

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: ENFOQUES DEL MKT Y DEL MTSK^{xxviii}

Knowledge of the Mathematics' Teacher: Approaches of MKT and MTSK

Miguel A. Montes, Luis C. Contreras y José Carrillo
Universidad de Huelva

Resumen

Se presenta en este documento el análisis de un episodio real, bajo los modelos de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) propuesto por Ball, Thames, y Phelps (2008), y Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), propuesto por Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán (2013). Este ejemplo, contextualizado en el tema de representación de funciones en Bachillerato, permitirá mostrar las diferencias entre MKT y MTSK, a través de la comparación de ambos análisis.

Palabras Clave: MKT, MTSK, conocimiento profesional

Abstract

We present in this paper, a real class episode analyzed through MKT model proposed by Ball, Thames, & Phelps (2008) and through MTSK model proposed by Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán (2013). This example, contextualized in functions representation in a pre-university course, will allow us to show the differences between MKT and MTSK, through the comparison between both analysis.

Keywords: MKT, MTSK, Professional Knowledge

CONTEXTUALIZACIÓN TEÓRICA

El conocimiento para la enseñanza es un foco de atención en auge para la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas. En Ball, Thames y Phelps (2008), encontramos una evolución de los subdominios descritos por Shulman (1986), el conocimiento de la materia (*SMK*) y el conocimiento didáctico del contenido (*PCK*), en su propuesta de modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, de sus siglas en inglés [Ver nota 1]), en el que define seis subdominios diferentes, Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), Conocimiento del Horizonte (HCK), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y Conocimiento del Currículo (KCC); los tres primeros dentro del SMK de Shulman, y los otros tres dentro de su PCK.

La idea de conocimiento especializado del contenido está reconocida como una de las grandes aportaciones del modelo MKT, tanto por sus propios autores, como por la comunidad internacional (e. g. Flores, Escudero, y Carrillo, 2013; Carreño, y Climent, 2009; Hill, Ball, y Schilling, 2008). El conocimiento especializado del contenido es entendido como aquel que es exclusivo del profesor de matemáticas para desarrollar su profesión, frente al conocimiento común del contenido, aquel que puede poseer cualquier usuario de la matemática en su labor profesional, como pudiera ser un Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

ingeniero, físico, o biólogo. Sin embargo, este subdominio ha sido objeto de discusión entre los propios investigadores en educación matemática, debido a los problemas de delimitación con el KCS o el CCK (Flores, *et al.*, 2013), o incluso con el HCK (Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013).

Recientemente, el grupo de investigación de la Universidad de Huelva ha propuesto un modelo (en construcción) de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas. Este modelo, generado tras una redefinición de la noción de especialización, y un enfoque en el que la matemática está muy presente en toda su génesis, se aplicará en esta comunicación al análisis de episodios de clase. Pensando en las diferencias y similitudes que pudieran encontrarse entre los modelos, es necesario aclarar que ambos consideran el mismo objeto de estudio, el conocimiento que necesita el profesor de matemáticas y que es propio de su profesión.

El MTSK conserva la separación entre PCK y SMK, aunque este último es renombrado como MK (del inglés, Conocimiento Matemático), para ser coherentes con la idea de ser un modelo elaborado con la vista exclusivamente puesta en el profesor de matemáticas. Este modelo consta de seis subdominios (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), tres referentes al MK: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM); y otros tres referentes al PCK: conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS). En la Figura 1 se muestra la representación gráfica usada para mostrar el modelo:

