

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA SOBRE VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES

Prospective Primary School Teachers' Specialized Knowledge about the Visualization of Three-Dimensional Objects

Margherita Gonzato^(a), Juan D. Godino^(a), Ángel Contreras^(b) y Teresa Fernández^(c)
^(a)Universidad de Granada; ^(b)Universidad de Jaén; ^(c)Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En esta comunicación presentamos las respuestas de una muestra de 241 futuros profesores de educación primaria a un cuestionario diseñado para explorar algunos aspectos relevantes de su conocimiento especializado sobre visualización de objetos tridimensionales. Concretamente se tienen en cuenta los tipos de justificaciones que dan a las soluciones de las tareas propuestas, las variaciones que proponen para usarlas con fines de enseñanza en la escuela y los conocimientos que identifican en la resolución de las mismas.

Palabras claves: formación de maestros, visualización espacial, conocimiento especializado, evaluación.

Abstract

We present the responses by 241 prospective primary school teachers to a questionnaire designed to explore their specialized content knowledge about the visualization of three-dimensional objects. We specifically take into account the variety of justifications given by the participants when solving the tasks, the changes they propose to use the tasks for teaching at school, and the knowledge they identify as involved in the tasks' solution.

Key words: teachers' training, spatial visualization, specialized content knowledge, assessment

INTRODUCCIÓN

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación de creciente interés en educación matemática. Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático requerido para enseñar matemáticas. Las reflexiones y recomendaciones de Shulman (1986) y las investigaciones de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Hill, Ball y Schilling (2008), suponen avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica docente y facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, es de interés profundizar en la trama de conocimientos que el profesor requiere para enseñar matemáticas, centrándose en temas específicos.

En este trabajo se informa de algunos resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que, con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009), hemos diseñado con el fin de explorar aspectos

relevantes de dicho conocimiento. Específicamente centramos la atención en la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre visualización de objetos tridimensionales representados en el plano.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y MARCO TEÓRICO

Un aspecto importante de la problemática de la formación de profesores en el tema de la visualización es identificar y evaluar las “habilidades espaciales” de los maestros y su relación con aspectos de la enseñanza. Consideramos la visualización de objetos tridimensionales como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (Battista, 2007, p. 843). Así mismo, la interpretación y la comunicación de la información espacial de manera figural, verbal o mixta, son importantes habilidades relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

En Gonzato, Godino y Contreras (2011) presentamos resultados parciales de una investigación sobre evaluación de conocimientos sobre visualización de objetos tridimensionales de estudiantes de magisterio, centrando la atención en las facetas de conocimiento común y ampliado puestas en juego en una muestra de tareas. Se reportaron los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario sobre el tema a 241 estudiantes de magisterio. Puesto que la investigación se refiere a futuros maestros no es suficiente tener en cuenta los conocimientos sobre los contenidos matemáticos que se pretenden desarrollar en los alumnos de primaria, y los correspondientes a niveles de secundaria (conocimientos común y en el horizonte matemático en la terminología de Ball y cols), sino que es necesario abordar la evaluación y el desarrollo del conocimiento especializado del contenido.

En términos de los tipos de geometrías propuestos por Parzysz (2006), las tareas presentadas en los ítems que evalúan el conocimiento común son propias de G1 (geometría espacio-gráfica, que involucra objetos físicos representados gráficamente, y validaciones perceptivo-deductivas). Sin embargo, el maestro necesita desarrollar un conocimiento especializado del contenido que le sirva de base para planificar e implementar su enseñanza, en este caso conocimiento propio del tipo de geometría G2 (proto-axiomática, que involucra objetos teóricos y validaciones hipotético-deductivas).

Dada la amplitud de aspectos que se deben incluir en el conocimiento especializado del contenido, como se describe en Godino (2009) aplicando el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, hemos seleccionado tres de dichos aspectos: los tipos de justificaciones que son capaces de elaborar los estudiantes de magisterio para las tareas, las variaciones que proponen para las mismas con vistas a su uso en la escuela y la reflexión epistémica que son capaces de realizar sobre los conocimientos que se ponen en juego en la resolución.

Para el desarrollo de esta investigación hemos adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012). Este marco teórico incluye un modelo epistemológico de las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo, sobre bases semióticas de índole pragmatista, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. Dentro de este marco teórico, en Godino (2009) se ha desarrollado un modelo para caracterizar el “conocimiento didáctico-matemático” que articula y desarrolla otros modelos sobre los conocimientos del profesor de matemáticas (PCK, Shulman, 1986; MKT, Hill et al., 2008).

