DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE NOMBRES DE CANTIDADES DURANTE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA[xxii]

Difficulties in naming quantities when primary students solve word problems in an algebraic way

José Antonio González-Calero[a], David Arnau[b], y Luis Puig[b]

[a] Universidad de Castilla-La Mancha

[b] Universitat de València

Resumen

En esta comunicación presentamos algunos resultados de una investigación sobre la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo en sexto curso de primaria (11-12 años). El principal objetivo del estudio es evaluar si la hoja de cálculo puede emplearse como un mediador en la enseñanza de la resolución algebraica de problemas. En esta comunicación describimos resumidamente las etapas y características de la investigación y mostramos ejemplos de la dificultad que presentan los estudiantes a la hora de asignar nombres adecuados a las cantidades involucradas en los problemas, así como su influencia en el proceso de resolución.

Palabras clave: *Aprendizaje y enseñanza del álgebra, prealgebra, resolución de problemas, nuevas tecnologías.*

Abstract

In this paper we discuss some results of an investigation into the teaching of algebraic solving of arithmetic-algebraic word problems to sixth grade students (11-12 years old) in a spreadsheet environment. The main aim of this study was to investigate whether the spreadsheet could be employed as a mediator to the teaching of algebraic problem solving. In this paper we describe briefly the stages and features of this research. Furthermore, we will show examples of the difficulty presented by students to give appropriate names to the quantities involved in the problems, as well as its influence in the problem solving.

Keywords: *Learning and teaching of algebra, prealgebra, problem solving, new technologies.*

González, J. A., Arnau, D. y Puig, L. Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao: SEIEM.

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

Desde prácticamente el momento en que las hojas electrónicas de cálculo se convirtieran en una herramienta ofimática de elevada difusión, han sido numerosas las voces que han defendido su potencial a la hora de abordar las dificultades más comunes en el paso del pensamiento aritmético al algebraico (Dettori, Garuti y Lemut, 2002; Friedlander, 1996).

En el caso concreto del uso de la hoja de cálculo (en adelante, HC) como un instrumento para la resolución algebraica de problemas verbales, podemos citar los resultados del *Spreadsheet Algebra Project* (Sutherland y Rojano, 1993). Este proyecto constaba de dos fases, una de las cuales estaba orientada a alumnos de 10-11 años sin ninguna formación algebraica previa, condiciones de partida similares a las del trabajo que presentamos en esta comunicación. A pesar de que este estudio enfatiza la potencialidad de la HC, las autoras también indican a modo de conclusión, que el trabajo con alumnos de estas edades puso en evidencia que "los alumnos de esta edad no piensan espontáneamente en términos de una fórmula general cuando trabajan por vez primera en el entorno de la hoja de cálculo" (p. 379). Este resultado parece subrayar la necesidad de instruir a los alumnos tanto en los usos básicos de la HC como en la resolución algebraica de problemas verbales en dicho entorno.

En el trabajo de Arnau (2010) se analizó cómo influía la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la HC en la competencia de los estudiantes de secundaria cuando resolvían problemas verbales con lápiz y papel y, en especial, mediante el método cartesiano. En este estudio se concluyó que los estudiantes al abandonar la HC recurrían en mayor proporción a métodos de resolución en los que no era necesario emplear el lenguaje del álgebra. Estos resultados plantean dudas sobre la conveniencia de enseñar a resolver problemas de manera algebraica en la HC en el nivel educativo de secundaria, cuando ya los alumnos han recibido instrucción en el lenguaje algebraico. Sin embargo, estas conclusiones no coartan el hipotético potencial de la HC en la enseñanza del álgebra con anterioridad a la formalización de dicho lenguaje.