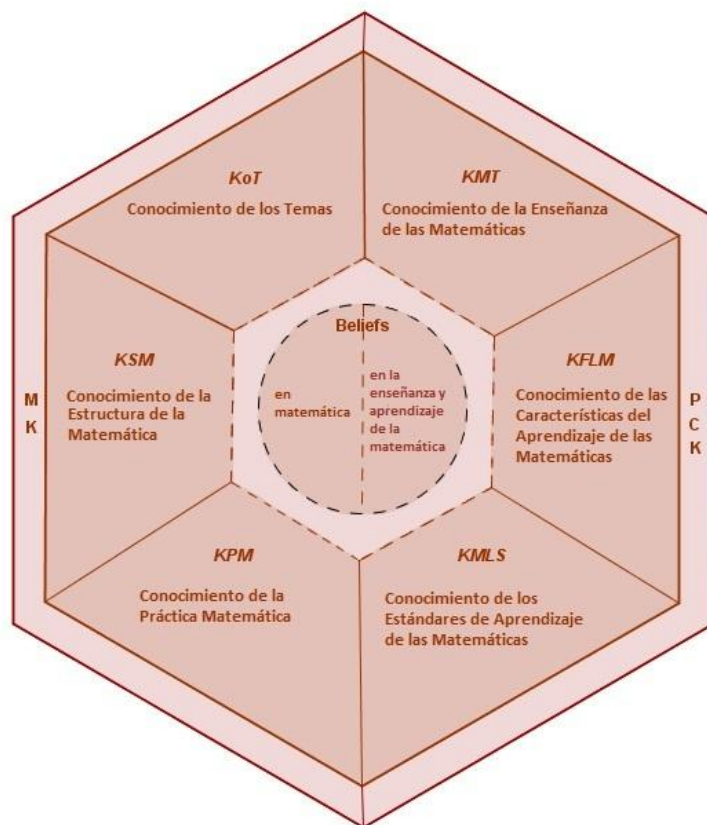


Figura 1: Subdominios del MTSK.

Cabe destacar que en la representación aparecen las creencias sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la misma como elemento que permite entender de una forma más completa el conocimiento del profesor.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

Pasando a describir sucintamente los subdominios, abordaremos primero los relativos al conocimiento matemático y posteriormente los relativos al conocimiento didáctico del contenido:

Conocimiento de los temas (KoT): El contenido de este subdominio incluye aspectos fenomenológicos, significados de conceptos, o ejemplos específicos que caractericen aspectos concretos del tópico abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas, aquel que figura en manuales y textos matemáticos.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): Al considerar el conocimiento matemático del profesor, entendemos que debe incluir no solo los conceptos como elementos aislados, sino integrados en un sistema de conexiones, que permitirá al profesor comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.

Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM): Para completar el conocimiento matemático, este subdominio incluye aspectos ligados a saber cómo se piensa en matemática, como por ejemplo, conocimiento relativo a diferentes formas de definir, argumentar o demostrar en matemáticas, incluyendo también el conocimiento de la sintaxis matemática.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): La acción de enseñar puede involucrar conocimiento de cómo esa enseñanza puede o debe ser llevada a cabo, así, conocer distintas

estrategias de enseñanza que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, es un tipo de conocimiento que se incluye en este subdominio. De igual forma, conocer recursos que permitan al profesor hacer que sus alumnos descubran mediante la manipulación ciertos conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar en sus alumnos la intuición respecto de algunos conceptos, forma parte de este subdominio.

Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM): Saber cómo aprenden los alumnos el contenido matemático es un conocimiento que entendemos que cualquier profesor debería poseer, contemplándose en este subdominio aspectos que abarcan el conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto, o el lenguaje habitualmente usado por los estudiantes en relación con el concepto tratado en clase.

Conocimiento de los estándares^{xxix} de aprendizaje en matemáticas (KMLS): El profesor de matemáticas debe conocer el currículo institucional para saber qué se prescribe en cada etapa. Este conocimiento puede complementarse con información procedente de las producciones de las distintas investigaciones en el área de didáctica de las matemáticas, o la opinión de profesores expertos, respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa.

Nuestros precedentes más destacados han sido Shulman y Ball. Muchos otros investigadores han reflexionado sobre los dominios o componentes del conocimiento profesional, en particular del profesor de matemáticas. Entre ellos, podemos subrayar la aportación del grupo COACTIV (Krauss, Brunner, Kunter, Basumert, Blum, Jordan y Neubrand, 2004). Este grupo no pretende aportar en la caracterización de los subdominios del conocimiento (incluso solo problematiza el dominio del conocimiento didáctico del contenido, no el del conocimiento matemático), sino profundizar en la relación entre la pericia profesional (entendiendo profesor experto como profesor con un buen conocimiento) y los logros de aprendizaje, lo que nos será de gran ayuda en el desarrollo futuro de nuestro modelo. Precisamente, las investigaciones sobre el profesor experto (Kaiser y Li, 2011) arrojarán también luz en este sentido.

