

LA RELACIÓN INVERSA ENTRE CUADRATURAS Y TANGENTES EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE PIRIE Y KIEREN

Este estudio se enmarca en el programa de Doctorado en Educación, con
énfasis en Docencia de las Matemáticas

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO

Tesis para optar al título de Doctor en Educación

Línea de Pensamiento Matemático Avanzado

Asesores

CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ
Doctor en Ciencias Matemáticas

PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MEDELLÍN
Febrero de 2011

A mi familia por su apoyo y comprensión durante el desarrollo del presente estudio.

AGRADECIMIENTOS

Por su dedicación, apoyo y estímulo permanente, a:

Doctor Pedro Vicente Esteban Duarte, profesor titular de la Universidad EAFIT, Departamento de Ciencias Básicas. Director del presente trabajo de investigación.

Doctor Carlos Mario Jaramillo López, profesor de tiempo completo de la Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas. Co-director del presente trabajo de investigación.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1 CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO.....	3
1.1 El problema de investigación.....	3
1.2 Pregunta de investigación	6
1.3 Objetivo general	7
1.4 Objetivos específicos.....	7
1.5 Aspectos generales de la investigación en Educación Matemática	8
1.5.1 Líneas de investigación en Educación Matemática.....	9
1.5.2 Los modelos educativos.....	10
1.6 Algunos antecedentes acerca de la “comprensión”.....	11
1.7 El marco teórico de la investigación: La teoría para la comprensión matemática de PK.....	13
1.7.1 Breve reseña preliminar	13
1.7.2 Descripción y caracterización general de la teoría.....	14
1.7.3 Nomenclatura de los niveles	21
1.7.4 Otras características de la teoría.....	23
1.7.5 Investigaciones relacionadas con la teoría de Pirie y Kieren en Educación Matemática	25

1.7.6	Pertinencia de la teoría de Pirie y Kieren para la presente investigación	27
1.8	Un modelo de comprensión alternativo: El modelo educativo de van-Hiele 30	
1.8.1	Breve reseña preliminar	30
1.8.2	Descripción del Modelo	31
1.8.3	Nomenclatura de los niveles	32
1.8.4	Caracterización del modelo	32
1.8.5	Investigaciones relacionadas con el modelo de van-Hiele en Educación Matemática.	33
1.9	Para tener en cuenta en el diseño y aplicación de la entrevista de carácter socrático	37
1.9.1	Pertinencia de la entrevista de carácter socrática con la teoría PK 39	
1.9.2	Decálogo para el diseño de una entrevista de carácter socrático: Características que se infieren del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón.....	40
1.9.3	El proceso de razonamiento infinito.	48
1.9.4	La visualización matemática	50
1.9.5	Las TICs y el Geogebra®.....	51
2 LA RELACIÓN INVERSA ENTRE CUADRATURAS Y TANGENTES: ASPECTOS HISTÓRICOS Y DIDÁCTICOS		53
2.1	Evolución histórica del TFC	54
2.1.1	El cálculo de áreas y el problema de las cuadraturas: La diferencia	54
2.1.2	Métodos y técnicas para las cuadraturas.....	56
2.1.3	Métodos y técnicas para las tangentes.....	71
2.1.4	La conexión entre las cuadraturas y las tangentes: Una breve introducción desde los griegos hasta Newton.....	89
2.1.5	El TFC en Leibniz	95
2.1.6	El TFC en Cauchy.....	101
2.1.7	La integral de Riemann.....	102
2.1.8	La integral de Lebesgue	106
2.2	El estado del arte del TFC: algunos artículos o memorias relacionadas	109
2.3	El TFC en los textos escolares	110

2.4	Tratamiento didáctico para el TFC	115
3 LA ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL TFC EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE PK.....		119
3.1	Consolidación del guión entrevista	120
3.2	El guión entrevista	122
3.3	Niveles y descriptores para el TFC.....	163
3.4	Análisis del guión-entrevista.....	166
3.4.1	Manifestación del TFC en el guión entrevista	167
3.4.2	Dispositivo a utilizar en el guión-entrevista	167
3.4.3	Características generales del guión entrevista.....	167
3.4.4	Descripción de la herramienta (Geogebra®) en la entrevista.....	169
3.4.5	Análisis de las preguntas	170
4 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA INFORMACIÓN.....		181
4.1	El enfoque cualitativo de nuestro estudio	181
4.1.1	El método	182
4.1.2	El diseño y la identificación de los tres casos	182
4.1.3	La selección de los participantes entrevistados	184
4.1.4	La recolección de la información.....	184
4.2	El trabajo de campo.....	185
4.2.1	Caso tipo 1: Valentín.....	187
4.2.2	Caso tipo 2: Sabina.....	198
4.2.3	Caso tipo 3: Luciana	212
4.3	Diagrama general proporcionado por el ATLAS.ti 6.2 en el análisis cualitativo	221
4.4	Consolidación de las características para las complementariedades de la acción y la expresión en la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes.....	223
4.5	Consolidación de la entrevista mediante sólo el Geogebra®	223
4.6	Tratamiento estadístico	225
4.6.1	Descripción y estructura del test escrito	226
4.6.2	Análisis estadístico	227
5 CONCLUSIONES		243
5.1	Consecución de los objetivos	243
5.2	Sobre el diseño y el discurrir de la entrevista	247

5.3 Dirección de un trabajo de investigación en el marco del programa de Maestría en Educación: Docencia de las Matemáticas (U. de A.).....	250
5.4 Proyección hacia el futuro.....	252
5.5 Acerca de cómo se enmarca la presente propuesta en el grupo de investigación: Educación Matemática e Historia (U. de A-Eafit).....	254
BIBLIORAFÍA.....	255
ANEXO 1: Consecución del Artículo.....	263
ANEXO 2: Hoja de respuestas para el test	283
ANEXO 3: Test semi-estructurado	285
ANEXO 4: La matriz de los datos cualitativos.....	321
ANEXO 5: Divulgaciones del estudio.....	323

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la Educación Matemática, el presente trabajo de investigación se encuentra enmarcado en el programa de Doctorado en Educación, Línea de Docencia de las Matemáticas, adscrito a la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. El propósito es estructurar la entrevista socrática como estrategia metodológica para posibilitar el progreso en la comprensión de uno de los teoremas más importantes del Cálculo, de acuerdo con la teoría de Pirie y Kieren, el cual tiene que ver con la relación inversa entre cuadraturas y tangentes: El Teorema Fundamental del Cálculo.

La teoría de Pirie y Kieren es el marco teórico en el cual se desarrolló el trabajo. La teoría ofrece múltiples ventajas en lo que respecta a: las experiencias de enseñanza y aprendizaje publicadas por los autores y otros investigadores, que dan cuenta de cómo evoluciona la comprensión de los estudiantes en conceptos como los de Fracciones, Función Cuadrática, Límites, Derivadas e Integrales; las características como *El Folding Back*, *los límites de falta de necesidad* y *las complementariedades de la acción y la expresión*, observadas por Pirie y Kieren en los análisis realizados en sus investigaciones y, finalmente, la estructura del modelo fractal propuesto, en el cual exhiben sus niveles de comprensión.

En el Capítulo 1 se describe en detalle el marco teórico, en conjunto con las características tenidas en cuenta en el diseño y aplicación de una entrevista de carácter socrático, durante el proceso de comprensión matemática por parte del estudiante.

En el Capítulo 2 se estructura un desarrollo histórico, que busca situar en contexto la evolución del Teorema Fundamental del Cálculo, para obtener información sobre las dificultades en las concepciones mostradas por los matemáticos de la época y, ser contrastadas con los procesos de comprensión analizados cualitativamente en los estudios de caso

2 | INTRODUCCIÓN

René Alejandro Londoño Cano

presentados. También, se presentan diferentes alternativas didácticas propuestas en diferentes textos de Cálculo y, una de ellas, producto del trabajo de investigación.

En el Capítulo 3 se hace explícita la entrevista de carácter socrático y la intencionalidad de cada una de las preguntas, en coherencia con la caracterización que el investigador encontró y que está en correspondencia con los niveles de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren.

En el Capítulo 4 se analizan tres estudios de caso, en los cuales son identificados los registros de *Foldibg Back* y *las complementariedades de la acción y la expresión*, generando para cada uno un mapa de la comprensión, de acuerdo al recorrido reasalizado por los estudiantes, en su paso por los niveles al interior de la teoría.

En el Capítulo 5 se presentan los productos obtenidos por parte del investigador, de acuerdo con los resultados obtenidos a partir del diseño metodológico en el contexto de la teoría de Pirie y Kieren, que dan cuenta del impacto originado por la investigación en el campo de la Educación Matemática y de la que resulta una estrategia alternativa eficaz para la comprensión de conceptos del Análisis Matemático, como es el caso del Teorema Fundamental del Cálculo.

Finalmente, en el anexo 1 se encuentra un artículo que se logra consolidar como aporte adicional al estudio y que consiste en el diseño y aplicación de una entrevista para la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, fundamentado sólo con la interacción de la herramienta Geogebra®, y para la cual, fue escogido un estudiante con las aptitudes y destrezas necesarias para manipularla con facilidad y así observar en detalle, la evolución en la comprensión del TFC.

1 CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO

1.1 El problema de investigación

En los últimos años, los investigadores en el campo de las Matemáticas se han destacado por sus múltiples avances teóricos en lo que respecta al descubrimiento de nuevos teoremas, la ampliación teórica mediante una construcción axiomática con más definiciones y sobre todo, por su aporte a los avances científicos y tecnológicos en lo que se refiere a las Matemáticas Aplicadas. Por su parte, la Educación Matemática se ha venido preocupando cada vez más por desarrollar propuestas innovadoras, dirigidas tanto a estudiantes como a docentes, con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos y superar las dificultades que presentan los estudiantes, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. De hecho, los investigadores en esta área continúan trabajando en el diseño de estrategias metodológicas que contribuyan a mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes, la interpretación de enunciados matemáticos, la resolución de situaciones-problema y en algunos casos, la manipulación algebraica.

En esta dirección, los lineamientos curriculares de Matemáticas del sistema educativo colombiano están orientados a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales, incluyendo la adquisición de competencias o *formas de actuación* que puedan ser nombradas como características del pensamiento matemático en general, y lógico en particular. Desde este punto de vista interesa observar los cambios de los alumnos a partir de sus estados iniciales de conocimiento y actuación, pasando por el análisis de los comportamientos y logros durante los procesos de enseñanza y aprendizaje hasta llegar a la comprensión de los conceptos.

La presente investigación pretende específicamente, facilitar a los estudiantes de la Educación Media y primer semestre de universidad, que han pasado por una enseñanza de los conceptos de recta tangente y área, la comprensión de uno de los teoremas más importantes del Análisis Matemático (y por supuesto de los conceptos que allí se involucran) como lo es el TFC¹, mediante la extensión y aplicación de la teoría PK², con el diseño de actividades enmarcadas en los niveles de comprensión propuestas por la teoría. Es importante destacar el uso de conceptos como los de área, gráfica de una expresión algebraica, pendiente de una recta, entre otros, por parte de los estudiantes, sin necesidad de acudir al Cálculo infinitesimal, y tan sólo con la ayuda de procesos de razonamiento infinito, poder propiciar que se comprenda la relación inversa en cuestión.

Muchas investigaciones acerca del TFC y de algunas experiencias educativas durante su enseñanza, dan cuenta de algunas dificultades para comprender el concepto de recta tangente a una curva en un punto (Esteban, 2003) y, de otro lado, el de cuadratura o cálculo del área de una región plana cualquiera, y proponen ciertos mecanismos didácticos (visuales, escritos, orales) como estrategia para superar tales dificultades; otras por su parte, realizan una exploración epistémica de los conceptos y explican en forma adecuada la evolución desde sus inicios hasta nuestros días, con el fin de consolidar así las estrategias didácticas adecuadas que permitan su comprensión.

Sin embargo, en la revisión de esta literatura, no se encuentra un estudio que permita vislumbrar y precisar la real dificultad que presentan los estudiantes, y los mismos profesores, cuando se aborda la comprensión del TFC en su manifestación geométrica, esto es, el *carácter inverso* de los significados geométricos de los conceptos que en éste subyacen, lo que respalda la pertinencia de la presente investigación.