METODOLOGÍA

Nuestra investigación se inscribe en un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Castro y Godino, 2012), procediéndose a recoger y analizar datos tanto cualitativos como cuantitativos mediante la aplicación de un cuestionario a una muestra de 241 estudiantes.

En Gonzato et al. (2011) se describe el cuestionario sobre visualización de objetos tridimensionales (Cuestionario VOT) que consta de 5 ítems de respuesta abierta, los cuales cubren los siguientes aspectos del tema:

1. Coordinar e integrar vistas de objetos:
 - Dibujar o identificar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva (ítem 1)
 - Dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales (ítem 2)
2. Plegar y desplegar desarrollos (ítem 3)
3. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (ítem 4)
4. Generar cuerpos de revolución (ítem 5)

Los aspectos del conocimiento especializado tenidos en cuenta se evalúan mediante la inclusión en cada ítem de las siguientes cuestiones:

- i. Justifica la respuesta (a las cuestiones propuestas que evalúan aspectos del conocimiento común)
- ii. Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea.
- iii. Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea para que resulte más difícil (o fácil, según el ítem) de resolver por un niño de primaria.

El cuestionario fue respondido por 241 futuros profesores del segundo curso de la especialidad Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011, en una sesión de dos horas de duración. Los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema fueron los relativos a sus formaciones básicas y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros.

RESULTADOS

En este apartado presentamos los resultados obtenidos en las cuestiones que evalúan aspectos relativos al conocimiento especializado del contenido. Incluimos resultados globales para los cinco ítems en los tres aspectos del conocimiento especializado, y ejemplos de respuestas para el ítem 5a, cuyo enunciado se incluye en la figura 1.

Para las cuestiones referidas al conocimiento especializado del contenido se diferencian y valoran diferentes tipologías de respuestas según el estudio de determinadas variables cualitativas: la tipología de las justificaciones descritas en cada cuestión se apoya principalmente en Harel y Sowder (2007) y Marrades y Gutiérrez (2000) (para la caracterización de las justificaciones empírico-perceptivas), en Parzys (2006) (para las validaciones perceptivo-deductivas e hipotético-deductivas) y en Recio y Godino (2001) (para las argumentaciones deductivas-informales y deductivas-formales).

Ítem 5a) Haz corresponder cada figura plana con el cuerpo de revolución que engendra al girar sobre el eje señalado.

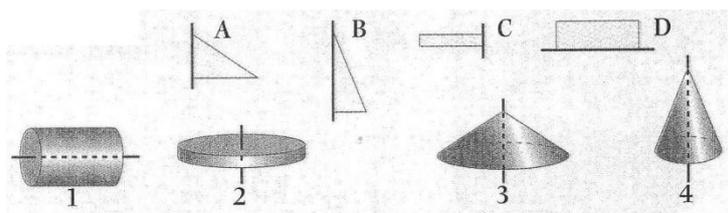


Figura 1: Ítem 5a) cuestionario VOT

Los conocimientos identificados por los alumnos se organizan según las categorías del EOS (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos), mientras que las variaciones de las tareas propuestas por los estudiantes se clasifican según los cambios sugeridos. Estos cambios pueden ser en el lenguaje y artefactos visuales, la descripción de conceptos visuales, las propiedades del objeto, el procedimiento visual involucrado, o en la longitud de la tarea. Además, para las diferentes cuestiones, se analizan posibles conflictos relacionados con la sinergia existente entre la componente visual y analítica presente en la tarea (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012).

Conocimientos argumentativos (justificaciones de las respuestas)

En las justificaciones dadas por los estudiantes encontramos interpretaciones de las tareas en términos empíricos, asociadas a validaciones de tipo perceptivo, en las cuales hay un predominio de la componente visual (Figura 2). En dicha respuesta se mencionan conceptos aislados relacionados con propiedades visuales de los objetos involucrados (en este caso, grosor y tamaño), sin describirlos.

Pues porque se diferencia dependiendo del grosor, el tamaño de las figuras

Figura 2: Ejemplo de justificación perceptiva del ítem 5a)

En las argumentaciones de tipo deductivo-informales, la sinergia entre lo visual y analítico propia de las tareas está a veces presente de forma implícita: en general para describir conceptos, propiedades y procedimientos visuales el sujeto utiliza un vocabulario cotidiano, cuyos términos se refieren a determinados objetos analíticos. Dicha relación entre los objetos visuales (“ver”) y objetos analíticos (“saber”), aunque no es explicitada por el estudiante, le permite no obstante hacer afirmaciones correctas sobre las soluciones presentadas, y en algunos casos justificar sus soluciones. Como ejemplo de prueba deductiva-informal incluimos el ejemplo de la figura 3.

