

DEBILIDADES Y FORTALEZAS EN EL CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS MATEMÁTICOS EN GEOMETRÍA DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Strengths and weaknesses in Geometry Knowledge of Topics (KoT) of Prospective Primary Teachers

María del Mar Liñán García^a y Luis Carlos Contreras González^b

^aUniversidad de Sevilla, CEU San Pablo Andalucía, ^bUniversidad de Huelva

Resumen

Este trabajo resume una extensa investigación realizada para estudiar las fortalezas y debilidades de los Estudiantes para Maestro (EPM) en el ámbito de la geometría escolar. Basándonos en el modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), hemos realizado un estudio descriptivo en una muestra de EPM de las Universidades de Huelva y Sevilla y del CEU San Pablo Andalucía, utilizando un cuestionario de 17 tareas con diferentes aspectos geométricos. Los resultados muestran importantes deficiencias de los EPM en estos conocimientos pero también algunas fortalezas.

Palabras clave: *conocimiento de los temas matemáticos (KoT), conocimiento del profesor de matemáticas, formación inicial de profesores*

Abstract

This paper presents a brief summary of an extensive research about Prospective Primary Teachers (PPT) strengths as well as weaknesses in their knowledge about geometry. We have made a descriptive survey research based on the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge model (MTSK) with University of Huelva and Seville and CEU San Pablo Andalucía students, using a multiple choice questionnaire with 17 tasks gathering different Geometry questions. The results show important weaknesses in PPT knowledge of topics in Geometry, but also some strengths in such knowledge.

Keywords: *knowledge of Mathematics topics (KoT), Mathematics teacher's knowledge, prospective teachers' training*

INTRODUCCIÓN

Estudios como los de Gutiérrez y Jaime (1996) o Blanco y Contreras (2012), en relación con el concepto de altura de un triángulo, Baturo y Nason (1996), en el concepto de área de una figura plana, o Dickson, Brown y Gibson (1991) y Liping Ma (1999), en cuanto a las relaciones entre área y perímetro, entre otros, han mostrado que el insuficiente conocimiento sobre Geometría que los EPM evidencian es un obstáculo importante en su proceso de formación.

Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent (2012) han señalado algunas de las deficiencias de los EPM en el ámbito de la aritmética al inicio de su formación, apuntando la necesidad de mejorar los procesos de selección de los candidatos a Maestro en cuanto a sus conocimientos matemáticos básicos y asumiendo que una formación sólida en los mismos permitirá una mejor construcción de su conocimiento profesional.

MARCO TEÓRICO

Sobre la base del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), el grupo SIDM^{xxiv} de la Universidad de Huelva propone un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), es decir, todo el conocimiento que posee (o que sería deseable que poseyera) será especializado en tanto que le sea necesario para enseñar matemáticas. El modelo MTSK conserva la separación entre PCK y SMK de Ball —este último renombrado como MK (Conocimiento Matemático) — y consta de seis subdominios, tres referentes al MK: conocimiento de los temas (KoT), incluye aspectos fenomenológicos, significados de conceptos, o ejemplos específicos que caractericen aspectos concretos del tema abordado; conocimiento de la estructura matemática (KSM), que integra los conceptos en un sistema de conexiones, que permitirá al profesor comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas; y conocimiento sobre la sintaxis de las matemáticas (KPM), relativo a diferentes formas de (hacer) definir, argumentar, demostrar y pensar en matemáticas; y otros tres referentes al PCK: conocimiento de las características de aprendizaje matemático (KFLM), que incluye saber cómo aprenden los alumnos el contenido matemático y el conocimiento de las características de ese proceso de comprensión, así como de los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto; conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que supone conocer distintas estrategias de enseñanza que permitan el desarrollo de las capacidades, conocer recursos que permitan ayudar a los alumnos a construir conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar su intuición respecto de algunos conceptos y conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS), que además del conocimiento del currículo institucional, supone conocer producciones de las distintas investigaciones en el área de didáctica de las matemáticas respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa .

A pesar de ser un modelo diseñado para analizar la práctica, MTSK será nuestro referente para determinar los componentes deseables en el conocimiento especializado de un profesor de Matemáticas, ubicando así el conocimiento a explorar en los EPM, en nuestro caso, el KoT que muestran en algunos temas geométricos.