Por otro lado, dentro de las investigaciones sobre dificultades en la traducción de problemas verbales al lenguaje del álgebra, Küchemann (1978) analizó las respuestas de estudiantes de secundaria a la tarea "Los lápices azules cuestan 5 peniques cada uno y los lápices rojos cuestan 6 peniques cada uno. Compro algunos lápices azules y algunos rojos y juntos me cuestan 90 peniques. Si b es el número de lápices azules comprados, y r el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedes escribir sobre b y r?" (Küchemann, 1978, p. 26). Observó que la respuesta errónea más común a esta tarea era $b + r = 90$ y lo interpretó señalando que estos estudiantes parecía que usaban las letras como etiquetas para referirse a conjuntos, siendo b y r abreviaturas de lápices azules (blue pencils) y lápices rojos (red pencils). En el mismo sentido, Rosnick (1981) recomendaba no escribir "P = profesores" cuando en realidad significa "P = número de profesores", como una consecuencia de la idea de que la ambigüedad de los nombres de las cantidades podría impedir al resolutor identificar unívocamente la cantidad a la que hace referencia.

Neuman y Schwarz (2000), en el curso de una investigación en la que se analizaban las resoluciones de problemas de mezclas por estudiantes de noveno grado, documentaron esta misma dificultad durante la traducción del enunciado a una representación tabular. En uno de los ejemplos presentados, un estudiante puso el nombre de "peso" a una cantidad, lo que hacía imposible identificar si se refería al peso de azúcar o al peso de mermelada. Los autores señalaron que "este etiquetado impreciso podría considerarse insignificante […] sin embargo, consideramos que esta vaguedad lingüística refleja la dificultad de organizar los elementos matemáticos en las categorías semánticas adecuadas" (p. 212). A modo de conclusión, los autores apuntaron que una importante fuente de dificultades en la resolución de problemas verbales se encontraba en la etapa de traducción del enunciado más que en la construcción de la ecuación.

En esta comunicación presentaremos parte de los resultados de una investigación más amplia en la que se pretende:1) analizar la viabilidad, haciendo uso de la HC, de iniciar la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales en sexto de primaria, nivel educativo donde el desconocimiento del lenguaje algebraico parece vedar esta posibilidad y 2) crear un catálogo de las actuaciones de los estudiantes de primaria, sin instrucción académica previa en el método cartesiano, cuando resuelven problemas verbales de manera algebraica en la HC.

En concreto, en estas páginas mostraremos ejemplos de actuaciones en las que se pondrá de manifiesto la incapacidad, por parte de algunos de los estudiantes que participaron en el estudio, para construir nombres apropiados para las cantidades involucradas en el problema, y cómo este hecho se traduce en dificultades durante el proceso de resolución. Las dificultades mostradas por los estudiantes se reflejan en una tendencia de los resolutores a asignar nombres ambiguos a determinadas cantidades, lo que es origen de errores a la hora de establecer las relaciones entre cantidades.

POBLACIÓN, DISEÑO Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se estructuró bajo las directrices que ofrece el marco de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, Rojano, y Puig, 2008). Los Modelos Teóricos Locales mediante varios componentes teóricos interrelacionados (un componente de competencia, un componente de actuación, un componente de enseñanza y un componente de comunicación) permiten tomar en consideración la complejidad de los fenómenos que se producen en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación, el componente de competencia se fundamenta en un análisis del método cartesiano y del método de la hoja de cálculo. El primer método por constituir el modelo de referencia en la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos (véase, Filloy, Rojano, y Puig, 2008), y el segundo, por ser una extrapolación directa del método cartesiano al entorno de la hoja de cálculo (véase Arnau, 2010). El componente de enseñanza se articula mediante una secuencia de enseñanza orientada a instruir a los alumnos en el método de la hoja de cálculo. Finalmente, el componente de actuación pretende dar cuenta de las acciones que realiza un estudiante cuando se enfrenta a una tarea matemática con la finalidad de caracterizar las estrategias que utiliza, los obstáculos que encuentra y los errores que comete. En concreto, la investigación estaba orientada a incrementar el conocimiento sobre este componente cuando estudiantes de primaria resuelven problemas verbales de manera algebraica en la HC. A su vez, estos componentes ofrecen un marco metodológico sobre el que estructurar el desarrollo de la investigación. Por motivos de espacio, sólo describimos las etapas de la investigación necesarias para abordar los objetivos de la comunicación.