En el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, algunos estudiantes resuelven correctamente problemas y ejercicios y, por supuesto, aprueban los exámenes de Cálculo, pero este hecho no garantiza la comprensión de los conceptos matemáticos utilizados en el TFC, pues la mayoría de estos exámenes no trascienden lo operativo, lo mecánico o memorístico. En otros

¹ Llamado por la mayoría de los autores como segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el cual tiene que ver directamente con la evaluación de integrales definidas. Es necesario aclarar que algunos textos de Cálculo llaman segundo TFC (Teorema de Evaluación o simplemente TFC), a los que otros llaman primer TFC y viceversa, hecho que obedece al tratamiento secuencial de los teoremas y sus correspondientes demostraciones, de acuerdo a la presentación preferencial o rigurosa que hacen los autores.

² Pirie & Kieren. En adelante, se hablará de la teoría PK haciendo referencia a toda la teoría para la comprensión matemática postulada por Pirie & Kieren y, como modelo de Pirie & Kieren, sólo al gráfico fractal en el cual se exhiben sus niveles.

casos, los maestros se limitan a evaluar lo análogo a lo hecho en clase, algo así como un aprendizaje por analogía, con el fin de evitar altos porcentajes de reprobación, lo que en términos de Gay Brousseau se denomina *efecto Topazze* (Bishop, 1991, págs. 13-38).

Pues bien, de hecho, las situaciones descritas anteriormente suceden con mucha frecuencia al evaluar la aplicación de algunos conceptos o teoremas del Análisis Matemático que se abordan en los primeros años de universidad. Considérese específicamente el TFC, el cual ofrece una gran facilidad de aplicarse correcta y eficazmente en la solución de muchas situaciones, pero su alto contenido geométrico y los conceptos involucrados, que a simple vista no tienen ninguna relación geométrica, hacen que se dificulte su comprensión. La investigación exhibe un fenómeno que preocupa a muchos maestros en la actualidad y obliga a pensar en estrategias que aseguren un verdadero aprendizaje que trascienda la mera aplicación de algoritmos, teoremas y definiciones, y a superar las posibles dificultades de tipo simbólico; es decir, se pretende que el estudiante logre un avanzado nivel de razonamiento e integre los conceptos subyacentes involucrados en la comprensión del TFC.

Partiendo de lo anterior, el problema que se aborda en el presente estudio es:

A Los estudiantes de último año de Educación Media y primer semestre de universidad, se les dificulta comprender la relación inversa entre los conceptos de área bajo una curva y la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, dada la complejidad de los procesos de razonamiento infinito inherentes a ambos conceptos.

En otras palabras, el problema identificado tiene que ver directamente con la dificultad de sustituir conceptos intuitivos como los de tangente y área, por los actuales de derivada e integral, los cuales se obtienen por un proceso mental de aproximación, que no son otra cosa que procesos de razonamiento infinito. En términos matemáticos, tales procesos tienen que ver con las siguientes ideas:

- La recta tangente como límite del haz de secantes. En este sentido el proceso de aproximación involucra el concepto de límite y su relación con los diferenciales: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy = f'(x)dx$. También se considera fundamental, dentro del pensamiento matemático del estudiante, la separación de la idea de recta tangente a una circunferencia con la generalización de la recta tangente a una curva cualquiera.

- El área limitada por dos curvas en un intervalo. El proceso de aproximación se evidencia en la partición de un intervalo $[a, b]$ para definir la integral definida como el límite de una suma de Riemann:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

- La parte del TFC en el que se usa la *función de acumulación*³ (Purcell & Varberg, 2007, pág. 233), presenta la igualdad $\frac{d}{dx} \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right) = f[g(x)] \cdot g'(x)$, donde f es continua en un intervalo abierto que contiene a a . En esta parte del TFC, la investigación intenta hacer explícito, aunque no hace parte del objetivo central de la investigación, que algunos aspectos que suelen ser operativamente fáciles, pero conceptualmente complejos, como lo es el caso de que el resultado sea el mismo, independiente del valor del límite inferior de la integral (como constante) y que tan sólo sea la misma función integrando, reemplazando la variable auxiliar t por la función que corresponde al límite superior de la integral, multiplicado esto por la derivada de la última.
- La otra parte del TFC presenta la igualdad: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, donde f es continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el mismo intervalo. En esta parte del teorema, la investigación intenta hacer explícito en la comprensión del estudiante un aspecto geométrico que hace pensar en que un área corresponde a una diferencia de longitudes.

De acuerdo a lo anterior, se hace necesario plantear un objetivo que permita construir una estrategia metodológica, producto de la investigación, como respuesta al problema planteado.

1.2 Pregunta de investigación

A partir de las dificultades encontradas en los estudiantes al abordar el estudio del TFC, se presenta la siguiente pregunta de investigación:

³ Por función de acumulación, los autores se refieren particularmente a la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, dado que acumula el área bajo una curva desde un valor fijo $x = a$ hasta un valor variable x .

¿Cuáles son los elementos necesarios para la implementación de una entrevista de carácter socrático en el marco de la teoría de PK, que permita describir la comprensión de los procesos de razonamiento infinito involucrados en el TFC, dentro del pensamiento matemático avanzado?

Para desarrollarla, será necesario analizar los aspectos que hacen pertinente la teoría de PK y un rastreo histórico de la evolución del TFC, los cuales aportarán elementos para la implementación de la entrevista de carácter socrático.

1.3 Objetivo general

La propuesta tiene como objetivo implementar una entrevista de carácter socrático en el marco de la teoría de PK como estrategia metodológica, de tal manera, que se convierta en una experiencia de enseñanza y aprendizaje para los estudiantes del último año de la Educación Media y primer año de universidad, con el fin de favorecer la comprensión de los procesos de razonamiento infinito inherentes a los conceptos de área bajo una curva y la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, para finalmente, establecer la relación inversa que hay entre éstos en la comprensión del TFC.

La propuesta caracterizará a priori descriptores para los primeros cuatro niveles de comprensión del modelo⁴ en la teoría de PK para el TFC. Posteriormente, producto del trabajo de campo surgen pautas con el fin de que los descriptores preliminares sean refinados y se articulen de manera coherente a los niveles del modelo. Esto le permite al investigador, por un lado, describir de manera detallada la forma como un estudiante amplía la comprensión en su progreso entre un nivel y el siguiente y, por el otro, la consolidación de la estrategia metodológica.

1.4 Objetivos específicos

- Rastrear conceptos como los de área, pendiente, tangente, derivada e integral definida, y su relación con el desarrollo histórico del TFC, lo

⁴ El modelo de PK (dentro de la teoría) hace referencia al gráfico fractal en el cual se exhiben los niveles de comprensión expuestos por la teoría y no a toda la teoría como tal. El modelo será presentado más adelante.

que permitirá reconocer en detalle algunas dificultades en el proceso de comprensión, en el contexto de la teoría de PK.

- Identificar las características propias de los cuatro primeros niveles de comprensión que propone la teoría de PK y articularlas con el estudio del TFC.
- Plantear los descriptores preliminares de cada uno de los cuatro primeros niveles de comprensión para el TFC, los cuales direccionarán y refinarán el guión de entrevista de carácter socrático.
- Diseñar un test basado en el guión de entrevista de carácter socrático, con el fin de comprobar que es posible la detección de los niveles de razonamiento propuestos en la teoría de PK; al mismo tiempo que se automatiza la adscripción de los estudiantes en su correspondiente nivel.

El planteamiento y consecución de estos objetivos, permiten alimentar el alcance del objetivo general para la presente investigación.

1.5 Aspectos generales de la investigación en Educación Matemática

Desde sus áreas de conocimiento, los matemáticos, psicólogos, sociólogos y pedagogos se han inquietado de manera profunda por el desarrollo científico de la Educación Matemática a través del tiempo, y de cómo contribuye al logro de una mayor comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje, identificando las condiciones necesarias y suficientes para obtener una mayor eficacia en el ejercicio de la docencia de las matemáticas.

La investigación en Educación Matemática puede ser clasificada en teórica y práctica (Gutiérrez, 1991). En lo correspondiente a las investigaciones teóricas, él señala que en ellas se enmarcan los trabajos de elaboración de teorías de enseñanza o de aprendizaje las cuales abordan las diferentes componentes matemáticas, psicológicas y pedagógicas que intervienen en los procesos de comprensión y aprendizaje de las Matemáticas: procesos y capacidades de razonamiento, estrategias de enseñanza, niveles de comprensión, obstáculos en el aprendizaje y formación o modificación de redes conceptuales.

Aparecen aquí dos clases de teorías: las específicas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de las que trata Skemp, Dienes, van Hiele y

Pirie y Kieren, entre otros, y las teorías más generales como la de Piaget, constructivismo y el constructivismo social.

Con respecto a las investigaciones prácticas, Gutiérrez señala que un gran número de investigadores se dedican a ellas. En este tipo de trabajos se trata de estudiar algún tema en particular de la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas, analizando los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus dificultades y errores en el desarrollo de un método de enseñanza, entre otros, lo que hace que la presente investigación se contextualice en esta última clasificación.

1.5.1 Líneas de investigación en Educación Matemática

Aunque el objetivo básico de la investigación en Educación Matemática es conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes e identificar qué aprenden y cómo aprenden, ofreciendo a los profesores propuestas efectivas para desarrollar en las aulas; es importante reconocer que la actividad investigadora internacional no es monolítica y homogénea, sino diversificada y heterogénea.

Ha habido intentos de plantear los principales problemas de enseñanza de las Matemáticas que deberían ser resueltos, a semejanza de la famosa lista de los 23 principales problemas de las Matemáticas enunciados por Hilbert en 1900. Si bien, los problemas planteados por Hilbert han marcado fuertemente las líneas de desarrollo de la investigación matemática durante este siglo, no puede decirse que haya ocurrido lo mismo en el campo de la Educación Matemática.

Un intento destacado se debe a Freudenthal, quien plantea un grupo de problemas que se refieren al aprendizaje de algunas áreas específicas de las Matemáticas: ¿por qué los niños no aprenden bien la aritmética?, ¿es posible basar la enseñanza de la geometría en las intuiciones espaciales de los estudiantes?, ¿cómo podemos usar calculadoras y ordenadores para mejorar la comprensión de las Matemáticas?

Un segundo grupo de problemas se refieren al proceso de aprendizaje de las Matemáticas en general: ¿cómo deberían aprender los estudiantes? ¿cómo deben avanzar los profesores en la esquematización y la formalización durante la enseñanza de un cierto tema?, ¿cómo se pueden estimular los procesos de comprensión de las Matemáticas y de reflexión sobre las propias actividades?, ¿cómo se puede estructurar el aprendizaje de las Matemáticas de acuerdo con ciertos niveles diferenciados?

Un tercer grupo de problemas enunciados por Freudenthal se centra en componentes efectivas del aprendizaje: ¿cómo se pueden crear actitudes positivas hacia las Matemáticas?, ¿cómo se pueden crear contextos en los que se enseñe a matematizar?

Pero estas preguntas planteadas por Freudenthal, de indudable interés e importancia, no son cuestiones investigables directamente, sino líneas de investigación en las que se debe hacer un análisis detallado, pues están formadas por numerosos problemas interconectados. Es decir, existe un hilo conductor que los integra para su respectivo desarrollo, cada uno de los cuales necesita del esfuerzo de los investigadores (Freudenthal, 1981, págs. 133-150).

1.5.2 Los modelos educativos

En el contexto de la Educación, los modelos educativos son visiones sintéticas de teorías o enfoques pedagógicos que orientan a los especialistas y a los profesores en la elaboración y análisis de los programas de estudio; en la sistematización de los procesos de enseñanza y aprendizaje, o bien en la comprensión de alguna parte de un programa de estudios. Se podría decir que los modelos educativos son los patrones conceptuales que permiten esquematizar claramente las partes y los elementos de un programa de estudios, o bien los componentes de una de sus partes.

De acuerdo a Antonio Gago Huguet, los modelos educativos son una representación arquetípica o ejemplar del proceso de enseñanza-aprendizaje, en la que se exhibe la distribución de funciones y la secuencia de operaciones en la forma ideal, que resulta de las experiencias recogidas al ejecutar una teoría del aprendizaje. Los modelos educativos varían según el periodo histórico en que aparecen y tienen vigencia, en el grado de complejidad, en el tipo y número de partes que presentan, así como en el énfasis que ponen los autores en algunos de los componentes o en las relaciones de sus elementos (Gago, 2010).