METODOLOGÍA

Descripción y finalidad del estudio

Con frecuencia detectamos en los EPM errores conceptuales relativos a las matemáticas de la Educación Primaria que dificultan su formación. Esta investigación, como parte del Proyecto de Innovación Docente de la Universidad de Huelva “*Conocimiento para Enseñar Matemáticas de los Estudiantes para Maestro: Análisis de Dificultades*” (PIE 1101), centrada inicialmente en la identificación de esas debilidades, encontró durante su desarrollo también interesantes fortalezas (Liñán, 2012). Así, la finalidad de la misma ha sido finalmente determinar debilidades y fortalezas en Geometría de los EPM del Grado en Educación Primaria al inicio de su formación; por tanto, la pregunta de investigación a la que buscamos responder es: ¿Qué carencias y fortalezas tienen los EPM en el KoT referido a Geometría al entrar en la universidad?.

Como informantes, han participado casi 740 EPM de las universidades implicadas, de los cuales ninguno había recibido formación en Didáctica de la Matemática relativa a los temas geométricos en el grado de Primaria.

Con una metodología tipo *survey* (Colás, 1998), se trabajaron cuatro dimensiones del conocimiento geométrico^{xxv}: Figuras Planas —elementos, clasificación y resultados notables y área y perímetro—, Cuerpos Geométricos —elementos y desarrollos planos—, Medida —procedimientos

unidimensionales-recubrimiento, descomposición-bidimensionales y Sistema Métrico Decimal y proporcionalidad geométrica— y Simetría emanados de Alsina Burgués y Fortuny (1992), Hill, Schilling y Ball (2004), Contreras *et al.* (2012), Hernández, Noda, Palarea y Socas, (2003), Moreno, Gil y Frías (2001), Zazkis y Leikin (2008), Gutiérrez y Jaime (1996), Baturó y Nason (1996) o Blanco y Contreras (2012), entre otros, y se organizaron en un cuestionario de respuesta cerrada con cuatro opciones posibles de las que solo una es correcta y, dentro de las otras tres incorrectas, hay una *respuesta esperada* inspirada en resultados de la citada literatura, cuyas preguntas resumimos a continuación.

Dentro de las Figuras Planas, los ítems sobre elementos (8 y 14) buscan su capacidad para identificar los ángulos que aparecen entre dos rectas paralelas cortadas por dos secantes entre sí y para ubicar la altura de un triángulo cualquiera. Las relacionadas con la clasificación y los resultados notables se subdividen en cuadriláteros —1, decidir cuáles de las figuras presentadas son rombos, 10 y 13, concluir qué definiciones corresponden únicamente a un cuadrado— y triángulos —2, considerar en qué tipos de triángulos se verifica el Teorema de Pitágoras. En cuanto a los relacionados con área-perímetro (3 y 11), pretenden calibrar si, dado un octógono dibujado en una cuadrícula, pueden obtener su perímetro y si, teniendo una figura construida a partir de otra dada, pueden decidir la relación entre las áreas y perímetros de ambas.

Sobre los Cuerpos Geométricos, los ítems 12 y 16 (elementos) examinan si los EPM conocen el número mínimo de caras de un poliedro y si identifican el pie de la altura de una pirámide cualquiera; en cuanto a desarrollos planos, el ítem 15 inquiriere sobre su capacidad para hallar el radio de la base de un cilindro dadas las dimensiones del rectángulo que se forma en su desarrollo plano.

En cuanto a Medida con procedimientos unidimensionales (17), se indaga sobre su habilidad para decidir la relación entre las áreas de dos descomposiciones de una misma figura, mientras que en los procedimientos multidimensionales y Sistema Métrico Decimal (4 y 6) se busca su conocimiento sobre las relaciones entre distintas unidades y su habilidad para, dadas las dimensiones de una figura descompuesta en dos, obtener su área. Referido a la Proporcionalidad Geométrica (7 y 9), se quiere saber si conocen el modo en que se transmite la proporcionalidad cuando se hacen proporcionales dos o tres dimensiones en lugar de solo una.

