EXPLORACIÓN DE LOS ESTILOS DE RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES CON ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS[xxiii]

Exploration of reasoning styles of mathematically talented students

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia

Resumen

En esta comunicación hacemos un análisis de los estilos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas de estudiantes de altas capacidades matemáticas, con el fin de identificar características diferenciadoras de estos estudiantes. En primer lugar, hacemos una síntesis de los principales modelos teóricos de caracterización de las altas capacidades matemáticas y repasamos la literatura relacionada con esta problemática. Después, presentamos varios casos de estudiantes de altas capacidades matemáticas resolviendo problemas y analizamos sus resoluciones para identificar los rasgos característicos de sus estilos de razonamiento.

Palabras clave: *altas capacidades matemáticas, resolución de problemas, estilos de razonamiento, educación primaria, ESO.*

Abstract

In this presentation we analyze reasoning styles and problem solving strategies used by mathematically talented students, to identify differential characteristics of these students. First, we synthesize the main theoretical models for identification of mathematical giftedness and review the literature on this issue. Then, we present some cases of mathematically talented students solving problems and we analyze their answers to identify the specific characteristics of their reasoning styles.

Keywords: *mathematically talented students, problem solving, thinking styles, primary school, lower secondary school.*

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se puede observar un aumento del interés de los diferentes actores del sistema educativo (autoridades educativas, legislación, libros de texto, profesores, padres, investigadores en educación matemática) por la problemática educativa de los estudiantes superdotados y de altas capacidades matemáticas (aaccmm). La LOE diferencia, dentro del grupo de estudiantes con necesidades educativas especiales, a los que tienen "altas capacidades intelectuales" y plantea la necesidad de realizar adaptaciones curriculares u otras actuaciones específicas. Algunas editoriales ofrecen a los profesores, como complemento a los libros de texto, unas fichas con actividades de ampliación para estos alumnos. Las asociaciones de profesores de matemáticas organizan actividades extraescolares, como olimpiadas, el proyecto Estalmat, talleres y otras, dirigidas a este colectivo de estudiantes. También hay centros de enseñanza y profesores de forma individual que toman la iniciativa de desarrollar materiales de enseñanza personalizados para sus alumnos. Sin embargo, podemos decir que, de manera global, la atención específica a los estudiantes de aaccmm en las aulas sigue siendo muy deficiente, siendo uno de los motivos principales la falta de materiales educativos especialmente diseñados para la formación matemática de estos estudiantes en sus centros de enseñanza.

En este contexto, estamos desarrollando un proyecto de investigación cuyo objetivo final es la elaboración de materiales de enriquecimiento para la enseñanza a los estudiantes de aaccmm de diferentes temas de matemáticas de los currículos de E. Primaria y E.S.O. Este objetivo requiere previamente obtener información detallada sobre las características cognitivas específicas de los estudiantes con aaccmm de estos niveles educativos, en aspectos como sus formas de razonamiento matemático, formas de resolver problemas, uso de habilidades de visualización, cálculo mental o formas de demostración, entre otros.

En dicho contexto, el objetivo de esta comunicación es presentar una descripción de algunos estilos de razonamiento puestos en práctica por estudiantes de E. Primaria y E.S.O. con aaccmm cuando resuelven problemas de matemáticas y ejemplificarlos en algunos casos concretos.

La información disponible sobre este tópico en la literatura sobre investigación en educación matemática es reducida, por lo que nuestro estudio tiene un carácter exploratorio y descriptivo. Somos conscientes de que, siendo siempre problemática la generalización de resultados obtenidos en los estudios de casos, la dificultad de generalizar comportamientos observados en estudiantes de aaccmm es todavía mayor debido a lo reducido y heterogéneo de este colectivo.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