El conocimiento de los modelos educativos permite a los docentes y en general, a los investigadores en Educación, tener un panorama de cómo se elaboran los programas, de cómo operan y cuáles son los elementos que desempeñan un papel determinante, en una planeación didáctica o en una estrategia de intervención didáctica.

Específicamente, en el ámbito de la Educación Matemática, los modelos educativos han constituido históricamente marcos teóricos para el desarrollo de experiencias y estrategias metodológicas, que permiten comprender o

avanzar en la comprensión de conceptos matemáticos, de acuerdo a ciertos estadios o niveles que postulan y a características validadas propias de las investigaciones respectivas. Como ejemplos se exhiben, el modelo de van-Hiele y la teoría PK⁵; este último que es el marco teórico del que se ocupará la presente investigación.

Vale la pena hacer una revisión a tales modelos en las siguientes secciones, con el fin de resaltar las investigaciones que hasta el momento se han venido realizando, y así fundamentar la pertinencia de la teoría PK en la presente investigación.

1.6 Algunos antecedentes acerca de la “comprensión”

Hasta 1978, varios escritos no hacían distinción entre la comprensión y el conocimiento, dado que no se tenía una diferencia claramente marcada entre lo que era un acto, o simplemente una captación de significado. Tal distinción aparece con Skemp cuando realizó una reimpresión del *Maestro de la aritmética* en el mismo año, momento en el que llamó la atención de la comunidad de la Educación Matemática de Estados Unidos.

En la literatura de la Educación Matemática, el término “comprensión” se utilizaba libremente, y en particular, (Brownell & Sims, 1946) sintieron que la comprensión matemática era un concepto difícil de definir y explicaron: “*Es muy difícil de encontrar o formular una definición técnicamente exacta de “comprender” o comprensión*” (p. 163).

Algunos autores antes de 1978, describieron la comprensión como sigue:

- Brownell y Sims describen la comprensión como (a) la capacidad de actuar, sentir o pensar de manera inteligente respecto a una situación; (b) varía respecto al grado de seguridad y finalización; (c) varía respecto a la situación problemática que se presenta; (d) necesita conectar las experiencias del mundo real y los símbolos inherentes; (e) necesita verbalizaciones, a pesar de que puedan contener significados menores; (f) desarrolla varias experiencias, en vez de la repetición de las mismas; (g) está influida por los métodos empleados por parte del maestro; y (h) es inferida por la observación de las acciones y las verbalizaciones (Brownell & Sims, 1946).
- (Polya, 1962) por su parte, identificó la comprensión como un elemento complementario a la resolución de problemas, según se indica en la siguiente cita: *Se debe tratar de comprender todo; los hechos*

⁵ Recuérdese que antes habíamos hablado del modelo de PK (dentro de la teoría) como el gráfico fractal en el cual se exhiben sus niveles.

aislados mediante su recopilación con los hechos relacionados, los descubrimientos recientes a través de sus conexiones con lo ya asimilado, lo desconocido por analogía con lo acostumbrado, los resultados especiales mediante la generalización, los resultados generales por medio de la especialización adecuada, las situaciones complejas mediante la separación de las mismas en sus partes constituyentes y los detalles mediante la integración de los mismos dentro de una imagen total (p. 23). De esta manera, Polya identificó cuatro niveles de comprensión como una regla matemática: (a) "mecánica"- un método memorizado que puede aplicarse correctamente, (b) "inductivo"- la aceptación de que las exploraciones de casos simples se extienden a casos complejos, (c) "racional"- la aceptación de la prueba de la regla, según se demuestra por alguien más, y (d) "intuitiva"- la convicción personal como una verdad más allá de cualquier duda. Dichos niveles califican la comprensión como un conocimiento asociado con reglas matemáticas.

La comprensión, después de 1978 (de acuerdo a los trabajos de Skemp), hace énfasis en categorías de la comprensión matemática (Byres & Erlwanger, 1985): Skemp las clasifica inicialmente como *relacional* e *instrumental*. La primera, consiste en cómo saber qué hacer y por qué se debe hacer, proporcionando vías para una transferencia más eficiente, para la extracción de información desde la memoria del estudiante, con el fin de lograr que esa comprensión sea una meta por sí misma, y para promover la evolución de la comprensión. La segunda, por su parte, tiene en cuenta reglas sin una razón, permitiendo un recuerdo fácil para promover recompensas más tangibles e inmediatas, y para proporcionar un acceso rápido a las respuestas.

Más adelante, la clasificación evoluciona incluyendo dos categorías más: la *lógica*, organización de acuerdo a una prueba formal y, la *simbólica*, que constituye una conexión de simbolismo y notación para las ideas asociadas. Otras versiones más generales de categorización proponen que la comprensión es el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos.

Puntos de vista más contemporáneos sobre la comprensión, permiten establecer definiciones con elementos comunes, en especial debido a que la mayoría se derivan de la perspectiva constructivista subyacente, que considera que la comprensión del estudiante se construye mediante la formación de objetos mentales y de la realización de conexiones entre ellos. Sin embargo, la comunidad de educadores matemáticos no ha alcanzado un acuerdo unilateral respecto al significado de "comprensión" (Schroeder, 1987). Algunos de estos puntos de vista son:

- La comprensión como la superación de obstáculos cognitivos, cuyo marco teórico es *“los obstáculos cognitivos y epistemológicos”* (Bachelard, 1938), (Cornu, 1991), (Sierpinska, 1990).
- La comprensión como generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto, cuyo marco teórico es *“el concepto-imagen y el concepto-definición”* (Davis & Vinner, 1986), (Tall, Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change, 1989) (Tall, 1991), (Tall & Vinner, 1981), (Vinner, 1983), (Vinner, 1991).
- La comprensión durante la operación con representaciones múltiples, cuyo marco teórico es *“las representaciones múltiples”* (Kaput, 1985), (Kaput, 1987), (Kaput, 1989).
- La comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales, cuyo marco teórico es *“la dicotomía entre las concepciones operativas y estructurales”* (Sfard, 1991), (Sfard, 1992), (Sfard, 1994).
- La comprensión como proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento, cuyo marco teórico es *“el constructivismo”* (Glaserfeld, 1987).

Aunque nuestro objeto de estudio no se centra en las concepciones acerca de la comprensión, si es necesario visualizar un panorama que nos ayude a determinar cuál de ellas es la más pertinente para la presente investigación, dado que nuestro marco teórico es precisamente una teoría de comprensión para los conceptos matemáticos.

1.7 El marco teórico de la investigación: La teoría para la comprensión matemática de PK

Se describen a continuación algunos rasgos generales de nuestro marco teórico, los cuales contextualizan su origen, estructura del modelo de comprensión y la pertinencia para conseguir el objetivo de nuestro estudio.

1.7.1 Breve reseña preliminar

La teoría PK sobre la evolución de la comprensión surge desde un referente netamente constructivista y está basado en la concepción de comprensión de

(Glaserfeld, 1987), quien propuso la siguiente definición: *“El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe... entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes de dichas estructuras que podemos llamar comprensión”* y añade que la comprensión es un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento de una persona .

A partir de lo anterior, (Pirie & Kieren, 1989) asumieron su concepción teórica para la comprensión matemática de la siguiente manera: *La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursividad parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él.*

El origen inicial de la teoría se fundamenta en la observación y comprensión de las matemáticas a nivel escolar medio y superior (universitario) en conceptos como las fracciones y las funciones cuadráticas. Pirie y Kieren fundamentan su teoría en “experimentos de enseñanza” en ambientes constructivistas, mediante entrevistas individuales, grabaciones en video y audio de actividades que los estudiantes desarrollaban, a la vez que del análisis de respuestas a las diferentes intervenciones escritas u orales de los estudiantes.

1.7.2 Descripción y caracterización general de la teoría

La teoría PK es una propuesta que consiste en el análisis de la gradación de la comprensión de un concepto matemático. La teoría postula un modelo compuesto por ocho niveles que conforman su aspecto descriptivo (evolución de la comprensión) y está dotado por unas características identificadas y analizadas por sus creadores; los ocho niveles describen la evolución de la comprensión matemática en cuanto a conceptos o relaciones entre conceptos (ver Figura 1.2).

De otro lado, las características esenciales de la teoría son tres: *El Folding Back*, que es quizás la característica más importante y tiene que ver con el proceso dinámico de redoblar. En uno de sus artículos, Pirie y Kieren afirman al respecto: *“El redoblamiento permite a una persona funcionar en un nivel exterior y enfrentarse con un desafío para regresar a un nivel de comprensión más interno con el fin de reconstruir esa comprensión como base para nuevos niveles externos de comprensión”* (Pirie & Kieren, 1991b).

De esta manera, se provoca la reexaminación de la comprensión de un nivel de forma distinta, a partir de las acciones que aparecieron originalmente cuando se trabajó en dicho nivel. La diferencia es cualitativa y realmente distinta debido a la motivación asociada con volver a doblar y la comprensión desarrollada en los anillos externos (Pirie & Kieren, 1991a), (Pirie & Kieren, 1992a). La Figura 1.1 exhibe dos ejemplos que representan los mapas que muestran los recorridos realizados por estudiantes, en investigaciones como las de (Pirie & Kieren, 1991b) y (Martin, 2008), mientras crece la comprensión de un concepto en particular.

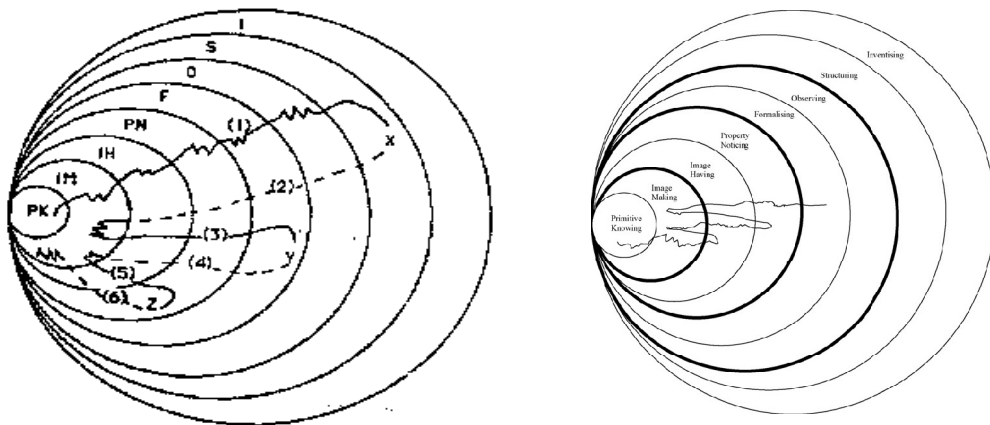


Figura 1.1 Representaciones diagramáticas del modelo para la evolución de la comprensión matemática con los ocho niveles, y el posible mapa de recorrido que puede hacer un estudiante, en cuanto a la comprensión de un concepto matemático, haciendo *Folding Back*.

La segunda característica importante del modelo tiene que ver con los llamados *límites de falta de necesidad* que son representados en el siguiente diagrama del modelo.

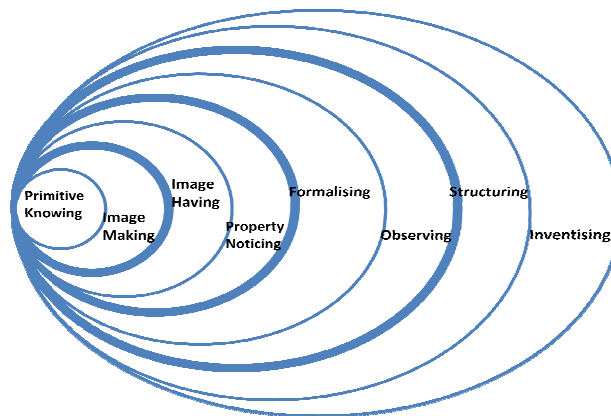


Figura 1.2 Una representación diagramática del modelo para la evolución de la comprensión matemática, en el cual los límites de falta de necesidad están representados por los aros más gruesos.

