

# COMPRESIÓN DE LAS IMPLICACIONES DEL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL A TRAVÉS DE HISTOGRAMAS: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES Y PROFESORES DE AMÉRICA LATINA

Santiago Inzunsa  
Universidad Autónoma  
de Sinaloa, México

Gabriel Yáñez  
Universidad Industrial  
de Santander, Colombia

Greivin Ramírez  
Instituto Tecnológico de  
Costa Rica

Roberto Behar  
Universidad del Valle,  
Colombia

Audy Salcedo  
Universidad Central de  
Venezuela

Ernesto Sánchez  
Departamento de  
Matemática Educativa  
Cinvestav, México

**Resumen.** *En el presente artículo se reportan resultados de una investigación con estudiantes y profesores de matemáticas y estadística de cuatro países de América Latina, acerca de la comprensión que poseen sobre las implicaciones del teorema del límite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales representadas por medio de histogramas con resultados de muestreos repetidos. Los resultados muestran un nivel bajo de comprensión y razonamiento, al obtener tasas de respuesta por debajo del 50% en la mayoría de los ítems, aún en muchos profesores de estadística. La mayor parte de los sujetos se ubicó en los niveles inferiores al nivel relacional del modelo taxonómico de desarrollo cognitivo SOLO.*

**Abstract.** *In this article, results of a research with students and mathematics and statistics teachers of four countries of Latin America about the understanding that they have about the implications of the central limit theorem in the behavior of the sampling distributions represented by histograms are analyzed. The results show a low level of comprehension and reasoning, obtaining answer rates below 50% in diverse items, even in many statistics teachers. The majority of the subjects was ubicated in the inferior levels to the relational level of the taxonomic model of cognitive development SOLO.*

## INTRODUCCIÓN

El teorema del límite central y su relación con las distribuciones muestrales constituye uno de los principales tópicos en un primer curso universitario de estadística. Su estudio es importante para comprender y aplicar adecuadamente los diversos métodos de inferencia estadística. Sin embargo, la experiencia de muchos profesores y resultados de investigación, demuestran que ambos conceptos son complejos para los estudiantes, dado que requieren de la integración de diversos conceptos previos de estadística y probabilidad, tales como población, muestreo aleatorio, variable aleatoria, tendencia central, variabilidad, distribución y convergencia.

La demostración del teorema del límite central requiere de antecedentes matemáticos que no están al alcance de muchos estudiantes universitarios, sobre todo de aquellos que cursan carreras que no son del área de ingeniería y ciencias. La mayoría de los textos de estadística dirigidos a este tipo de estudiantes, generalmente enuncian el teorema en un contexto de una distribución muestral de medias; algunos textos más formales utilizan el lenguaje de variables aleatorias para su formulación, otros tratan de ser más intuitivos

e incluso generan simulaciones de muestras extraídas de una población no normal con el propósito de generar en los estudiantes una mejor comprensión de sus implicaciones.

Sin pérdida de generalidad el teorema señala lo siguiente: Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población finita con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , si  $n$  es suficientemente grande,  $\bar{X}$  tiene aproximadamente una distribución normal con media  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  y varianza  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ .

En los textos, generalmente se asume que una muestra de tamaño 30 es lo suficientemente grande como para obtener una aproximación adecuada a la distribución normal. Después se recurre a la aplicación del teorema como una regla práctica para resolver diversos problemas de inferencia estadística, en los cuales se involucra la selección de muestras de poblaciones no normales, o en problemas donde la forma de la distribución de la población es desconocida.

Ante el surgimiento de programas computacionales que permiten un manejo flexible e interactivo de representaciones gráficas, se ha hecho posible un acercamiento distinto al estudio de estos temas, mediante la simulación de muestreos repetidos de una misma población, en los cuales se calculan estadísticos y se grafican sus distribuciones por medio de histogramas. A través de ellos, puede ser visualizada la relación entre las diferentes variables que intervienen en el comportamiento de las distribuciones muestrales, y a las cuales hace referencia el teorema del límite central (tamaño de muestra, centro, variabilidad y forma de la distribución muestral).

La facilidad con que se generan las representaciones gráficas con los resultados de la simulación para diferentes tamaños de muestra, ha generado expectativas entre muchos educadores estadísticos (por ejemplo, Gordon & Gordon, 1992, Tijms, 1992) acerca de la oportunidad que tienen ahora los estudiantes para comprender conceptos estadísticos complejos como el teorema del límite central y las distribuciones muestrales, aún cuando no dispongan de los antecedentes matemáticos requeridos.

Ante tales expectativas, al parecer se asume que las representaciones de los conceptos estadísticos a través de histogramas no ofrecen dificultades, debido a que éstos han sido objetos tradicionales de la enseñanza de la estadística descriptiva, tema clásico en los cursos básicos de estadística. De esta manera, el teorema del límite central y las distribuciones muestrales al ser temas centrales en estadística, tanto profesores como estudiantes deberían ser capaces de reconocerlos y manejarlos con el lenguaje gráfico de los histogramas.

