OPORTUNIDADES QUE BRINDAN ALGUNOS ESCENARIOS PARA MOSTRAR EVIDENCIAS DEL MTSK[xxi]

Opportunities offered by some scenarios for showing MTSK' evidences

Eric Flores, Dinazar I. Escudero y Álvaro Aguilar

Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo plantea por objetivo señalar algunas oportunidades que brindan distintos escenarios para indagar acerca del conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas en dichos contextos. Utilizamos como marco de referencia el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, modelo teórico desarrollado recientemente con fines de exploración analítica del conocimiento del profesor. Los episodios analizados son obtenidos con diferentes acercamientos metodológicos, toda vez que nuestra intención es proporcionar escenarios en los cuales es factible observar y sistematizar evidencias de conocimiento. En las conclusiones presentamos una discusión acerca de cómo este estudio ayuda en la identificación de acercamientos metodológicos pertinentes para la exploración del conocimiento del profesor.

Palabras clave: *conocimiento especializado, profesor de matemáticas, escenarios de análisis.*

Abstract

The aim of this paper is to show some opportunities offered by different scenarios to inquire about the knowledge that mathematics teacher uses in this context. We use the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge as a reference framework, this is a new theoretical model developed for teachers' knowledge analytical exploration. Analysed episodes were obtained with different methodological approaches, because our intention is to provide scenarios in which we can observe and systematize evidence of knowledge. In the conclusions we introduce a discussion about how this research helps to identify pertinent methodological approaches to inquire about teachers' knowledge.

Keywords: *specilalised knowledge, mathematics teachers, analysis scenarios*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones que indagan sobre el conocimiento del profesor de matemáticas han dado como resultado el surgimiento de diferentes modelos que proporcionan una explicación acerca del contenido y naturaleza de dicho conocimiento. Así, tenemos los tres modelos discutidos en el *Research Fora* del PME en 2009 titulado *Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives* (Ball, Charalambous, Thames, & Lewis, 2009). Dichas perspectivas son el *Mathematics for Teaching* de Davis, & Smith (2006), el *Knowledge Quartet* de Rowland, Huckstep, & Thwaites (2005) y el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball, Thames, & Phelps (2008).

A partir de estos, han surgido nuevos modelos, ya sea como reflexión sobre algunos aspectos particulares (e. g., el *Knowledge for Algebra Teaching* de McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase, & Senk, [2012] como una particularización, dada por la enseñanza de álgebra, de diversos modelos para estudiar el conocimiento del profesor) o como reacción a situaciones que presentan dificultades en la investigación (e. g., el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [MTSK] de

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán [en prensa] como respuesta a una necesidad de corte analítico y de delimitación). Nosotros trabajamos con este último, con el MTSK.

Cuando surge un modelo, surgen también muchas preguntas: ¿para qué y por qué se crea?, ¿qué aporta respecto de los modelos existentes?, etcétera. Nosotros nos centramos en avanzar en la línea de identificar la potencialidad que ofrecen distintos escenarios al momento de indagar sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Nos basamos en parte de los datos empíricos recabados en las tesis doctorales de los autores de esta comunicación, las cuales comparten marco de referencia. Los profesores informantes son distintos, así como el método de recogida de información, lo cual no representa una limitación, ya que nuestra intención es aportar evidencias de la potencialidad de cada uno de estos escenarios.

MARCO DE REFERENCIA

El MTSK es un modelo teórico para estudiar, de forma analítica, el conocimiento del profesor de matemáticas. Surge como respuesta a problemas de delimitación entre los subdominios del MKT y a dificultades en su utilización para investigar elementos particulares de conocimiento (e. g., Flores, Escudero, & Carrillo, en prensa; Sosa, & Carrillo, 2010). Considera los avances y propuestas provenientes de distintos modelos de conocimiento profesional del profesor (e. g., Shulman, 1986; Ball *et al*, 2008, Rowland *et al*, 2005), en particular, la distinción en dos dominios de conocimiento, el Conocimiento Matemático (MK, de aquí en adelante, todas las siglas se corresponden con la traducción al inglés) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Estos dominios son a su vez divididos en subdominios de conocimiento (Carrillo *et al*, en prensa) de la siguiente forma:

Dentro del MK se consideran los siguientes subdominios:

Conocimiento de los Temas (KoT): el contenido de este subdominio incluye aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, ejemplos…, que caractericen aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos.

Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): entendemos que el conocimiento matemático del profesor debe incluir un sistema integrado de conexiones que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante el tratamiento a través de una visión avanzada.

Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): incluye el conocimiento de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico según Schwab, 1978), conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Saber, por ejemplo, qué es definir y cómo usar definiciones.

En el PCK ubicamos los subdominios:

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Conocer la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación (Shulman, 1986) para hacer comprensible un contenido determinado.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): se refiere al conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): es el conocimiento que posee el profesor acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Consideramos, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje.

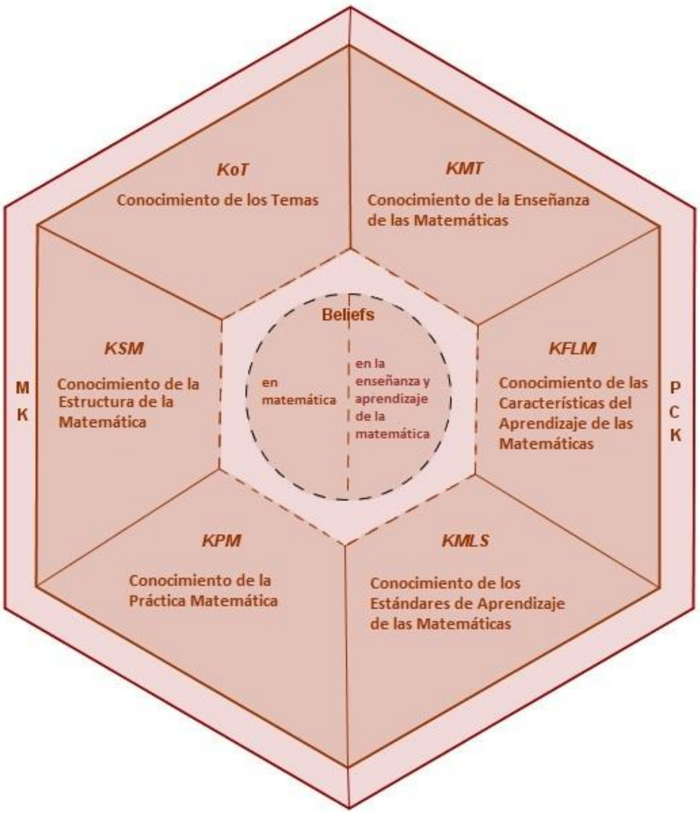


Figura 3. Subdominios del MTSK (Carrillo *et al*, en prensa).

En el MTSK, las concepciones que el profesor tiene acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje están consideradas como elementos que permean sus conocimientos y, por lo tanto, dan sentido a las diferentes acciones que éste realiza. No ahondaremos más en este punto por no tratarse de un elemento central en este trabajo.

