual que ocurrió con las ideas de Piaget, de esta caracterización no se sigue una propuesta directamente aplicable a la mejora de la enseñanza y formación de profesores. Lo que está por ver es cómo estas categorías iluminan el problema de investigación.

Tampoco está claro que la especificación de las categorías del CME (MKT) sobre una muestra de conveniencia que se reduce a dos personas, de las que no se establece claramente cuál es su conocimiento y preparación matemática, pueda servir para enriquecer la formación del profesorado en general y que esto se sustancie en aportaciones que le den proyección o utilidad formativa práctica o teórica.

Por otra parte, la especificidad de los distintos conocimientos matemáticos puede poner en cuestión la validez de las categorías generales que se pretenden utilizar para situaciones particulares, en la medida en que el elemento diferenciador de las investigaciones en Educación Matemática debe o no ser el análisis profundo y riguroso de los conceptos matemáticos sobre los que se investiga. En este sentido confunde la referencia al trabajo del grupo de Ball, dado que este se sustenta en grandes muestras de población y en cuestionarios muy bien planificados acerca de la calidad matemática en la instrucción.

La reflexión es una constante en el discurso del ponente que considera que se maximiza cuando los más expertos orientan a los menos expertos, en un proceso que es análogo tanto para el investigador en formación como para el profesor en formación. En este caso, no es que sea un proceso análogo sino que es el mismo proceso, ya que el profesor en formación y el investigador en formación son la misma persona. Claro que entonces, ¿qué papel juega el libro de texto?, ¿el diseño curricular?, ¿el conocimiento de la matemáticas?, ¿el conocimiento de las matemáticas del curriculum?, etc., en la formación de un profesor, si ésta descansa principalmente en la reflexión del profesor que es a la vez investigador que oye y aprende de la reflexión en colaboración con otros más expertos.

P.3 En la parte final del documento Miguel da cuenta de su trayectoria una vez finalizada la tesis. Aquí proyecta hacia el futuro el trabajo previo desarrollado en el doctorado, continuando con el "grupo de Huelva", y enlazando con elementos que trabajan directamente con el grupo de la Universidad de Michigan. ¿Será más de lo mismo, o será una nueva perspectiva sobre bases más sólidas?

CIERRE

Nunca en España ha habido tanta gente dedicada a la investigación en educación matemática, y nunca se ha escrito e investigado tanto sobre sus problemas educativos, sean docentes o didácticos. La mayor parte de los investigadores están casi obligados a concentrarse en áreas limitadas, para mantenerse al corriente de las creaciones de otra gente y producir resultados propios, haciendo que la actividad investigadora actual sea de gran especialización.

Lo que podría estar mal en el actual plan de trabajo no es tanto la especialización de los problemas que se tratan como el aislamiento de los abordajes a esos problemas entre sí, y de sus producciones, dando la imagen de que lo que dicen unos investigadores sobre un mismo problema no tiene nada que ver con lo que dicen otros sobre el mismo problema.

La Didáctica de las matemáticas corre el peligro de cerrarse sobre sí misma, de alimentarse de sí misma, y aunque es muy probable, que la mayor parte de la investigación que se hace contribuya al avance de la disciplina, ha llegado el momento de preguntarse si siguiendo por este camino se está generando conocimiento útil para mejorar la educación matemática, y si hoy están nuestros maestros, profesores y alumnos más y mejor preparados para enseñar y aprender matemáticas que ayer.

Con esta reflexión cierro mi intervención, deseando fervientemente mucho éxito a nuestros jóvenes investigadores.

Referencias

Fernández, A. (2001). Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria. (Tesis doctoral). Universitat de València, España.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Fernández, A., y Gómez, B. (2007). Una organización de tareas de razón en semejanza para el diseño de un modelo de enseñanza. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, Mª T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 173-180). Tenerife.

Fernández, A., y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 5, núm. 2.

Fiol, M.L., y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis nº 20.

Freudhental, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 133-150.

Freudhental, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudhental, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. Traducción Luis Puig. México: Cinvestav I.P.N. Departamento de Matemática Educativa.

Inhelder B., y Piaget J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. N.Y.: Basic Books.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de los libros de antiguos: el caso de los problemas de compañías. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *2* (3), 19-29.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: el caso del perrito. En E. Castro & J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano* (pp. 237–257). Granada: Editorial universitaria de Granada.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Eds.), *José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 47-69). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Gómez B. (2007). Problems of a linear kind: from Vallejo to Peacock. In Demetra Pitta–Pantazi & George Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth CERME 5* (pp. 882-891). Larnaca, Cyprus. ERME. Department of Education. University of Cyprus.

Kline, M. (1978). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Madrid. Siglo XXI. (1ª ed. 1973).

Pluvinage, F., y Dupuis, C. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *2*(2), 165-212.

Solomon, A. (1987). Proportion: Interrelations and meaning in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 7*(1), 14-22.

Schroeder, T.L., y Lester, F.K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton (Ed.), *New directions for Elementary School Mathematics, 1989 Yearbook of the NCTM* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127-174). N. Y.: Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la realité. Problémes de l’enseignement des mathématiques à l’école élémentaire*. 4ª Ed. Berne-Frankfurt-New York-Paris. Peter Lang. 1981 (Edición en español de Trillas)

White, S. (1973). *Matemática y nueva pedagogía*. Barcelona: Promoción cultural.