Estos límites se refieren al progreso del estudiante hacia una comprensión más elaborada y estable, que no requiere necesariamente de los elementos de los niveles más bajos (Pirie & Kieren, 1992b). De esta manera se considera que un estudiante que se mueva entre límites de falta de necesidad ha logrado un importante cambio cualitativo en la comprensión de los conceptos expuestos. No obstante, es posible que un estudiante regrese a niveles bajos de comprensión, aún cuando hayan sido superados previamente los límites de falta de necesidad.

La tercera característica fundamental del modelo tiene que ver con *los acting and expressing complements (complementariedades de la acción y la expresión)* en cada uno de los niveles (a excepción del primero y el último). (Pirie & Kieren, 1994b) en su artículo “Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it?” afirman (traducción libre):

El último rasgo de la teoría que aquí, queremos mencionar, es la de la estructura dentro de los mismos niveles. Creemos que más allá del primitive knowing cada nivel se compone de una complementariedad de *acción y expresión* y que cada uno de estos aspectos de la evolución de la comprensión son necesarios, antes de moverse desde cualquier nivel. Además, el crecimiento ocurre, actuando primero y luego expresando, pero con más frecuencia a través de y desde el movimiento entre estos aspectos complementarios. En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel.

Actualmente, estamos tratando más precisamente de definir estas complementariedades en cada nivel y ahora, intentamos presentar en detalle descripciones de aquellas al interior de los niveles del *image making, image having* y del *property noticing*. Es importante que el lector se dé cuenta que vemos la comprensión como un proceso y no como una adquisición o localización y que los anillos ilustran modos de comprensión, más que de fases exteriormente monotónicas. Por esta razón, hemos elegido los seis verbos: hacer y revisar, ver y decir, predecir y registrar, como etiquetas para las complementariedades de la acción/expresión al interior de los anillos del *image making, image having* y *property noticing*.

Esta característica expresa la importancia de estos dos aspectos fundamentales, los cuales son registrados por los estudiantes cuando están comprendiendo conceptos matemáticos en situaciones de aprendizaje, y resaltan la importancia de expresar con respuestas, procedimientos, quizás no esperados, pero que pueden indicar una actitud innovadora o de descubrimiento de relaciones matemáticas. La respuesta creativa será aquella que aparece como nueva para el sujeto que la produce; puede considerarse como un descubrimiento, en unos casos, o como una invención, en otros.

Más adelante, ellos hablan de ciertos términos que sirve para etiquetar las complementariedades de la acción y la expresión para cada nivel, los mismos que se muestran en el siguiente cuadro:

Nivel	Acción	Expresión
Primitive Knowing		
Image Making	Image doing	Image reviewing
Image Having	Image seeing	Image saying
Property noticing	Property predicting	Property recording
Formalizing	Method applying	Method Justifying
Observing	Feature identifying	Feature prescribing
Structuring	Theorem	Theorem proving
Inventising		

Tabla 1.1 Etiquetas propuestas por la teoría PK para las complementariedades de la acción y la expresión en cada nivel.

Pirie y Kieren también caracterizan las complementariedades de los niveles 2, 3 y 4, haciendo uso de una descripción general, de acuerdo a una experiencia de enseñanza en cuanto a la ecuación cuadrática. En el siguiente cuadro se describen los rasgos generales que dan cuenta del momento en que el aprendiz está actuando y expresando, siendo ejemplificados de acuerdo a la experiencia de aprendizaje con la ecuación cuadrática. Es importante anotar que Pirie y Kieren hacen esta descripción para los niveles ya mencionados. La presente investigación pretende caracterizar los demás niveles, de acuerdo a situaciones a priori, tomadas de la experiencia del investigador.

Nivel	Acción	Expresión
Image making	<p>Image doing Construcción de una imagen mental o física del concepto matemático, ya sea con tablas, puntos, etc. Sigue las instrucciones dadas por el profesor sin ningún tipo de análisis. No examina los resultados.</p> <p>No ha pasado al <i>image reviewing</i> cuando simplemente ve su acción previa ya completada y de cierta manera rechaza regresar a ella por algo menos que lo limite a una regla.</p> <p>Ejemplo: Formación de una imagen para la gráfica de una ecuación cuadrática. Juntar los puntos (puede ser de acuerdo a una tabla de valores) en el orden en el que fueron calculados. Ubican puntos en la gráfica siguiendo la instrucción correspondiente, pero no se cercioran si éste pertenece a la gráfica.</p>	<p>Image reviewing Consideración de la imagen como un todo. Se da importancia al orden en el que se ejecutan las instrucciones. Hay análisis del trabajo realizado por las instrucciones dadas y adaptan nuevas tareas a ciertas ideas tentativas de cómo las imágenes deben ser construidas. No ha pasado al <i>image doing</i> cuando permitiendo la alteración del comportamiento previo, todavía no visualiza un patrón propio del concepto.</p> <p>Ejemplo: Consideración de una gráfica como un todo antes de desplazarse a la otra (de construir la otra), ver cierto patrón dentro de la actividad de graficación.</p> <p>Análisis descriptivo del trabajo realizado.</p>

Nivel	Acción	Expresión
Image having	<p>Image seeing Identificación de un elemento discrepante como un elemento no relacionado con su imagen mental (pues ya ha reunido conjuntamente los ejemplos previos y ha identificado un patrón), pero no es capaz de decir por qué. Ésta complementariedad de la acción parece ser efímera sin la complementariedad de la expresión, en este nivel.</p> <p>Ejemplo: Identifica un elemento discrepante, como por ejemplo, un punto que al ubicarlo, no corresponde a la gráfica de una función cuadrática. El estudiante lanza declaraciones como: "eso no puede ser correcto", "ese punto no puede ir allí". Esto, después de haber graficado varias funciones cuadráticas.</p>	<p>Image saying Explicación del por qué un elemento discrepante no se acomoda a su imagen. Articula las características del patrón identificado. Está en posición de hablar acerca de sus acciones y llevarlas más allá de la acción de graficar.</p> <p>Ejemplo: Lanza expresiones como: "Yo pensé que todos ellos formaban una U", "hemos conseguido ya un punto para $x=2$", "todos los que están en el fondo de la U son puntiagudos".</p> <p>No necesariamente implica tener la gráfica correcta o completa.</p>

Nivel	Acción	Expresión
Property noticing	<p>Property predicting Distinción y conexión de características de la imagen para formar y hacer posibles clasificaciones del concepto objeto de estudio. Se hacen posibles conjeturas con el análisis de dichas características. Ésta complementariedad de la acción parece ser efímera sin la complementariedad de la expresión, en este nivel.</p> <p>Ejemplo: Distingue y conecta características de su imagen, de acuerdo a la expresión de la función. Así por ejemplo, un estudiante puede creer que si el coeficiente de $y = ax^2$ es impar, entonces la gráfica correspondiente es puntiaguda, mientras que si es par, la gráfica correspondiente es de fondo plano.</p>	<p>Property recording Elaboración de registros que involucren expresiones articuladas en cierta forma claras. Pueden ser notas mentales o explícitas que evidencien el hecho de que una propiedad existió o parece "funcionar". El registro no necesita ser escrito.</p> <p>Ejemplo: El estudiante hace un registro mental de la propiedad de los coeficientes de $y = ax^2$, descrito en el ejemplo de la izquierda y acepta que es una propiedad que parece funcionar.</p>

Nivel	Acción	Expresión
Formalizing	<p>Method applying Identifica y llega a conocer finalmente las propiedades del concepto en cuestión con el fin de hacer una abstracción que le permitirá reconocer las cualidades comunes y así concebir una imagen global. De este modo, el estudiante ya adquiere en su mente una definición matemática del concepto en cuestión, aunque puede no ser capaz de verbalizarla, o en su defecto, puede no ser capaz de utilizar el lenguaje matemático formal. Con la posible ayuda de su profesor, el estudiante es capaz de comprobar mediante un método eficaz, que la definición que tiene en su mente acerca del concepto, está en correspondencia con las cualidades comunes que ha concebido. El alcance de las conexiones entre el concepto particular y otros conceptos subyacentes es mínimo y local.</p> <p>Ejemplo: Cuando se le propone construir la parábola mediante una estructura, una regla y una cuerda, con la ayuda de su profesor, el estudiante indentifica algunos elementos fijos como: un punto, una recta.</p>	<p>Method justifying Expresa cómo las cualidades o propiedades comunes al concepto particular convergen en una sola característica común. Describe en forma clara (aunque sin necesidad de un lenguaje matemático formal) la definición matemática del concepto y justifica coherentemente cada una de sus afirmaciones que le permiten describir finalmente su definición.</p> <p>Ejemplo: El estudiante lanza expresiones como: "Este punto nunca se mueve y esta recta tampoco", "o sea que los puntos de la curva que estoy graficando tienen la misma distancia al punto y a la recta!", "El punto que está en la punta de la gráfica es el que está más cerca de la recta fija".</p>

	Acción	Expresión
Observing	<p>Feature identifying. Utiliza como referencia su pensamiento formal. El estudiante observa la estructura general del concepto con el fin de estructurar y organizar sus procesos de pensamiento, así como también, reconocer las ramificaciones de los procesos de pensamiento. El estudiante combina las definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones que circundan el concepto particular para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas.</p> <p>Ejemplo: En las gráficas realizadas por él, intenta ubicar el punto fijo y la recta fija que identifica como elementos comunes en todas las parábolas. Haciendo uso de las palabras: foco, directriz, distancia focal, etc; se hace una idea de la definición.</p>	<p>Feature prescribing. Produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, de acuerdo a las propiedades que describió en el nivel anterior. Dicho de otra manera, el estudiante hace uso de la meta-cognición (ya que tiene un nivel mucho mayor de abstracción) para enunciar la definición del concepto particular, haciendo uso de un lenguaje matemático formal.</p> <p>Ejemplo: El estudiante es capaz de definir la parábola en sus propias palabras, de manera equivalente, como "el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz". Deduce, de acuerdo a las características abstraídas, las aplicaciones que una parábola tiene en la vida práctica.</p>

Niveles	Acción	Expresión
Struturing	<p>Theorem conjecturing. Interpreta la interrelación de las observaciones hechas mediante un sistema axiomático. Hace uso de otros ejemplos con el fin de validar sus creencias o conjeturas, relacionando ideas subyacentes, axiomas y otras definiciones, a través de otros dominios. Percibe de manera coherente la interconexión de diversas teorías, hasta llegar a un teorema.</p> <p>Ejemplo: El estudiante descubre, después de varios intentos, que en todas las parábolas con vértice en el origen, existe una directriz y un foco, tales que los puntos de la parábola equidistan de estos elementos. Relaciona ejemplos, teoremas y definiciones para llegar a su conclusión.</p>	<p>Theorem proving. Es capaz de demostrar el teorema establecido de manera verbal o en forma escrita, haciendo uso del lenguaje matemático adecuado.</p> <p>Ejemplo: El estudiante, es capaz de deducir la ecuación general de la parábola, dados algunos elementos. Expresa un resultado y es capaz de establecer si es un teorema.</p>

Tabla 1.2 Caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles de la teoría PK con referencia al concepto de función cuadrática.

La Figura 1.3 muestra las complementariedades de la acción y la expresión en cada nivel, de acuerdo al modelo.

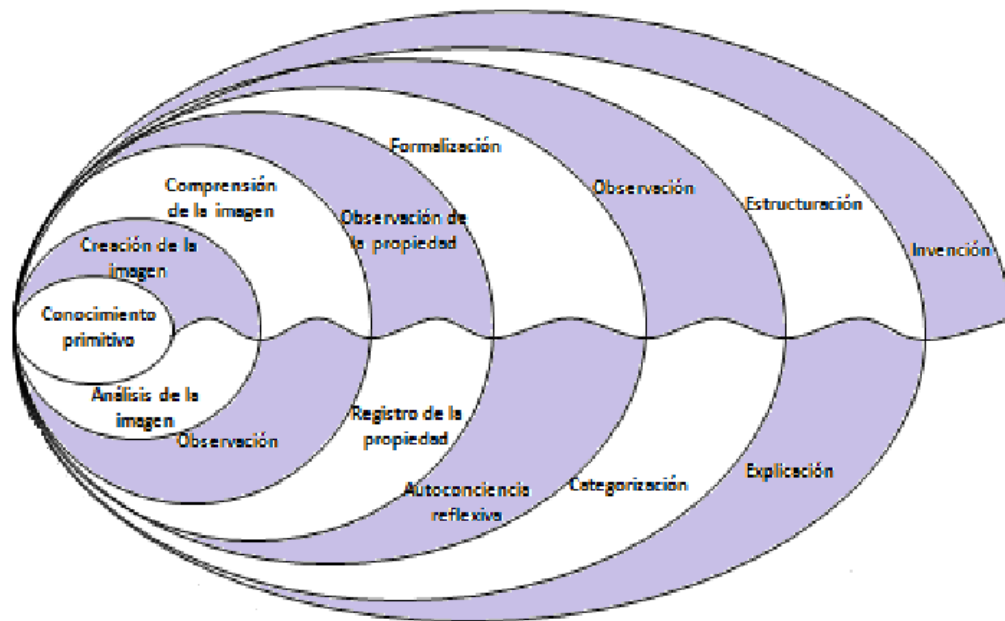


Figura 1.3 Una representación diagramática del modelo para las complementariedades de la acción y la expresión, en cada nivel.

