SIGNIFICADOS PERSONALES ACERCA DE UNA DEMOSTRACIÓN EN TEORÍA DE NÚMEROS CON MATHEMATICA

Personal meanings of a proof in Numbers Theory with Mathematica

Carmen Ordóñez, Lourdes Ordóñez[b] y Ángel Contreras[a]

[a]Universidad de Jaén, [b]IES Jabalcuz de Jaén

Resumen

Esta comunicación muestra una investigación didáctica acerca de la enseñanza y aprendizaje de una demostración que forma parte del temario de la asignatura de Matemática Discreta. Analizamos la influencia de un software científico como Mathematica, en el estudio de esta demostración, utilizando el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática. Después de un análisis a priori de dos de las prácticas propuestas, se estudian las respuestas de cuestionarios sobre una muestra formada por 132 alumnos de la Universidad de Jaén que, debido a los estudios que cursan, tienen una gran habilidad para la utilización de recursos informáticos; se clasifican y cuantifican los conflictos semióticos manifestados por dichos estudiantes lo que nos permite caracterizar sus significados personales y determinar fenómenos didácticos que se producen.

Palabras clave: *demostración, Teoría de Números, Enfoque Ontosemiótico, Mathematica*

Abstract

This paper shows a didactic research on the teaching and learning of a proof which is included in Discrete Mathematics subject. We analyse a scientific software influence as Mathematica, along this proof study by using the theoretical framework of the onto-semiotic approach to Mathematics Education. After a priori analysis about two teaching practices proposed, we study some questionnaires responses by132 university students from Jaén. They have a great ability to use computer resources due to their degree. The semiotic conflicts showed by students are classified and quantified, so that it allows us to characterize their personal meanings and didactics phenomena appeared.

Keywords: *proof, Numbers Theory, onto-semiotic approach, Mathematica.*

Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM

INTRODUCCIÓN

La demostración es un tema transversal en todas las etapas de la enseñanza de las matemáticas y es fundamental en el desarrollo del razonamiento lógico deductivo. Para los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática en la asignatura de Matemática Discreta, de primer curso, es importante el uso de recursos informáticos. Así, la enseñanza y aprendizaje de la demostración adquiere unas características especiales por la influencia de las nuevas tecnologías y del lenguaje algorítmico propio de la Informática.

La investigación didáctica acerca de la demostración tiene numerosas aportaciones sin embargo, ninguna se ha centrado en estudiarlo en alumnos para los que el ordenador es su hábitat y que tienen desarrollada una gran habilidad para trabajar con dicho recurso.

Esta investigación se enmarca dentro de una más amplia cuyo objetivo general es describir y analizar la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Teoría de Números (García, Ordóñez y Ruiz, 2006) de la asignatura de Matemática Discreta para los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS).

Este trabajo describe una investigación dirigida al análisis del aprendizaje de los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática en un tema clave de la demostración en Aritmética modular, como es el cálculo de inversos, caracterizando las dificultades y conflictos semióticos encontrados en una práctica informática, realizada en el aula, con el software Mathematica.

ANTECEDENTES

Existen múltiples investigaciones didácticas relacionadas con problemas de la demostración, que muestran que este campo ha despertado interés de investigadores en Didáctica de la Matemática, en algunas de ellas aplicando las herramientas que aporta el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática.

Balacheff (1991) ha mostrado que los alumnos "tienen cierta conciencia de la necesidad de demostración y cierta capacidad lógica" (p. 176) y aun así tienen dificultades con la demostración.

En Recio (2000), utilizando el EOS, se describe una investigación, centrada en el análisis epistemológico y didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática donde se concluye, que los estudiantes universitarios tienen importantes dificultades en el desarrollo de la demostración matemática de carácter deductivo.Y además, el estudio de Recio y Godino (2001) indica que el rendimiento en actividades de demostración de gran parte de los alumnos universitarios de primer curso es decepcionantemente bajo.

Dubinsky y Yiparaki (2000) han detectado que los alumnos universitarios de varios niveles, incluyendo algunos alumnos avanzados matriculados en asignaturas de álgebra abstracta, tienen importantes dificultades en temas relativos a la demostración matemática.

