

CONOCIMIENTO DE GEOMETRÍA ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Specialized Geometry Knowledge for teaching in primary education

Francisco Clemente y Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio fue identificar características del conocimiento de geometría especializado en estudiantes para maestro en relación con el razonamiento configuracional. Los resultados indican la existencia de dos factores claves en el proceso de razonamiento configuracional en los estudiantes para maestro: la identificación de una sub-configuración relevante, y la manera en la que se organizan las proposiciones geométricas a partir de las aprehensiones discursivas. En particular, y en relación con este segundo factor, se han identificado dos momentos en el uso de las aprehensiones discursivas cuando se asocian hechos geométricos a la configuración inicial y cuando se infiere nueva información al relacionar conocimientos geométricos conocidos con hechos asociados a la configuración geométrica.

Palabras clave: *Conocimiento de geometría para enseñar, conocimiento de geometría especializado, conocimiento del profesor, razonamiento configuracional*

Abstract

The goal of this study is to identify characteristics of student primary teachers' specialized geometry knowledge for teaching concerning to configurational reasoning. Findings indicate that exist two key factors in the student primary teachers' configurational reasoning process: the identification of a relevant sub-configuration and the way in which geometrical facts is organized from discursive apprehensions. Specifically, in relation the former factor we have identified two moments in of discursive apprehensions when the geometrical facts are links to the figure and when student primary teachers relate several geometrical facts to infer new information

Keywords: *Geometry knowledge for teaching, specialized geometry knowledge, teacher knowledge, configurational reasoning*

CONOCIMIENTO DE GEOMETRIA ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA

La investigación presentada aquí adopta la perspectiva de Duval (1995, 1999) en relación con el aprendizaje de la geometría en el contexto del conocimiento de geometría especializado para la enseñanza-MKT (Ball et al., 2008). En particular, el papel que desempeñan los procesos de visualización en el reconocimiento de propiedades, definiciones y relaciones en las figuras geométricas y en los procesos de justificación. Duval (1995) y Fischbein (1993) subrayan el papel heurístico de las figuras en el aprendizaje y el desarrollo de los procesos de visualizar, justificar y construir en los contextos geométricos. En relación con el papel heurístico de las figuras en la resolución de problemas de geometría, Duval (1995) subraya diferentes tipos de aprehensiones para comprender cómo funciona la visualización en el aprendizaje. En particular, Duval caracteriza la aprehensión operativa como la modificación de una figura para considerar sub-configuraciones.

Esto se puede hacer añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, o manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre sub-configuraciones particulares. Por otra parte, denomina *aprehensión discursiva* a reconocer en las configuraciones geométricas propiedades y definiciones, o asociar configuraciones o sub-configuraciones con afirmaciones matemáticas. Para Duval, estos dos procesos cognitivos (las *aprehensiones operativas* y *discursivas*), pueden ayudarnos a comprender la manera en que la cognición funciona en relación al aprendizaje de la geometría a través de la visualización (Fischbein, 1993).

En particular, el foco de atención sobre la coordinación de las diferentes *aprehensiones* (*operativa* y *discursiva*) en situaciones de resolución de problemas (*razonamiento configural*) (Torregrosa & Quesada, 2007) ha permitido identificar características de los procesos de justificar en problemas de geometría. En este contexto, conocer las definiciones y las propiedades geométricas no es suficiente para que el estudiante realice la coordinación entre la *aprehensión operativa* y *discursiva*, desarrollando el *razonamiento configural*. Por otra parte, la identificación en la configuración inicial de una sub-configuración puede ser condición necesaria pero no suficiente para desencadenar el *razonamiento configural*, por lo que el *razonamiento configural* puede desembocar en una solución mediante un proceso de “truncamiento” que permite generar un proceso deductivo formal, o puede quedar inmerso en un proceso que no proporciona la resolución del problema (“bucle”) (Torregrosa, Quesada & Penalva, 2010).

El objetivo de la investigación presentada aquí es identificar características del *razonamiento configural* en estudiantes para maestro como un aspecto del conocimiento de contenido (geometría) especializado (SCK; Ball et al., 2008) para la enseñanza (MKT). En particular, de qué manera las características de las figuras geométricas estimulan determinadas direcciones en los procesos de pensamiento durante la resolución de problemas de geometría y cómo se relacionan estas características con las condiciones conceptuales y lógicas de dichos procesos (Fischbein, 1993).

