

# VARIACIÓN DE LAS CONCEPCIONES INDIVIDUALES SOBRE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

## Variation in individual conceptions about the finite limit of a function at a point

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico y Enrique Castro

Universidad de Granada

### Resumen

*En este trabajo se identifican y examinan cambios en las concepciones específicas acerca del concepto de límite finito de una función en un punto. Partimos de los datos recogidos en una encuesta previa llevada a cabo con un grupo de estudiantes de Bachillerato. Transcurrido un curso, contrastamos esos datos con los obtenidos de una adaptación de esa encuesta, aplicada a los mismos alumnos. Seleccionamos seis cuestiones del primer estudio, con cada una de las cuales implementamos una entrevista semiestructurada grupal. Estas entrevistas están diseñadas para estudiar la evolución de las concepciones de los estudiantes. Los datos obtenidos muestran que los estudiantes parecen superar la atribución general de no rebasabilidad y no alcanzabilidad al límite. También comprobamos que los estudiantes interpretan el carácter exacto o aproximado del límite de modo no equivalente a su carácter definido/ indefinido.*

**Palabras clave:** límite finito de una función en un punto, concepciones individuales, evolución de concepciones, alcanzabilidad y rebasabilidad del límite, dualidad objeto/proceso.

### Abstract

*In this work we identify and examine changes in specific conceptions about the concept of finite limit of a function at a point. The starting point was the data collected in a previous study focused in a group of high school students. One year later, we contrasted these data with those obtained from a new application of the questionnaire to the same students. We selected six questions from the first study and with each one of them we implemented one group semistructured interview. These interviews were designed to study the evolution of student conceptions. The data show that students seem to overcome the general attribution of non-exceedability and unreachability to the limit. We also find that students interpret the exact or approximate character of the limit in a not equivalent way from the definite / indefinite aspect.*

**Keywords:** finite limit of a function at one point, individual conceptions, evolution of conceptions, reachability and exceedability of the limit, process/object duality.

## INTRODUCCIÓN

En un estudio previo, llevado a cabo en un máster de investigación, realicé una exploración de los significados y concepciones individuales acerca del concepto de límite finito de una función en un punto. Esta información se obtuvo de un grupo de estudiantes de primer curso de bachillerato, a partir de la aplicación de un cuestionario (Fernández-Plaza, 2011). Las respuestas obtenidas permitieron identificar *aspectos estructurales* con los cuales pude interpretar las concepciones y definiciones proporcionadas por esos estudiantes. Entre dichos aspectos identifiqué la dualidad de la noción de límite como objeto y/o como proceso, el carácter exacto o aproximado de su valor, el carácter infinito potencial o finito del proceso para su obtención, y las relaciones entre la alcanzabilidad y la rebasabilidad, como quedó recogido en Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012).

Para mejor caracterizar estos aspectos estructurales, detectar sus cambios y estudiar su evolución, llevamos a cabo una nueva entrevista sobre los mismos aspectos y con los mismos sujetos en segundo curso de bachillerato, una vez transcurrido un año. Nos propusimos contrastar las respuestas aportadas por los mismos alumnos con las recogidas en el curso anterior. Nos centramos en detectar y caracterizar la variación de las concepciones individuales sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Esperamos encontrar indicadores y argumentos que muestren e interpreten la evolución de las concepciones individuales.

El objetivo de este informe es documentar y describir la variación de las concepciones de los estudiantes sobre aspectos específicos del concepto de límite finito de una función en un punto.

## NOCIÓN DE SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

El modelo teórico de significado adoptado para este trabajo se basa en las nociones de signo, sentido y referencia (Rico, 2012). En nuestro marco, el significado de un concepto matemático se establece mediante tres componentes:

- *Estructura conceptual*, dada por los conceptos, relaciones, operaciones, propiedades, y proposiciones derivadas. La estructura conceptual establece el criterio de veracidad o falsedad para las proposiciones que se establecen, desempeña el papel de referencia.
- *Sistemas de representación*, definidos por los signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros. Los sistemas de representación sistematizan conjuntos de signos apropiados para un concepto y, mediante sus reglas de transformación y de traducción, regulan criterios de inferencia operativos.
- *Fenomenología*, incluye aquellos contextos, situaciones y problemas que están en el origen de un concepto y le dan sentido. Los fenómenos y su análisis establecen la pluralidad de sentidos de un determinado concepto.

Un ejemplo de este modelo se encuentra en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008). La interpretación fundada sobre lo que comunican, expresan o entienden los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función la encuadramos en este modelo de significado de un concepto matemático.