OBTENCIÓN DE LOS DATOS EMPÍRICOS

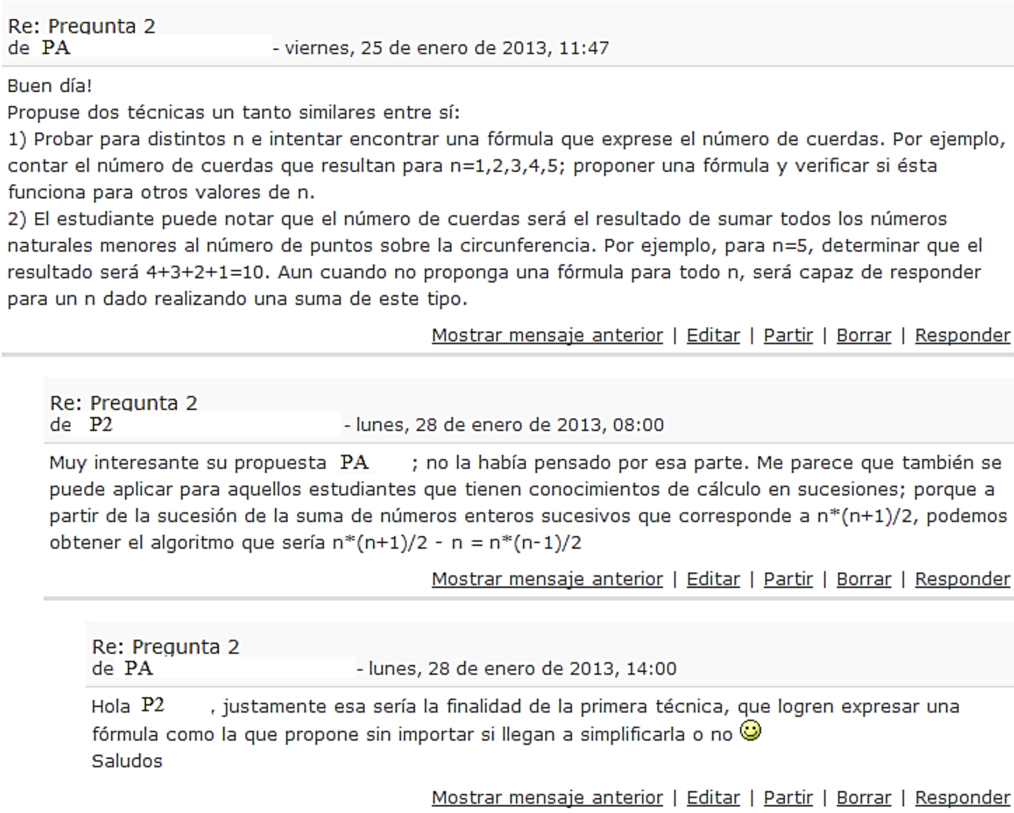
Los datos que presentamos son los análisis de episodios que forman parte de tres trabajos doctorales. No expondremos la intención particular de cada una de esas tesis, ya que el análisis aquí realizado resalta las oportunidades de exploración del MTSK que brindan los diferentes escenarios en los que se investiga el conocimiento del profesor.

Los escenarios fueron elegidos buscando cubrir distintos aspectos de la labor del profesor. Así, la profesora A fue analizada en un escenario de formación continua, la profesora B en la acción con sus alumnos y el escenario del profesor C fue la planificación de actividades para clase.

Profesora A

La profesora A es mejicana, imparte el curso de *pre-cálculo* en el primer semestre de la licenciatura en matemáticas. El siguiente episodio (Figura 2) es un fragmento de las participaciones que realizó en foros de discusión (en Moodle) que corresponden a actividades de la maestría (máster) en Matemática Educativa que cursaba.

Este episodio forma parte de la primera actividad del curso de Teoría de Situaciones Didácticas, en la cual se pide a los profesores que resuelvan *el problema de las cuerdas* (se colocan *n* puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?) y que posteriormente diseñen una guía pedagógica para implementarlo en el aula. Para finalizar la actividad los profesores discuten en un foro sobre las diferentes técnicas visualizadas para resolver el problema.


Re: Pregunta 2
de PA - viernes, 25 de enero de 2013, 11:47

Buen día!
Propuse dos técnicas un tanto similares entre sí:
1) Probar para distintos n e intentar encontrar una fórmula que exprese el número de cuerdas. Por ejemplo, contar el número de cuerdas que resultan para n=1,2,3,4,5; proponer una fórmula y verificar si ésta funciona para otros valores de n.
2) El estudiante puede notar que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia. Por ejemplo, para n=5, determinar que el resultado será 4+3+2+1=10. Aun cuando no proponga una fórmula para todo n, será capaz de responder para un n dado realizando una suma de este tipo.

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de P2 - lunes, 28 de enero de 2013, 08:00

Muy interesante su propuesta PA ; no la había pensado por esa parte. Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de PA - lunes, 28 de enero de 2013, 14:00

Hola P2 , justamente esa sería la finalidad de la primera técnica, que logren expresar una fórmula como la que propone sin importar si llegan a simplificarla o no
Saludos

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Figura 2. Fragmento del foro en el que interactúan la profesora (PA) y un compañero de maestría (P2), los nombres reales se ocultaron.