Como los alumnos desconocían por completo el funcionamiento de la HC, el diseño de la enseñanza tuvo que incluir sus elementos y rudimentos básicos con antelación a la enseñanza del método de la hoja de cálculo (véase una descripción del método en Arnau y Puig, 2006). De esta forma, el modelo de enseñanza consta de dos partes bien diferenciadas: 1) la enseñanza de los rudimentos básicos de la HC; y 2) la enseñanza del método de la hoja de cálculo.

La secuencia de enseñanza se desarrolló en el aula de informática del centro al que pertenecían los estudiantes. Su desarrollo ocupó diez sesiones, cinco sesiones de 45 minutos de duración y otras cinco de una hora. Las sesiones se impartieron en el horario de la asignatura de matemáticas. Los alumnos se agruparon por parejas libremente con el fin de fomentar el proceso comunicativo entre ellos. La primera etapa de la secuencia de enseñanza, tenía como objetivo transmitir el conjunto de rudimentos básicos, así incluía las técnicas básicas siguientes: la identificación de los elementos de una HC (celda, fila, columna…), la introducción de fórmulas, la necesidad de uso de paréntesis, etc.

La segunda etapa, dedicada a la instrucción en el método de la hoja de cálculo, se inició con la resolución por parte del profesor de un problema-ejemplo mediante este método. A partir de este momento, y durante cuatro sesiones más, se brindó a cada pareja una colección de problemas para que fuesen resueltos de forma autónoma. Durante estas sesiones, dos o tres profesores prestaban ayuda a las parejas en el proceso de resolución. En las dos primeras sesiones los profesores actuaban prestando ayuda siempre que percibían dificultades en cualquiera de las parejas, mientras que en las dos últimas sesiones sólo intervenían bajo petición de las parejas.

Tras la realización de secuencia de enseñanza, cuyas principales características acabamos de describir, y en la que intervinieron todos los miembros del grupo (21 alumnos), se procedió a grabar en vídeo a estas mismas parejas conformadas para la secuencia de enseñanza, cuando se enfrentaban a la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la HC. En concreto, se preparó una colección de cuatro problemas, cuya principal característica es que la lectura más natural de los mismos desemboca en una resolución algebraica. Todos los problemas fueron seleccionados con la intención de que tuvieran un nivel dificultad similar a los problemas planteados durante la secuencia de enseñanza.

A continuación, para ejemplificar el tipo de problemas empleados, presentamos una lectura analítica del problema *Sillas y mesas*, ilustrada con el grafo correspondiente (Figura 1. Véase Filloy, Rojano, y Puig, 2008, para una descripción del tipo de grafos que usamos para representar la estructura de las lecturas analíticas). Más adelante ofreceremos extractos de las actuaciones de dos parejas durante sus resoluciones de este problema.

El problema "Sillas y mesas"

Hemos comprado 12 sillas y 2 mesas por un importe total de 1380 euros. Si una mesa cuesta 200 euros más que una silla, ¿cuál es el precio por unidad de cada artículo?

Una lectura analítica natural de este problema es la que transforma su enunciado en la lista de cantidades y relaciones siguiente:

Cantidades:

Precio de una silla. (*Psu*)

Precio de una mesa. (*Pmu*)

Número de sillas compradas. ($S = 12$)

Número de mesas compradas. ($M = 2$).

Precio total pagado por las sillas. (*Ps*)

Precio total pagado por las mesas. (*Pm*)

Importe total de la compra de mesas y sillas. ($T = 1380$)

Número de euros de más que cuesta una mesa respecto a lo que cuesta una silla ($Msm = 200$).

Relaciones:

$Ps = S \cdot Psu$

$Pm = M \cdot Pmu$

$Pmu = Psu + Msm$

$T = Ps + Pm$

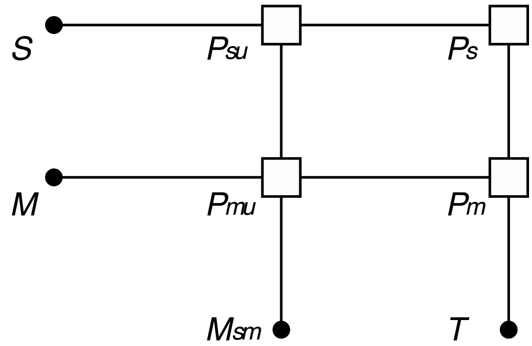

Figura 4. Lectura analítica de “Sillas y mesas”

DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE CANTIDADES

Una vez presentadas las principales características de la investigación, dedicaremos el resto de la comunicación a una de las dificultades que emergieron en la resolución algebraica de problemas verbales durante el estudio de casos. En concreto, nos centraremos en describir una dificultad ligada al primer paso del método de la hoja de cálculo, en el proceso de construcción de cantidades, donde se constató la tendencia de los resolutores a asignar nombres a las cantidades involucradas poco adecuados por su ambigüedad. Emplearemos la actuación de dos parejas al enfrentarse al problema *Sillas y Mesas* para documentar aspectos significativos de esta dificultad.

El primer paso del método de la hoja de cálculo consiste en la realización de una lectura analítica del enunciado del problema, de tal forma que el resolutor transforma el enunciado en una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades. Este primer paso suele reflejarse en la HC en la construcción de los nombres de las cantidades y en la asignación implícita de celdas para dichas cantidades. En el caso del método de la hoja de cálculo, el resolutor afronta un proceso de traducción del enunciado en lenguaje natural a una representación tabular anidada en la HC, con la potencialidad añadida de que el lenguaje de la HC habilita la simbolización de cantidades desconocidas y la formulación de relaciones entre cantidades, ya sean éstas conocidas o desconocidas. En el estudio de casos se observó que los alumnos tienden a poner nombres escuetos a las cantidades al representarlas en la HC. En Puig (2012) se explica que el método cartesiano precisa que las cantidades se nombren con nombres propios y no con nombres comunes. El lenguaje natural tiene mecanismos para convertir los nombres comunes como “precio”, por ejemplo, en nombres propios como “el precio de una silla”, en este caso el artículo determinado y el genitivo “de una silla”. Si los alumnos no elaboran un nombre propio distinto para cada cantidad (determinada) distinta, o lo abrevian al escribirlo en la HC, el nombre puede dejar de funcionar como el nombre propio asignado a una cantidad determinada concreta, y funcionar como un nombre común que puede referirse a varias de las cantidades determinadas. Entonces, en el curso de la resolución, los alumnos pueden olvidar qué cantidad querían nombrar con el nombre (abreviado) que han escrito, o confundirse de cantidad al usar ese nombre. A continuación analizaremos las actuaciones de dos parejas en el problema *Sillas y mesas*, donde se atestigua cómo, cuando los nombres que se ponen a las cantidades no están construidos de forma adecuada para funcionar como nombres propios o se abrevian, el proceso de resolución se ve condicionado en gran medida. En los extractos de protocolos escritos se mantiene la numeración de los ítems de la transcripción original.

La pareja Andrés-Julián en el problema “Sillas y mesas”

La pareja Andrés-Julián mantuvo el siguiente diálogo mientras llevaban a cabo acciones en la HC para resolver el problema partiendo de la situación representada en la Figura 2.

	A	B	C
1	Sillas	12	
2	Mesas	2	
3	Total euros	1380	
4	Total euros mesa		
5	Total euros silla		
6			

Figura 2. Contenido de la HC antes del ítem 2.

1. Julián:	A ver… por un importe total de mil tres cientos ochenta… Si una mesa cuesta doscientos euros más que una silla, ¿cuánto es el precio por unidad de cada artículo?
2. Andrés:	Una mesa cuesta…
3. Julián:	Doscientos más…
4. Andrés:	Igual a esto… (Introduce "=B1" en la celda B4.)
5. Julián:	Por dos… por doscientos…
6. Andrés:	Será más doscientos… (Concluye "=B1+200" en B4 y en dicha celda aparece el número 212.)
7. Julián:	Por…
8. Andrés:	¡Será más!
9. Julián:	Más… sí…