MÉTODO

Participantes y Procedimiento

En esta investigación participaron 45 estudiantes para maestro que cursaban una asignatura de Geometría organizada considerando los procesos de visualización, construcción y prueba (Duval, 1999). El objetivo de la asignatura era que los estudiantes para maestro aprendieran conocimiento de geometría especializado (Ball, Thames & Phelps, 2008) para la enseñanza de la geometría en educación primaria, desarrollando procesos cognitivos de *aprehensión discursiva* y *operativa* (Duval, 2007) y el *razonamiento configural* (Torregrosa et al., 2007, 2010). Algunos de los contenidos de esta asignatura eran las características, propiedades y clasificación de las figuras geométricas (polígonos, cuadriláteros, triángulos).

Instrumentos

Al finalizar el curso, los estudiantes para maestro contestaron a un cuestionario que incluía dos problemas para evaluar el *razonamiento configural*, y la manera en la que reconocían y asociaban en las figuras propiedades y definiciones de elementos geométricos (figura 1). La resolución implicaba reconocer en las configuraciones geométricas propiedades y definiciones mediante *aprehensiones discursivas* y generar diferentes organizaciones posibles de las proposiciones (resultados geométricos) para generar nueva información sobre la configuración inicial.

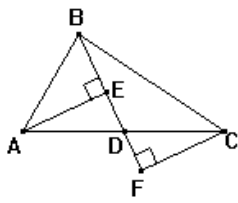
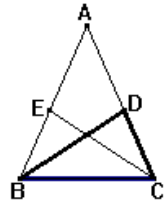
<p>P2</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ BD es la mediana del triángulo ABC ▪ AE es perpendicular a BF ▪ CF perpendicular a BF <p>Probar que AE es congruente a CF</p>	
<p>P3</p>	<p>Demostrar que en un triángulo isósceles las bisectrices de los ángulos de la base son congruentes</p>	

Figura 1. Problemas de justificar como contexto para el razonamiento configural

En cada una de las figuras iniciales en los dos problemas se pueden identificar varias sub-configuraciones que pueden favorecer la generación de ideas clave para una solución (Mesquita, 1998). Los problemas en este estudio fueron diseñados considerando la existencia de al menos una sub-configuración relevante (figura 2). La característica que diferencia la identificación de las sub-configuraciones en los dos problemas es que la sub-configuración a_{p2} en el problema P2 y la sub-configuración c_{p3} en el problema P3 podía ser considerada parte de la configuración inicial, mientras que las sub-configuraciones a_{p3} y b_{p3} en el problema P3 son dos sub-configuraciones que se solapan en la configuración inicial, y debe realizarse una acción cognitiva (aprehensión operativa) para visualizarlas por separado. Además, en la configuración inicial del problema P3 se introdujo una “pista” perceptiva, resaltando uno de los triángulos que se formaban con una de las bisectrices del triángulo isósceles. De esta manera, el problema P3 permitía poder estudiar la influencia de dicha pista en la identificación de una sub-configuración y en la generación del proceso de razonamiento configural.

Los conocimientos geométricos que podían ser considerados en los procesos de coordinación desencadenados en la resolución de cada problema se recogen en la tabla 1. El conocimiento de geometría en este estudio se refiere a las figuras y descripciones de los conceptos geométricos y propiedades relacionadas con las configuraciones. Consideramos los elementos geométricos que podían proceder de realizar asociaciones directas de elementos geométricos a la configuración a partir de los datos del problema; y en segundo lugar, los elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional.

Análisis

Los datos usados en esta investigación son las respuestas dadas por los estudiantes a estos dos problemas. El análisis (Clement, 2000) se desarrolló en tres fases:

Fase 1: Estudio descriptivo de las respuestas (se descompone el discurso textual generado por los estudiantes en unidades de análisis)

Fase 2: Identificación y organización de los hechos y propiedades geométricas usadas en la resolución (el discurso textual de los estudiantes se agrupa en dos momentos del proceso de razonamiento configural)

Fase 3: Identificación de características del razonamiento configural

En la primera fase, el discurso textual generado por los estudiantes fue descompuesto en unidades de análisis para identificar las aprehensiones operativas y discursivas puestas de manifiesto (Torregrosa, et al., 2010). Consideramos como una unidad de análisis las partes del discurso

generado (dibujo, asignación de etiquetas o marcas a partes de la configuración y del texto escrito) que podían reflejar la identificación o el uso por parte de los estudiantes para maestro de un hecho (definición) o proposición geométrica.