Sin embargo, estudios realizados por algunos investigadores como Lee & Meletiou (2001), delMas, Garfield & Chance (1999), Lunsford et. al., (2006), Ramírez (2006) e Inzunza (2006), han mostrado dificultades de estudiantes universitarios y profesores en la lectura y comprensión de histogramas para entender las relaciones entre la forma y el tamaño de la muestra en las distribuciones muestrales.

Dado el contexto anterior, en el presente estudio nos hemos propuesto investigar acerca de dichas dificultades en el ámbito de los profesores y estudiantes universitarios latinoamericanos. Específicamente, nos proponemos encontrar algunos elementos –dado lo reducido de la muestra- que nos permitan conocer el nivel de comprensión que profesores y estudiantes que han tomado al menos un curso de estadística, tienen de las implicaciones del teorema del límite central cuando éstas son expresadas por medio de histogramas de resultados de muestreos repetidos.

## MARCO CONCEPTUAL

En las últimas tendencias en la investigación acerca del razonamiento, pensamiento y cultura estadística, el desarrollo de niveles o jerarquías para describir el desarrollo cognitivo de los sujetos de estudio, ha llegado a ser un objetivo importante de investigación (Reading & Reid, 2006). Entre los diversos modelos que se han propuesto para jerarquizar el desarrollo cognitivo se encuentra el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs & Collis (1982). SOLO es un modelo que permite describir procesos involucrados en el aprendizaje, estableciendo categorías por orden de complejidad. El modelo categoriza la actividad mental que realizan los sujetos cuando se enfrentan a una tarea escolar, considerando tanto aspectos cuantitativos como cualitativos.

SOLO ha sido utilizado en educación estadística para desarrollar categorías de desarrollo cognitivo de diversos conceptos estadísticos. Tal es el caso de los trabajos desarrollados por Watson et. al., (2003) y Pfannkuch (2005). Por lo cual, hemos considerado que puede ser un marco apropiado para establecer categorías de razonamiento acerca de las implicaciones del teorema del límite central en las distribuciones muestrales.

El modelo consta de cuatro categorías o niveles, las cuales se describen a continuación:

1. *Preestructural*: La tarea no es abordada adecuadamente, ya que los estudiantes poseen información aislada que no tiene organización ni sentido.
2. *Uniestructural*. Los estudiantes se enfocan en un aspecto relevante, realizan conexiones simples y obvias pero no tienen una comprensión de lo que hacen.
3. *Multiestructural*: Los estudiantes se enfocan en más de un aspecto de la tarea, pero son tratados en forma independiente, ya que no los relacionan entre sí.
4. *Relacional*: Los estudiantes integran diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado.

Aplicando el modelo anterior al caso de las distribuciones muestrales tenemos lo siguiente:

1. *Preestructural*: Los estudiantes poseen información aislada de los conceptos que intervienen en las distribuciones muestrales, tales como tamaño de muestra, forma de la distribución, centro y variabilidad, pero no comprenden la forma en que están relacionados. Sus respuestas no las justifican o lo hacen incorrectamente.
2. *Uniestructural*. Los estudiantes relacionan en forma correcta alguna de las implicaciones del teorema del límite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales. Sin embargo, en ítems similares donde se modifica alguna variable de la tarea, muestran falta de una comprensión adecuada. Utilizan un lenguaje impreciso.
3. *Multiestructural*: Los estudiantes relacionan en forma correcta más de alguna de las implicaciones del teorema del límite central en las distribuciones muestrales y justifican adecuadamente sus respuestas. Se observan algunas inconsistencias en el razonamiento de alguna de las implicaciones.
4. *Relacional*. Los estudiantes son capaces de identificar las implicaciones del teorema del límite central, relacionarlas entre sí de manera adecuada al utilizar el lenguaje apropiado y de manera precisa.

## METODOLOGIA

El estudio se llevó a cabo con 14 estudiantes y 31 profesores de 4 instituciones educativas de América Latina, específicamente de México, Colombia, Venezuela y Costa Rica. La siguiente tabla muestra algunas características de los sujetos de estudio:

Tabla 1: Identificación de subgrupos de sujetos de estudio

<b>Profesión</b>	<b>Cantidad</b>	<b>País</b>	<b>Profesión</b>	<b>Cantidad</b>	<b>País</b>
Profesor de Estadística Universitario (PE)	6	México	Estudiante Pregrado (EP)	5	Venezuela
Profesor de Matemáticas estudiando Maestría en Educación Matemática (PMEM)	6	México	Profesor Matemáticas Universitario (PMV)	4	Venezuela
Estudiante de Arquitectura (EA)	5	Costa Rica	Profesor Estadística Universitario (PEV)	6	Venezuela
Estudiante de Ingeniería en Computación (EIC)	4	Costa Rica	Profesor Matemáticas de Secundaria (PSC)	2	Colombia
Profesor Matemáticas Universitario (PMCA)	4	Costa Rica	Profesor Estadística Universitario (PEC)	3	Colombia

El principal instrumento de recolección de información fue un cuestionario con 4 ítems (ver apéndice) que se diseñó con el propósito de explorar la comprensión que tienen los sujetos de estudio sobre las principales implicaciones del teorema del límite central en distribuciones muestrales, representadas a través de histogramas.