1.7.3 Nomenclatura de los niveles

Cada uno de los niveles de comprensión se describen, de manera tal que se permita detectar el nivel en que se encuentra un estudiante razonando en relación a un concepto matemático, y a la vez, se puedan diseñar estrategias que permitan mejorar la comprensión.

La siguiente interpretación de los niveles de comprensión del modelo, se toma de (Meel, 2003)⁶.

⁶ En adelante, se prefiere conservar las etiquetas de los niveles, la característica del redoblamiento o *Folding Back* y los nombres de las complementariedades en inglés, con el fin de no dar lugar a posibles interpretaciones que se puedan suscitar más adelante con la traducción.

- **Nivel 1. Primitive knowing (Conocimiento primitivo)**⁷. Los estudiantes afloran en su mente toda la información que tiene que ver con ideas intuitivas (conocimiento intuitivo) o experiencias de aprendizaje relacionadas con el concepto objeto de estudio. También se conoce como *conocimiento situado* en términos de (Brown, Collins, & Duguid, 1989) o *conocimiento previo o informal* en términos de (Saxe, 1988).
- **Nivel 2. Image making (Creación de imagen)**. El estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Las imágenes no necesariamente son representaciones pictóricas, sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este nivel se relacionan con los aspectos mentales o físicos que se evidencien, con el fin de obtener una idea sobre el concepto objeto de estudio.
- **Nivel 3. Image having (Comprensión de la imagen)**. En este nivel, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas a una sola actividad, por imágenes mentales. El desarrollo de tales imágenes mentales están orientadas por un proceso, liberando al estudiante de las matemáticas a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie & Kieren, 1992b). Aquí el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.
- **Nivel 4. Property noticing (Observación de la propiedad)**. El estudiante examina una imagen mental y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen, observa las propiedades internas de alguna específica, además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. También construye y modifica definiciones mediante la combinación de tales propiedades. Es posible igualmente que desarrolle un concepto-definición (Tall & Vinner, 1981) creado a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas.
- **Nivel 5. Formalizing (Formalización)**. El estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas. Es importante anotar

⁷ En la teoría de PK, *primitivo* no implica un nivel bajo en matemáticas, sino más bien, el lugar de arranque (punto de partida) para el crecimiento de una determinada comprensión de las Matemáticas.

que las descripciones generales proporcionadas deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aún cuando no sea necesario usar un lenguaje matemático formal.

- **Nivel 6. Observing (Observación).** El estudiante utiliza su pensamiento formal, es decir, produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, además, es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para relacionar dichas ideas.
- **Nivel 7. Structuring (Estructuración).** En este nivel, el estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor, siendo capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (Pirie & Kieren, 1989).
- **Nivel 8. Inventising (Invención).** El estudiante es capaz de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este nivel, la comprensión matemática del estudiante es considerada sin límites, imaginativa y llega más allá de la estructura actual, lo que hace que el conocimiento estructurado se convierta en una nueva dimensión de conocimiento dotado con otra estructura quizás isomorfa a la actual, que a su vez se convertirá en un nivel de conocimiento primitivo.

1.7.4 Otras características de la teoría

Además de las tres características mencionadas anteriormente, la teoría de PK provee a los investigadores herramientas educativas que permiten describir y evaluar con mayor precisión la evolución de la comprensión en el aprendiz. A continuación se describen brevemente:

- Los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo permite, y de hecho retiene, los niveles internos. Los niveles externos a su vez, se insertan y envuelven a los internos. Por esto se dice que el modelo corresponde en realidad una teoría de la *relatividad de la comprensión*. En este sentido, se puede observar que Pirie y Kieren conciben el conocimiento primitivo, como un generador de modelos completos, similares a la totalidad. Esta propiedad otorga al centro interno la cualidad de *carácter fractal*, tal

como se muestra en la Figura 1.4. Esta secuencia o carácter fractal, señala la importancia de la información que se encuentra en el centro interno, toda vez que al recorrer los niveles del modelo hasta llegar al nivel de invención, es susceptible de convertirse en un nuevo conocimiento primitivo para la comprensión de otro conocimiento más elaborado (Pirie & Kieren, 1989).

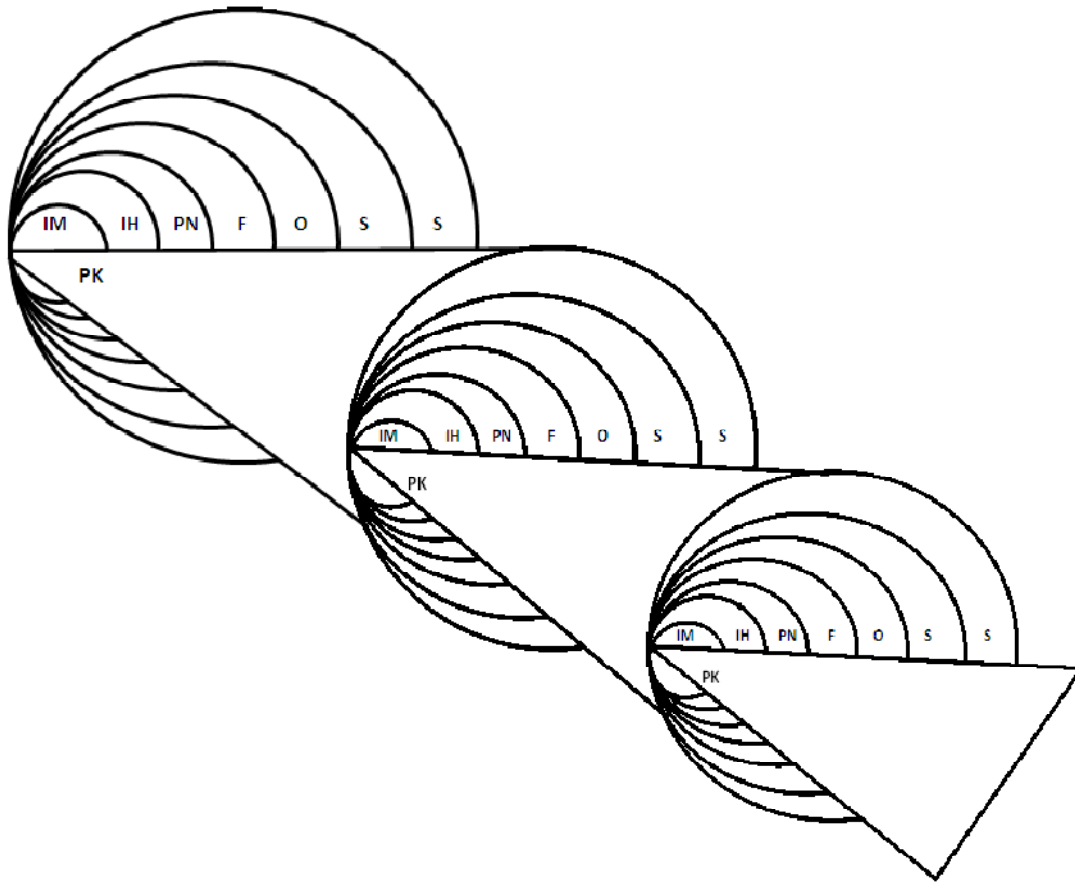


Figura 1. 4 Una representación diagramática de la forma fractal del modelo para la evolución de la comprensión matemática.

- La teoría de PK postula la imposibilidad de que un individuo conozca realmente que está sucediendo en la mente de otro individuo (la cual es una postura constructivista radical de Glasersfeld que está en desacuerdo con la postura de Piaget en este aspecto).
- Cada uno de los niveles delimitan un *cambio cualitativo* en la evolución de la comprensión del estudiante.

- Se reconoce la utilidad de las entrevistas con el fin de rastrear los movimientos de los estudiantes a través de los niveles de comprensión. En particular, Pirie y Kieren creen que un instrumento escrito, en especial un examen de opción múltiple, no expone completamente lo comprendido por el estudiante por lo que ésta sólo puede ser inferida y no medida.
- Se da total importancia a las preguntas provocativas, invocativas y de validación.
- Se postula el hecho de que *La comprensión matemática de cada persona es única*.

Sin lugar a dudas, estas características adicionales a las ya presentadas en la sección 1.7.2, enriquecen los fundamentos conceptuales que giran en torno a la teoría y permiten analizar fenómenos más complejos, de tal forma que hacen que la teoría de PK pueda ser generalizada a un mayor número de situaciones de aprendizaje en el campo de las Matemáticas.

1.7.5 Investigaciones relacionadas con la teoría de Pirie y Kieren en Educación Matemática

En 1989, cuando Pirie y Kieren comienzan a desplegar su teoría constructivista en cuanto a la observación de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas a nivel escolar medio y superior, en conceptos como las fracciones y las funciones cuadráticas, también se comienzan a gestar otra serie de estudios que describen experiencias y ambientes de aprendizaje general, en los cuales los estudiantes se comprometen durante un relativo corto período de tiempo, en otros conceptos matemáticos. Es necesario precisar que la teoría de PK ha sido extendida a conceptos del análisis matemático por el David E. Meel. A continuación, describiremos en forma breve, algunas de estas investigaciones:

- **Folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding** (Pirie & Kieren, 1991b). La investigación explora el concepto de *redoblamiento* resaltándolo como elemento esencial en el crecimiento de la comprensión matemática de una persona. Para ello, se analiza el trabajo realizado por un estudiante universitario con el fin de ilustrar este concepto y mostrar los roles de intervención por profesores o investigadores en este proceso. Ejemplos adicionales,

con protocolos descritos en estudiantes de varias edades en escuelas, también son presentados en esta investigación.

- **Growth in Mathematical understanding: How can we characterise it and How can we represent it?** (Pirie & Kieren, 1994b). En la investigación, se explica y se ilustra en detalle las tres principales características del modelo con referencia a los conceptos de fracción y función cuadrática. La teoría se ilustra mediante ejemplos con el trabajo hecho por los estudiantes. También, explica con rigor las características de las complementariedades de la acción y la expresión.
- **How do student's behaviors relate to the growth of their mathematical ideas?** (Warner, 2008). La investigación analiza la relación entre el comportamiento de los estudiantes y cómo incide en el crecimiento de sus ideas matemáticas generales, extraídas a partir de sus experiencias. Tal análisis fue desarrollado a través de una serie de estudios de caso, involucrando estudiantes de la escuela media con variedad de habilidades.
- **Looking at the complexity of two young children's understanding of number** (Pirie & Thom, 2006). La investigación presenta un estudio cualitativo sobre la comprensión del concepto de número de dos estudiantes de tercer grado. Los estudiantes fueron grabados mientras trabajaban acerca de cada cosa que conocían acerca del número 72. Sus actuaciones y conversaciones fueron analizadas dentro de la teoría. Los resultados del análisis del video revelaron que la comprensión de los dos estudiantes acerca del número natural era conceptualmente compleja.
- **Honors Student's Calculus Understandings: Comparing Calculus & Mathematica and Traditional Calculus Student** (Meel, 1998). Este estudio comparó la comprensión de estudiantes de Cálculo de Honor de tercer semestre del currículo de C&M con un currículo de Cálculo Tradicional. Con tres instrumentos, se analiza la comprensión de los conceptos de límite, derivada e integral, y mediante una clasificación son validadas las conclusiones del estudio.