En la segunda fase, el texto discursivo de los estudiantes fue agrupado en dos momentos del proceso de razonamiento configural generado:

- **Visualización:** en la que los estudiantes para maestro asocian afirmaciones matemáticas procedentes de los datos del problema a la configuración o a una sub-configuración identificada previamente. Estas aprehensiones discursivas implican reconocer y asociar a la configuración información dada de manera textual en el problema o a reconocer desde la configuración alguna sub-configuración.
- **Organización de las proposiciones** (afirmaciones matemáticas, entendidas como definiciones, teoremas, corolarios, propiedades geométricas,...) que permitían a los estudiantes determinar en qué medida las afirmaciones matemáticas que habían identificado correspondían a las hipótesis de algún teorema o proposición que era susceptible de ser usada. Es decir, cuando los estudiantes reconocían en las configuraciones geométricas alguna propiedad o resultado previamente conocido que les permitía generar información adicional sobre la configuración geométrica.

En la tercera fase, la identificación de la sub-configuración y las organizaciones de las proposiciones derivadas permitía explicar de qué manera los contenidos geométricos elementales son relacionados y vinculados a configuraciones mediante procesos de visualización y generar procesos deductivos.

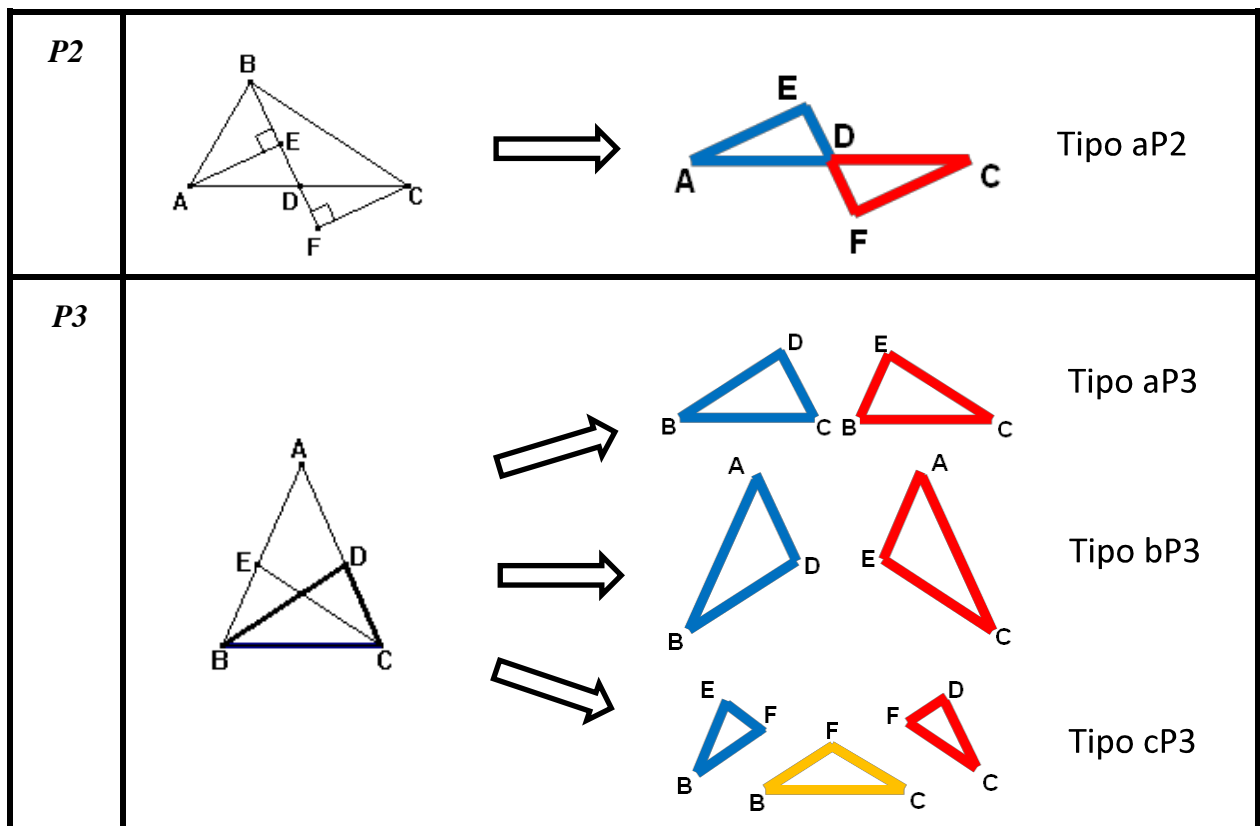


Figura 2. Sub-configuraciones relevantes inicialmente consideradas en el diseño de los problemas del cuestionario

Tabla 1. Definiciones y propiedades susceptibles de ser usadas en la resolución de los problemas

P2	P3
<ul style="list-style-type: none"> Definición de mediana de un triángulo Ángulos opuestos por el vértice son iguales Si una secante corta a dos rectas paralelas, forma con ellas ángulos alternos-internos iguales (alternos-externos iguales) Si una recta secante a un haz de dos rectas forma ángulos alternos-externos / alternos-internos iguales, entonces el haz de rectas está formada por rectas paralelas Si dos rectas forman ángulos rectos con otra tercera son paralelas La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. (Conocidos dos ángulos de un triángulo, conocemos el tercero) Criterios de congruencia de triángulos: A-L-A, L-A-L, L-L-L. 	<ul style="list-style-type: none"> Definición de bisectriz de un ángulo Definición de triángulo isósceles La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. (Conocidos dos ángulos de un triángulo, conocemos el tercero) Criterios de congruencia de triángulos: A-L-A, L-A-L, L-L-L.