Específicamente, en el diseño del cuestionario se tuvo en cuenta investigar acerca de las siguientes implicaciones del límite central:

- a) La distribución de la media tiende a una distribución normal conforme se incrementa el tamaño de muestra.
- b) La variabilidad de la distribución de la media decrece conforme se incrementa el tamaño de la muestra o viceversa.
- c) El centro de la distribución de la media es igual a la media de la población de la cual fueron extraídas las muestras.

Además, se exploró en los sujetos de estudio sobre su comprensión acerca del efecto del tamaño de muestra en las probabilidades de resultados muestrales.

Los sujetos fueron seleccionados por los 6 investigadores que participaron en el presente trabajo, y su participación fue voluntaria. Se les indicó que el cuestionario era con fines de investigación y que los resultados serían confidenciales. Se trató que en la muestra existieran profesores de matemáticas, estadística y estudiantes que habían tomado al menos un curso de estadística a nivel universitario.

## RESULTADOS

Los resultados serán discutidos en dos niveles: un nivel descriptivo de las respuestas dadas por los sujetos de estudio en cada uno de los ítems, el cual nos proporciona una idea de su comprensión acerca de los conceptos investigados; y un segundo nivel, donde los sujetos son ubicados en categorías determinadas por los niveles de comprensión que exhibieron, a través del modelo jerárquico SOLO.

### Pregunta 1:

La pregunta 1 fue tomada de una investigación realizada por Garfield, delMas y Chance (1999); tiene como objetivo investigar si los sujetos perciben correctamente la variabilidad de una distribución de datos expresada por medio de un histograma, comparando el rango de cada distribución. Aunque esta pregunta no se refiere al teorema del límite central en forma directa, consideramos que era importante colocarla en el cuestionario, dado que en estudios previos encontramos que muchos estudiantes tienen dificultades para identificar la variabilidad de una distribución de datos cuando estos se expresan en forma de histogramas.

En la siguiente tabla se representan las frecuencias con la que los diferentes subgrupos respondieron a la pregunta 1:

Tabla 2: Distribución de respuestas a la pregunta 1 por subgrupo

	PE	PMEM	EA	EIC	PMCA	EP	PMV	PEV	PS	PEC	Total
<b>Opción 1 (correcta)</b>	3	2	2	2	2	1	3	6	1	3	<b>25</b>
<b>Opción 2 (incorrecta)</b>	3	4	3	2	2	4	1	0	1	0	<b>20</b>

De las 20 respuestas incorrectas, 11 son de profesores y 9 de estudiantes. Es decir, cerca de la tercera parte de los profesores (11 de 31) y más de la mitad de los estudiantes (9 de 14) que han tomado al menos un curso de estadística en su formación profesional, no logran identificar correctamente la variabilidad en los histogramas. En sus respuestas no han considerado ninguna medida de variabilidad, como sería el rango o la desviación estándar. En cambio centran su atención en la simetría, la suavidad de la distribución y en la irregularidad de la distribución principalmente. Algunas respuestas se muestran a continuación: “La falta de simetría en la figura de la derecha nos indica más variabilidad”, “Es más suave la distribución”, “La primera es más suave porque se parece a la normal”, “En la segunda las frecuencias varían de un intervalo a otro sin ninguna ley establecida”.

Respecto a la irregularidad de la distribución como factor que influye en la variabilidad –factor que sobresale en las respuestas incorrectas-, en dos estudios identificados en la

literatura (Inzunza, 2006; Lee & Mavrotheris, 2003) con estudiantes universitarios se identificó la misma respuesta en una gran parte de los sujetos de estudio; lo cual nos señala que es un importante factor de confusión para comprender la variabilidad de una distribución

Por su parte, de las 25 respuestas correctas, 20 corresponden a profesores y 5 a estudiantes. Sus argumentos toman en consideración el rango de la variable. Por ejemplo: “En la distribución 2 el rango es menor”, “El rango se encuentra entre 0 y 10, en la otra el rango es de de 2 a 8”. Cabe señalar que ninguno de los sujetos hizo referencia a otras medidas de variabilidad, para lo cual requerían realizar algunos cálculos.

Respecto al desempeño por grupos, se observa que los profesores de estadística de Venezuela (PEV) y profesores de estadística de Colombia (PEC) tienen el mejor desempeño, ya que en su totalidad contestan y justifican correctamente la pregunta; no así el caso de los profesores de estadística de México (PE), donde 3 de ellos no comprenden la implicación del rango en la variabilidad de las distribuciones.