Harel y Sowder (2007), respecto de las "nuevas" tecnologías y la demostración, se preguntan "¿Podrían estas herramientas privar a los alumnos de la oportunidad de desarrollar las habilidades de manipulación algebraica necesarias para el desarrollo de una noción avanzada de la demostración, o, por el contrario, proporcionarles las mismas?" (p. 818).

Por otro lado, respecto la enseñanza y aprendizaje con el recurso tecnológico Mathematica para estudiantes a nivel universitarios, existen distintos trabajos, algunos de ellos publicados por medio de la SEIEM, tales como Contreras, et al. (2005) o Contreras y Ortega (2009).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las investigaciones didácticas de Harel y Sowder (2007) señalan la necesidad del uso de las nuevas tecnologías, especialmente en educación, aunque dejan abierta la pregunta acerca de la influencia de éstas en el aprendizaje o desarrollo de una noción avanzada de demostración matemática.

Así, nos planteamos ¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en el aprendizaje de la demostración matemática para alumnos del Grado en Ingeniería Informática en Teoría de Números?; ¿qué tipos de conflictos semióticos muestran y cuales permite superar el uso del programa Mathematica?

El objetivo de esta investigación es extraer y analizar los significados personales construidos por los estudiantes universitarios de primer curso del Grado en Ingeniería Informática, acerca de un esquema de demostración[xxx]relativo al cálculo de inversos de clases de restos, en una práctica con Mathematica, utilizando las herramientas del enfoque onsemiótico de la cognición matemática.

Para ello, en el laboratorio de prácticas informáticas, se explica una proposición que caracteriza la existencia de inversos en los anillos de enteros módulo n. La demostración de dicha proposición es constructiva y deduce quien es el inverso en Z_n. Se utiliza el software Mathematica para implementar un programa que permita realizar los cálculos numéricos, muy tediosos para los alumnos, y que van a facilitar el cálculo del inverso permitiendo que el alumno se centre en lo nuclear de esta demostración.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

El enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática presenta unas características metodológicas propias que marcarán esta investigación (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; y Font, Planas y Godino, 2010).En este trabajo se estudian los significados personales de los alumnos, entendido en este marco teórico, como "el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado" (Godino y Batanero, 1994p. 341). Una forma de caracterizarlos será analizar las dificultades y errores en términos de *conflictos semióticos*que, según Godino (2002), se definen como "toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas." (p. 258)

Así, se trata de una investigación de caracterización de significados. Es también una investigación de tipo interaccional al observar cómo influye un determinado programa de cálculo científico y simbólico como es Mathematica, en la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática.

Para nuestra investigación, hemos escogido los grupos de prácticas que corresponden a la asignatura de Matemática Discreta del Grado en Ingeniería Informática (cinco, cada uno de ellos con un número máximo de 40 alumnos, y cada uno de ellos con 2 horas semanales de laboratorio informático durante 15 semanas). Por tanto, la muestra consta de 132 estudiantes, todos los asistentes en este día al laboratorio, de los 191 que aparecen matriculados, lo que supone un 70 % de la población. La exploración se realizó en el mes de diciembre, al final del primer cuatrimestre del curso 2012-13.

Las cuestiones han sido elaboradas por los investigadores y fueron sometidas a juicio de expertos, profesores que componen el área de Álgebra de la Universidad de Jaén y que imparten docencia en esta materia o la han impartido en otros cursos, y son autores de distintas prácticas informáticas y manuales que se utilizan en asignaturas del Grado en Ingeniería Informática.

Para la evaluación de los significados personales, se analizarán las respuestas de los estudiantes a los dos primeros ejercicios de una práctica informática. La corrección y codificación de las respuestas de los estudiantes se ha hecho siguiendo el método de otras investigaciones (Ordóñez, 2011), utilizando el SPSS, lo que ha hecho posible clasificar y cuantificar variables y así obtener regularidades a fin de establecer y fenómenos didácticos en la enseñanza-aprendizaje en la demostración de la proposición relativa al cálculo de inversos en Z_n.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

La práctica a analizar consiste en el cálculo de inversos utilizando el programa Mathematica. En las dos horas de laboratorio, comenzaremos explicando la parte teórica matemática, que posteriormente, se implementa en el ordenador. El alumno dispone de un manual donde están estas explicaciones y que puede utilizar para realizar los ejercicios.

