TRABAJANDO LA METACOGNICIÓN EN UNA TAREA DE RAZÓN Y PROPORCIÓN[xxvii]

Working metacognition in a ratio and proportion task

Javier Monje[a], Patricia Pérez-Tyteca[b] y Bernardo Gómez[b]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Valencia

Resumen

Se describen los resultados de una investigación que trata del diseño e implementación de una propuesta de enseñanza dirigida a futuros maestros sobre "la relatividad" (Freudenthal, 2001) en tareas de razón y proporción. Esta propuesta se basa en el uso de las prácticas metacognitivas y en los principios de la Mayéutica Socrática, y ha sido experimentada en un grupo de estudiantes de tercer curso del grado de Maestro en Educación Primaria.

Palabras clave: *razón y proporción, metacognición, mayéutica, futuros maestros.*

Abstract

Our research focuses on the design and implementation of a teaching proposal aimed at pre-service teachers about the relativity (Freudenthal, 2001) in ratio and proportion task. This proposal is based on metacognitive practices, taking Socratic Maieutic principles. We have implemented this proposal with a group of third year pre-service teachers and the results obtained are told in this paper.

Keywords: *ratio and proportion, metacognition, maieutic, pre-service teachers.*

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

En la educación matemática son frecuentes los estudios que se ocupan por separado de alguna de las tres componentes principales de la actividad docente: el contenido disciplinar, el aprendizaje y la enseñanza. En el sistema educativo estas tres componentes están interconectadas, como los tres vértices de un triángulo, por lo que, en nuestro trabajo, optamos por un abordaje simultáneo de las mismas.

Este abordaje se apoya en investigaciones precedentes llevadas a cabo por nuestro grupo (Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig, 2009; Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo, 2013) en relación con el contenido: los conceptos de razón y proporción, el aprendizaje, basado en las prácticas metacognitivas (Rigo, Páez y Gómez, 2010), y la enseñanza, mediante el método de la mayéutica socrática (Rigo, 2011; Rigo y Gómez, 2012) (Figura 1).

Figura 1. Triángulo docente abordado

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El propósito de esta comunicación es dar cuenta del diseño e implementación de un protocolo de instrucción dirigido a futuros maestros, cuyos fundamentos teóricos son los siguientes.

Contenido

Los conceptos de razón y proporción aparecen en el currículo desde edades tempranas, y constituyen un soporte fundamental para una gran variedad de temas de las matemáticas, las ciencias, e incluso de la vida real. El buen manejo de situaciones relacionadas con precios por unidad, porcentajes, velocidades, densidades, o escalas entre otros, forman parte de las competencias mínimas que un futuro maestro debe poseer.

Razón y proporción están entre los temas "más difíciles de enseñar, de mayor complejidad matemática, de mayor desafío cognitivo, y más esencial para el éxito al avanzar en matemáticas y ciencias" (Lamon 2007, p, 629).

Abundando en esto, diversos trabajos de investigación han puesto en evidencia las dificultades que tienen los profesores de la escuela primaria y secundaria en relación con la comprensión y la enseñanza de estos temas (Ben-Chaim, Ilany, y Keret, 2002; Berk et al., 2009; Keret, 1999, citados en Ben-Chaim, Kerety Ilany, 2012), por lo que parece necesario desarrollar nuevas propuestas que contribuyan a remediar esta situación.

En particular, fijamos nuestra atención en la compresión y enseñanza del tipo de situaciones que Freudenthal (2001), en su fenomenología didáctica, considera que son aplicaciones que conservan la razón en las cuales está implícita la palabra "relativamente", como por ejemplo: "una pulga puede saltar – relativamente- más alto que un hombre" (p. 124).

Concretamente hemos escogido una tarea basada en una situación real de compra en la que se muestran diferentes ofertas (véase figura 2) extraídas de folletos comerciales y se pregunta qué descuento es mejor.

Figura 2. Descuentos mostrados a los estudiantes

La dificultad de esta tarea radica en dos componentes críticas. La primera de ellas es percibir que la pregunta no es sobre la magnitud del descuento (no se trata de ordenar de mayor a menor la cantidad que se descuenta) sino de entender que las ordenaciones (de los descuentos: mayor, menor) son relativas; es decir, “en relación con”.

La segunda componente crítica hace referencia a que, para comparar, es necesario construir una unidad de referencia común e interpretar la situación en términos de esa unidad (*unitizing,* en el sentido de Lamon, 1996. En lo sucesivo hablaremos de unitizar y unitización para referirnos a este proceso).