### **Pregunta 2**

Esta pregunta tiene el propósito de establecer si los sujetos comprenden el efecto del tamaño de muestra en el centro y la variabilidad de las distribuciones muestrales, así como en el valor de las probabilidades de ciertos resultados muestrales. Es decir, se trata de ver si los sujetos identifican que a mayor tamaño de la muestra la variabilidad de las distribuciones disminuye, que la media de la distribución de muestras es igual a la media de la población, sin importar el tamaño de la muestra seleccionada, y que el área bajo la curva a partir de un valor es mayor en distribuciones con mayor variabilidad. La respuesta correcta está dada por la secuencia 10, 30 y 5. Es decir, a la primera gráfica le corresponde un tamaño de muestra igual a 10, a la segunda un tamaño de 30 y a la última un tamaño de 5.

Tabla 3: Distribución de respuestas de la pregunta 2a por subgrupo

<b>Secuencia</b>	<b>PE</b>	<b>PMEM</b>	<b>EA</b>	<b>EIC</b>	<b>PMCA</b>	<b>EP</b>	<b>PMV</b>	<b>PEV</b>	<b>PS</b>	<b>PEC</b>	<b>Total</b>
<b>10-30-5</b>	4	2	5	1	0	0	1	3	0	3	<b>19</b>
<b>Otra</b>	2	4	0	3	4	5	3	3	2	0	<b>26</b>

En este inciso, menos de la mitad (19 de 45) de los sujetos de estudio asignaron los tamaños de muestra adecuadamente (secuencia 10-30-5), de los cuales 13 fueron profesores y 6 estudiantes. Los argumentos que proporcionan en sus respuestas son sólo frases muy cortas, pero se puede deducir que entre quienes contestan correctamente tienen en cuenta principalmente la variabilidad. Por ejemplo: “a mayor tamaño de muestra, menor dispersión”. Otros hablan de margen de error, “a mayor n menor margen de error y variabilidad” y otros se basan en la normalidad “al aumentar la muestra se comporta como la normal”.

Sin embargo, no todos los que contestan correctamente justifican adecuadamente. De hecho, de los 19 que eligieron la opción correcta (10-30-5) solo 9 argumentan de manera clara y precisa involucrando a la variabilidad. Por ejemplo, dos profesores mexicanos contestaron lo siguiente “las muestras pequeñas dan lugar a más intervalos graficados” y “a menor tamaño la frecuencia es más alta”. Estas respuestas no involucran una comprensión adecuada del efecto del tamaño de muestra en las distribuciones muestrales.

Un resumen de las diversas secuencias asignadas se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4: Frecuencias de asignación de las diferentes respuestas

<b>Respuesta</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Resultado</b>
10-30-5	19	Correcta
30-10-5	3	Incorrecta
10-5-30	14	Incorrecta
5-10-30	2	Incorrecta
30-5-10	3	Incorrecta
No contestan	4	Incorrecta
Total	45	

De la tabla anterior llaman la atención dos resultados: El primero, consiste en que quienes asignaron el tamaño 30 a la primera distribución (secuencias 30-10-5 y 30-5-10) basaron su argumento en el parecido que tiene la distribución muestral con la distribución normal (obsérvese la gráfica en el apéndice), cuando en realidad las tres distribuciones son normales, pues provienen de una población con distribución normal. Al parecer estos sujetos tienen en mente la distribución normal estandarizada como prototipo de la distribución normal, ya que no reconocen como normales, distribuciones con poca o mucha variabilidad. Segundo, quienes asignaron la secuencia 10-5-30, en su mayoría incluyen en su argumentos la cantidad de barras de los histogramas. En ambos casos se ha procedido incorrectamente, producto de no tener una comprensión adecuada del efecto del tamaño de muestra en la variabilidad de las distribuciones.

En resumen, se puede observar que esta pregunta resultó complicada para la mayoría de los sujetos, incluso para los profesores, ya que solo 13 de 31 contestaron correctamente. Si enfocamos nuestra atención en los profesores y al subgrupo al que pertenecen (ver tabla 1) observamos que los profesores de estadística de Colombia y los estudiantes de Arquitectura de Costa Rica tuvieron el mejor desempeño, al contestar correctamente en todos los casos. De los profesores de estadística mexicanos, se tuvieron 2 respuestas incorrectas y en el caso de Venezuela se tuvieron 3 respuestas incorrectas. Los casos más críticos fueron el grupo PMCA, EP y PS quienes no tuvieron ni una sola respuesta correcta.

En cuanto al inciso b de este ítem, 38 sujetos respondieron correctamente al señalar que la media de la población era un valor muy cercano a 1.60, lo cual lo dedujeron del centro de las distribuciones muestrales. Es decir, identifican correctamente que la media de la población es igual a la media de las distribuciones muestrales. Por su parte, el inciso c, fue respondido y justificado adecuadamente solo por 7 sujetos. Otros 25 sujetos respondieron bien, pero sus justificaciones no son muy coherentes, lo cual quiere decir que tienen problemas para identificar el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de resultados muestrales.