- A → Al girar un triángulo rectángulo por uno de sus catetos obtenemos un cono .
 B → Al girar un triángulo rectángulo por uno de sus catetos obtenemos un cono .
 C → Al girar un rectángulo por su altura obtenemos un cilindro .
 D → Al girar un rectángulo por su base obtenemos un cilindro .

Figura 3: Ejemplo de prueba deductiva-informal

La carencia de pruebas deductivo-formales, con referencias a objetos independientes del contexto y con potencial de generalidad a diferentes situaciones, manifiesta que la interpretación del término “justificar” por parte de los alumnos ha sido estrictamente dependiente al tipo de tareas geométricas solicitadas. La gran mayoría de los estudiantes, no relacionan de forma espontánea la justificación de dichas tareas con otros temas más avanzados del currículo correspondiente, como puede ser el dibujo técnico, propiedades de geometría analítica, etc.

Identificación de conocimientos que se ponen en juego en la resolución de las tareas

A nivel global observamos que el grupo de alumnos ha conseguido identificar un conjunto bastante amplio de conocimientos que se ponen en juego en las tareas visuales seleccionadas, tanto relativos a conceptos, como propiedades y procedimientos. En el ítem 5 mencionan, entre otros, los conceptos de eje de revolución, generatriz, sección, volumen; como procedimientos, pasar de una figura de dos dimensiones a tres, girar polígonos sobre un eje; como propiedades, simetría, proporciones entre figuras 2D y 3D, posición del eje, entre otras.

Sin embargo, hemos observado que a nivel individual los alumnos tienen un conocimiento especializado muy pobre relacionado con la identificación de conocimientos puestos en juego en las tareas. Hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta sobre conocimientos movilizados en cada ítem (categorizando los diferentes tipos de objetos matemáticos reconocidos), y también un análisis cuantitativo, distinguiendo un grado de pertinencia al conjunto de conocimientos reconocidos por cada estudiante. El grado de pertinencia refleja el número de conocimientos pertinentes identificados por los estudiantes, los cuales han sido evaluados y clasificados comparándolos con una respuesta esperada elaborada mediante un análisis a priori de la tarea solicitada.

En la Tabla 1 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de dicha variable.

Tabla 1. Frecuencias absolutas (porcentajes) del grado de pertinencia de los conocimientos reconocidos (n=241)

Grado de pertinencia	Ítem				
	1	2	3	4	5
Pertinente	53 (22)	64 (26)	54 (23)	38 (16)	57 (24)
Parcialmente pertinente	73 (30)	81 (34)	68 (28)	55 (23)	61 (25)
No pertinente	104 (43)	73 (30)	102 (42)	93 (38)	96 (40)
En blanco	11 (5)	23 (10)	17 (7)	55 (23)	27 (11)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento especializado relacionado con la identificación de conocimientos en todas las respuestas. La puntuación media de toda la muestra relacionada con esta variable es solo de 3,6 (sobre 10).

De forma general se puede observar que la mayoría de conocimientos encontrados son de tipo conceptual: los alumnos mencionan conceptos básicos generalmente ya presentes en el enunciado de la tarea, aunque no los definen (Figuras 4 y 5).

- Figuras planas
- Cuerpos de revolución

Figura 4: Ejemplo de respuesta parc. pertinente.

- conceptos de figuras geométricas.
- concepto de plano
- concepto de polígonos.
- concepto de simetría
- concepto de giro
- concepto de cuerpo de revolución.
- concepto de figura plana.
- concepto de mediatriz generatriz.

Figura 5: Ejemplo de respuesta pertinente.

Modificaciones del enunciado de las tareas

De forma similar que en el caso de la identificación de los conocimientos, también por lo que se refiere a las variaciones de las tareas propuestas, podemos observar que a nivel global la muestra de

estudiantes ha conseguido proponer un conjunto amplio de cambios pertinentes y significativos. Sin embargo, observamos que a nivel individual los estudiantes tienen muy pobre conocimiento especializado relacionado con la formulación de posibles variaciones de tareas visuales.

Hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta sobre variaciones posibles a las tareas (categorizando los diferentes tipos de tareas propuestas), y también un análisis cuantitativo, distinguiendo un grado de pertinencia al conjunto de tareas propuestas por cada estudiante. De igual modo que para los conocimientos, el grado de pertinencia de las respuestas se asignó comparando una respuesta esperada, elaborada mediante un análisis a priori de la tarea solicitada, con las soluciones dadas por los estudiantes. En la Tabla 2 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de dicha variable.