La descripción breve de los estudios anteriores, pretende poner en evidencia algunas experiencias educativas, en las que se muestra la forma cómo actúan las características proporcionadas por el modelo y la manera en que evoluciona el proceso de comprensión en cada uno de los estudiantes para finalmente enriquecer el desarrollo y ejecución de la presente investigación.

1.7.6 Pertinencia de la teoría de Pirie y Kieren para la presente investigación

Se ha elegido la teoría PK para el desarrollo de la presente investigación por las siguientes razones:

- El TFC involucra ideas y conceptos matemáticos, tales como los de infinito, límite, derivada e integral, que se encuentran estrechamente relacionados, pero al momento de abordarlos en el proceso de enseñanza y aprendizaje se crea en la mente del alumno una inadecuada integración entre el concepto imagen y el concepto definición (en términos de Tall y Vinner). Dado esto, el presente trabajo de investigación pretende implementar una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, en los que la teoría de PK fundamenta los niveles de comprensión iniciales, de tal forma que mejoren la integración entre los conceptos arriba mencionados y se llegue finalmente a la comprensión del Teorema en cuestión, acorde con el progreso a través de los niveles.
- No se conocen investigaciones en el campo educativo que aborden la comprensión de los conceptos de tangente, cuadratura y su relación inversa, en el marco de la teoría PK.
- El diseño de entrevistas socráticas ha sido exitoso como estrategia metodológica para investigaciones a nivel de doctorado y maestría, en el marco de otro modelo de comprensión, como lo es el de van-Hiele. Por ello, la entrevista de carácter socrático se hace pertinente, además de innovadora, dado que sería la primera investigación doctoral conocida que la adecúa como estrategia metodológica en el marco de la teoría para la comprensión de PK.
- La teoría ha sido extendida por parte del profesor (Meel, 1998), a conceptos del Análisis Matemático, como marco teórico en la ejecución de investigaciones en tesis doctorales, evidenciando resultados satisfactorios.
- La teoría permite a los estudiantes comprender no sólo conceptos, sino también relaciones entre ellos, tal como es el caso de la relación inversa entre tangentes y cuadraturas (relación matemática relacionada con la presente investigación), debido a su característica dinámica de *redoblar* en niveles más internos, con un nivel de comprensión más avanzado. Este redoblamiento ocurre en casos en

los que la comprensión haya resultado inadecuada en determinado nivel, para luego ser sometida a un proceso de reexaminación en forma diferente, en un nivel más interno.

Pirie y Kieren conciben que para la planeación, participación y la realización de observaciones sobre el desarrollo curricular en las clases de matemáticas, las comprensiones analizadas en su teoría resultan de mucha utilidad (Pirie & Kieren, 1994b). Ellos construyeron una variedad de prácticas de instrucción que relacionan el ambiente del salón de clases con la promoción de la evolución de la comprensión, a partir de sus concepciones sobre el desarrollo de la comprensión matemática. Con base en tales prácticas, Pirie y Kieren identifican cuatro principios esenciales que generan la implementación y las interacciones del maestro con los estudiantes y que propician un ambiente constructivista para motivar el aprendizaje y así lograr una mejor comprensión matemática (Pirie & Kieren, 1992a). A continuación se señalan los apartes más importantes de cada uno de tales principios (Meel, 2003):

- *Aunque un maestro pueda tener la intención de hacer pasar a los estudiantes hacia objetivos de aprendizaje matemáticos particulares, debe estar consciente de que dicho progreso puede alcanzarse por parte de algunos de los estudiantes, pero es posible que otros no lo alcancen como se esperaba...*
- *En la creación de un ambiente o aprovisionamiento de oportunidades para los niños con el fin de modificar su comprensión matemática, el maestro actuará de acuerdo con la creencia de que existen diferentes caminos para llegar a la misma comprensión matemática...*
- *El maestro estará consciente de que distintas personas tendrán distintas comprensiones matemáticas...*
- *El maestro sabrá que para cualquier tema existen diferentes niveles de comprensión, pero que éstos nunca se alcanzarán "de una vez y para siempre" (pp. 507-508).*

Al respecto, (Meel, 2003) realiza los siguientes comentarios:

El primer principio sugiere que el maestro constructivista debe estar consciente y reactivo al ambiente del salón de clases que se encuentra en constante evolución. Esta continua reestructuración del salón de clases se registra mediante las observaciones de las fabricaciones de comprensión de cada uno de los estudiantes, así como de las construcciones de cualquier tipo. Como resultado, y de acuerdo con Kieren, un maestro deberá poner énfasis:

1. *En escuchar, en lugar de simplemente oír;*
2. *En actuar con los estudiantes para realizar las matemáticas, en vez de simplemente mostrar a los estudiantes cómo realizar las matemáticas;*
3. *En establecer un discurso efectivo del argumento matemático o de la conversación matemática en vez de simplemente el discurso de decir, interrogar o evaluar;*

4. *En el mecanismo del pensamiento matemático del estudiante, en vez de simplemente en las respuestas del estudiante;*
5. *En el maestro y los estudiantes como una relación referida con sus acciones, uno aprendiendo del otro;*
6. *En el maestro como co-desarrollador de un currículo matemático vivo y no sólo un recipiente o conducto de un currículo pre-decuido (p. 33).*

Este énfasis transforma el ambiente del salón de clases y permite que los maestros enfoquen la comprensión construida por los estudiantes e individuos, mientras se tiene la conciencia necesaria para planear experiencias adicionales en el salón de clases.

El segundo principio implica que el maestro debe reconocer que no hay una forma específica o una secuencia de instrucción, dado que no hay un patrón único o mejor para construir la comprensión. Sin embargo, Pirie y Martin identifican una secuencia efectiva para la enseñanza del concepto de ecuaciones lineales. Esta secuencia, aún cuando se presenta como aplicable en todo el salón de clases, relaciona al maestro con la comprensión realizada por los estudiantes individualmente dentro de la clase...

El tercer principio propone que el maestro considere que la comprensión de cada alumno está mediada por la comprensión interna realizada por el individuo. Como resultado, el maestro no puede suponer que la comprensión de cierto tema pueda transmitirse u obtenerse por los estudiantes. La razón de ello, de acuerdo con (Pirie & Kieren, 1992a)), "La comprensión de un tema no es una adquisición. La comprensión es un proceso continuo que por naturaleza es único para el estudiante" (p. 508). Por lo tanto, al parecer Pirie y Kieren sostienen que el maestro no puede desear impartir un aversión idealizada particular de la comprensión a los estudiantes.

El último principio se relaciona con las respuestas del estudiante en relación con las observaciones encontradas en el salón de clases. Aunque aparecen evidencias externas que indican que diferentes estudiantes llegaron a la misma comprensión, cada estudiante tiene una comprensión única. Como resultado, el maestro debe validar el nivel de comprensión de cada estudiante y comparar los niveles de comprensión entre todos los estudiantes. Además, la instrucción no debe enfocarse únicamente en las formas de pensamiento correspondientes a un solo nivel, puesto que el proceso normal de evolución requiere que los estudiantes redoblen sistemáticamente hacia los niveles anteriores de la comprensión. Como resultado, el ambiente de aprendizaje debe construirse para promover el redoblado con la esperanza de motivar la evolución de la comprensión en los estudiantes.

Está claro que cuando se trata de estudiar las comprensiones matemáticas (o cualquier otro tipo de comprensión) en los estudiantes, se dificulta generalizar conclusiones que permitan evidenciar patrones de razonamiento idénticos en diversos grupos, pues no es posible acceder exactamente a lo que cada individuo procesa en su cabeza, ante ciertas situaciones de aprendizaje; sin embargo, lo que sí está claro es que ante ciertos ambientes de aprendizaje propiciados de manera intencional, se puede conjeturar

evoluciones particulares en la comprensión, dadas las respuestas y actuaciones de los estudiantes.

1.8 Un modelo de comprensión alternativo: El modelo educativo de van-Hiele

Se presenta una breve reseña con un modelo de comprensión alternativo al desarrollado en nuestro estudio: el modelo educativo de van-Hiele. Este modelo guarda una estructura similar a la teoría de PK y ha sido, en conjunto con la entrevista de carácter socrático, marco teórico de investigaciones anteriores en el contexto de la comprensión de conceptos matemáticos; por lo tanto, se considera pertinente desarrollar algunos tópicos que permitan realizar una comparación entre los dos modelos y dejar al lector posibles conjeturas.

1.8.1 Breve reseña preliminar

Como profesores de secundaria en Holanda (1958), Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof tuvieron problemas por la manera cómo sus estudiantes se desempeñaban en Geometría. Ocurrió que mientras estudiaba algunos de los trabajos de Jean Piaget, Pierre van Hiele formuló su sistema de niveles de pensamiento en geometría. Él notó, como es evidente en algunas de las entrevistas de Piaget, que los problemas o tareas que se presentan a los niños con frecuencia requieren de un conocimiento del vocabulario o propiedades que está fuera del alcance de su nivel de pensamiento. Si la enseñanza acontece en un nivel superior al del estudiante, el material no es asimilado propiamente en la memoria por un periodo largo de tiempo. En las palabras de (Freudenthal, 1973): *En tanto que el niño no sea capaz de reflexionar sobre su propia actividad, el nivel alto se mantiene inaccesible. El nivel alto de operación puede entonces pensarse como un algoritmo, aunque con una consecuencia de poca duración. Esto ha sido probado debido al fracaso en la enseñanza de fracciones.*

En 1957 los van Hiele, presentaron sus respectivas memorias doctorales en la Universidad de Utrecht, Holanda. Sus disertaciones las acompañaron con el desarrollo de una estructura y el experimento con niveles de pensamiento, con el propósito de ayudar a los estudiantes a desarrollar la percepción en la geometría. Pierre van Hiele formuló el esquema y los principios psicológicos y Dina van Hiele enfocó sus experimentos didácticos con el propósito de elevar los niveles de pensamiento de los estudiantes. Aquí yace el tema del

esquema de nivel de van Hiele, que más tarde sería la semilla para extenderlo a conceptos matemáticos avanzados.

1.8.2 Descripción del Modelo

El modelo de Van Hiele se compone de tres elementos principales: *Los niveles*, son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles, *las fases de aprendizaje*, son los procesos que conducen al estudiante desde un nivel de razonamiento al siguiente y la *percepción-insight*, que es el interés original y el tema de disertación. En la teoría está implícita la idea de que los estudiantes se encuentran con obstáculos en tanto intentan, quizás sin saberlo, el ascenso desde un peldaño al siguiente en la escalera de los van Hiele.

El modelo educativo de van Hiele, tal como se utiliza actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

- Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las Matemáticas.
- Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
- Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida.
- El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz.

Las fases de aprendizaje están orientadas desde un nivel de pensamiento a otro. Van-Hiele describe el paso de un estudiante de un nivel al siguiente en función del aprendizaje, “la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural, tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje”. El paso de un nivel al siguiente se produce a través de una específica secuencia de fases de aprendizaje.

1.8.3 Nomenclatura de los niveles

Los van Hiele enunciaron originalmente su modelo, distinguiendo cinco niveles (Básico o nivel 0, y niveles I, II; III y IV). A través de la bibliografía sobre el tema, ellos y otros autores han ido cambiando la forma de numerar o de referirse a estos niveles. El mismo P. van Hiele, en la más notable revisión de su teoría (van-Hiele, 1986) a, enfatiza la importancia de los tres primeros niveles, a los que se refiere como “básico o nivel visual, segundo nivel o nivel descriptivo, tercer nivel o nivel teórico”.

En el mismo trabajo, señala que los niveles superiores a estos presentan dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico. Sin embargo, la forma más habitual de referirse a los niveles es distinguiendo cuatro niveles de la siguiente manera (Gutiérrez & Jaime, 1990): se denomina nivel I (de reconocimiento), nivel II (de análisis), nivel III (de clasificación), nivel IV (de deducción formal).

(Land, 1991) realiza una clasificación similar: Habla de nivel 0 (básico, visual o predescriptivo), nivel I (descriptivo), nivel II (teórico) y nivel III (deductivo).

Por último, en (Llorens & Pérez, 1997), se encuentran estos cuatro niveles añadiendo un nivel anterior, que se denomina nivel 0 o pre-descriptivo.