En primer lugar, se recuerda el concepto de inverso y la proposición que caracteriza los elementos que lo admiten en Z_n, como aquellos cuyo máximo común divisor con n sea 1. La demostración nos permite construir dicho inverso, a partir del cálculo de la Identidad de Bézout.

Se expone en el aula también un ejemplo de todo lo expuesto y, terminadas las explicaciones, se proponen 4 ejercicios, de los que analizaremos dos en este trabajo. Concretamente

Situación 1. Calcular, si es posible, el inverso de tu DNI en Z_{17}

La tabla 1 recoge la resolución de esta situación y las distintas fases necesarias para su resolución. Como DNI, hemos tomado en este ejemplo 25000000, aunque cada alumno tomará como primer dato su propio DNI, siendo de esta forma prácticas personalizadas para que no haya interacción entre los distintos alumnos aunque con las mismas características didácticas.

Tabla 7. Fases para la resolución de la situación 1

Resolución del experto	Fases de la resolución
	(F0) Selección de los datos para el programa
In[]:= n1=25000000; n2=17;	(F1) Introducimos los datos en el programa que calcula el mcd y la Identidad de Bézout
	(F2) Ejecutamos el programa accionando INTRO
Out[]= m.c.d.{17 , 25000000}=1 m.c.m.{17, 25000000}=425000000 Identidad de Bézout: 1= 25000000·(-4)+17 ·(5882353).	(F3) Obtenemos la salida de datos del programa
Como m.c.d.{17, 25000000}=1, entonces por la proposición, afirmamos que existe el inverso de 25000000 en Z_{17}	(F4) Aplicando la proposición y según el mcd: (F4.1) Si es 1, existe el inverso, (F4.2) Si es distinto de 1,el inverso no existe y el ejercicio termina, no se puede calcular.
El inverso de 25000000 en Z_{17} y es -4.	(F5) En caso de que exista el inverso (mcd=1), aplicamos la demostración del teorema para elegir el número que acompaña al DNI y deducir que este es el inverso
In[]:=Mod[-4,17]	(F6) Calculamos la clase de este número obtenido en el paso anterior, en Z_{17}, con Mathematica, obteniendo el resto de dividir entre 17 con la función que tiene el programa (Mod[])

	(F7) Ejecutamos Mathematica para realizar la operación accionando INTRO
Out[]:= 13	(F8) Obtenemos el inverso.
	(F9) Comprobación (opcional)

Situación 2. Calcular, si es posible, el inverso de tu DNI en Z_{43}

Para esta segunda práctica, la tabla de resolución del experto se verá modificada en la columna de la izquierda tomando nuevamente n1=25000000, pero ahora n2=43. Sin embargo, las fases de resolución de esta situación son las mismas que las de la situación 1.

Análisis a priori

Para poder analizar resultados se ha elaborado un análisis didáctico a priori de ambas situaciones haciendo explícitos conflictos de significado potenciales. Hay que tener en cuenta que en este trabajo sólo se exponen tres de las entidades primarias[xxxi], aunque en la tabla 2 de resultados si aparecen conflictos semióticos asociados a todas las entidades primarias.

- Situación-problema:

En ambas situaciones pretendemos analizar el esquema de demostración explicado para el cálculo del inverso con la ayuda de recursos informáticos. En estos casos nos interesa proponer problemas que, en el mayor número de casos admitan inverso, y esto se dará cuando el máximo común divisor sea 1.

Así, se toma como primer dato el DNI, para personalizar el ejercicio y además de ser único para cada estudiante, éste lo conoce perfectamente, con lo que será más difícil que se equivoque al teclearlo en el ordenador.

Se han seleccionado dos números primos, 17 y 43, para los que fuera difícil que el DNI fuera múltiplo de ambos.

Como paso previo a aplicar el programa Mathematica, se podría simplificar el valor del DNI, pasándolo a Z_n, al igual que se haría sin la ayuda del ordenador. Se especifica en clase que no es necesario pues ya lo realiza el programa.

Otra característica del programa que van a utilizar es que organiza los datos utilizando el orden natural; es decir, cuando calcula la Identidad de Bézout, pone como primer término el que aparece con el dato de mayor valor absoluto:

$$1= 25000000\cdot(-4) + 17\cdot(5882353). \qquad \text{(a)}$$

Es obvio que cada DNI es mayor que 17 (43 para la situación 2) por lo que al utilizar el programa, la salida nos lo dará en el primer término de la expresión como vemos en (a).