Comparando los modelos a través del análisis de un episodio de clase

A continuación mostramos un ejemplo que será analizado utilizando los modelos MKT y MTSK. Su posterior análisis sacará a la luz algunas de las diferencias más relevantes entre ambos modelos en cuanto a su utilidad analítica.

En una sesión de 2º de Bachillerato, durante un ejercicio de representación de funciones, al calcular la derivada segunda de cierta función en la pizarra, la alumna (A1) obtuvo la siguiente expresión, sobre la que debía calcular los valores de x para los que se anula, y de esta forma hallar los puntos de inflexión:

$$\frac{-\sqrt{(x^2 + 1)^3} + \frac{(x - 1) - 3(x^2 + 1)^2}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}}{(x^2 + 1)^3}$$

Figura 2: Expresión de la derivada segunda obtenida por la alumna (A1)

Mientras ella se quedó estática mirando la pizarra, el profesor (P) comprobó la corrección de la expresión y le preguntó:

P: ¿Sabes seguir?

Al: *No, es complicado hacer tantas cuentas*

P: *¿Sabes resolver $\frac{3+\frac{1}{4}}{7}$?*

[La alumna mira al profesor sorprendida] Al: *¿En serio?*

P: *¿No es lo mismo?*

Al preguntarle al profesor sobre el episodio al finalizar la clase, su comentario fue:

“Siempre lo pongo, para que se den cuenta de que todos estos contenidos son como números”

ANÁLISIS DESDE EL MKT

Teniendo en cuenta las definiciones y especialmente los ejemplos aportados por Ball *et al.* (2008), podemos encontrar en este episodio evidencia de varios subdominios, y la necesidad de conocimiento relativo a los mismos.

Entendemos que el profesor conoce (o necesita conocer) el contenido de la sesión que imparte, relativo al álgebra de derivadas de forma específica en este episodio, y a la representación de funciones en el conjunto de la sesión, la posibilidad de sustituir la variable x por un valor concreto, así como los contenidos relativos a la operativa con fracciones, siendo este conocimiento *común* según lo definido en Ball *et al.* (2008), ya que este tipo de contenidos deben ser conocidos por una persona instruida en matemáticas. El uso de analogías como elemento de transmisión de conocimiento, como ocurre en este caso con la estructura fraccionaria de la fórmula, solo tiene sentido para un profesor, así como el conocimiento que le permite desarrollarla, que responde a un conocimiento de matemáticas que se usa para elaborar un ejemplo que recalque un aspecto específico del contenido. De igual forma, *conocer potentes analogías para reflejar un contenido matemático* es un conocimiento que implica la transformación del contenido (desde argumentos de la propia disciplina) para hacerlo comprensible a otros, y por tanto es especializado (aunque saber que la analogía propuesta podrá solucionar la situación no sería de este subdominio, sino del KCT). Así, “Reconocer la dificultad matemática inherente a la situación es uno de los ejemplos que en Ball *et al.* (2008) se asigna al conocimiento especializado del contenido, en tanto en cuanto que sólo un profesor de matemáticas necesitará este tipo de conocimiento, aunque prever su consecuente dificultad de comprensión, aspecto más evidente de la última frase del profesor, podría situarse fuera de este subdominio (estaría dentro del KCS). Como vemos, esta asignación genera problemas de indefinición en los subdominios del MKT (Flores *et al.*, 2013; Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, 2013), ya que el conocimiento puesto en juego en una acción, como pueda ser el de evaluar un error o dificultad de un estudiante, puede requerir conocimiento de varias naturalezas, por ejemplo, conocer el motivo matemático por el que ese error tiene lugar, o en este caso el objeto matemático sobre el que surge la dificultad, y por otra parte, el proceso cognitivo que lleva al alumno a toparse con la dificultad, en este caso, como piensa la alumna sobre la expresión para no ser capaz de relacionar la operativa de fracciones con la de la fórmula abordada.