Aprendizaje

En relación con el aprendizaje seguimos las ideas de Lester, (1985), Schoenfeld (1985)o Lester y Kroll (1990) que destacan la importancia de potenciar la metacognición en los estudiantes, referida a las reflexiones (o interpretaciones) que hace un sujeto de sus procesos cognitivos (Schoenfeld, 1985; 1987; 1992), o más específicamente al

> “conocimiento o conciencia que uno tiene sobre sus propios procesos y productos cognitivos […] hace referencia, entre otras cosas, a la supervisión activa y la consecuente regulación y orquestación de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los cuales actúan” (Flavell, 1976, p. 232).

Partiendo de la idea de que el profesor representa un modelo a seguir para sus alumnos, desde la comunidad investigadora se defiende la implementación de técnicas metacognitivas durante la instrucción en el aula (Rigo, Páez, y Gómez, 2010). A pesar de ello “los maestros todavía ponen poca atención en la enseñanza explícita de la metacognición” (Desoete, 2007, p. 709).

Por este motivo consideramos fundamental trabajar prácticas metacognitivas con los maestros en formación para que en un futuro sean capaces de aplicarlas en su aula.

Un modelo teórico bajo el cual poder valorar los procesos metacognitivos que se ponen en juego en la educación matemática es el de Lester (1985). Este es un modelo que considera la componente metacognitiva como un constructo tridimensional en el que entran en juego variables que hacen referencia al propio sujeto (variables de persona), a la tarea que debe resolver (variables de tarea) y a las estrategias de que dispone para ello (variables de estrategia).

Enseñanza

En cuanto a la enseñanza, un método que se perfila potente para trabajar la metacognición en el aula es la mayéutica socrática, método pedagógico cuyo rasgo distintivo, como indica Rigo (2011), consiste en propiciar en el alumno un aprendizaje a partir del auto-reconocimiento de su ignorancia. Este método se desarrolla en tres momentos: construcción, de-construcción y re-construcción (Rigo, 2011; Rigo y Gómez, 2012).

En el momento de construcción, el docente plantea una tarea de la que sabe de antemano sus dificultades o los problemas que va a ocasionar en sus alumnos. Éstos resuelven la tarea en muchos casos insatisfactoriamente. Se les pide que realicen reflexiones metacognitivas sobre las variables de persona (confianza en su respuesta, cómo se han sentido antes y después de la resolución) y de tarea (qué contenidos están implicados en la tarea, qué opinión les merece su enunciado, qué grado de dificultad le otorgan, cómo justifican su resolución).

En el momento de de-construcción, el docente rebate las resoluciones efectuadas por los estudiantes enfrentándolos a su error, haciéndoles conscientes de la existencia de un conflicto cognitivo y propiciando que reflexionen sobre las estrategias adoptadas en la resolución de la tarea (variable de estrategia).

Por último, en el momento de re-construcción, el docente guía a los alumnos hacia lo que hasta ahora desconocían en relación a la tarea propuesta, hasta que el alumno reformula su resolución.

Patrones de respuesta

Para que el proceso mayéutico sea efectivo es necesario conocer de antemano los patrones de respuestas de los estudiantes a las tareas y haber tipificado sus dificultades sobresalientes, que posteriormente se aprovechan como oportunidades de aprendizaje en las fases de de-construcción y re-construcción.

A tal fin, para conocer los patrones de respuesta de los estudiantes, hemos desarrollado un esquema de clasificación en categorías, subcategorías, clases y subclases, como resultado de la aplicación de la tarea a un colectivo de 314 estudiantes de magisterio durante el curso 2011-2012, en su ambiente natural de clase (Para más información véase Gómez, et. al. 2013).

El primer criterio para agrupar las respuestas es si los estudiantes perciben la relatividad de la tarea o no. Esto determina dos clases: los que se fijan en que los datos (3×2, segunda unidad a mitad de precio, y 70% en la segunda unidad) son razones, y los que se fijan en elementos específicos y superficiales de las ofertas.

Dentro de la primera categoría encontramos dos subcategorías:

A.1. Comparan cantidades comparables: Estos estudiantes unitizan con éxito, usando las estrategias *parte-todo*, *valor unitario* y *construcción progresiva*.