## ANTECEDENTES

Organizamos los antecedentes en términos de aquellos descriptores que caracterizan y diferencian las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto.

Estas características proporcionan focos para organizar las entrevistas, a partir de los cuales seleccionamos las cuestiones y los grupos de estudio.

En primer lugar, revisamos las investigaciones que estudian la dualidad objeto/proceso en las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981; Sierpinska, 1987; Sfard, 1991). Estos autores destacan que los escolares conciben implícitamente el límite como un par formado por un proceso iterativo-dinámico infinito y por su resultado, si bien aparecen incoherencias que se reflejan en afirmaciones como “0,999... es estrictamente menor que 1”, o bien, que “el límite está indefinido pues sólo conocemos sus aproximaciones”. Planteamos dos cuestiones que abordan de estos aspectos: A1 y B2 (Tabla 1).

En segundo lugar, consideramos trabajos sobre fenomenología del límite finito de una función en un punto, en el sentido considerado por Sánchez-Compañía (2012) quien establece diferencias relevantes entre la definición intuitiva -*aproximación doble intuitiva*- y la definición formal -*fenómeno ida-vuelta*-, entre ellas el carácter infinito potencial de la primera y su ausencia en la segunda. Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012) detectan que aquellos estudiantes familiarizados con el primer fenómeno, quitan importancia al carácter infinito potencial del proceso, ya que consideran suficiente un número finito de aproximaciones para conocer el límite. Se introdujo la cuestión A3 (Tabla 1), para obtener argumentos sobre este aspecto.

Por último, algunas investigaciones detectan en las concepciones de los escolares sobre límite las propiedades de no ser rebasable y/o alcanzable; relacionan su presencia con el uso coloquial del término “límite” y de acciones como “limitar”, que denotan una idea de acotación o no alcanzabilidad de un valor (Cornu, 1991; Monaghan, 1991). Hemos seleccionado dos cuestiones, A2 y B1 (Tabla 1) que abordan estos aspectos.

## MÉTODO

El método empleado es de entrevista, en formato de entrevista semiestructurada. El estudio es confirmatorio con un análisis cualitativo de los datos. La figura 1 muestra el diseño general de un estudio dividido en dos fases, siendo la fase final la que se detalla en esta comunicación.