Podría argumentarse que el profesor muestra en este episodio conocimiento relativo al horizonte, aunque sin embargo, al no existir relación curricular directa entre el contenido de fracciones y derivadas, no podríamos usar la definición de Ball *et al.* (2008) para afirmar la existencia de dicho subdominio. Aun excluyendo el currículo de la definición del HCK (Jakobsen, *et al.*, 2013):

El Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK) es una orientación hacia la disciplina (o disciplinas) y familiaridad con la misma que contribuyen a la enseñanza del contenido escolar abordado, proveyendo a los profesores de sensibilidad sobre como el contenido que está siendo abordado está situado en el territorio disciplinar más amplio y conectado con el mismo.

El profesor no usa conocimiento relativo a la noción de derivada, ni realiza ningún tipo de conexión entre derivada y fracción, sino que interpreta la dificultad de la alumna, la asocia a un obstáculo en la operatividad de las derivadas, y la trabaja con un ejemplo de un contenido distinto, existiendo conexión (interconceptual, bajo el criterio de Fernández, Figueiras, Deulofeu, & Martínez, 2010) entre los tópicos abordados, pero ha de tenerse en cuenta que la definición de Jakobsen *et al.* (2013) del subdominio insta a una comprensión del mismo orientada hacia los contenidos posteriores a los abordados en el instante observado, hecho que difiere de lo que sucede en este caso.

ANÁLISIS DESDE EL MTSK

Desde la perspectiva que nos aporta este modelo, y teniendo en cuenta las ideas vertidas en Carrillo *et al.* (2013) sobre los distintos subdominios, y en Montes *et al.* (2013) sobre el contenido de los subdominios relativos al MK, pasamos a desarrollar un análisis del episodio atendiendo a las distintas dimensiones. Creemos necesario remarcar que todo el conocimiento que el profesor pone en juego en el ejemplo es, desde esta perspectiva, especializado, por ser propio de su profesión.

Podemos partir de que el profesor, al igual que en el anterior caso sucedía en el CCK, conoce el contenido de la sesión que imparte, especialmente en lo relativo a derivación, representación de funciones y álgebra de derivadas, así como en este ejemplo específico, álgebra de fracciones. Igualmente, el ejemplo usado es una muestra de conocimiento encuadrado en el subdominio del conocimiento de los temas (KoT), ya que, considerando el tópico como álgebra de derivadas, la operativa forma parte del mismo, y conocer un ejemplo *potente* para mostrar que la operativa de estas expresiones es idéntica a la de las fracciones muestra una comprensión profunda del funcionamiento del tópico. Si ponemos la atención en una comprensión estructural de las matemáticas, recogida en el KSM, podemos afirmar que el profesor dirige el trabajo de un contenido como el álgebra de derivadas y expresiones algebraicas complejas a través del uso de fracciones numéricas. Este conocimiento permite al profesor interpretar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental (en el sentido de Klein, 1908). En este caso, el profesor trabaja la expresión *avanzada* de derivadas, constituida por variables simbólicas, potencias, y radicales, desde una perspectiva *elemental* constituida por números. En ese sentido, muestra un conocimiento capaz de abstraer la estructura común a dos situaciones algebraicamente relacionadas.

El conocimiento perteneciente a los subdominios del KMT y el KFLM fue detectado por los investigadores al reflexionar, no ya sobre el ejemplo en sí, sino sobre la acción del profesor de usar el ejemplo para ayudar a la alumna a seguir su razonamiento, ya que se entiende que el profesor observó la necesidad de la alumna, y la abordó conociendo su problema. Dicho conocimiento del problema de la alumna tiene, al menos, tres componentes: identificar la existencia de dificultad de la alumna para continuar la resolución de la tarea, saber qué podía hacer para ayudarla a continuar y saber que la dificultad de la alumna estriba en falta de identificación de la expresión como fracción. La primera de las componentes pertenece a la interpretación del lenguaje verbal y corporal de la alumna, que podríamos englobar dentro de un conocimiento pedagógico a un nivel más general, que no se contempla en este modelo; la segunda pertenece al KMT, aunque el conocimiento matemático para abordar la situación pertenece al dominio matemático, en los subdominios KoT y KSM, como se comentó anteriormente; y la última de las tres componentes pertenece al KFLM.