A.2. Comparan cantidades no comparables: Estos sujetos se enfrentan con dificultades al unitizar. Se dividen en dos clases:

A.2.1. Razón unitaria parcial. Los sujetos toman diferentes unidades de referencia, calculan cuál es el porcentaje aplicado a cada unidad en el caso del 3x2 (33%) y lo comparan con el porcentaje que en los otros dos casos se aplica a la unidad rebajada (50% y 70%).

En este caso, los sujetos tienen problemas a la hora de unitizar ya que si bien cada uno de estos descuentos hace referencia a una botella, la unidad de referencia es diferente en el caso del 3x2 (cada una de las botellas) y en los otros dos casos (sólo la botella rebajada).

A.2.2.Construcción progresiva fallida. Los sujetos escogen comparar el coste o ahorro total al comprar el mismo número de botellas en los tres casos partiendo de un precio común. El problema es que la elección de la unidad de referencia es inadecuada, ya que si no se compran un número de unidades que sea múltiplo de 3en la primera oferta, o de dos en la segunda y tercera oferta, no es posible acogerse al descuento.

En la segunda categoría se agrupan las respuestas que no tienen en cuenta la relatividad del descuento y dentro de ella se distinguen dos subcategorías: B.1 con respuestas cualitativas, y B.2 con respuestas cuantitativas, que corresponden a sujetos que anclan su resolución a los datos concretos que aparecen en los folletos (precios dados en cada caso, número de botellas implicados en la oferta).

Esta subcategoría es la más significativa, y agrupa dos clases:

B.2.1. Operatividad. Los alumnos *c*alculan el coste o ahorro total utilizando los datos ofrecidos por el anuncio (diferentes precios y/o diferente número de unidades mostradas) y los comparan sin ponerlo en relación con el coste o compra total.

B.2.2.Numerosidad. En este caso los alumnos centran su respuesta en el número de unidades que el consumidor desee llevarse, considerando que la calidad del descuento depende principalmente de este factor.

METODOLOGÍA

Estructura del protocolo mayéutico

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, y ya conocidos los patrones de respuesta, se ha diseñado elprotocolo mayéutico de modo que en la misma sesión de clase de cualquiera que sea el grupo de futuros maestros, se puedan trabajar los tres momentos de la mayéutica de un modo no improvisado, con la siguiente secuencia:

Proceso autónomo

Este proceso corresponde al momento de construcción, donde se administra el cuestionario que contiene la tarea y las preguntas metacognitivas relacionadas con la tarea y la persona (¿has entendido la pregunta, te parece ambigua, cómo te has sentido, es difícil, crees que te faltan conocimientos matemáticos para resolverla?).

Proceso guiado por el profesor

Este proceso corresponde a los momentos de de-construcción, donde se presenta a los estudiantes del grupo los patrones de respuestas fallidos más significativos: B.2.1.yA.2.2; seguido del momento de re-construcción, donde se muestran ejemplos de resoluciones eficientes de los estudiantes de la prueba del 2011-2012.

El proceso se basa en la discusión y reflexión sobre las diferentes estrategias empleadas para resolver la tarea. El profesor/investigador formula las preguntas “mayéuticas” en cada momento para hacer aflorar los conflictos cognitivos subyacentes relacionados con cada una de las estrategias mostradas. Así, con las preguntas: ¿te convence cómo se ha resuelto?, ¿de qué depende el descuento? o ¿qué valoración le das a esa resolución?, se confronta a los estudiantes con sus nociones intuitivas haciéndoles conscientes de las limitaciones de sus ideas acerca de los conceptos involucrados. Además, se consigue que los alumnos expliquen sus razonamientos y escuchen y comprendan otras soluciones basadas en la relatividad del descuento y en la equivalencia entre las estrategias que resultan ser más efectivas.

Aquí finaliza el proceso guiado por el profesor.

Muestra, aplicación y codificación

El protocolo mayéutico se implementó en una sesión ordinaria de clase de la asignatura Didáctica de la Aritmética y la Resolución de Problemas correspondiente al tercer curso del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Valencia. Los alumnos que participaron son los que acudieron ese día a clase; un total de 36 estudiantes. La experiencia se llevó a cabo en el mes de febrero de 2013.

La sesión de clase fue llevada a cabo por uno de los investigadores y duró aproximadamente una 1 hora y 45 minutos. La sesión fue grabada en vídeo para su posterior análisis. Para comprobar el impacto que el protocolo mayéutico produjo en los estudiantes, una semana después se les pidió que volvieran a resolver la tarea.

Los datos obtenidos fueron codificados de manera cuantitativa (haciendo uso del esquema de clasificación de los patrones respuestas anteriormente realizado).