El inverso de 250000000, es -4, pues es el que lo acompaña en la Identidad de Bézout, Sin embargo, en el ejemplo expuesto en clase, el inverso buscado aparece en el segundo término de la Identidad de Bézout.

No se ha implementado en el ordenador todo el proceso, sino que se ha preferido recurrir a él, sólo para la parte de cálculo más tediosa, así el estudiante trabaja de forma más centrada el esquema demostración.

Una vez localizado el inverso, hay que concluir dando su clase en Z_n . Este paso no va a ser común para todos los alumnos pues a algunos ya les vendrá simplificado, dependiendo del valor numérico de su DNI.

- Lenguaje:

Teniendo en cuenta la trasposición informática (Balacheff, 1994) encontramos tres tipos de lenguaje: el propio de las Matemáticas, el del programa informático con el que trabajamos (Mathematica) y el del entorno (Windows).Asociamos distintos conflictos semióticos potenciales dependiendo del tipo de lenguaje que consideremos.

Lenguaje de las Matemáticas

Es fundamentalmente un lenguaje deductivo, aunque se trata también de un lenguaje simbólico pues aparece el lenguaje formal y símbolos propios de la Matemática. Debemos remarcar que en la proposición que se estudia aparece un si y sólo si y el cuantificador existencial, que conllevan una dificultad especial, desde el punto de vista didáctico. Si atendemos a los datos con los que trabajamos, observaremos que tenemos también un lenguaje numérico, propio de la Aritmética modular. Los conflictos semióticos potenciales para este tipo de lenguaje son: $CSLM_1$: Aquellos casos en los que el alumno elige mal los datos. $CSLM_2$: Aquellos casos en los que el estudiante realiza un cálculo previo, como lo realizaría sin ordenador, e introduce los datos simplificados. $CSLM_3$: No se entiende la notación de clase de equivalencia y se confunde con complemento o negación (Ejemplo: Figura 1).

```
m.c.d.{17,77355651}=1
m.c.m.{17,77355651}=1315046067
Identidad de Bezout:1=77355651·(5)+17·(-22751662).
Por tanto el inverso que nos piden es 5 negado
```

Figura 5. Respuesta alumno 49, situación 1

Lenguaje del programa Mathematica

Mathematica es un software científico que trabaja en lenguaje de programación tipo C aunque con unas características muy especiales respecto de las sintaxis y respecto de los paquetes y funciones implementadas. Está estructurada en dos partes: Cuando iniciamos el programa, se despliegan una serie de ventanas con distinta funcionalidad, que permiten la comunicación con el usuario y con las que podemos interactuar, nos referimos a ellas como el *interfaz de usuario* o Front End. Por otra parte, para ejecutar o calcular algo, es preciso realizarlo en el *núcleo* o Kernel del programa, la parte más importante del mismo, pero no se realizará ningún cálculo mientras no se pulse la tecla INTRO. Obtenemos así dos tipos de conflictos semióticos potenciales:

- Relativos al interfaz de usuario o Front End:

$CSLMth_1$: Corresponde a una mala utilización de las celdas de entrada de datos.$CSLMth_2$: Corresponde a errores de sintaxis propia del Mathematica.$CSLMth_3$: El alumno desconoce la función o paquete de los que el programa dispone para realizar los cálculos. En esta práctica, la función Mod[] se utiliza para calcular el resto de dividir dos números enteros.

- Relativos al Núcleo o Kernel:

$CSLMth_4$: Se produce cuando se bloquea el núcleo al ejecutar los datos, bien porque el programa no esté bien construido o porque la magnitud de los datos sobrepasan la memoria del ordenador.$CSLMth_5$: Se desconoce por parte del alumno que para cargar el núcleo y realizar los cálculos es necesario pulsar INTRO.

Lenguaje del entorno, en este caso Windows

El programa Mathematica lo utilizamos dentro del entorno Windows. Así, utilizar las ventanas y los archivos (bajárselos desde un espacio web donde los tenemos situados, guardarlos, enviarlos al directorio donde se entregan las prácticas,…) es algo propio del lenguaje que corresponde al entorno en el que trabajamos. Tenemos también que tener en cuenta las características de la red en la que nos encontramos, en este caso la de la Universidad de Jaén. Respecto del entorno Windows, podemos asociar los siguientes conflictos semióticos: $CSLW_1$: El alumno entrega la plantilla vacía. $CSLW_2$: El estudiante entrega la práctica en un lugar equivocado o con el nombre cambiado. $CSLW_3$: El archivo entra corrupto.$CSLW_4$: Un mismo alumno entrega varios archivos.