### **Pregunta 3:**

La pregunta 3 tiene cierta similitud con la pregunta 2, solo que en este caso se trata de una población con distribución exponencial. Su diseño obedece a la intención de investigar si los sujetos comprenden el efecto del tamaño de muestra en la forma de la distribución.

Tabla 5: Distribución de respuestas de la pregunta 3a por subgrupo

<b>Opción</b>	<b>PE</b>	<b>PMEM</b>	<b>EA</b>	<b>EIC</b>	<b>PMCA</b>	<b>EP</b>	<b>PMV</b>	<b>PEV</b>	<b>PS</b>	<b>PEC</b>	<b>Total</b>
<b>Correcta</b>	4	2	5	0	2	0	0	5	0	3	<b>21</b>

<b>Incorrecta o no responde</b>	2	4	0	4	2	5	4	1	2	0	<b>24</b>
---------------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------

En el primer inciso de esta pregunta, 21 sujetos eligieron la opción correcta, 21 respondieron incorrectamente y 3 no la respondieron. El argumento de los que respondieron correctamente asignando el tamaño 15 a la primera distribución y 2 a la segunda distribución se basó en el teorema del límite central, según el cual la distribución de las medias muestrales tiende a una distribución normal a medida que el tamaño de la muestra se incrementa.

Un aspecto importante que debemos resaltar de estos sujetos es, que la mayor parte de ellos (12 de 21) atendieron el criterio de variabilidad en las distribuciones, 4 atendieron el criterio de forma y 5 atendieron ambos criterios. Es decir, se fijaron principalmente en la variabilidad y no en la forma, cuando el objetivo del diseño del reactivo era que centraran su atención en la forma. Algunas respuestas fueron las siguientes: “A mayor tamaño de muestra para calcular los promedios, esto reduce el margen de error y la variabilidad de los datos con respecto a la media de la población”, “Cuanto más grande es el tamaño de la muestra más se tiende a la normal, por lo tanto el primer gráfico se acerca más a la normal y debe pertenecer a la muestra mayor”, “Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, la aproximación tiende a ser normal, los datos estarán menos dispersos”, “A medida que  $n$  tiende a 30 la distribución muestral tiende a comportarse normalmente, forma de campana y simétrica”.

La mayoría de los que respondieron incorrectamente, se basaron en la idea de representatividad muestral: “a mayor tamaño de muestra la distribución de las medias es más próxima a la distribución de la población”. La mayoría de respuestas correctas provienen de los profesores de estadística, mientras que las incorrectas de estudiantes y de profesores de secundaria.

Por su parte, en el segundo inciso, donde se solicita que dibujen la distribución para un tamaño de muestra igual a 30, se observa que de los 24 sujetos que responden incorrectamente el inciso anterior, 21 responden incorrectamente este inciso también o no responden. La mayoría de ellos dibuja una distribución parecida a la población. Los otros 3 dibujan una distribución parecida a la normal. Esto quiere decir que son consistentes con sus respuestas en ambos incisos, y consideran que a mayor tamaño de muestra la distribución muestral se debe parecer a la población. La idea de representatividad parece que les representa un obstáculo para entender el verdadero efecto del tamaño de muestra que provoca una normalización de la distribución muestral a medida que este se incrementa. Con ello se muestra que no tienen en consideración las implicaciones del teorema del límite central.

Entre los 21 sujetos que contestan correctamente el primer inciso, 2 responden incorrectamente el segundo inciso, porque tienen la idea de que debe parecerse a la población. Con ello, sus respuestas son contradictorias, ya que en el primer inciso parecen tener claro el efecto del tamaño de muestra, pero fallan en el segundo inciso. Los sujetos que responden correctamente, dibujan una distribución parecida a la normal con centros que varían desde 7 hasta 12.

#### **Pregunta 4.**



La pregunta 4 tiene como propósito investigar si los sujetos de estudio tienen una idea correcta acerca de los valores más probables de las muestras que se extraen de una población con base en el conocimiento de su distribución, así como el efecto del tamaño de la muestra en la probabilidad de que se presenten ciertos resultados muestrales. A continuación mostramos sólo los resultados de los incisos b) y d).

Tabla 6: Distribución de respuestas de la pregunta 4b por subgrupo

<b>Respuesta</b>	<b>PE</b>	<b>PMEM</b>	<b>EA</b>	<b>EIC</b>	<b>PMCA</b>	<b>EP</b>	<b>PMV</b>	<b>PEV</b>	<b>PS</b>	<b>PEC</b>	<b>Total</b>
<b>Asignación y Justificación correcta</b>	4	3	3	3	3	4	1	5	1	2	<b>29</b>
<b>Asignación y justificación incorrectas</b>	0	3	1	1	0	0	2	1	1	1	<b>10</b>
<b>Asignación o justificación correcta</b>	2	0	1	0	1	1	1	0	0	0	<b>6</b>

Se puede observar que de los 29 sujetos que responden correctamente señalando que 80 años es la edad menos probable, 19 son profesores y 10 son estudiantes. Utilizan las siguientes justificaciones: “es un valor extremo o en una cola”, “donde hay menos datos”, “baja frecuencia”, “menor concentración de datos alrededor” y “está a más desviaciones del valor central”. Por su parte, de los 10 sujetos que contestan incorrectamente, dos responden que 90 es la edad menos probable, dos 18, uno 20, uno 60, uno entre 25 y 60 y tres no responden.