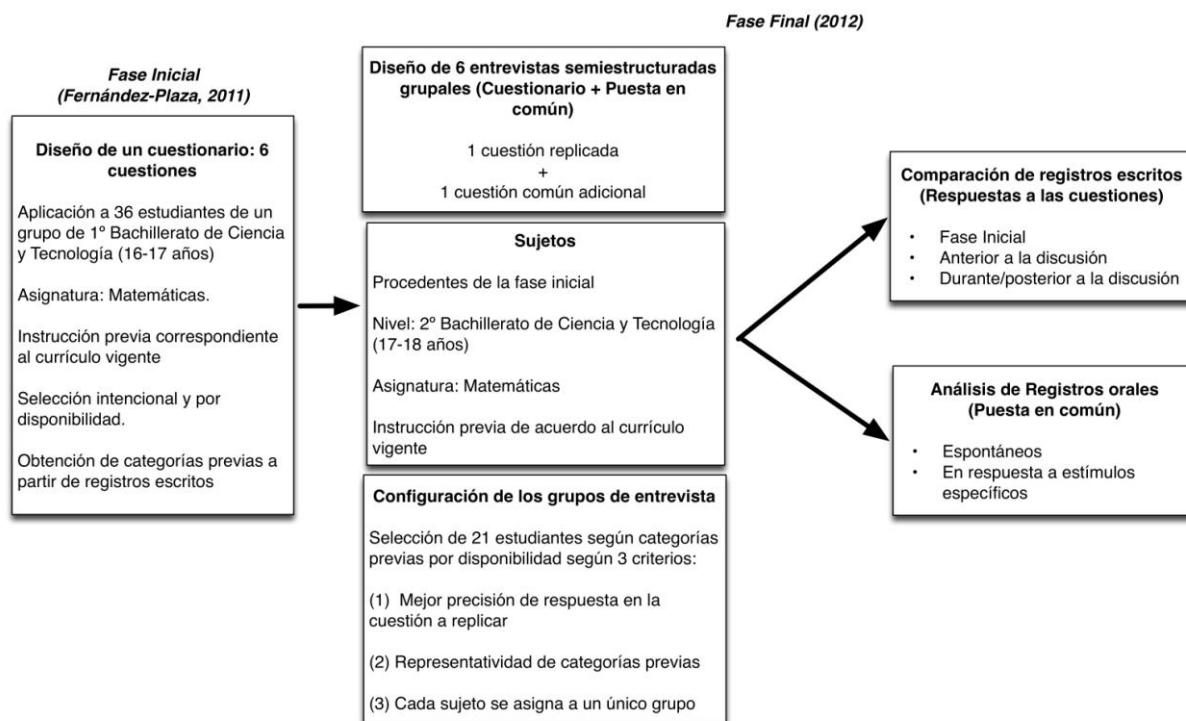


Figura 1. Esquema general del diseño del estudio

Se diseñaron seis plantillas, como material auxiliar para orientar la entrevista; no son meros cuestionarios estándar. En la Figura 2 se muestra un modelo de plantilla para uno de los grupos. Cada plantilla consta de una cuestión implementada en la fase inicial (Fernández-Plaza, 2011) y una cuestión adicional común.

Cada plantilla trabaja con un grupo de alumnos y se identifica mediante un código. Los códigos usan las dos opciones del cuestionario inicial, que se diferencian por las letras A y B. En total se establecieron seis plantillas para seis grupos, tres por cada código. Los sujetos se codifican de manera genérica por la letra E y un subíndice: E1, E2..., E21.

**PLANTILLA DE RESPUESTAS (MODELO A1)**




Nombre:  
Edad:  
Curso:  
Centro:

<b>Cuestión 1:</b> Lee con atención: Decide justificadamente si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). a) Un límite describe cómo se mueve una función $f(x)$ cuando $x$ se mueve V F hacia cierto punto.	<b>Cuestión 2:</b> Lee con atención el enunciado siguiente: Describe en cada apartado cómo entiendes los siguientes términos “Aproximar”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar”, “converger”, en el contexto de límite finito de una función en un punto.
--	--

Figura 2. Modelo de plantilla para el grupo A1

Códigos, preguntas específicas y composición de los grupos se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1. Cuestiones específicas y composición de los grupos de entrevista

<i>Código Grupos</i>	<i>Cuestión específica</i>	<i>Código Sujetos (Categorías previas)</i>
A1	“Un límite describe cómo se mueve una función $f(x)$ cuando $x$ se mueve hacia cierto punto”	E1 (Objeto/proceso) E2 (Objeto) E3 (Proceso)
A2	“Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar”	E4, E5 (No Rebasable) E6, E7 (Rebasable)
A3	“Un límite se determina calculando $f(x)$ para valores de $x$ cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza”	E8 (Finito práctico) E9, E10 (Infinito potencial)
B1	“Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza”	E11, E12 (No alcanzable) E13, E14 (Alcanzable)
B2	“Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como quieras”	E15 (Precisión restringida) E16 (Exactitud del límite) E17, E18 (Precisión arbitraria)

B3	“Un límite es un número al cual los valores de una función $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de $x$ ”	E19, E20 (Aproximación arbitraria) E21 (Aproximación no arbitraria)
----	--	--

Las categorías previas de respuesta están descritas detalladamente en Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012). Los 21 alumnos seleccionados ejemplificaron 14 categorías de respuestas en la fase inicial según cuestiones específicas planteadas y componentes estructurales considerados.

La realización de las entrevistas se llevó a cabo en un aula ordinaria habilitada al efecto. Cada uno de los grupos fue convocado separadamente al aula, con permiso del profesor, en turnos de 1 hora y en su horario lectivo. Las entrevistas fueron implementadas en dos jornadas lectivas.

El protocolo seguido en las entrevistas tuvo dos partes:

- En la primera, se entregó a cada sujeto la plantilla de tareas. Duración 15 minutos.
- En la segunda, se grabó en audio la puesta en común de las respuestas a las cuestiones de cada plantilla. Cada sujeto leyó y explicó su respuesta; después, el investigador empleó materiales de apoyo para incentivar la discusión, aclarar dudas, profundizar en aspectos relevantes y, en caso necesario, plantear nuevas cuestiones.

## DATOS RECOGIDOS Y DISCUSIÓN

Los datos recogidos derivados del desempeño y de las respuestas de los estudiantes en cada uno de los grupos se analizaron en dos etapas:

### Comparación entre los registros escritos (Fase Inicial, Pre-discusión, Post-discusión)

En primer lugar, percibimos a partir de las grabaciones de la puesta en común que algunos estudiantes registraron en su plantilla la revisión y ampliación de su argumento previo; acción no requerida por el protocolo. Reflejamos tres tipos de registros según el momento.