En este estudio se seguirá la nomenclatura dada por J. Llorens:

Nivel 0, **predescriptivo**
Nivel I, **de reconocimiento visual**
Nivel II, **de análisis**
Nivel III, **de clasificación, de relación**
Nivel IV, **de deducción formal**

Evidentemente, más que la nomenclatura, lo que importa es la descripción de estos niveles y sus características, de acuerdo al concepto objeto de estudio.

1.8.4 Caracterización del modelo

Para que una clasificación en niveles pueda considerarse dentro del modelo de van Hiele, es necesario que los descriptores de los niveles cumplan con unas propiedades específicas que se enuncian a continuación. Es prudente advertir que la nomenclatura que se utiliza es la presentada por (Usiskin, 1982).

Propiedad 1: (**Secuencialidad fija**). Cada estudiante debe progresar a través de los niveles en una secuencialidad fija, esto es, “Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel $n-1$ ”

Propiedad 2: (**Adyacencia**). El objeto de percepción del nivel $n-1$ se convierte en el objeto de pensamiento del nivel n .

Propiedad 3: (**Distinción**). El nivel n requiere de una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel $n-1$, esto es, la percepción de una nueva estructura.

Propiedad 4: (**Separación**). Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático.

Propiedad 5: (**Cada nivel tiene su lenguaje**). Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles hasta el punto que cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico, de modo que las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles de van Hiele, no sólo se reflejan en las formas de resolver problemas, sino que sobre todo, se manifiestan en la forma de expresarse y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico, a palabras como “demostrar” por ejemplo. Esta palabra tiene significados típicamente diferentes según el nivel de razonamiento.

Propiedad 6: (**Consecución**). El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual. Algunos investigadores como (Hoffer, 1983) y (Fuys, Geddes, & Tischler, 1985), han desglosado cada nivel de van Hiele en varias habilidades de razonamiento, de forma que sólo se puede considerar adquirido un nivel cuando se manifiestan cada una de sus cualidades.

1.8.5 Investigaciones relacionadas con el modelo de van-Hiele en Educación Matemática.

Desde la difusión inicial de los trabajos de van-Hiele, desarrollado mediados de los años 70, el interés por este modelo ha sido creciente y se han realizado muchas investigaciones basadas en sus teorías. Existen muchos trabajos de investigación sustentados en las ideas del modelo de van Hiele y cuyo denominador común es la insistencia en aplicarlo a cuestiones

geométricas de niveles educativos elementales o medios⁸. En la actualidad existen líneas de investigación que siguen centradas en el estudio de problemas geométricos de mayor complejidad (utilizan un mayor número de dimensiones) que los estudiados anteriormente.

A partir de 1982 comenzaron a desarrollarse algunos proyectos de investigación con el objetivo común de proponerse llevar a cabo una revisión curricular (referida a la geometría) aplicando el modelo de van Hiele. Se destacan tres proyectos llevados a cabo en EE.UU que han tenido gran difusión:

Proyecto Chicago (1982). “Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry”. Este proyecto dirigido por Zalman Usiskin, tuvo como propósito fundamental “analizar la habilidad de la teoría de van Hiele para describir y predecir el resultado de los estudiantes de geometría en la escuela secundaria”.

Proyecto Oregon (1986). “Assessing children’s intellectual growth in geometry”, Universidad de Oregon, Burger, Shaughnessy, Hoffer y Mitchell. Este proyecto fue dirigido por William F. Burger de la universidad del estado de Oregon. El estudio se centró en la contestación a tres preguntas:

- ¿Son los niveles de van Hiele útiles para describir el proceso de pensamiento de los estudiantes en las tareas de geometría?
- ¿Pueden los niveles ser caracterizados operacionalmente por la conducta de los estudiantes?
- ¿Puede un procedimiento de entrevista ser desarrollado para revelar los niveles predominantes en el razonamiento en una específica tarea de geometría?

El proyecto de investigación respondió afirmativamente a las tres preguntas anteriormente formuladas.

Proyecto Brooklyn (1989). “Geometric thinking among adolescents in inner city schools”. Brooklyn College; Fuys, Geddes, Lowette y Tschler. Se desarrolló con estudiantes de 6º y 9º grado. El proyecto fue dirigido por

⁸ El más reciente trabajo de investigación en esta línea, se lleva a cabo en el programa de Maestría en Educación, en la línea de Docencia de las Matemáticas (U. de A.) y se titula *La elipse como lugar geométrico, a través de la Geometría del doblado de papel, en el contexto de van-Hiele* (Santa, 2011).

Davis Fuys y Dorothy Geddes del Brooklyn College. Incluía cuatro tareas a realizar:

- Traducción de los materiales, fuente de van Hiele, del alemán al inglés, y el desarrollo de documentación más detallada sobre la versión conductista de los niveles.
- Desarrollo de tres módulos de evaluación-instrucción para ser usados con sujetos en entrevistas clínicas.
- Entrevistas con estudiantes de sexto y noveno grado.
- Análisis de los niveles de razonamiento sobre material de geometría en tres series de libros de textos de EE.UU.

El proyecto Chicago validó la teoría de van-Hiele, mientras el proyecto Oregon y el Brooklyn implicaban la aceptación de la validez de la teoría. Los tres proyectos relatados siguen centrándose en la Geometría como marco de su investigación.

Se pueden encontrar investigaciones que han sido objeto de tesis de doctorado, en el modelo de van-Hiele, las cuales se salen del ámbito de la Geometría. A continuación se mencionan algunas que han servido de base para la realización del presente estudio.

Memoria para optar al título de doctor presentada por Land, J. Presentada en la Universidad de Boston con el título de “Appropriateness of the van-Hiele Model for describing Student’s Cognitive Processes on algebra task as typified by College Students Learning of Functions” en 1991. Esta memoria ha servido de base para otras, como la de J. Llorens y la de P. Campillo cuyos resultados son bastante halagadores e interesantes. Abordan conceptos fundamentales del Análisis Matemático, como son el concepto de aproximación local y el de continuidad, resaltando y concediendo un especial interés a la evolución del razonamiento del estudiante. La tesis de (Land, 1991) cobra importancia en la medida en que es la primera que aplica el modelo de van-Hiele en un área diferente de la Geometría y aunque centra su estudio en destrezas, brinda un gran aporte a estudios posteriores.

Memoria para optar al título de doctor presentada por Llorens, J. “Aplicación del modelo de van-Hiele al Concepto de Aproximación Local” ha servido de base tanto para el desarrollo del trabajo de P. Campillo como para este estudio. Se resalta el trabajo de (Llorens, 1994), dado que abre las puertas para desarrollar el modelo de van-Hiele en conceptos del Análisis

Matemático. Su trabajo fue desarrollado y aplicado tanto en estudiantes de los últimos grados de secundaria como primer semestre de universidad. En su trabajo hace uso de la teoría de Vinner relacionada con la visualización de figuras geométricas.

Memoria para optar al título de doctor presentada por Campillo, P. “La Noción de Continuidad desde la Óptica del Modelo de van-Hiele”. Esta tesis fue leída en la universidad Politécnica de Valencia en 1999” (Campillo & Pérez, 1998).

Memoria para optar al título de doctor presentada por Jaramillo, C. “La noción de serie convergente, desde la óptica de los niveles de van-Hiele”. La tesis es de gran aporte al presente estudio en la medida en que:

- Presenta el modelo de van Hiele como una propuesta alternativa para desarrollar estrategias que propugnen por el desarrollo de los procesos de razonamiento de los estudiantes.
- Se aborda el concepto de convergencia, debido a su importancia en el edificio del Análisis Matemático y los correspondientes currículos académicos de las universidades.
- Permitió obtener y confirmar los descriptores de los niveles existentes que caracterizan el proceso de razonamiento infinito (Jaramillo C. , 2001).

Memoria para optar al título de doctor presentada por Esteban, P. “Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van-Hiele”, en la cual se tratan conceptos de carácter local como los de recta tangente, mediante el haz de secantes o el zoom, y la evolución de su comprensión mediante los niveles del modelo (Esteban, 2003).

Memoria para optar al título de doctor presentada por Navarro, A. “Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica” en la que se destaca porque dota de un concepto-imagen adecuado al concepto de convergencia mediante el mecanismo de una nube de puntos (Navarro, 2002).

Memoria para optar al grado de magíster presentada por Londoño, R y Jurado, F. “Diseño de entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie, vía áreas de figuras planas” en la que se destaca porque describe una experiencia educativa referida a la noción de límite, mediante la suma de áreas de rectángulos en forma de escaleras, la cual permite determinar los descriptores correspondientes a cada uno de los

niveles de razonamiento del concepto, en el contexto del modelo educativo de van-Hiele (Londoño & Jurado, 2005).

Memoria para optar al grado de magíster por Sucerquia, E y Z. Sandra. “Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de serie términos positivos”. El trabajo presenta un módulo de aprendizaje, basado en las fases de aprendizaje del modelo de van-Hiele; dentro de éste se proponen ciertas actividades para que los estudiantes progresen del nivel II al nivel III de razonamiento, usando como mediador los mapas conceptuales (Sucerquia & Zapata, 2009).

1.9 Para tener en cuenta en el diseño y aplicación de la entrevista de carácter socrático

En la presente investigación, se considera que la entrevista de carácter socrático cumple un doble papel; además de ser una estrategia metodológica para la comprensión de los procesos de razonamiento infinito involucrados en los conceptos de tangentes⁹ y cuadraturas, es un instrumento para recolectar los datos de la investigación. Adicional a esto, algunos componentes que se encuentran inmersos dentro de la entrevista y que son claves para alcanzar el objetivo que se persigue son: la pertinencia de la teoría de PK, el decálogo de la entrevista socrática, los procesos de razonamiento infinito, la visualización matemática y las TICs y el Geogebra®, los cuales son usados de acuerdo a la intencionalidad de las preguntas y más adelante serán desarrollados.

El diseño de una entrevista de carácter socrático como estrategia para la comprensión de un concepto matemático en particular, está fundamentado en el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón, en el Capítulo *Menón, Diálogos de Platón* (Platón, 1996), acerca de encontrar el cuadrado de área doble, de otro cuadrado dado. En el contexto de la investigación, la entrevista permite que el maestro reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza-aprendizaje del mismo, de tal forma que se genere la necesidad de diseñar una red conceptual que propicie el acercamiento del estudiante al concepto objeto de estudio, para que finalmente el entrevistado progrese en cada uno de los niveles de comprensión.

⁹ El artículo del profesor Pedro Pérez Carreras lleva a cabo una experiencia educativa en esta línea (Navarro & P, 2010).

El presente estudio utiliza el método de entrevista semi-estructurada de carácter socrático, usada para estudiar la forma en que la comprensión evoluciona en las mentes de los individuos, mediante preguntas orientadas a descubrir e interpretar "lo que es". El procedimiento consiste en hacer preguntas a un grupo piloto de estudiantes cuyas respuestas proporcionarán al investigador encontrar información valiosa para desarrollar su trabajo de campo. La secuencia de preguntas varía con cada entrevista, dependiendo de las respuestas del entrevistado, pero después de un largo proceso de experimentación se diseña finalmente el guión de entrevista que permitirá determinar su nivel de comprensión.

En investigaciones realizadas anteriormente (Londoño & Jurado, 2005), en el marco del modelo de van-Hiele, el cual tiene varias similitudes estructurales con la teoría PK en tanto que ambos nacen de la teoría constructivista, la entrevista de carácter socrático sirvió como un mecanismo adecuado para la construcción del concepto de suma de una serie infinita y fue validada como estrategia metodológica para la consecución de una tesis de maestría.

El artículo *El método socrático y el modelo de van Hiele* (De La Torre, 2003) describe la importancia del método socrático en la enseñanza de un concepto matemático. Por su valor y pertinencia para este trabajo de investigación, transcribimos un fragmento:

El método socrático

Cuando tuvo 70 años, en el 399 a.C., Sócrates fue sometido a juicio en su ciudad, Atenas, bajo la acusación de no creer en la religión del Estado y de corromper a la juventud enseñándole a no reconocer los dioses de la República. Encontrado culpable por sus jueces, se le condenó a muerte por envenenamiento con un alcaloide vegetal llamado cicuta. Sócrates tomó la cicuta y pasó a la inmortalidad.

La figura de Sócrates ha sido destacada en múltiples oportunidades como una de las más altas cimas morales de la humanidad.