RESULTADOS

Resultados relativos al proceso autónomo

Los resultados de las preguntas que hacen referencia a la variable de tarea, mostrados en la tabla 1, indican que para todos los estudiantes la tarea es familiar y prácticamente la mayoría afirma entender lo que se les pide en ella. Aun así, para casi la mitad de ellos el enunciado es ambiguo porque los productos, cantidades ofertadas y precios son diferentes.

Casi la mitad de los alumnos cree que le faltan conocimientos matemáticos para afrontar la tarea. Además, algo más de la mitad consideran que la tarea es fácil antes de resolverla, aunque la mayoría de los que lo hacen (7/36) la resuelven insatisfactoriamente.

Tabla 1. Frecuencias relativas de las respuestas al cuestionario

La comprenden	Es ambigua	Es familiar	Faltan conocimiento	Fácil (antes)
34/36	16/36	36/37	17/36	20/36

Con respecto a las cuestiones relacionadas con la variable de persona, los resultados indican que al resolver la tarea 26/36de los sujetos se sienten regular o mal. Este sentimiento predomina entre aquellos estudiantes que tienen dificultad para resolver la tarea.

Una vez resuelta la mayoría afirma que se siente un poco mejor (la hayan resuelto correcta o incorrectamente) aunque casi nadie se siente 100% seguro de su respuesta. En los sujetos que no han sabido terminar la tarea predominan los sentimientos de impotencia.

En cuanto a la variable de estrategia, casi la mitad de los alumnos responden al perfil de *operatividad* (B.2.1.). Estos estudiantes están anclados a la información numérica superficial ofrecida en los folletos.

El número de botellas que desea comprar el consumidor no ha tenido influencia significativa en las respuestas observadas (B.2.2.).

Más de la quinta parte (8/36) tienen problemas al unitizar ya que comparan cantidades no comparables.

El resto de estudiantes se reparten del siguiente modo: 4 no terminan la tarea y 7 han empleado una estrategia eficiente (A.1.).

Resultados relativos al proceso guiado

El proceso guiado de discusión grupal ha permitido observar cambios, reflexiones y procesos de autorregulación por parte de los alumnos que pasamos a describir.

El grupo de estudiantes que ha resuelto la tarea comparando los descuentos como magnitudes sin relativizar ha ido cambiando su punto de vista a medida que el profesor mostraba las resoluciones que relativizaban y unitizaban. Se han dado cuenta, pues, de que su resolución no era correcta.

La mayoría de los estudiantes muestran en sus resoluciones estar anclados a los precios del anuncio y los consideran esenciales para resolver la tarea. Durante el proceso guiado muchos de ellos quedan convencidos de la conveniencia de asignar un precio inicial común en las tres ofertas para, a partir de él, realizar los cálculos. De este modo observan cómo, el caso de la oferta de la segunda unidad al 70% (que no tiene un precio concreto asociado) ya no constituye ningún problema. Así pues, en este momento observamos que se produce un "desanclaje" de los precios de los folletos. Algunos, muy pocos, tuvieron claro desde el inicio que el precio es irrelevante para dar respuesta a la pregunta de la tarea.

En cuanto a los alumnos que tenían problemas al unitizar (A.2.1.), tomaron consciencia inmediatamente de su fallo al ver una resolución en la que se unitizaba de manera correcta.

Por medio de la discusión en torno a la estrategia A.2.2., algunos estudiantes llegaron a la conclusión de que para poder comparar hay que tomar un múltiplo común de las cantidades ofertadas, pero otros alegan que el consumidor puede elegir qué cantidad comprar y que, dependiendo de ello, será más conveniente una u otra oferta. Los que alegan esto, aunque son un grupo reducido de sujetos, defienden con energía su argumento, que parece convencer a algunos de sus compañeros.

La sesión continúa con la presentación de las estrategias eficientes (A.1.). De la discusión asociada inferimos que, aunque la gran mayoría de los estudiantes admiten su eficiencia y le otorgan una nota alta, existe una creencia extendida (condicionada por el argumento que ha surgido anteriormente) de que esto no contesta a la pregunta.

Para ellos, el mejor descuento no es el relativamente mayor, sino el que más convenga al consumidor, por lo que está condicionado por el número de productos que desee llevarse.