En este fragmento se aprecia cómo la ambigüedad de los nombres provoca que los estudiantes reinterpreten el significado de una cantidad a lo largo de la resolución, llegando a representar en la HC fórmulas erróneas a pesar de tener su origen en relaciones correctas. Así, la pareja representa dos cantidades llamadas "Sillas" y "Mesas" en las celdas B1 y B2, respectivamente (véase la Figura 2). Dado que informan estas celdas con el número de artículos comprados de cada tipo, parece evidente que ése es el significado que otorgan a estas cantidades. Sin embargo, pocos segundos después, cuando afrontan la traducción de la relación "una mesa cuesta doscientos euros más que una silla", Andrés introduce la fórmula =B1+200 en la celda B4, por lo que parece estar reinterpretando la cantidad "Sillas" como el precio unitario de las sillas. De este modo, aunque parece tener en mente la relación correcta $Pmu = Psu + Msm$, representa en la HC la relación incorrecta $Pmu = S + Msm$. La conducta de Andrés está amparada por la ambigüedad del nombre "Sillas", la cual impide una interpretación unívoca del significado de la cantidad. A continuación mostramos otro fragmento del protocolo escrito de esta resolución en el que se hacen patentes las dudas que genera en los resolutores los nombres de las cantidades. Antes presentamos las Figuras 3 y 4, que dan cuentan de la información contenida en la HC antes del ítem 97.

	A	B	C
1	Sillas	12	
2	Mesas	2	
3	Total euros	1380	
4	Total euros mesa	=B1+200	
5	Total euros silla	=B1+B6	
6	Unidad artículo	800	
7			

Figura 3. Fórmulas antes del ítem 97.

	A	B	C
1	Sillas	12	
2	Mesas	2	
3	Total euros	1380	
4	Total euros mesa	212	
5	Total euros silla	812	
6	Unidad artículo	800	
7			

Figura 4. Contenido antes del ítem 97.

97. Entrevistador: Ahí tienes total euros mesas… ¿eso qué quiere decir?

98. Andrés: Lo que vale la mesa…

99. Entrevistador: ¿Una sólo o…?

100. Andrés: Cada una.

101. Entrevistador: Y el total euros silla… ¿lo que vale cada silla?

102. Andrés: Sí… o lo que valen las sillas… es que ya no sé lo que…

El extracto muestra al entrevistador tratando de indagar qué significado otorga la pareja a las representaciones de las celdas B4 y B5. Aunque inicialmente Andrés declara que representan *Pmu* y *Psu*, termina dudando sobre a qué cantidad le habrá puesto esos nombres, si a *Pmu* y *Psu* o a *Pm* y *Ps* (ítem 102). Andrés parece tener claro que sólo debe significar una cosa pero evidencia dudas sobre qué significación le han dado. Parece plausible considerar que el nombre de la cantidad favorece el error, e induce a que en determinadas ocasiones den una u otra interpretación a la cantidad. La incorrecta interpretación de etiqueta de las cantidades cristaliza, tal y como hemos mostrado en este estudio casos, en la construcción de relaciones incorrectas entre cantidades.

La pareja Andrea-Marta en el problema "Sillas y mesas"

La pareja Andrea-Marta mantuvo el siguiente diálogo mientras llevaban a cabo acciones en la HC para resolver el problema partiendo de la situación representada en las Figuras 5 y 6.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	=B4+200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6			

Figura 5. Fórmulas antes del ítem 44.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6			

Figura 6. Contenido antes del ítem 44.

44. Marta: Y ahora sólo nos queda una en blanco, esa es la que tenemos que probar. Prueba algún número a ver si cambia algo. A ver qué cambia. Pon aunque sea un dos.

45. Andrea: Que no, voy a poner un cien. (Introduce “100” en la celda B4.)

46. Marta: ¡Hala! ¿Qué cambia? Euros mesa. ¿Cambia euros mesa? Ahh, sí. Pero, ¿qué tiene que coincidir?

47. Andrea: Euros mesa…

48. Marta: Euros mesa con total euros. (Señala A3 y A5 con dos dedos.)

49. Andrea: Pero dónde pone que tiene que coincidir eso. Vamos a cambiar, por ejemplo quinientos euros todas las sillas… (Andrea introduce “500” en B4.)