RESULTADOS

La tabla 2 muestra los resultados relativos al desarrollo de razonamiento configural que llevaba o no a la resolución del problema, considerando si se había identificado alguna sub-configuración relevante. Los dos problemas tuvieron niveles de éxito diferentes. El problema 2 tuvo un nivel de éxito del 55,6 % (25 de un total de 45 estudiantes), mientras que el problema 3 fue del 33,3 % (15 de 45), aunque el porcentaje de identificación de una sub-configuración relevante en los dos problemas es similar (86,7 % para el problema 2 y 84,4 % en el problema 3). Cuando los estudiantes no identificaban alguna sub-configuración no fueron capaces de resolver el problema. Por otra parte, trece estudiantes resolvieron los dos problemas generando razonamientos deductivos desde el truncamiento del razonamiento configural. Es decir, 13 de los 25 estudiantes que resolvieron correctamente el problema 2 también resolvieron el problema 3. Mientras que 13 de los 15 estudiantes que resolvieron el problema 3, también resolvieron el problema 2. Estos datos indican que cuando el estudiante resolvía el problema 3 había una probabilidad alta de que también resolviera el problema 2.

Por otra parte, entre los estudiantes que identificaron la sub-configuración relevante en el problema P2 (39), el 64,1 % (25 de 39) fueron capaces de crear procesos deductivos a partir del razonamiento configural inicialmente generado, mientras que en el problema P3, solo el 39,5 % (15 de 38) de los que habían identificado alguna sub-configuración relevante fueron capaces de generar un proceso deductivo a partir del razonamiento configural.

Tabla 2. Desarrollo del razonamiento configural en relación a la identificación de una sub-configuración relevante

	P2			P3		
	Truncamiento	Bucle	Total	Truncamiento	Bucle	Total
SI identifican sub-configuración relevante	25	14	39 (86,7%)	15	23	38 (84,4%)
NO identifican sub-configuración relevante	0	6	6 (13,3%)	0	7	7 (15,6%)
total	25 (55,6%)	20 (44,4%)	45 (100%)	15 (33,3%)	30 (66,7%)	45 (100%)

El comportamiento de los estudiantes que generaron un bucle, es decir que identificaron la sub-configuración relevante pero no pudieron generar un proceso deductivo con éxito, fue diferente en los dos problemas (Tabla 3). En el problema 2, de los 39 estudiantes que han identificado la sub-