- Argumentaciones

Existen dos tipos: Por un lado, las que corresponden a las Matemáticas. Son argumentaciones deductivas y podríamos decir que también son argumentos constructivos, pues la demostración no sólo da la existencia del inverso sino que nos permite construirlo. Por otro lado, respecto del programa Mathematica, obtenemos argumentaciones de tipo algorítmico, que son las que nos permiten distinguir los distintos pasos para conseguir la resolución del ejercicio. Los conflictos semióticos son: $CSAM_1$: En la fase 4, a pesar de que se observa que el mcd es 1, se deduce que el inverso no existe.$CSAM_2$: En la fase 4, deduce que no tiene inverso y sin embargo elige uno.$CSAMth_1$: Argumenta que el segundo número es el inverso, basándose en la posición y no se fija si acompaña al DNI.$CSAMth_2$: Se inventa el inverso a partir de datos de la Identidad de Bézout que no corresponde con la construcción dada (Ejemplo: Figura 2).

```
Identidad de Bezout: 1=75120803·(4)+17·(-17675483).
Por tanto,el inverso que nos piden es -17675483.
Por tanto,el inverso es 17+4=21
```

Figura 2. Respuesta alumno 93, situación 1

RESULTADOSY DISCUSIÓN

Es muy interesante analizar en qué fase de la demostración el estudiante ha tenido las mayores dificultades. Para ello hemos realizado un recuento que nos indica cual ha sido la última fase de la demostración que el alumno ha realizado bien. Se considera que la demostración está correcta si, dependiendo del DNI, se ha llegado a la fase 6, la fase 8 o la 9. En la situación 1 (respectivamente 2), el número de alumnos con la demostración correcta es40 (41 respectivamente), de los 132, alrededor de un 31%.Este bajo resultado nos indica la complejidad de dicho esquema de demostración.

Respecto de las fases que han completado correctamente, la de mayor frecuencia es la 4.1, con 44 alumnos en la situación 1 (45 en la situación 2). Estos casos aplican la proposición para asegurar la existencia del inverso y, sin embargo no saben elegir el inverso de forma correcta, como se explicaba en la demostración, sino que lo han asociado al elemento que ocupa el segundo lugar de la Identidad; esto es, un fenómeno didáctico observado es que los alumnos eligen el inverso desde la Identidad de Bézout que han obtenido con el ordenador, basándose en la posición, sin aplicar adecuadamente la construcción dada en la demostración.

Cabe también destacar que 29 estudiantes en la situación 1 (28 en la 2) se quedaron en una fase muy inicial de la demostración (fase 3) en la que no obtuvieron los cálculos por no haber dado al INTRO y activar el núcleo lo que interpretamos como un desconocimiento básico del programa Mathematica, con el que se ha estado trabajando durante todo el cuatrimestre, y que constituye un fenómeno didáctico relativo al lenguaje, cual es que, a pesar de tratarse de alumnos que llevan un cuatrimestre utilizando el programa Mathematica, un porcentaje estimable de ellos, alrededor del 22%, desconoce que ha de activarse el núcleo del programa para ejecutar los cálculos.

En la siguiente tabla mostramos los resultados obtenidos respecto de los conflictos semióticos que emergen en las dos situaciones, clasificados según las distintas entidades primarias.