La literatura sobre investigaciones con estudiantes de altas capacidades y superdotación incluye numerosas publicaciones que, desde la psicología, presentan formas de identificación, estrategias de tratamiento en aspectos sociales como las relaciones en la familia o en el aula, así como modelos teóricos que tratan de explicar y caracterizar la superdotación. No es nuestro objetivo bucear en este tipo de literatura, sino centrarnos en la que, desde la educación matemática, tiene que ver específicamente con investigaciones sobre aaccmm. Algunos autores han ofrecido listados de habilidades matemáticas que diferencian a los estudiantes con aaccmm, entre los que destacamos a Freiman (2006), Greenes (1981), Krutetskii (1976), Miller (1990) y Pasarín y otros (2004). En conjunto, las habilidades enunciadas por estos autores pueden organizarse en habilidades de tipo afectivo (relacionadas con el gusto e interés por las matemáticas), de aprendizaje (relativas a sus formas de aprender diferentes contenidos matemáticos) y de resolución de problemas (sobre sus estrategias de resolución, procesos metacognitivos de control, uso de la imaginación e intuición, etc.).

Nuestro interés se dirige al último grupo de habilidades, las relacionadas con la resolución de problemas, pues el objetivo del estudio que presentamos es identificar características de las formas de resolver problemas de matemáticas de los estudiantes españoles de aaccmm.

Algunos autores han investigado características de estos estudiantes en relación con aspectos concretos de su actividad de resolución de problemas, como la identificación de estudiantes con capacidad superior para la resolución de problemas de estructura multiplicativa y su aprendizaje de este campo conceptual (Castro, Benavides y Segovia, 2006, 2008), las relaciones entre aaccmm y las habilidades de visualización (Rojas, Jiménez y Mora, 2009) en contextos de problemas geométricos (Presmeg, 1986; Ramírez, 2012) y algebraicos (Jiménez, Rojas y Mora, 2011), las formas de inventar problemas características de los alumnos de aaccmm (Ellerton, 1986), las estrategias de resolución de problemas de demostrar (Sriraman, 2004), o las diferencias entre las estrategias de resolución empleadas por estudiantes de aaccmm y estudiantes medios (Heinze, 2005).

En las actas de los simposios de la SEIEM, hasta ahora han sido muy escasas las presentaciones de investigaciones sobre estudiantes de aaccmm: Castro (2008) ofrece una panorámica de las principales investigaciones publicadas hasta ese momento, en particular las relacionadas con la resolución de problemas. Reyes-Santander y Karg (2009) presentan la implementación de una unidad de enseñanza. Ramírez, Flores y Castro (2010) presentan una investigación orientada a observar las habilidades de visualización de estudiantes con aaccmm.

MARCO TEÓRICO

En la sección anterior hemos mencionado varias investigaciones cuyo objetivo es presentar listados de habilidades matemáticas que permitan diferenciar a los estudiantes de aaccmm y superdotados. De dichos listados, hemos seleccionado las siguientes habilidades por ser las que tienen relación directa con la actividad de resolución de problemas:

- Flexibilidad: Cambiar fácilmente de estructura y de estrategia, según convenga.
- Producir ideas originales, valiosas y extensas.
- Localizar la clave de los problemas.
- Identificar patrones y relaciones.
- Mantener los problemas y su resolución bajo control.
- Desarrollar estrategias eficientes.
- Simplificar los procesos al resolver problemas de tipo similar.
- No estar sujetos a técnicas de resolución que han tenido éxito en el pasado y poder hacer reajustes cuando éstas fallan.
- Tender a recordar las estructuras generales, abreviadas, de los problemas y sus soluciones.
- Tener capacidad de generalización y transferencia.
- Reducir el proceso de razonamiento matemático, simplificándolo para obtener soluciones racionales y económicas.

Estas habilidades no son disjuntas unas de otras, sino que durante la resolución de un problema se pueden usar varias de ellas, ya que algunas tienen su ámbito de aplicación en todo el proceso de resolución del problema mientras que otras son aplicables en momentos concretos. Por ejemplo, desarrollar estrategias eficientes o simplificar los procesos son unas habilidades amplias que se pueden utilizar al mismo tiempo que otras estrategias más específicas como localizar la clave del problema o identificar patrones y relaciones.