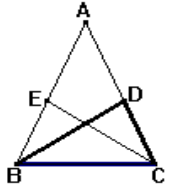
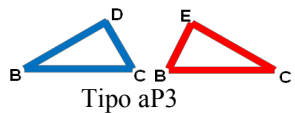
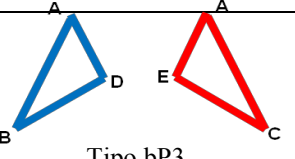
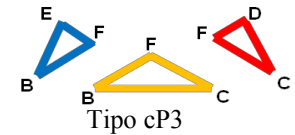
configuración relevante 14 (35,9%) no pudieron generar un proceso deductivo. De estos 14 estudiantes solo 3 de ellos fueron capaces de identificar hechos geométricos en la sub-configuración que podían ser considerados hipótesis de hechos geométricos previamente conocidos pero no pudieron relacionar estos hechos para iniciar un proceso deductivo. Los otros 11 estudiantes no consiguieron identificar hechos en la sub-configuración para aplicar algún resultado previo. En el problema 3, de los 38 estudiantes que han identificado alguna sub-configuración relevante 23 (60,5%) no pudieron generar un proceso deductivo. De estos 23 estudiantes, solo 3 fueron capaces de identificar en la sub-configuración hechos geométricos que podían generar un proceso deductivo, pero no pudieron relacionarlos de manera que les permitiera generar un proceso deductivo (mediante truncamiento del razonamiento configural). Los otros 20 estudiantes no identificaron hechos que podían ser considerados hipótesis de resultados previos (conocimiento previo).

El hecho de que el problema 3 pudiera tener 3 sub-configuraciones relevantes, plantea la cuestión de la relación con el nivel de éxito (generar un proceso deductivo correcto) vinculado a cada una de ellas: 38 estudiantes identificaron alguna de las sub-configuraciones en el problema P3 (tabla 4), pero las tres sub-configuraciones consideradas fueron identificadas de manera diferente. Los datos indican que la sub-configuración a_{P3} , que tenía una pista perceptual en forma de triángulo resaltado, fue identificada con mayor frecuencia (31 de 38) que las otras dos (b_{P3} , y c_{P3}). Sin embargo, la facilidad de reconocimiento de esta sub-configuración no implicaba necesariamente una mayor posibilidad de generar procesos deductivos. En este caso, de los 31 estudiantes que identificaron la sub-configuración a_{P3} solo 9 consiguieron generar procesos deductivos (29%); mientras que los 3 que identificaron la sub-configuración b_{P3} , todos consiguieron generar procesos deductivos (100%); y de los 4 que identificaron la sub-configuración c_{P3} , 3 consiguieron generar procesos deductivos (75%).

Tabla 3. Estudiantes que identificaron una sub-configuración relevante pero generaron un proceso de razonamiento configural en "bucle"

	Identifican hechos geométricos que podían ser considerado hipótesis de resultados previos	No identifican hechos geométricos que podían ser considerados hipótesis de resultados previos	Total
P2	3	11	14 (35,9%)
P3	3	20	23 (60,5%)

Tabla 4. Identificación de las sub-configuraciones relevantes en P3 con truncamiento y bucle

Configuración inicial	Sub-configuraciones relevantes	Identifican la sub-configuración	Truncamiento (generan proceso deductivo)	Bucle
	 Tipo a_{P3}	31 (81,6%)	9	22
	 Tipo b_{P3}	3 (7,9%)	3	0
	 Tipo c_{P3}	4 (10,5%)	3	1
Total		38 (100%)	15	23

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El objetivo de este trabajo era caracterizar los procesos de razonamiento configural en estudiantes para maestros como un dominio del conocimiento de geometría necesario para enseñar. En particular, identificar características de la relación entre el desarrollo de aprehensiones discursivas y las relaciones lógicas entre las afirmaciones geométricas previamente conocidas. Los resultados sugieren dos ideas en relación con la manera en que los estudiantes para maestro generan procesos de razonamiento configural y que ponen de manifiesto la relación entre la visualización y el uso del conocimiento geométrico para inferir información adicional sobre las figuras.