- *Fase Inicial*, para la organización de los sujetos en los grupos de entrevistas.
- *Pre-discusión*, anterior a la puesta en común. En la tabla 2 se denota en “texto normal”.
- *Post-discusión*, durante y posterior a la puesta en común. En la tabla 2 se denota en “*texto cursiva*”. Los registros post-discusión han sido ampliación de los pre-discusión.

Tabla 2. Registros escritos en fase inicial y final relacionados con la cuestión A1

Sujetos	Fase Inicial (Fernández-Plaza, 2011)	Fase final : Pre-discusión/Post-discusión
E1	Verdadero, porque el límite cuando $x$ tiende a algún número, significa dónde se dirige la función cuando tiende a ese número <b>(Categoría: Objeto/Proceso o dual)</b>	Es verdadera porque cuando se realiza , se obtiene el conocimiento total de la función, es decir, todas sus características, su comportamiento en general, además nos permite saber hacia dónde se mueve con respecto a un punto en la gráfica y también se puede calcular el límite en el infinito, entonces no nos indica su forma, sino su dirección.

	Falso, el límite no te dice el movimiento de $f(x)$ , el movimiento te lo dice la ecuación de $f(x)$ que se te da para resolver, según tenga, $x$ , $x^2$ , raíz cuadrada de $x$ , etc. <b>(Categoría: Objeto)</b>	Falso, porque un límite no describe el movimiento de la función sino que nos indica hacia dónde se dirige o dónde se sitúa la función en cualquier punto de $x$ , $f(x)$ nos dice el movimiento, no nos lo dice el límite.
E3	Verdadero, sí ya que el límite nos da todos los puntos posibles que puede adquirir la función <b>(Categoría: Proceso)</b>	Verdadero, ya que por ejemplo en el caso de límite cuando $x$ tiende a infinito de $f(x)$ , nos indica el movimiento que realiza esa función $f(x)$ hacia infinito o hacia el valor que presente la $x$ .

Consideramos de manera detallada los resultados derivados de esta fase para la cuestión A1 y resumimos los resultados derivados para el resto de los grupos.

Las tres categorías previas responden a la dualidad objeto/proceso de la noción de límite, es decir, a si conciben como entidades distintas el objeto y el proceso infinito (*Concepción objeto*), los vinculan (*Concepción dual*) o conciben el proceso subordinado al objeto (*Concepción proceso*). La concepción de E2 representa una concepción de objeto, pues incide en que la naturaleza dinámica corresponde a la expresión algebraica de la función, no al límite. E1 asume que el límite es un objeto al que la función se dirige, aunque le atribuye características de proceso, mientras que para E3 el límite asume todos los matices de proceso.

En la Tabla 3 se recogen las variaciones de las concepciones de los sujetos del grupo A1 antes y tras la puesta en común. Únicamente se observa una ligera variación de las concepciones de E1 y E3.

Tabla 3. Variación de las concepciones individuales de los sujetos de A1

Sujetos	Fase Inicial / pre-discusión	Pre-discusión / Discusión
E1	Concepción dual → Concepción proceso	Concepción Proceso → Concepción dual
E2	Sin variación (Concepción objeto)	Sin variación
E3	Sin variación (Concepción proceso)	Concepción Proceso → Concepción dual

#### Análisis de la puesta en común: resultados

La Tabla 4 incluye segmentos de la puesta en común que ilustra las variaciones o no de las concepciones de los sujetos del grupo A1. El investigador introduce estímulos para poner a prueba la resistencia al cambio de las concepciones pre-discusión. Se observa que E1 y E3 cambian ligeramente su concepción puramente procesual a una dual. La concepción de E2 no se alteró, aún cuando se les presentaron otras alternativas de respuesta.

Tabla 4. Segmentos destacados de la discusión e interpretaciones.

	Segmentos	Interpretación
I:	¿Qué pensáis vosotros, los que habéis respondido verdadero, respecto de la respuesta de vuestro compañero [ver respuesta en fase inicial de E2, tabla 2]?	Concepción dinámica procesual de límite (E3)
E3:	Si el límite va tomando diferentes valores, va cambiando la función.	

---

I:	... ¿El límite qué es, sólo un número o varios?	
E3:	Uno.	
I:	Uno sólo, en este caso sólo podéis considerar que el límite es único, pero ese valor ¿te dice qué forma tiene $f(x)$ ? ... ¿Las funciones $f(x)=x$ y $f(x)=x^2$ tienen el mismo límite en $x=1$ o no?	Estímulo y cambio de concepción (E1 y E3)
E1 y E3:	Sí	
I:	¿Qué respuesta podéis dar [planteada al grupo general] a la cuestión A1 [ver tabla 1]?	
E1:	[Lee su respuesta final y añade] no nos indica su forma en sí, pero sí la dirección a la que tiende, cuando la $x$ vale ese punto.	Invariabilidad de la concepción pre-discusión (E2)
I:	¿Tienes algo que añadir E3?	
E3:	No, está perfecto.	
E2:	También he añadido que $f(x)$ nos dice el movimiento, y no nos lo dice el límite, que es lo que había dicho... [se refiere a la respuesta modelo].	