Por último, respecto de la simetría, se pretende conocer si pueden ubicar los ejes de simetría de un romboide, si existiesen.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Se analizaron las frecuencias de las respuestas al cuestionario globalmente (frecuencia de respuesta, línea de tendencia, tendencia del error general, porcentajes de error global *vs* acierto y error-error esperado-acierto, etc.) y de forma individual en cada pregunta (aciertos, errores y errores esperados). En un segundo estadio del análisis, se esbozaron las debilidades y las fortalezas: primero mostramos los resultados y, después, discutimos los mismos, enfocando esta discusión desde los objetivos fijados en el inicio del trabajo y teniendo como meta la respuesta a la pregunta de investigación.

Para ser concisos, hemos optado por unir en este apartado el análisis propiamente dicho con nuestra valoración del mismo.

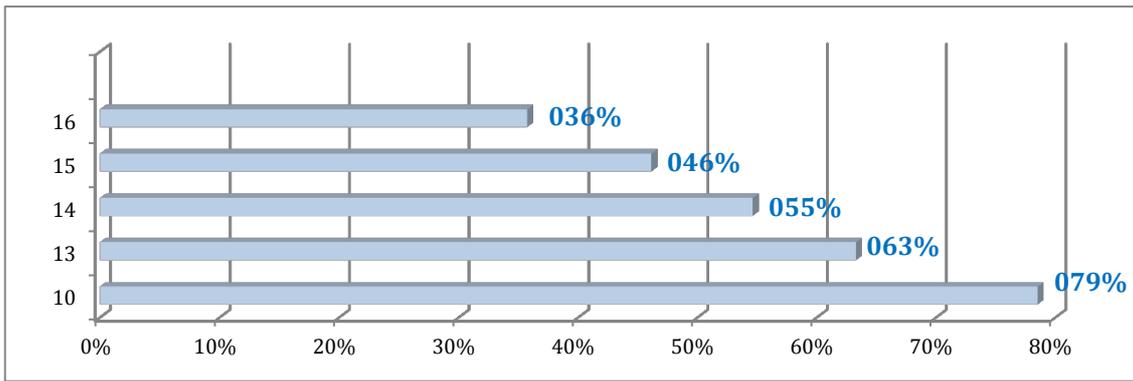


Figura 1. Frecuencia acumulada de respuesta.

En una primera observación de la frecuencia acumulada (Figura 1) vemos que más de un 50% ha contestado 14 ítems o más, porcentaje que aumenta hasta casi el 80% para los EPM que han respondido a 10 o más cuestiones; a nuestro entender, esto indica que respondieron con el interés necesario para que los datos obtenidos puedan considerarse significativos.