Profesora B

La profesora B es española, imparte clase de matemáticas en quinto de primaria. Los datos obtenidos son extraídos de la transcripción textual de videograbaciones de la puesta en práctica de una unidad didáctica sobre geometría cuya duración fue de dos semanas.

B ha discutido con sus alumnos la definición de polígonos y las características de éstos (ángulos, vértices y lados). Utiliza una trama de puntos para que sus alumnos puedan dibujar las figuras. En un momento de la clase, pregunta sobre el número mínimo de lados que debería tener una figura plana para que fuese un polígono. Sus estudiantes responden que serían tres lados. B dibuja un triángulo como el que se muestra en la Figura 3.

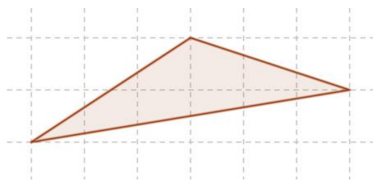


Figura 3. Triángulo dibujado por B

El siguiente episodio es la transcripción textual de las intervenciones de B ante los cuestionamientos de un estudiante (E1) provocados por el dibujo que aparece en la Figura 3:

E1: *¿Pero hay que dibujar triángulos normales o…?*

B: *No hay triángulos normales, E1.*
E1: *No, digo ése* [señala el de la pizarra].
B: *Éste es normal, ¿por qué no va a ser normal? ¿Qué le pasa para que sea anormal?* […]
E1: *Porque tiene la base…*
E2: *Está de lado, ¿no?,*
E1: *La superficie…*
B: *¿Qué le pasa a la superficie?*
E1: *Que está como así, como torcida* [por los gestos se deduce que E1 se refiere a que la base no coincide con la horizontal].
B: *No está torcida, yo no la veo torcida,* [...] *no lo veo raro, E1. ¿Le veis vosotros algo raro?* [Refiriéndose a toda la clase]

Casi todos dicen que no, uno de ellos le indica a B que gire la hoja hasta que coincida un lado con la horizontal.

B: *¿Así te gusta más?* [Siguiendo la indicación dada por el niño].
E1: *Sí.*
B: *Así te gusta más, ¿no? ¿Y ya así es normal? ¿Y así no es normal?* [Volviendo a poner el triángulo en la posición original].

Profesor C

El profesor C es mejicano. Da clase de matemáticas a un grupo de primero de secundaria (séptimo grado).

El escenario del que se extrae el episodio es la *Planificación de Actividades*. Dicha planificación corresponde al Bloque III de ese curso y plantea que el aprendizaje esperado será que el estudiante sea capaz de resolver problemas que impliquen los distintos tipos de ecuaciones de la forma $ax+b=0$, cuando a y b son números reales positivos. La planificación consta de una secuencia pensada para cinco sesiones de 50 minutos cada una, cuyo argumento central es calcular costes de compra y transporte de banderas olímpicas.

En la primera parte de la actividad, C proporciona los costes unitarios de las banderas que son diferentes en relación con sus dimensiones, y el coste de transportarlas, que es fijo sin importar la cantidad de banderas compradas, ni las dimensiones de estas. Está pensada para que los estudiantes propongan una expresión *general* para calcular el coste de comprar y transportar una bandera sin importar el tamaño que ésta tenga.

La segunda parte, que será nuestro objeto de análisis, consta de una serie de rectas colocadas en un plano cartesiano, todas cruzan por el origen y tienen diferentes pendientes. Representan, según el profesor C, “algunas compras de banderas con distinto precio” sin considerar el valor de transportarlas, menciona además que “son resultado de distintas ecuaciones”. Pide a los estudiantes que, con base en la información de precio unitario que se puede extraer de la gráfica, se determine el coste de más de una bandera. Algunos casos pueden ser resueltos a través de las gráficas y otros requieren ser calculados.

En la tercera parte afirma:

> “una ECUACIÓN es una de las formas en que podemos representar una FUNCIÓN, la gráfica en el plano cartesiano es otra y una forma muy común de representar funciones es de manera explícita, mediante todas la palabras que explican la relación existente entre los miembros de la igualdad”.