En primer lugar, las *características de la configuración inicial* del problema y el conocimiento geométrico previo que son el punto inicial de los procesos de visualización vinculados a las aprehensiones discursivas y que favorecen la identificación de sub-configuraciones relevantes y el reconocimiento de elementos geométricos (Mesquita, 1998). Los resultados obtenidos apoyan la idea de que la identificación de una sub-configuración relevante no es suficiente para generar un proceso de prueba con éxito, ya que aunque ayuda a desencadenar el razonamiento configural y actúa como etapa previa al razonamiento deductivo no asegura que los estudiantes puedan llegar a organizar los hechos y propiedades geométricas de manera lógica para inferir nueva información (realizar un truncamiento en el razonamiento configural). Por otra parte, el hecho de que la *“pista” perceptual* ayuda a identificar una sub-configuración relevante y a realizar aprehensiones discursivas, no necesariamente conlleva usar conocimiento geométrico previamente conocido para desencadenar nuevas aprehensiones discursivas para inferir información adicional. Este resultado señala la diferencia entre estas dos tipos de aprehensiones discursivas (las que genera los datos del problema y las que se generan a partir de conocimiento de geometría previo que debe ser usado de alguna manera). En este sentido, la identificación de una sub-configuración relevante está vinculada a la posibilidad de reconocer los hechos geométricos y de asociarlos a la sub-configuración, pero sin embargo, nuestros datos indican que había estudiantes que habiendo identificado hechos geométricos en la sub-configuración no eran capaces de relacionarlos con resultados previos para inferir nueva información (generar procesos deductivos). Este resultado está relacionado con la segunda idea a destacar.

Los resultados de esta investigación han mostrado que el desarrollo de un razonamiento deductivo con éxito (el truncamiento en un razonamiento configural), depende de *la manera en la que los estudiantes relacionan (relación lógica) la información generada en las aprehensiones discursivas desencadenadas por el uso de alguna proposición geométrica conocida*. Es decir, las aprehensiones discursivas que permite obtener información adicional mediante un proceso de inferencia a partir de la aplicación de resultados conocidos previamente. En este sentido, nuestros resultados indican que el truncamiento del razonamiento configural para generar procesos deductivos une dos niveles de organización discursiva (Duval, 2007) y que en cierta medida existen condiciones conceptuales y lógicas que controlan el truncamiento del razonamiento configural (Fischbein, 1993). Condiciones conceptual en el sentido de que dependen de los significados de las afirmaciones geométricas (conocimiento) y condiciones lógicas por la naturaleza de las relaciones lógicas que se deben establecer entre estas afirmaciones para generar nueva información sobre la figura (la naturaleza del proceso de deducción). El papel que desempeñan estas dos tipos de condiciones en el truncamiento del razonamiento configural para generar un proceso deductivo necesita ser estudiado.

Tener en cuenta estas dos ideas en el contexto del aprendizaje del conocimiento de geometría especializado para la enseñanza sugiere que lo importante no es la realización de una prueba matemática, sino en la posibilidad de desarrollar hábitos cognitivos vinculados a relacionar hechos asociados a las configuraciones geométricas para generar nueva información. Por ejemplo, los estudiantes para maestro deberían ser capaces de trasladar descripciones a figuras geométricas (aprehensiones discursivas), pero también ser capaces de inferir información sobre la figura a partir

de lo que se conoce y este hecho va más allá de los procesos de visualización y de las aprehensiones discursivas iniciales.

Así, el desarrollo de procesos de visualización mediante aprehensiones discursivas y operativas parece ser claves para que los estudiantes para maestro puedan reconocer las propiedades geométricas en las configuraciones, como un aspecto del conocimiento de geometría especializado. Sin embargo, la posibilidad de generar información adicional sobre una configuración geométrica se apoya en relacionar conocimiento geométrico previo con hechos geométricos identificados en la configuración inicial. Pero, la relación que el estudiante pueda establecer entre lo que se conoce y lo que se identifica en la configuración inicial resulta más difícil de generar. Diseñar entornos de aprendizaje para que los estudiantes para maestro puedan desarrollar este tipo de aprehensiones discursivas, como una manera de aprender conocimiento de geometría especializado para la enseñanza, se plantea como una cuestión abierta en estos momentos.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

- Ball, D.L.; Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En a. E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547- 589). Lawrence Erlbaum Pubs: London.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En Sutherland, R. y Mason, J. (eds.). *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlín, Germany: Springer.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26) Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Mesquita, A.L. (1998). On conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Torregrosa, G.; Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300
- Torregrosa, G.; Quesada, H. & Penalva, MC. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.