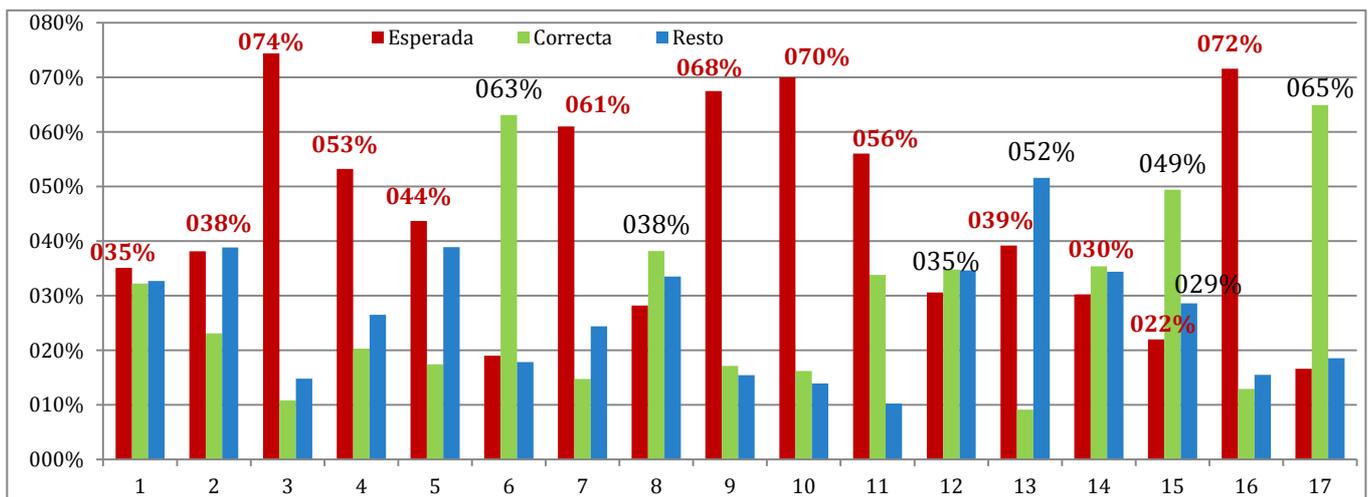


Figura 2. Distribución de respuestas: esperadas, correctas, resto

Al comparar aciertos, respuesta esperada y resto de errores, contrastando el error acumulado (suma de la respuesta esperada más el resto de opciones erróneas) con el acierto (Figura 2), conseguimos por un lado ver hasta qué punto se confirma lo que esperamos encontrar respecto de la Geometría de los EPM y, por otro, las debilidades y fortalezas de los mismos.

Mostramos a continuación los resultados agrupados por temas de las dimensiones descritas.

Figuras planas. Elementos

Los resultados de los ítems que informan sobre este tema (8 y 14) lo señalan como una debilidad en el KoT de los EPM. En cuanto a los triángulos, coincidimos con Climent (2011) sobre la tendencia de los estudiantes a identificar la base del triángulo con la horizontal y la altura con la vertical, debido seguramente a la forma habitual de mostrar un triángulo en los textos escolares con uno de sus lados paralelo a la horizontal, lo que se traduce en “apoyado en su base”. En el ítem 8, un error acumulado del 61,7% parece mostrar que los EPM no tienen asumido significativamente el concepto de altura de un triángulo.

En el ítem 14, sobre la cantidad de ángulos de distinta medida que se podían encontrar, el porcentaje de error acumulado superó en un 80% a los aciertos. Alsina *et al.* (1992) aluden a la importancia de la obtención de la suma de los ángulos de un ente geométrico por su interés inductivo y por sus implicaciones en el campo de validez y la iniciación a las demostraciones.

Figuras planas. Clasificación y resultados notables

Es otra de las debilidades en el KoT en geometría de nuestros EPM, tanto en lo referido a cuadriláteros como a triángulos; ya hemos citado que no tienen un conocimiento significativo de las características críticas de las figuras (Climent, 2011), lo que les genera una deficiencia en la idea clara de su clasificación.

En cuanto a cuadriláteros, los resultados del ítem 1 manifiestan la no percepción mayoritaria de las características críticas de las figuras presentadas. Posiblemente el problema reside en las imágenes estándar que los textos suelen mostrar: son escasos los materiales curriculares que tratan la clasificación inclusiva (Vecino, 2003). Por otro lado, a la luz de los resultados de los ítems 10 y 13, también parecen reflejar una carencia en el trabajo a fondo con la ejemplificación, es decir, no deteniéndose solo en esa forma o posición prototípica del cuadrado, sino definiendo cada figura de distintos modos incluso utilizando los nombres de otras figuras más generales añadiéndoles alguna característica que las particulariza. Aparece una nueva debilidad en la confusión apreciada entre el conocimiento sistemático de lo que son las diagonales, los ángulos, bisectrices de los mismos, perpendicularidad, etc. con el aprendizaje significativo de estos entes geométricos con sus relaciones y las consecuencias de exigir el cumplimiento de condiciones simultáneas, en la línea de lo descrito por Zazkis y Leikin (2008).

En lo referente a triángulos, el ítem 2 tiene una tasa de error muy superior a la de acierto; aunque la cota de error alcanzada en este tema está igualmente repartida entre el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, la clasificación de triángulos y el concepto de ángulo, consideramos que los EPM demuestran en general tener conciencia de lo que es un ángulo pero no de las relaciones entre los que se aprecian en un ente geométrico dado, aspecto señalado por Blanco y Contreras (2012).

Figuras planas: área-perímetro

En ítem número 3 sorprende el alto porcentaje de EPM que considera la figura presentada como un octógono regular (respuesta esperada: *el perímetro mide 8 cm*).

No reconocer la desigualdad entre los lados hace que los EPM interpreten que “*ciertas regularidades*” observadas convierten la figura en regular, sin tener en cuenta que se indica *expresamente* el hecho de que el octógono está inscrito en una cuadrícula.