ANÁLISIS DE LOS DATOS EMPÍRICOS

El análisis se focalizó en dos aspectos: señalar oportunidades para mostrar evidencias de conocimiento para un determinado subdominio y resaltar cómo el escenario propició esa oportunidad. No pretendemos generar una propuesta *causa-efecto*, sino aportar evidencias de oportunidades que un determinado contexto provee para estudiar aspectos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Profesora A, subdominios KFLM, KPM, KoT y KMT

El fragmento de discusión que se generó en el foro nos permitió identificar oportunidades para profundizar en aspectos relacionados con cuatro subdominios, mediante la reflexión sobre declaraciones de A:

Declaración 1: Las dos técnicas que A propone en el foro hacen énfasis en formas de pensamiento y acción que podría tener un estudiante al momento de responder el problema. La asociación que hace A de las técnicas con los modos de proceder de sus estudiantes y con los conocimientos que pudieran poner en práctica, nos permite identificar un intento de anticipación, la cual nos brinda la oportunidad de explorar sobre el KFLM en el que se apoya para realizar esa anticipación.

Declaración 2: En otro momento, la profesora A pide que los estudiantes propongan una fórmula y verifiquen si ésta funciona para otros valores de n, lo cual nos invita a cuestionarnos acerca de las similitudes y diferencias que encuentra A entre la *verificación* a la que se refiere y la demostración de la generalidad en las fórmulas que propondrían los estudiantes. Esto nos ofrece una oportunidad para indagar acerca de los aspectos de conocimiento que la profesora involucra alrededor de la práctica de demostrar en matemáticas, que lo ubicamos en KPM.

Declaración 3: En su aportación, P2 señala un tema concreto que le permitiría al estudiante plantearse la posibilidad de llegar a una generalidad e incluso conocer la expresión en la que se basa dicha generalidad. La profesora A asocia ese razonamiento a su *primera* propuesta. Parece que ella no se diera cuenta de que el profesor hace referencia a una forma de avanzar en la *segunda* propuesta. De esta interacción podemos identificar un momento oportuno para indagar acerca de lo que la profesora entiende del razonamiento que propone P2, en términos de hacer explícito el KoT que utiliza la profesora con relación, tanto a la fórmula que propone P2, como a los otros posibles procedimientos que pueda concebir ella para resolver el problema.

Declaración 4: Identificamos también un último momento con potencial para discutir acerca de la gestión que A haría del recurso, cuando habla de que sus estudiantes *pueden notar* que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia, lo cual nos da oportunidad de preguntar a la profesora sobre su papel como guía de la actividad, haciendo referencia a lo que podría hacer ella para ayudar al estudiante a establecer esa relación, lo que posibilita obtener información del KMT.

De los foros valoramos las aportaciones provenientes de la discusión entre pares sobre aspectos puntuales, ya que, al tener la opción de discutir cada aportación (los mensajes individuales), se focaliza de mejor manera las oportunidades de explorar elementos de conocimiento sobre dicho aspecto puntual, ayudando al análisis que realizamos en nuestros estudios con el MTSK.

Profesora B, subdominios KMT y KoT

La maestra utiliza un triángulo en posición no estándar. La reacción de un estudiante pone de manifiesto la oportunidad de profundizar en las opciones metodológicas que sigue la profesora en su curso, viendo, por ejemplo, qué valoración hace de enfrentar a los estudiantes con situaciones poco habituales. Además, la profesora aborda la dificultad que asalta al estudiante, cuestionando las suposiciones de éste, pidiendo explicaciones, y consensua lo entendido con el grupo, lo cual nos proporciona la oportunidad de preguntarnos si ese modo de actuar es habitual y además explorar el conocimiento que pone en juego cuando decide cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas, lo que consideramos en el KMT.

Por otro lado, ante la clasificación de *normal* y *anormal* que propone E1, encontramos una oportunidad para explorar el conocimiento que posee B de la clasificación de triángulos y otras figuras planas y de la caracterización de sus elementos, y así profundizar en su KoT.