CONCLUSIONES

Este episodio nos da la posibilidad de hacer uso de ambos modelos, MKT y MTSK, y nos permite observar algunas diferencias en su uso. Respecto al MKT, encontramos problemas de delimitación en los subdominios. Pensamos que aporta más riqueza la determinación de la naturaleza de cada uno de los conocimientos que discutir si forma o no parte del SCK, dado que, por un lado, pueden considerarse como especializados los otros conocimientos que muestra el profesor, y por otro, se hace inviable caracterizar un subdominio exclusivo a la labor de enseñar matemáticas, definido por eliminación del conocimiento propio de otras profesiones.

Pensemos en el conocimiento matemático necesario para identificar la dificultad matemática inherente en la situación planteada. En nuestra opinión el KoT lo acoge de forma inequívoca, resolviendo, desde el MTSK, el problema de solapamiento existente en el MKT en relación con los subdominios KCS, KCT y SCK. Algo similar ocurre con el conocimiento sobre analogías potentes. Pasando ahora al análisis de los subdominios contenidos en el PCK, podemos afirmar que el conocimiento para ayudar a la alumna a continuar, una vez identificado el problema que la hace parar, es también propio del trabajo de un profesor de matemáticas y es mucho más que un recurso o una estrategia. Ubicaríamos este conocimiento dentro del KMT, o en el KCT si usáramos el modelo MKT (las diferencias entre estos subdominios no han sido objeto de estudio en el análisis presentado). Otra componente del conocimiento matemático que puede generar duda respecto a su presencia en el episodio, es el conocimiento del horizonte. Lo que no se ha podido concebir desde el HCK es un conocimiento de la estructura matemática (KSM) que permite al profesor interpretar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental, poniéndose de relieve la potencialidad del KSM frente al HCK.

Hemos mostrado la aplicación analítica del MTSK. Sin embargo, su utilidad va más allá del refinamiento en el análisis del conocimiento especializado que posee un profesor de matemáticas. En investigaciones futuras pretendemos poner de relieve su potencial a la hora de elaborar propuestas formativas en los contextos de formación inicial y continua del profesorado de matemáticas de cualquier nivel educativo. Esto será posible a medida que nuestras investigaciones sobre la práctica de profesores en diferentes contenidos matemáticos y niveles educativos nos vayan permitiendo identificar situaciones en las que estos subdominios se evidencian, así como las categorías e indicadores referidos a un contenido determinado que permitan una mayor comprensión de cada subdominio.

Notas

1. Todos los acrónimos responden a las siglas anglófonas

Referencias

- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Krauss, S.; Brunner, M.; Kunter, M.; Baumert, J.; Blum, W.; Jordan, A.; Neubrand, M. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. En J. Doll; M. Prenzel (Eds.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (pp 31-53). Münster: Waxmann.
- Carreño, E., & Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII*. 187-196. Santander: SEIEM.

- Carreño, E., Rojas, N., Montes, M.A., & Flores, P. (2013). *Mathematic Teacher's Specialised Knowledge. Reflections based on descriptors of knowledge*. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). *Mathematics teacher specialized knowledge*. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).
- Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). *A theoretical review of specialised content Knowledge*. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).
- Hill, H., Ball, D. L. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Jakobsen, A., Thames, M. H., & Ribeiro, C.M., (2013). *Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematic teaching*. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).
- Kaiser, G., & Li, Y. (2011). Reflections and Future Prospects. In Y. Li & G. Kaiser (Eds), *Expertise in Mathematics Instruction. An International Perspective* (pp. 343-353). New York: Springer.
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Ed. Leipzig B. G. Teubner.
- Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, M. Palarea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Montes, M.A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). *MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures*. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

^{xxviii} Los autores son miembros del proyecto de investigación “Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

^{xxix} Utilizamos el término “estándares”, evocando la traducción que se hizo desde la SAEM Thales, en el año 2000, de la publicación homónima del NCTM en 1989, con la intención de poner de manifiesto que el subdominio KMLS es más amplio que el propio conocimiento curricular, de carácter institucional y local, incluyendo aportaciones internacionales acerca de lo que debe componer el contenido de la educación matemática de un ciudadano, procedentes de la propia investigación en educación matemática y de instituciones y asociaciones profesionales.