En este momento, el profesor decide mostrar una nueva tarea. Consiste en la imagen de una caja con 6 CD que cuesta 39 euros y otra con 7 CD que cuesta 40, y pregunta cuál conviene comprar. Ante este ejemplo, la totalidad de la clase está de acuerdo en que hay que calcular el precio unitario para poder comparar. En esta tarea nadie considera que es necesario tener en cuenta el número de productos que nos llevamos.

A la vista de esto, el profesor pregunta por qué ahora ya no es relevante el número de unidades y antes sí (en la tarea del descuento). Los estudiantes, incapaces de proporcionar una respuesta, se quedaron pensando, y aquí terminó el proceso guiado por el profesor.

Posteriormente, al cabo de una semana, se pidió al mismo grupo de alumnos que volvieran a resolver la tarea del descuento para averiguar el impacto de la sesión mayéutica.

Los resultados obtenidos de esta segunda resolución muestran un incremento significativo en el número de estudiantes que descartan de inicio la oferta de la segunda unidad a mitad de precio, porque ahora son conscientes de que el "70% en la segunda" y "segunda unidad a mitad de precio" son directamente comparables.

Creemos que esta conducta es un producto de la sesión mayéutica, ya que anteriormente no apareció en ningún caso.

La mitad de los estudiantes que tenían problemas para unitizar y empleaban la estrategia A.2.1., ahora resuelven de manera eficiente, superando así sus obstáculos iniciales.

Se observa, además, un "desanclaje" generalizado de los precios del anuncio. Ahora prácticamente no aparece la estrategia B.2.1. Los estudiantes han comprendido que no son necesarios para resolver la tarea.

Sorprendentemente, ha aumentado ligeramente el número de estudiantes que consideran que el número de botellas que desea llevarse el consumidor es determinante para contestar a la tarea.

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que el protocolo de enseñanza ha ayudado a que los estudiantes se den cuenta de la relatividad del descuento, superando el anclaje inicial que tenían hacia los precios dados en el anuncio y el problema que esto les suponía para manejar el caso del 70%, comprendiendo que se puede responder directamente sin usar precios.

También se ha logrado que una mejora significativa en los problemas de unitización. Ahora los estudiantes unitizan el segundo y tercer descuento al 35% y al 25%por unidad y de este modo comparan cantidades comparables.

Sin embargo, aunque el conjunto de estudiantes ha aceptado de manera general la efectividad de las respuestas mostradas en el momento de re-construcción, en algunos de ellos persiste la idea de que por encima de todo, la calidad del descuento depende de las preferencias del consumidor

Como se puede observar es muy débil el dominio que tienen los estudiantes de los conceptos de razón, en particular de una de sus características fundamentales, la invariabilidad de la razón, que es lo que explica que todas las estrategias eficientes observadas son equivalentes.

REFERENCIAS

Ben-Chaim, D., Keret, B. S. e Ilany, Y. (2012). *Ratio and Proportion. Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)*. Rotterdam: Sense Publishers.

Desoete, A. (2007). Evaluating and improving the mathematics teaching-learning process through metacognition. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 5*(3), 705–730.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick (Ed.). The nature of intelligence (pp. 231–235). Hillsdale, N.J.: Lawrence ErlbaumAssociates.

Freudhental, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. Traducción Luis Puig. México: Cinvestav I.P.N. Departamento de Matemática Educativa.

Gómez, B.; Monje, J.; Pérez-Tyteca, P. y Rigo, M. (2013). Performance in ratio realistic discount task. *CERME 8 - Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Pre-congress publication. Papers in the website of the congress: Research Report. Working Group 2 Arithmetic and number systems. ERME (European Society for Research in Mathematics Education)*. Middle East Technical University. Manavgat-side/Antalya. Turquía.

Lamon, S. (1996) Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, N. Y.: Sunny Press.

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second*

Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41–69). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K., y Kroll, D. L. (1990). Teaching students to be reflective: A study of two grade seven classes. In G. Booker, P. Cobb & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings fourteenth PME Conference for the Psychology of Mathematics Education, with the North American Chapter twelfth PME-NA Conference* (Vol. 1, pp. 151–158). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Rigo, M. (2011). La Mayéutica y su aplicación a un cuestionario dirigido a docentes. En M. Rodríguez, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 523–532). Ciudad Real, España: SEIEM, Universidad de Castilla-La Mancha.

Rigo, M., y Gómez, B. (2012). "The maieutical doggy": A workshop for teachers. In T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 11-18). Taipei, Taiwan: PME.

Rigo, M., Páez, D., y Gómez, B. (2010). Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un marco interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 405–416.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). New Jersey: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

[xxvii] Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-35638