Tabla 7: Distribución de respuestas de la pregunta 4d por subgrupo

<b>Respuesta</b>	<b>PE</b>	<b>PMEM</b>	<b>EA</b>	<b>EIC</b>	<b>PMCA</b>	<b>EP</b>	<b>PMV</b>	<b>PEV</b>	<b>PS</b>	<b>PEC</b>	<b>Total</b>
<b>Asignación y Justificación correcta</b>	2	4	2	1	0	3	2	4	1	2	<b>21</b>
<b>Asignación y justificación incorrectas</b>	0	0	0	2	1	0	0	1	1	0	<b>5</b>
<b>Asignación o justificación correcta</b>	4	2	3	1	3	2	2	1	0	1	<b>19</b>

De acuerdo con los resultados de la tabla anterior, 21 sujetos mencionan correctamente que la respuesta sigue siendo la misma aún cuando haya aumentado el tamaño de la muestra usando como justificación “más confianza”, “mayor tamaño de muestra y menor variabilidad”, “la media muestral tiende a la media poblacional”, “se aproxima a la normal”, “está a más desviaciones de la media” y “está más a la cola o alejado de la media”. Algunas de las justificaciones de los 19 sujetos que hacen una asignación o justificación incorrecta son: “en la edades mayores hay menor incidencia de accidentes”, “la distribución sigue siendo la misma”, “las condiciones de las personas no cambian” y “los valores no representan un conjunto significativo de la población”.

### Niveles de razonamiento

En cuanto a la clasificación de los niveles de razonamiento utilizando el modelo SOLO, se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 8: Clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO

Nivel	Cantidad de sujetos	Subgrupo
Preestructural	4	PMEM, PMC y PMV
Uniestructural	22	Todos los subgrupos
Multiestructural	10	PE, PMCA, PEV,
Relacional	9	PE, PMEM, EA, PEC
Total	45	

Los resultados anteriores muestran que el nivel preestructural fue ocupado por profesores de matemáticas. Estos sujetos tuvieron una comprensión aislada de las implicaciones del teorema del límite central y en muchos casos ni siquiera respondieron los ítems. En el nivel uniestructural aparecen sujetos de todos los subgrupos. Estos sujetos identificaron una implicación del teorema, principalmente que la media de la población es igual a la media de las distribuciones muestrales. En algunos casos lograron identificar otra implicación más pero no la justificaron o bien lo hicieron en forma incorrecta. Por su parte, en el nivel multiestructural, los sujetos identificaron más de una de las implicaciones del teorema del límite central con justificaciones adecuadas en más de un caso y en otros con algunas imprecisiones. Finalmente, el nivel relacional lo ocupan 2 profesores de estadística de México, 3 profesores de estadística de Colombia, y 4 estudiantes de Arquitectura de Costa Rica. Estos últimos sujetos habían tomado un curso de estadística con conexiones al enfoque frecuencial y uso de simulación.

### CONCLUSIONES

Los resultados muestran que las implicaciones del teorema del límite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales, expresadas a través de histogramas con los resultados de muestreos repetidos resultaron difíciles de comprender para la mayoría de los sujetos de estudio, incluso para los profesores de estadística.

Respecto al efecto del tamaño de la muestra en la variabilidad y la forma de las distribuciones muestrales, fue identificado correctamente por un poco menos de la mitad de los sujetos; algunos de ellos sin justificar adecuadamente sus respuestas. Respecto a la relación que existen entre la media de la población y la media de las distribuciones muestrales, hubo mejores resultados, ya que 38 sujetos respondieron correctamente.

La idea de representatividad muestral constituyó el principal obstáculo para que los sujetos de estudio comprendieran el verdadero efecto del tamaño de muestra en la forma de la distribución muestral, al considerar que a mayor tamaño de muestra la distribución muestral debe parecerse más a la población. De igual forma, la idea de una distribución normal prototípica cercana a la distribución normal estandarizada constituyó un obstáculo para que muchos estudiantes asignaran los tamaños adecuados de muestra a una serie de distribuciones muestrales, al asignar los mayores tamaños de

muestra a la que según ellos era más normal, sin tener en cuenta el criterio de variabilidad que era más evidente.

Por su parte, casi la mitad de los sujetos (20 de 45) no identifican correctamente la variabilidad de un histograma aplicando la medida más sencilla de variabilidad como es el rango. Centran su atención en elementos como la simetría, la suavidad y sobre todo, en la irregularidad o altibajos de las frecuencias en la distribución. Los resultados son consistentes con otras investigaciones, por lo que se debe poner atención a este aspecto al momento de la enseñanza de estos temas, ya que la variabilidad es un concepto central en estadística.