El ítem 11, tiene una tasa de error prácticamente doble que la de aciertos. La obtención del área y del perímetro de esta forma debería ser inmediata y, sin embargo, genera dudas relacionadas con la visión estática de la geometría (Climent, 2011). El hecho de que cortando en partes una figura se conserve el área encerrada sin que se conserve el perímetro no parece estar asumido por los EPM. Moreno *et al.* (2001) aseveran que la percepción de área y perímetro no son independientes y el que dos figuras tengan la misma área induce a creer que tienen idéntico perímetro.

Señalamos, por tanto, una nueva debilidad referida a la falta de comprensión del significado y base lógica de los temas área y perímetro. El hecho de no distinguir las características críticas de las irrelevantes es uno de los orígenes principales de la mayoría de los conocimientos erróneamente adquiridos por parte de los EPM, que ya hemos mencionado.

Autores como Dickson *et al.* (1991) mencionan la confusión frecuente en los estudiantes entre área, perímetro y las posibles relaciones entre ellos; el hecho de que no conozcan el fundamento de ambos conceptos les puede llevar a pensar que a mayor área mayor perímetro (Liping Ma, 1999).

Si bien Climent (2011) considera que uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría ha de ser la observación de regularidades en las formas planas, en este caso esta observación les lleva a una conclusión errónea: no distinguen entre la detección de algunas regularidades, como el hecho de que los ángulos sean iguales y que los lados lo sean de modo alterno, con el concepto de *polígono regular*, uno de los motivos que les podría provocar un cálculo erróneo del perímetro de una figura.

Cuerpos geométricos: elementos

Los resultados obtenidos nos indican que este descriptor forma parte de las debilidades en el KoT en geometría de los EPM estudiados mostrando ausencia de un conocimiento significativo de las características críticas de las figuras y grandes carencias en la generalización de dichas características críticas.

El ítem 16, cuyo error esperado *–cae siempre en el centro de la base de la pirámide–* llega al 71,6%, de nuevo pone de manifiesto su carencia en las representaciones no estándar de cuerpos geométricos y en la identificación de la altura como el segmento contenido en la recta perpendicular al plano que contiene la base desde el vértice de la pirámide. Estas deficiencias relacionadas con las características críticas de formas y cuerpos geométricos han sido señaladas por Blanco y Contreras (2012), entre otros.

Cuerpos geométricos: desarrollos planos

Las frecuencias de acierto del ítem 15 hacen pensar en este punto como una débil fortaleza relacionada con el hecho de mostrar un dibujo sencillo ante una situación relacionada con una figura.

Medida: procedimientos unidimensionales y multidimensionales

Nos encontramos ante un tema que podría parecer una fortaleza dada la alta frecuencia de acierto detectadas (ítems 6 y 17); sin embargo, el gran porcentaje de error en otros ítems relacionados indirectamente, nos da una pista sobre el por qué de esa aparente fortaleza: la interpretación sencilla de un gráfico, apoyándose en un cálculo algebraico que les lleva a la solución. Podríamos decir, entonces, que ha emergido indirectamente una fortaleza razonada con la resolución algebraica de problemas geométricos.

Sin embargo, el alto índice de error en el ítem sobre el cambio de unidades de medida (4) nos hace señalar este tema como una debilidad. A pesar de que los EPM asumen la geometría como esa primera necesidad empírica de medir longitudes, superficies, volúmenes (Vecino, 2003), en buena medida debido a la falta de trabajo con el sistema de numeración decimal como un sistema posicional, tienen también dificultades con el Sistema Métrico Decimal. Estas dificultades se ven sobredimensionadas cuando se plantean cambios de unidades de superficie o de volumen, en los que los EPM deberían ser conscientes de la necesidad de saber lo que significa comparar, por ejemplo, un metro cuadrado con un decámetro cuadrado. Al no trabajar la medida como una comparación con una referencia dada, el paso a una medida multidimensional no es natural y, como consecuencia, no se identifica con el razonamiento subyacente.

Medida: proporcionalidad geométrica

Los EPM estudiados no parecen capaces de identificar cómo afecta a un volumen el aumento proporcional de sus tres dimensiones (ítem 7). El aprendizaje no significativo del cálculo del volumen de un ente geométrico tridimensional podría provocar el error detectado, no siendo capaces de observar el modo en que se transmite la proporcionalidad entre entes geométricos. De nuevo la medida no se está tratando como una comparación con una referencia dada.