La pareja Andrea-Marta ha nombrado una cantidad “euros silla”, y dada la fórmula contenida en la celda B3, parece plausible considerar que interpretan esta cantidad como el precio unitario de las sillas y, por ende, la fórmula de la celda B3 da cuenta de la relación $Pmu = Psu + Msm$. En el fragmento mostrado se desarrolla un proceso de prueba y error sobre la cantidad “euros silla”, en la que destaca la intervención de Andrea en el ítem 49, al afirmar “vamos a cambiar, por ejemplo, quinientos euros todas las sillas…”. Esta verbalización demuestra un cambio de referencia de la cantidad “euros silla”, la cual pasa a ser interpretada como Ps. Al igual que sucedía con la pareja Andrés-Julián, el nombre de la cantidad no permite identificar claramente si hace referencia al precio total de las sillas o al precio de una silla.

Prosiguiendo con la actuación de Andrea-Marta, una vez que la pareja había desistido en el intento de resolver el problema, la HC presentaba la situación plasmada mediante las Figuras 7 y 8.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	=B4+200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6	total		
7			

Figura 7. Fórmulas antes del ítem 126.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6	total		
7			

Figura 8. Contenido antes del ítem 127.

Produciéndose en ese momento un diálogo entre el entrevistador y la pareja, del que rescatamos el siguiente fragmento:

126. Entrevistador: ¿Vosotras sabéis escribir lo que le cuesta la compra de doce mesas y dos sillas de otra manera aparte de mil trescientos ochenta?

127. Andrea: Esto (B1) más esto (B2).

El entrevistador, con el objetivo de obtener información sobre las dificultades que impiden a la pareja construir la ecuación, pregunta a la pareja si sabrían construir alguna relación que dé cuenta de la cantidad T, con lo que implícitamente señala la cantidad sobre la que ha de establecerse la ecuación. Andrea (ítem 127) afirma que sí, y verbaliza la relación incorrecta $T = S + M$. Nuevamente se pone de manifiesto como la ambigüedad de los nombres, se traduce en la construcción de relaciones erróneas. En este caso, Andrea afirma poder calcular el coste total de la compra de doce sillas y dos mesas sumando las cantidades nombradas “sillas” y “mesas”, a pesar de que a estas cantidades asignaron previamente los valores doce (número de sillas) y dos (número de mesas) respectivamente. Este comportamiento parece reflejar cómo a lo largo de la resolución del problema la etiqueta "sillas" es interpretada indistintamente como "número de sillas" o "coste total de las sillas".

CONCLUSIONES

Hemos puesto de manifiesto cómo la dificultad para nombrar adecuadamente las cantidades en la resolución algebraica de problemas en el entorno de la HC condiciona críticamente el proceso de resolución. El entorno de la HC propicia la visibilidad de esta dificultad, dado que su sistema de representación tabular fuerza al resolutor a asignar un nombre a todas aquellas cantidades a las que asigna una celda, mientras que en una resolución en lápiz y papel mediante el método cartesiano es habitual que los estudiantes no vean necesidad de informar el nombre a las cantidades y se limiten al uso de letras. El hecho de que esta dificultad se traduzca en un incremento de las relaciones incorrectas, parece indicar que debiera dedicarse atención a la construcción de nombres para las cantidades en la enseñanza de la resolución de problemas verbales.

Referencias

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Valencia: Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Arnau, D. y Puig, L. (2006). Formas de construir nombres y referirse a las cantidades en las actuaciones de alumnos de secundaria al resolver problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. *Actas del X Simposio de la SEIEM* (pp. 145–153). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2002). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*, Mathematics Education Library (Vol. 22, pp. 191–207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra*. *A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del algebra en hojas de cálculo. *UNO*. *Revista de Didáctica de la Matemática*, *9*, 71–75.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23–26.

Neuman, Y. y Schwarz, B. (2000). Substituting one mystery for another: the role of self-explanations in solving algebra word-problems. *Learning and Instruction*, *10*(3), 203 – 220.

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1 - 20). Jaén: SEIEM.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, *74*(6), 418–420.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 353–383.

[xxii] Esta investigación ha sido realizada dentro de los proyectos EDU2012-35638 y UV-INV-PRECOMP12-80109, concedidos por el Ministerio de Economía y Competitividad y el Vicerrectorado de Investigación de la Universitat de València.