No intentamos validar la utilidad de estas habilidades para diferenciar a los estudiantes de aaccmm, pues asumimos que son adecuadas para dicho fin. El objetivo de la parte de nuestra investigación que presentamos aquí es, tomando estas habilidades como marco de referencia, recopilar información de estudiantes de aaccmm resolviendo problemas de matemáticas para identificar y describir estilos de razonamiento propios de estos estudiantes que los diferencien de los estudiantes medios. Por la limitación de espacio, en este texto sólo podemos mostrar ejemplos de algunas de las habilidades.

METODOLOGÍA

El objetivo de la investigación mencionado nos indica la conveniencia de usar una metodología de estudio de casos para la recogida de información y su análisis. El análisis de la información recogida no se centra en evaluar la corrección de las respuestas, sino en describir los procesos de resolución e identificar las estrategias empleadas por los estudiantes, con la finalidad de valorar aspectos como la rapidez de la resolución y el uso de habilidades enumeradas en la sección dedicada al marco teórico.

Al extraer conclusiones sobre las resoluciones de los problemas, es necesario tener también en cuenta los conocimientos matemáticos de los estudiantes, pues es frecuente plantear a estudiantes de aaccmm problemas cuya resolución típica se basa en contenidos matemáticos (conceptos, propiedades, fórmulas o algoritmos) que ellos todavía no han estudiado. Esto permite valorar habilidades relacionadas con la originalidad, creatividad, intuición o transferencia.

Aquí presentamos las resoluciones de problemas hechas por dos estudiantes, E1 y E2, trabajando solos en una sesión de un curso extraescolar específico para estudiantes talentosos. Ambos estudiantes tienen 11 años y sus capacidades matemáticas son claramente superiores a la media. El estudiante E1 cursa 1º de la E.S.O., porque ha sido adelantado de curso, y E2 cursa 6º de E. Primaria. Las resoluciones de los problemas y los diálogos entre investigadores y estudiantes que presentamos a continuación se grabaron en video.

ANÁLISIS DE DATOS EXPERIMENTALES

A continuación vamos a mostrar dos ejemplos de estilos de razonamiento empleados por estos estudiantes al resolver problemas de características diferentes.

Estilo de razonamiento: Identificar el elemento clave de un problema y flexibilidad para modificar el problema dado

El estudiante E1 está estudiando en su clase del instituto los problemas de móviles típicos escolares, aunque, en el momento de la entrevista, sólo ha estudiado los casos de móviles que circulan en sentido contrario hasta encontrarse y de móviles que salen del mismo punto con un tiempo de diferencia, circulando en el mismo sentido hasta que el segundo móvil alcanza al primero. Le planteamos el siguiente problema:

Román y Úrsula van por el mismo camino al colegio. La casa de Román está 200 metros más lejos del colegio que la de Úrsula. Los dos niños salen de sus casas a las 8’30 h. Úrsula camina a 80 cm/seg. y Román camina a 1’10 m/seg. ¿A qué hora se encontrarán?

E1 lee el enunciado y empieza sus cálculos:

$20000 \div 80 = 250$

$80\,(250 + x) = 110x$ [y continúa los cálculos hasta resolver la ecuación]

Al preguntarle qué está haciendo, explica:

E1: Es como si los dos [niños] salieran de la casa de Román pero Úrsula sale antes. He calculado cuánto tiempo tarda [Úrsula] en recorrer los 200 metros y es el tiempo de ventaja que tiene Úrsula.

Vemos cómo E1 ha identificado un elemento clave para resolver el problema (los puntos y las horas de partida) y transforma rápidamente un problema desconocido para él (móviles que circulan en el mismo sentido partiendo de diferentes puntos al mismo tiempo) en otro conocido (móviles que circulan en el mismo sentido partiendo del mismo punto con una diferencia de tiempo), mostrando así su capacidad para encontrar el elemento clave para resolver el problema y su flexibilidad para modificar la estructura del problema dado y convertirlo en otro conocido.

También hay que tener en cuenta, aunque el protocolo no lo refleja, la velocidad de resolución del problema, pues casi nada más terminar de leer el enunciado ha identificado el elemento clave del problema y ha empezado a resolverlo.