Tabla 2. Cuantificación de conflictos semióticos

Entidades primarias		Situación 1 Frecuencia absoluta	Situación 1 Porcentaje absoluto	Situación 2 Frecuencia absoluta	Situación 2 Porcentaje absoluto
Lenguaje	Matemáticas	7	5,3%	7	5,3%
	Mathematica	45	34,1%	45	34,1%
	Entorno	8	6,1%	8	6,1%
Argumentación	Matemáticas	5	3,8%	4	3%
	Mathematica	46	34,8%	47	35,6%
Conceptos y proposiciones	Matemáticas	4	3%	3	2,3%
	Mathematica	35	26,5%	33	25%
Procedimientos	Matemáticas	28	21,2%	27	20,5%
	Mathematica	2	1,5%	4	3%

Observamos que los datos obtenidos en ambas situaciones son muy similares. Respecto del lenguaje, las argumentaciones y conceptos o proposiciones, observamos en la tabla 2,que los conflictos más significativos están relacionados con el programa Mathematica, mientras que en lo referente a los procedimientos, los conflictos semióticos con mayor frecuencia son los de las Matemáticas. La baja incidencia de conflictos semióticos debido al lenguaje del entorno consideramos que se debe a la habilidad de estos alumnos en la utilización de recursos informáticos.

La entidad primaria en la que se han manifestado más conflictos semióticos (60% en ambas situaciones) es el lenguaje. Entre ellos los conflictos relativos a las Matemáticas no son significativos en esta práctica pues los datos estaban muy controlados; los del entorno tienen también una frecuencia baja pues el estudiante de Informática está acostumbrado a distintos entornos y el tratamiento de archivos no les supone dificultad. Dentro de las argumentaciones, el conflicto semiótico más destacado ha correspondido a $CSAMth_1$ con una frecuencia de 45 (respectivamente 46) estudiantes y que se ha derivado de la proposición falsa que obtiene el inverso a través de la posición (fase 4.1 vista anteriormente)

Un fenómeno didáctico que se observa es el porcentaje, en torno al 30 %, de conflictos semióticos con el programa Mathematica en las entidades primarias como son el lenguaje, argumentaciones y conceptos y proposiciones, frente al escaso porcentaje de conflictos semióticos en procedimientos, también con el programa Mathematica.

CONCLUSIONES

Los datos de las dos situaciones han sido bien elegidos para que los alumnos pudieran calcular el inverso. En efecto, tan sólo dos alumnos de 132 no pudieron realizar la práctica 1 con las mismas características didácticas de sus compañeros al ser su DNI múltiplo de 17, pero ninguno de ellos fue también múltiplo de 43 y realizaron la situación 2 en las condiciones que pretendíamos.

Han emergido diferentes conflictos semióticos que hemos podido clasificar según las distintas entidades primarias que nos aporta el marco teórico EOS, y los distintos contextos debidos a la transposición informática. De esta manera hemos podido observar cuáles son los conflictos semióticos de estos estudiantes, lo que ofrece características sobre sus significados personales.

El análisis cuantitativo nos indica que los estudiantes no comprenden bien el esquema de demostración estudiado, porque no aplican la proposición o porque utilizan criterios erróneos como la posición para la elección del inverso. También, el concepto de clase de restos constituye una dificultad importante para estos alumnos.

Al trabajar la demostración con recursos informáticos, han aparecido nuevos conflictos derivados de las características del programa Mathematica. Así, hemos podido comprobar que la trasposición informática no está exenta de dificultades.

Si nos planteamos el impacto del programa Mahematica en el aprendizaje de la demostración diremos que es muy conveniente pues facilita la resolución y permite al alumno centrarse en la demostración evitando que se disperse con tediosos cálculos numéricos. También permite visualizar las dificultades encontradas en este esquema de demostración.

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación I+D+i EDU2012-32644.

Referencias

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, E. Mellin-Olsen y J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth teaching* (pp. 175-192). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Balacheff, N. (1994).La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique des mathématique. In M. Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en* France (pp. 364-370). Grenoble: La pensée sauvage éditions.

Contreras, A. et al. (2005). Aplicación del programa mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. En A. Maz; B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación Matemática IX* (pp. 271-282). Córdoba: SEIEM.

Contreras, A., y Ortega, M. (2009). Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica. *Comunicación en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis*. *XIII Simposio de la SEIEM*.

Dubinsky, E., y Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J Kapput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 239-286). Providence, RI: American Mathematical Society

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010).Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(2), 89-105.

García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C., y Ruiz, J.F. (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos*. *Matemática Discreta y Lógica*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque onto-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of National Council of Teachers of Mathematics*, 805-842.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

Recio, A.M. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral. Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Recio, A.M., y Godino J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 83-99

[xxx]En el sentido de Harel y Sowder (2007, p. 809).

[xxxi]El EOS identifica en la actividad matemática cinco tipos de entidades u objetos primarios: situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007).