Por otro lado, la confusión que muestran al comparar figuras (ítem 9), cuestiona no solo la capacidad de los EPM de reconocer figuras semejantes, sino también la dificultad de la inmensa mayoría al identificar, analizar y aplicar razonamientos proporcionales aplicados en este caso a la vida cotidiana (Contreras *et al.*, 2012).

Simetría

Emerge de nuevo una debilidad: el ítem 5 obtiene una alta concentración de error, lo que parece mostrar que el concepto *simétrico* se confunde con ciertas regularidades o patrones geométricos como es, en el caso del romboide, el hecho de que tenga lados iguales y paralelos dos a dos, y ángulos iguales dos a dos. Climent (2011) aprecia una gran dificultad de los EPM en la comprensión del concepto de simetría, destacando la confusión al identificar mitad de una figura con mitad simétrica, como ocurre en nuestro caso.

CODA

Los resultados corroboran los obtenidos en otros estudios y ponen de relieve las deficiencias en el KoT de los EPM. A la luz de los mismos cabe hacerse varias preguntas. En primer lugar, partiendo del modelo MTSK descrito más arriba, ¿en qué medida estas deficiencias son un obstáculo para el desarrollo de las demás componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? En nuestra opinión, los EPM deberían acreditar al comienzo de su formación un KoT que permitiera construir tanto las demás componentes de MK, como del PCK. El sistema universitario tendría que disponer de filtros más eficaces para medir el conocimiento necesario para acceder a los centros de formación de Maestros, o ¿es quizás asumible que debe ser competencia de los centros de formación inicial suplir las lagunas con que los EPM acceden? Cabría preguntarse, por otro lado, si al promover el desarrollo de las demás componentes del MTSK en los centros de formación de Maestros, podría también abordarse las deficiencias descritas anteriormente. Aunque no supone el contexto idóneo, pensamos que sí es posible. Por ejemplo, abordar con los EPM los beneficios de una clasificación inclusiva de los polígonos, analizar la riqueza de la geometría dinámica (frente a modelos estáticos y estandarizados), utilizando, como complemento, las propiedades del material manipulativo como las geotiras, o software como *GeoGebra*, permitirá incidir en elementos del KoT geométrico descritos (características críticas de las figuras, su construcción, elementos notables o simetría) a la vez que se desarrollan otros subdominios del MTSK. No obstante, si queremos apostar por un cambio importante a medio plazo en la formación matemática de nuestros EPM es preciso invertir ya en un modelo de selección y formación.

REFERENCIAS

- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J.M. (1992). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 399-406.
- Baturo, A., y Nason, R. (1996). Student teacher's subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31 (3), 235-268.
- Blanco, L. y Contreras, L.C. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 30, 101-123.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. *Paper presented at 8th CERME*. Antalya, Turkey.
- Climent, N. (2011). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Proyecto Docente y de Investigación no publicado. Universidad de Huelva, Huelva.
- Colás, M.P. (1998). Los métodos descriptivos. En M.P. Colás y L. Buendía (Eds.), *Investigación Educativa* (pp. 177-200). Sevilla: Alfar.

- Contreras, L.C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M.C., y Climent, N. (2012). Un Estudio Exploratorio sobre las Competencias Numéricas de los Estudiantes para Maestro. *BOLEMA*, 26 (42b), 433-458.
- Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC & Labor.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares, y M.V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, (pp. 143-170). Granada: Comares.
- Hernández, J., Noda, M.A., Palarea, M.M., y Socas, M.M., (2003). *Habilidades básicas en matemáticas de alumnos que inician los estudios de Magisterio* (Preprint). Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Hill, H.C., Schilling, S.G., y Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105, 11-30.
- Liñán, M.M. (2012). *Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento Matemático Común en Geometría de los Estudiantes Para Maestro*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva, Huelva.
- Liping, M. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Montes, M. (2011). *El conocimiento del profesor en relación con las dificultades para la comprensión del concepto de infinito*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva, Huelva.
- Moreno, M.F., Gil, F. y Frías, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. (pp. 503-532). Madrid: Síntesis.
- Vecino, F. (2003). Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas*. (pp. 301-328). Madrid: Pearson Educación.
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 131-148.

^{xxiv} Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática

^{xxv} Asumimos que son posibles otros criterios de agrupamiento, derivados de la estructura curricular o de la investigación en educación matemática, pero consideramos que este responde a los aspectos que quisimos estudiar.