Vemos las transcripciones textuales de videograbaciones como soporte del escenario de la actuación del profesor, permitiéndonos así el registro de todas las interacciones ocurridas entre éste y los alumnos, y las que se generan entre los alumnos. Nos presenta la oportunidad de conectar elementos aislados de la clase para determinar conjuntos de conocimientos y de analizar cómo estos se adaptan a una intencionalidad perceptible. Además de brindarnos la posibilidad de tener una primera imagen de los conocimientos que pueden ser sistematizados, también nos da la oportunidad de encontrar coherencia entre aspectos que parecieran estar desasociados entre sí en una o varias clases.

Profesor C, subdominio KSM

En el análisis de la planificación del profesor C, decidimos, para esta comunicación, señalar aspectos puntuales que nos brindan oportunidades de adentrarnos en el estudio del KSM, particularmente, en los conocimientos que sustentan las conexiones interconceptuales (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras, Deulofeu, 2011) que realiza entre tres temas *diferentes*.

La noción *función matemática* tiene un papel central en el episodio descrito. El profesor relaciona la *ecuación* con una particularidad de la *función*, lo cual invita a profundizar en cómo y por qué las relaciona, más aún, se detecta que en la tercera parte de la actividad asocia el término ecuación con la representación analítica de la función, lo que nos inspira la generación de mecanismos para explorar más a fondo esa conexión, y así considerar, por ejemplo, preguntarle sobre el papel de la igualdad en una ecuación y en una función.

Por otro lado, el hecho de que las rectas graficadas en realidad no representan el fenómeno trabajado, permite la oportunidad de explorar relaciones entre las ecuaciones y un tipo particular de función, que es la que tiene dominio discreto, es decir, se presenta otra oportunidad de explorar las relaciones que el profesor puede establecer entre las sucesiones (vistas como funciones de **N** en **R**) y las ecuaciones.

Con lo anterior no queremos decir que el KSM se reduzca a analizar cómo el profesor conecta temas porque estos hayan aparecido en su planificación. Hemos elegido estos (ecuación, función y sucesión) porque el fenómeno que elige C para desarrollar su actividad da sentido a dichas conexiones.

Consideramos que analizar la planificación nos permite tener una panorámica de posibles aspectos de conocimiento para investigar en alguna otra práctica del profesor, en particular, para esta comunicación identificamos oportunidades para investigar en los aspectos de conocimiento matemático poniendo atención a dos: los conceptos matemáticos que el profesor deseaba comunicar a los estudiantes y los conceptos que él tomaba como base para plantear los anteriores.

CONCLUSIONES

Los resultados de esta comunicación han sido ampliamente presentados en la sección anterior. Son en torno a la potencialidad de ciertos escenarios al momento de investigar sobre el conocimiento del profesor.

Se da una relación simbiótica entre los episodios y el MTSK, donde el modelo nos proporciona una mirada *focalizada* para explorar oportunidades para profundizar en elementos de conocimiento de diferentes naturalezas y cuya exploración alimentará el contenido de cada subdominio. Los escenarios con los que realizamos esta investigación fueron elegidos buscando variedad: lo que pasa en una clase, lo que planifica un profesor y la discusión entre pares. En todos ellos encontramos oportunidades para profundizar provenientes de la propia configuración del escenario.

Entendemos que dicha profundización requiere de una adecuada triangulación con otros instrumentos y acercamientos metodológicos, cuyos resultados serán de una naturaleza distinta a los aquí reportados.

Referencias

Ball D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Ball, D.L., Charalambous C.Y., Thames M., & Lewis J.M. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. En M., Tzekaki, M., Kaldrimidou, & H., Sakonidis (Eds.).*Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, p.121-150.Thessaloniki, Greece: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (en prensa). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: CERME.

Davis B., & Simmt E. (2006). Mathematics for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (en prensa). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: CERME.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M., Marín, G., Fernández, L.J., Blanco, & M., Palarea (Eds) *Investigación en Educación Matemática XV*, 429-438. Ciudad Real: SEIEM.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M., & Senk, S. (2012). Knowledge of algebra for teaching: Framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Rowland, T., Huckstep P., & Thwaites A. (2005). Elementary teachers´ mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury, & N.J. Wilkof (Eds). *Science, curriculum and liberal education*, 229-272, University of Chicago Press: Chicago.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Sosa L. y Carrillo J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 569-580. Lleida: SEIEM.

[xxi] Los autores son miembros del proyecto de investigación “Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.