En resumen, los resultados del presente trabajo proporcionan elementos, que si bien no pueden ser generalizados a todos los profesores de matemáticas y estadística –dado lo reducido de la muestra–, si nos permiten identificar una serie de dificultades que tienen los profesores y estudiantes universitarios al tratar con el teorema del límite central desde una perspectiva gráfica, dado que las relaciones exploradas requieren la integración de diversos conceptos estadísticos, mismos que no es común que se estudien en sus representaciones con histogramas; e incluso, aún quienes tienen una formación en estadística reflejaron confusión al responder preguntas planteadas.

El nivel de comprensión y razonamiento de la mayor parte de sujetos de estudio, como lo muestran los resultados, se ubica en los niveles inferiores de la categorización que hicimos por medio del modelo SOLO; es decir, no logran identificar las implicaciones principales del teorema del límite central. El nivel relacional solo es logrado por 9 sujetos, entre los cuales se encuentran 4 estudiantes universitarios que recientemente habían tomado un curso apoyado en representaciones gráficas mediante un software computacional y 5 profesores de estadística.

En los países de América Latina que se exploran en este estudio, parece ser que aún no se adoptado en forma plena el enfoque del análisis exploratorio de datos por medio de representaciones gráficas y el enfoque frecuencial de la probabilidad en los cursos de estadística, a través de los cuales es posible abordar un acercamiento empírico a conceptos complejos como el teorema del límite central como el que hemos propuesto en las diferentes preguntas del cuestionario. Ello podría tener influencia en las dificultades que los sujetos de estudio tuvieron para reconocer las implicaciones del teorema del límite central representadas en histogramas. Consideramos que se requiere mayor investigación en esta línea con muestras más representativas.

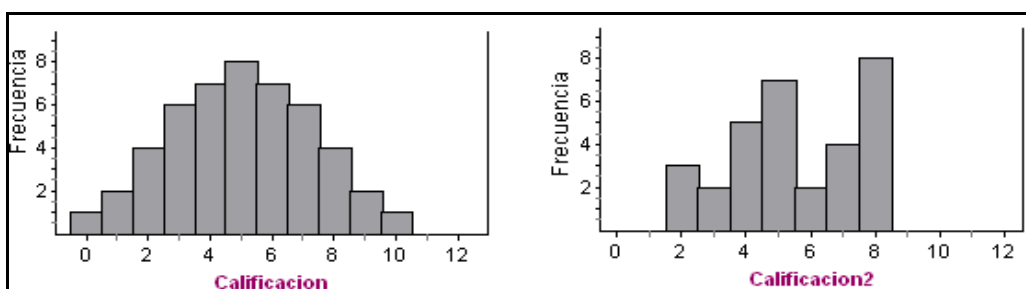
## REFERENCIAS

- Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy. Academic Press, New York.
- DelMas, R., Garfield, J., and Chance, B. (1999). Exploring the role of computer simulations in developing understanding of sampling distributions. Artículo presentadp en *Annual Meetings of the American Educational Research Association*, Montreal, Quebec, April 18-23. [http://www.tc.umn.edu/~delma001/stat\\_tools/aera1999/comparison.htm](http://www.tc.umn.edu/~delma001/stat_tools/aera1999/comparison.htm).
- Inzunsa, S. (2006). Some conceptions and difficulties of university students about the variability. In S. Alatorre, J. Cortina & M. Saiz (Eds.). *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida Yucatán México: PME-NA.
- Lee, C. & Meletiou-Mavrotheris, M. (2003). Some Difficulties of Learning Histograms in Introductory Statistics. *Proceedings of the American Statistical Association*,

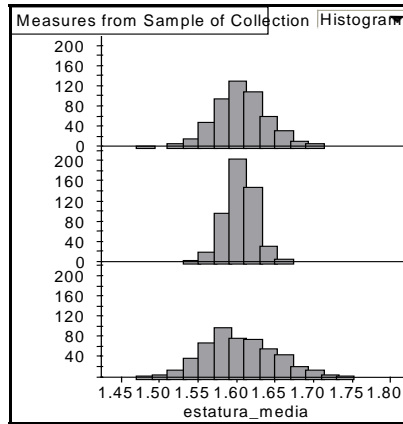
- Statistics Education Section [CD-ROM], pp. 2326 - 2333. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Lunsford, M. L. Rowell, G. H. & Goodson-Espy, T. (2006). Classroom Research: Assessment of Student Understanding of Sampling Distributions of Means and the Central Limit Theorem in Post-Calculus Probability and Statistics Classes. *Journal of Statistics Education*, Vol. 14(3).
- Gordon, F. & Gordon, S. (1992). Sampling+Simulations=Statistical Understanding: Computer Graphics Simulations of Sampling Distributions. En Florence and Sheldon Gordon (Editores). *Statistics for the Twenty-First Century*. MAA Notes, Number 26. The Mathematical Association of America. Pp. 207-216.
- Pfannkuch, M. (2005). Characterizing year 11 students' evaluation of a statistical process. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 5-25.
- Ramírez, G. (2006). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría sobre distribuciones muestrales mediante problemas de simulación en Fathom. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.
- Reading, Ch. & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: from a variation perspective. *Statistics Education Research Journal* 5(2), 46-48. [Disponible en línea]. <http://www.stat.auckland.ac.nz/serj>. International Association for Statistical Education (IASE/ISI).
- Tijms, H. (1992). Exploring Probability and Statistics Using Computer Graphics. En Florence and Sheldon Gordon (Editores). *Statistics for the Twenty-First Century*. MAA Notes, Number 26. The Mathematical Association of America. Pp. 189-206.
- Watson, J., Kelly, B., Callingham, R., & Shaughnessy, M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 34(1), 1-29.