Estilo de razonamiento: Identificar el patrón y la relación entre las partes del problemas, flexibilidad, capacidad de generalización

Cinco meses antes del diálogo que transcribimos debajo, el estudiante E2 estuvo trabajando en el siguiente problema (abreviamos el enunciado por la limitación de espacio):

Aquí hay un triángulo al que se le ha añadido una línea [figura 3a]. *Podemos ver tres triángulos diferentes* [figura 3b].

- *¿Cuántos triángulos se ven si añadimos dos líneas al triángulo* [figura 3c]*? Dibújalos debajo y explica qué procedimiento has seguido para encontrarlos todos. ¿Estás seguro de que has contado todos los triángulos? ¿Por qué?*
- [se plantean las mismas preguntas para triángulos a los que se han añadido tres y cuatro líneas, figuras 3d y 3e].

- a - - b - - c - - d - - e -

Figura 3

- *Completa la siguiente tabla.*

Número de líneas añadidas:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*10*	*100*	*n*
Número de triángulos:	*3*	*6*						

- *¿Cuántos triángulos habrá si se añaden 8 líneas? (puedes utilizar la tabla para contestar). Explica tu respuesta.*
- [se repite la pregunta para triángulos a los que se han añadido 20 y n líneas, ahora sin figuras de apoyo].

Ahora, hemos vuelto sobre este problema con el objetivo de que el estudiante reconstruya su resolución. En varios momentos a lo largo del diálogo se puede observar que E2 no recuerda lo que hizo cuando estuvo trabajando en el problema, por lo que ahora tiene que resolverlo de nuevo casi como si fuera la primera vez.

E2: [reflexiona un tiempo, sin escribir nada, pero su cara indica que está calculando mentalmente]

Investig.: ¿Cuántos triángulos salen en el caso primero [figuras 3a y 3b]?

E2: Tres.

Investig.: Tres. Vale, pues anótalo ahí. ¿Y en el siguiente?

E2: Seis.

Investig.: Seis. ¿Cuáles son los seis [triángulos]?

E2: Tres triángulos de una parte [los señala en la figura 3c], dos triángulos de dos partes [ya no los señala] y un triángulo de tres partes.

Investig.: Muy bien. ¿Y si lo dividimos en cuatro?

E2: En cuatro, ... pues serían cuatro de una parte, ... diez.

Investig.: A ver, ¿cómo los has contado?

E2: Pues cuatro de una parte, tres de dos partes, dos de tres partes y uno de cuatro partes.

[sigue otra respuesta similar para el triángulo dividido en cinco partes]

Investig.: Muy bien. Y luego, si tenemos 100 partes, ¿cuántos triángulos habrá?

E2: [hasta ahora todos los cálculos los ha hecho mentalmente] Pues, ... es que ahora lo tengo que pensar.

Investig.: Pero escríbetelo si quieres, tienes ahí el lápiz.

E2: [coge el lápiz pero no lo usa; durante 42 segundos sus gestos indican que está calculando mentalmente]

Investig.: Cuéntame lo que estás pensando.

E2: Estoy pensando en la explicación que diste tú [cuando resolvimos el problema la primera vez].

Investig.: Ya, pero, ¿lo que has hecho hasta ahora sirve? Los recuentos que has hecho para dos partes, tres partes, ... ¿cuál es la secuencia que hay ahí?

E2: La secuencia, ... Que ahí es de n+1 más ... bueno, n es el número de líneas. n+1 más n más n-1 más n-2 más n-3 más n-4 más n-5

Investig.: [interrumpiéndole] Hasta ...

E2: Hasta cero.

Investig.: Hasta 1, el triángulo grande, que incluye todas las partes.

E2: Sí.

Investig.: Escribe eso, a ver, escribe esa suma. ... ¿Cuánto sumarían entonces? Si tenemos 100 partes, ¿cuánto sumarían? 1 más 2 más 3 ¿hasta ...?

E2: 100.

Investig.: Hasta 100. Y si tenemos n partes, es lo que has dicho tú, 1 más 2 más 3, hasta n.