---

### Balance de resultados derivados del resto de los grupos (A2, A3, B1, B2 y B3)

La cuestión B3 no proporcionó datos diferentes a la fase inicial. La cuestión B1, referida exclusivamente a la alcanzabilidad del límite, deriva hacia interpretaciones de límite como recta a la que la función tiende pero no alcanza, posiblemente debido al estudio asintótico de la función al caso en un punto.

La propiedad de no rebasabilidad del límite (Cuestión A2) fue sostenida por la totalidad del grupo en la fase pre-discusión. Durante la discusión la interpretación de gráficas con diferentes criterios de rebasabilidad produjo cambios en su argumentación. Aquellos argumentos resistentes recalcaron que la no rebasabilidad corresponde al límite por definición.

En relación a la cuestión A3, algunos sujetos enfatizan la suficiencia de un número finito de iteraciones para calcular el límite, aunque se necesita un número mínimo de ellas. En relación a la alcanzabilidad del límite existen tres interpretaciones: (1) Posibilidad de que las aproximaciones igualen al límite; (2) El límite es igual a la imagen y (3) El límite es calculable, aunque exista indeterminación.

En relación a la cuestión B2, un sujeto manifiesta tres interpretaciones de precisar (1) Alcanzar el límite “Si sale 1'99... tú no puedes precisarlo”; (2) Aproximar el límite “tú puedes precisarlo para que salga 1'99”; (3) Bondad de una aproximación “el límite es el mismo, pero no es tan preciso”. La noción de exactitud del límite tiene tres interpretaciones (1) Natural o entero; (2) Resultado del cálculo; (3) Límite es igual a la imagen, siendo aproximado en caso contrario.

## CONCLUSIONES

De acuerdo al objetivo planteado, presentamos las siguientes conclusiones:

Las concepciones del límite como proceso, mostradas por algunos estudiantes, pudieron ser ligeramente modificadas mediante la discusión de dos funciones diferentes con límites idénticos en el mismo punto  $x=a$ . Un sujeto mostró resistencia a cambiar la concepción del límite como objeto.

La resistencia de los estudiantes a superar la no rebasabilidad del límite se debe posiblemente más al influjo del uso coloquial del término “límite”, que a la comprensión errónea sobre el concepto en sí. La superación se promovió mediante exploración de diversas gráficas sin que exista una descripción globalmente aceptada de esta propiedad.

La no alcanzabilidad del límite es resistente en las concepciones de algunos estudiantes por la imposibilidad de que las aproximaciones igualen al límite. Algunos estudiantes admiten la alcanzabilidad como la posibilidad de calcular el límite o que la función sea continua. Es relevante que tampoco exista una descripción globalmente aceptada de esta propiedad.

No se producen variaciones relevantes en las concepciones del carácter infinito/finito del proceso. La suficiencia de una “cantidad mínima necesaria” de aproximaciones para percibir la tendencia “infinita” al límite es coherente con los resultados previos obtenidos. La negación de este hecho por un estudiante nos permite refinar su concepción previa incorporando la necesidad patente de “completar” el proceso infinito.

El carácter exacto/aproximado del límite no es considerado por los estudiantes como una propiedad intrínseca del objeto límite (el límite es exacto si está definido, y aproximado en caso contrario) sino extrínseca a él, es decir, los estudiantes entienden *límite exacto* si coincide con la imagen, de lo contrario se dirá *aproximado*. En cualquier caso el valor del límite está definido. También existen evidencias particulares de que *límite exacto* equivale para algunos estudiantes a ser natural o entero; posible influjo del contexto aritmético. No menos importante es la amplitud de interpretaciones del término “precisar”.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

### Referencias

- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2012). The Concept of Finite Limit of a Function at one Point as Explained by Students of Non-Compulsory Secondary Education. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2), (pp. 235-242). Taipei, Taiwan: PME.
- Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 - 237). Jaén: SEIEM
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, 1, 39–63.

- Sánchez-Compaña, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 1-36.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397
- Tall, D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus, (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 170-176). Berkeley: PME.
- Tall, D.O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151- 169.