Tabla 2. Frecuencias absolutas (y porcentajes) del grado de pertinencia de las variaciones de las tareas ($n=241$)

Grado de pertinencia	Ítem				
	1	2	3	4	5
Pertinente	63 (26)	49 (20)	87 (36)	40 (17)	50 (21)
Parcialmente pertinente	17 (7)	33 (14)	61 (25)	5 (2)	29 (12)
No pertinente	151 (63)	133 (55)	80 (33)	142 (59)	127 (53)
En blanco	10 (4)	26 (11)	13 (6)	54 (22)	35 (14)

La puntuación media de todo el grupo para la variable grado de pertinencia de la respuesta es solo de 3,0 (sobre 10). Estos resultados muestran muy pobre conocimiento especializado relacionado con la planificación de variaciones de tareas visuales.

Por lo que se refiere al ítem 5, se pedía indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea para que resultase más difícil de resolver para un niño de primaria. Entre las variaciones no pertinentes destacamos las que propusieron añadir al enunciado original elementos superfluos, que ponen un énfasis en la caracterización física asociada a la tarea (por ejemplo la necesidad de que el eje “mueva” la figura, o que ésta gire muy rápido (Figura 6). Entre las variaciones pertinentes emergieron las relativas a la omisión de elementos gráficos presentes en la tarea, o bien las figuras planas o bien los cuerpos de revolución, con el objetivo de que estos sean dibujados por los alumnos (Figura 7).

¿Si giramos muy rápido las figuras A, B, C y D
que cuerpo saldría de los de abajo?

Figura 6: Ejemplo de variación no pertinente al ítem 5.

Tenemos estas figuras planas dibujadas
el cuerpo de revolución que le corresponde.
Figuras planas:



Figura 7: Ejemplo de variación pertinente dada al ítem 5.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos a partir del análisis cuantitativo y cualitativo de las resoluciones que 241 estudiantes dieron a las tareas incluidas en el Cuestionario VOT, señalan que los futuros profesores muestran ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento especializado del contenido. Las justificaciones propuestas por los alumnos a tareas visuales de nivel elemental se refieren principalmente a validaciones de tipo perceptivo y argumentaciones deductivo-informales expresadas con un vocabulario cotidiano. Aunque en el contexto de la escuela primaria dichas argumentaciones se pueden considerar como pertinentes, consideramos necesario que los futuros maestros puedan formular una prueba deductivo-formal de referencia que justifique la validez de la proposición y guíe su forma de argumentar en los diferentes niveles educativos. Parzys (2006)

indica que los futuros profesores no tienen el conocimiento necesario para reconocer que una argumentación de tipo perceptivo y una demostración rigurosa no se sitúan en el mismo plano. Consideramos entonces necesaria una formación que incluya la reflexión sobre los diferentes tipos de esquemas de pruebas, y la manera de articularlos de forma progresiva, desde los primeros niveles educativos. Este conocimiento le permitirá cumplir una de las finalidades de la enseñanza de la geometría en los niveles educativos obligatorios, consistente en "hacer pasar a los alumnos desde una 'geometría de la observación' a una 'geometría de la demostración' " (Parzysz, 2006, p. 129).

La carencia de variaciones pertinentes a las tareas dadas puede influir negativamente en una futura gestión de una trayectoria didáctica idónea para el desarrollo de habilidades visuales en la enseñanza de la geometría espacial. Parece entonces conveniente preparar a los futuros profesores para realizar análisis sistemáticos de las variables didácticas que intervienen en una determinada tarea visual, que oriente la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos.

Las insuficiencias manifestadas en el conocimiento especializado relacionado con la identificación de conocimientos puestos en juego podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento matemático de sus futuros alumnos sobre la visualización. Estas carencias justifican la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros maestros. El análisis de las prácticas matemáticas, objetos y procesos (Godino, 2009; Font, Godino y Gallardo, 2013), puede ser una herramienta potente para la identificación y caracterización del conocimiento especializado, en tanto que proporciona pautas y criterios para analizar dichos tipos de conocimientos.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC) y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Referencias

- Ball, D.L., Lubienski, S.T., y Mewborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En Richardson, V. (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En, M. Marín et al (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99). Ciudad Real: SEIEM.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics* 82, 97–124.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1), 127-135.
- Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2), 163-184.

- Gonzato, M., Godino, J. D. y Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 383-392). Ciudad Real: SEIEM.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Harel, G., y Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hill, H.C., Ball, D.L., y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Johnson, B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33 (7), 14-26.
- Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 87-125.
- Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17, 128-151.
- Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14