Ahora E2 se queda pensando un momento pero el investigador le interrumpe y le explica el procedimiento para calcular la suma de los 100 primeros números naturales. E2 escribe las dos secuencias 1, 2, ..., 99, 100 y 100, 99, ..., 2, 1. El investigador le hace notar que todas las parejas de números suman 101 y le pregunta cuántas veces tiene 101. E2 contesta y, a continuación, hace el cálculo de 100 x 101, se da cuenta de que debe dividir el resultado entre dos y obtiene el valor correcto de la suma.

E2: Entonces, es ... [tras unos pocos segundos, escribe directamente la fórmula] n x (n + 1) / 2.

Investig.: n + 1 por n partido por 2. Muy bien. Esa es la fórmula general que te permite calcular cualquier suma de números [naturales] desde el 1 hasta el que quieras.

A lo largo de la resolución de este problema, el estudiante da muestras de su competencia en varias de las habilidades enunciadas: Identifica enseguida el patrón que organiza las secuencias de cantidades de triángulos generados por las sucesivas divisiones del triángulo inicial, gracias a lo cual es también capaz de simplificar el proceso de cómputo de la cantidad de triángulos ya que no necesita recurrir a dibujar los triángulos en los sucesivos casos para contarlos. Además, muestra la flexibilidad necesaria para aplicar el patrón a las sucesivas particiones del triángulo y encontrar las soluciones correspondientes. También es evidente su capacidad de generalización, en especial cuando, al pedirle la cantidad de triángulos que hay si tenemos 100 partes, trata de calcular la cantidad de triángulos del caso general, para *n* partes.

CONCLUSIONES

Las limitaciones de espacio no nos permiten incluir más ejemplos de estudiantes de aaccmm resolviendo problemas y utilizando otros estilos de razonamiento, pero creemos que los casos presentados aportan indicios de que los estudiantes de aaccmm son capaces de desarrollar una amplia variedad de habilidades de resolución de problemas específicas, diferentes o más avanzadas que las de sus compañeros de clase, que se traduce en una amplia diversidad de estilos de razonamiento.

Una cuestión a la que en este momento no podemos dar una respuesta apoyada en datos experimentales es si realmente los estilos de razonamiento de los estudiantes de aaccmm se diferencian mucho de los de sus compañeros de clase. Uno de los próximos pasos de nuestra investigación es cubrir este hueco planteando los mismos problemas a grupos completos de clase para observar los estilos de razonamiento y las estrategias de resolución de estudiantes con capacidades matemáticas no tan elevadas. No obstante, si observamos los resultados de las investigaciones citadas en las que se han comparado estudiantes de capacidades matemáticas medias y altas (Castro, Benavides y Segovia, 2006; Ellerton, 1986; Heinze, 2005; Reyes-Santander y Karg, 2009; Rojas, Jiménez y Mora, 2009), todos apoyan la hipótesis de que también los estilos de razonamiento de los estudiantes de aaccmm serán claramente diferentes de los de sus compañeros.

Referencias

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L.J. Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Versión electrónica disponible en <https://dl.dropbox.com/u/104572257/Actas/Actas12SEIEM.zip>.

Castro, E., Benavides, M., & Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca, 11*, 4-22.

Castro, E., Benavides, M., & Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Unión, 16*, 123-140.

Ellerton, N. (1986). Children’s made-up mathematics problems - A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261-271.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Jiménez, W., Rojas, S., & Mora, L. (2011). *Características del talento matemático asociadas a la visualización*. Texto de la presentación en el XIII Congreso de la CIAEM. Disponible en <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1175/234>.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. Washington, EE.UU.: ERIC. Disponible en <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED321487>.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., & Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en Educación Secundaria. *Faísca, 11*, 83-102. Disponible en <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2476416.pdf>.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 297-311.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar>.

Ramírez, R., Flores, P., & Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lérida: SEIEM.

Reyes-Santander, P., & Karg A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.

Rojas, S., Jiménez, W., & Mora, L. C. (2009). *El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas*. Texto de la presentación en el 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/709/1/eluso.pdf>.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267-292.

[xxiii] Este estudios es parte de las actividades del proyecto de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España en el Subprograma de Investigación Fundamental No Orientada del Programa Nacional de I+D+i.