## APÉNDICE

1. Marca con una X la distribución de datos que tiene más variabilidad. Justifica tu respuesta.

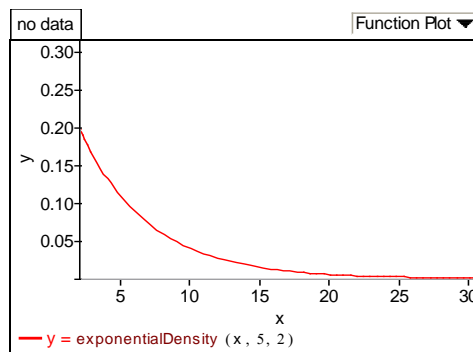


2. De una población con distribución normal se extrajeron 500 muestras aleatorias de tamaño 5, 10 y 30 respectivamente. Se calculó la media de cada muestra y los resultados se dibujaron en los histogramas que se muestran en la siguiente figura:

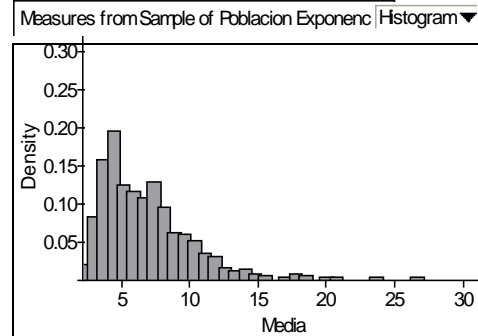
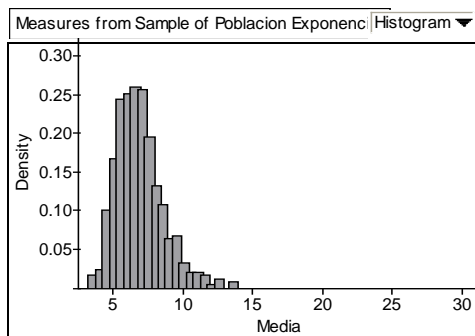


- Coloca a un lado de cada histograma, el tamaño de la muestra que corresponda. Justifica tu respuesta.
- Con base en la información de las gráficas, ¿Cuál sería el valor aproximado de la media de la población de donde se extrajeron las muestras? Justifica tu respuesta.
- ¿En cuál de las tres distribuciones será más probable obtener una media mayor a 1.65 cm? Explica en forma detallada.

3. En la siguiente figura se tiene la distribución de una población y dos distribuciones muestrales para muestras de tamaño 2 y 15. Coloca el tamaño de muestra a la distribución que corresponda (Nota: se tomaron 500 muestras en cada caso.)

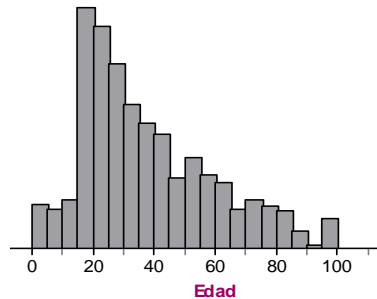


### Distribuciones muestrales



- Explica las razones de tu asignación
- Si la muestra seleccionada es de tamaño 30, dibuja la forma que podría tener la distribución muestral.

4. La siguiente distribución corresponde a las edades (en años) de una gran cantidad de personas que han tenido un accidente automovilístico. Consideremos tal distribución como una población.



Supongamos que se selecciona una muestra de 10 personas de la población y la media de las edades es calculada. Algunos posibles valores para la media muestral son 18, 25, 60 y 80 años.

- ¿Cuál de los valores muestrales consideras que es más probable de ocurrir? Justifica tu respuesta
- ¿Cuál de los valores muestrales consideras que es menos probable de ocurrir? Justifica tu respuesta.
- Con base en la gráfica de la distribución, ¿podrías estimar el valor de la edad media de la población de personas que han tenido un accidente?
- Supongamos que ahora se selecciona una muestra de 100 personas de la población y se calcula la media de la edad. En el inciso b se te pidió que señalaras qué valor de la media considerabas que era menos probable de que se presentara al seleccionar una muestra de 10 personas. ¿Consideras que aún sigue siendo la misma respuesta ahora que la muestra contempla a 100 conductores? Justifica tu respuesta.