El propósito de Sócrates, tal como se perfila en los Diálogos de Platón, es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, sea éste la inmortalidad del alma o la belleza o la virtud, pero no como un resultado de la enseñanza de Sócrates sino por propia reflexión. El interlocutor debe llegar a decir, por ejemplo, qué es la justicia, dar razón de ella, encontrar el fundamento que explique por qué es como es y no de otro modo, hallar su definición universal. La fórmula racional mediante la cual se explica la justicia, es denominada por los griegos el logos de la justicia, que es lo que hoy llamaríamos el concepto de justicia.

El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción.

En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a desvelar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz.

En el fondo del método está la doctrina socrática de la reminiscencia. De acuerdo con esta concepción, típicamente racionalista, las ideas o formas, que son objetos inaccesibles a la percepción sensorial y aprehensibles sólo mediante el pensamiento, están en el alma de cada hombre, en estado latente, como adormecidas. El papel del maestro consiste en estimular este proceso de reflexión e introspección en el aprendiz, gracias al cual llega a conocer. El acto de conocer se produce cuando las ideas se despiertan en el alma, reavivadas al contacto con el mundo sensible y mediante el recurso del diálogo.

El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada.

Dice Aristóteles en la Metafísica (Met. M., 1078 b27) que a Sócrates se le atribuyen dos cosas importantes, a saber, las definiciones universales y los argumentos inductivos. Las definiciones universales dadas por Sócrates buscaban el significado de las ideas, empleando para ello los argumentos inductivos, en los cuales tomaba como punto de partida ejemplos sencillos e ilustraciones concretas. Por ejemplo, la reflexión acerca de algunos casos particulares de actos justos, conducida por el maestro, debe llevar al aprendiz a una definición universal de justicia.

La inducción en Sócrates no es un método de demostración o prueba, sino un procedimiento encaminado a sugerir el significado de una definición universal, que se presenta a la mente con fuerza y claridad. La definición, por su parte, se justifica en la medida en que las consecuencias derivadas de su adopción sean satisfactorias.

1.9.1 Pertinencia de la entrevista de carácter socrática con la teoría PK

En (Pirie & Kieren, 1989) y (Pirie & Kieren, 1992b) se reconocen la utilidad de las entrevistas, para rastrear los movimientos del estudiante a través de los niveles de comprensión y está acorde con las opiniones expresadas por (Pirie & Schwarzenberger, 1988), al igual que (Simon, 1993). En particular, Pirie y Kieren conciben que algunos instrumentos escritos, como por ejemplo los exámenes de opción múltiple, no exhiben por completo lo comprendido por el estudiante por lo que tal comprensión sólo puede ser inferida y no medida. Afirman que los instrumentos descritos son menos factibles de ahondar en la evolución de la comprensión del estudiante, puesto que los instrumentos descritos desde su punto de vista, proporcionan imágenes estáticas de las expresiones externas del estudiante. Como resultado, ellos

consideran que las entrevistas son los principales medios para descubrir la comprensión cambiante del estudiante. Afirman que las entrevistas permiten realizar deducciones sobre la conciencia del estudiante acerca de las relaciones entre los conceptos, la capacidad de adaptar los procedimientos a situaciones nuevas, la posesión de ejemplos genéricos y la fluidez del lenguaje y el simbolismo.

De otro lado, la fundamentación y génesis que presenta el método socrático para la enseñanza de los conceptos (para nuestro caso en particular, matemáticos) y los antecedentes positivos que se han evidenciado en las investigaciones y experiencias educativas, se convierte en un mecanismo propicio para encajar como estrategia educativa en el marco de la teoría PK; más aún, cuando se tiene su aspecto descriptivo (los ocho niveles) y sus tres características fundamentales: el redoblamiento, los límites de falta de necesidad y las complementariedades de la acción y la expresión.

De esta manera, en el aspecto descriptivo, la entrevista socrática diseñada en este estudio permitió la detección de los niveles en el contexto de la teoría PK, y constituye una experiencia pedagógica para la comprensión de procesos de razonamiento infinito que se ven involucrados en los conceptos de área y tangentes.

Así pues, la aplicación de la entrevista socrática enmarcada en la teoría PK, en el proceso de comprensión matemática, propende por un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando y es precisamente uno de los fines de la educación colombiana: “El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de vida de la población, a la participación de la búsqueda de alternativas de la solución de problemas y el progreso social y económico del país” (Ley General de Educación, 1991), justificando más aún su pertinencia desde el punto de vista legal.

1.9.2 Decálogo para el diseño de una entrevista de carácter socrático: Características que se infieren del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón.

En (Londoño & Jurado, 2005) se presentan diez características fundamentales para diseñar y aplicar una entrevista de carácter socrático, con algunos apartes textuales del *Menón* (Platón, 1996) que ejemplifican la situación, y que son inferidas del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón, y establecen para su investigación, una conexión con las características y propósitos del modelo educativo de van-Hiele como una

ampliación de las ideas propuestas por (Jaramillo & Campillo, 2001) en su artículo *Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele*.

En esta dirección, el decálogo será retomado para el desarrollo de la presente investigación y se adaptará con algunas modificaciones ideas al diseño de la entrevista en el marco de la teoría PK, lo que permite fundamentar la coherencia entre la teoría y la entrevista socrática.

- **La intencionalidad de la entrevista**

Una de las características fundamentales de una entrevista consiste en que el entrevistador conozca a cabalidad los objetivos que debe lograr el entrevistado durante su desarrollo, con el fin de determinar con certeza el nivel de comprensión y describir cómo evoluciona dicha comprensión. Además, el entrevistador deberá reconocer e identificar las ideas que se encuentran en torno al concepto objeto de estudio, teniendo cuidado con los conceptos que están relacionados entre sí, formando lo que en el presente estudio se denomina, la *red conceptual*. Muchos de tales conceptos no se deberán explicitar debido a su alto contenido matemático, lo que quizás puede dificultar el discurrir de la entrevista, y por lo tanto toman un calificativo de *encubiertos*; sin embargo, durante la entrevista se tratan pero de manera implícita (pues son necesarios), para conseguir respuestas espontáneas y con contenido matemático plausible, producto del razonamiento crítico y reflexivo.

En el marco de la teoría PK, la intención fundamental no es otra más que la evolución de la comprensión del entrevistado. Ellos afirman que: *las preguntas de la entrevista actúan como herramientas de enseñanza y se vuelven un instrumento de diagnóstico útil debido a que en él pueden provocar la comprensión en un nivel más externo, invocar el redoblado o validar la comprensión del estudiante. Aún cuando un investigador desee categorizar las preguntas, la categorización sólo se presentará después de que el entrevistado responda a las preguntas y demuestre el efecto de la pregunta en la comprensión cambiante del estudiante* (Meel, 2003).

- **El lenguaje**

El lenguaje utilizado en la entrevista debe estar acorde al vocabulario común de quienes intervienen en ella:

Sóc. – ¿Es griego y habla griego? 82b-pág. 303¹⁰.

Las palabras que se utilicen en la entrevista deben conseguir un diálogo que motive siempre a dar respuestas en forma espontánea y sin temor a equivocarse. Por ejemplo, palabras como “podrías”, “trata ahora de decirme”, “crees”, “si no quieres hacer cálculos, muéstranoslo en el dibujo”, hacen que el diálogo fluya con naturalidad y le den confianza al entrevistado para expresar sus respuestas.

Sóc. – ¿Y podría haber otra superficie, el doble de ésta, pero con una figura similar, teniendo todas las líneas iguales como ésta? 82d-pág. 304.

Sóc. – Vamos, trata ahora de decirme cuál será el largo que tendrá cada una de sus líneas... 82e-pág. 304.

Sóc. – Pero entonces, ¿De cuál? Trata de decírnoslo con exactitud; y si no quieres hacer cálculos muéstranosla en el dibujo. 83e-pág. 308.

Al respecto, (Pirie & Kieren, 1990) y (Kieren, 1990) señalan que el establecimiento de inferencias sobre los movimientos entre los niveles de comprensión, sólo pueden aparecer después de que el estudiante realice acciones y expresiones, las cuales constituyen la característica de complementariedad del modelo; pero es en la complementariedad de la expresión en la que el estudiante hace uso de su lenguaje durante la entrevista y evidencia el nivel en que razona, por tanto, el entrevistador debe estar permanentemente atento al vocabulario que se utiliza durante la entrevista, de tal forma que fluya en el nivel correspondiente y propicie un razonamiento avanzado. En este sentido (Meel, 2003) afirma: *las situaciones que requiere el estudiante para actuar y verbalizar en referencia con situaciones complejas y únicas resultan integrales para establecer su nivel de comprensión. Estas circunstancias pueden ayudar a presentar el nivel actual de comprensión del estudiante y promover el desarrollo de la comprensión cuando se le incita en una situación de entrevista.*

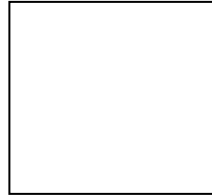
- **Los conceptos básicos**

Las preguntas iniciales que el entrevistador formula al entrevistado tienen como propósito determinar, si reconoce adecuadamente los conceptos y elementos básicos usados en el discurrir de la entrevista. En el contexto de Pirie y Kieren estas preguntas permiten saber si el

¹⁰ Todos los apartes textuales en las características del Decálogo para el diseño de una entrevista de carácter socrático, son tomadas de Menón (Platón, 1996).

estudiante supera el nivel de comprensión 1, denominado “conocimiento primitivo”, con el fin de que la entrevista pueda llevar a cabo y promueva la evolución en la comprensión. Es en este nivel donde inicia el proceso de llegar a comprender.

Sóc. – (Al servidor) Dime entonces, muchacho, ¿conoces que una superficie cuadrada es una figura así? (La dibuja) 82b-pág. 303.



Sóc. – ¿Es, pues, el cuadrado, una superficie que tiene todas estas líneas iguales, que son cuatro? 82c-pág. 303.

- **Las experiencias previas del entrevistado**

El uso de preguntas inquisitivas (preguntas que conducen a la búsqueda cuidadosa de lo que se quiere conocer) acerca de situaciones, imágenes o ejemplos de la vida cotidiana, le posibilitan al entrevistado reflexionar y responder, aflorando en su mente todas las ideas que tenga alrededor del concepto, o responda lo que él cree saber. El entrevistador debe tener presente que el entrevistado posee un cúmulo de conocimientos previos acerca del concepto a tratar, lo que para Pirie y Kieren son los conocimientos previos o informales.

Sóc. – ¿Y podría haber otra superficie, el doble de ésta, pero con una figura similar, teniendo todas las líneas iguales como ésta?

Serv. – Sí.

Sóc. ¿Cuántos pies tendrá?

Serv. – Ocho.

Sóc. – Vamos, trata ahora de decirme cuál será el largo que tendrá cada una de sus líneas. Las de ésta tienen dos pies, ¿pero las de ésta que es el doble?

Serv. – Evidentemente, Sócrates, el doble.

Sóc. – ¿Ves, Menón que yo no le enseño nada, sino que le pregunto todo? Y ahora él cree saber cuál es el largo del lado del que resultará una superficie de ocho pies, ¿O no te parece?

- **El diálogo inquisitivo**

El diálogo inquisitivo le permite al entrevistado una interacción con el entrevistador y a través de un pensamiento discursivo (que hace reflexionar y razonar), que él descubra, manifieste soluciones y llegue a comprender el concepto, ampliando su red conceptual de manera espontánea. El alumno comienza a ver relaciones nuevas que no veía antes y es entonces donde se puede hablar de la formación de una estructura de pensamiento, avanzando en su proceso de comprensión.

El entrevistador no enseña nada al entrevistado (hablando de una enseñanza directa), sólo lo conduce mediante la indagación y el razonamiento. De esta forma, la entrevista de corte socrático es una estrategia que le permite al entrevistado razonar de manera adecuada sobre las ideas que pudiera tener acerca del concepto en cuestión.

En este sentido, se encuentra la creencia de que el maestro no puede proporcionar la comprensión del estudiante. Sólo el estudiante puede construir su propia comprensión. La función del maestro es provocar y permitir la evolución de la comprensión (Pirie & Kieren, 1991a). La provocación y la motivación de la evolución va más allá de la simple solicitud a los estudiantes de trabajar con matemáticas de alto nivel, e incluye la generación de oportunidades para promover la comprensión. Las preguntas provocadoras, invocativas y de validación, son una parte integral del diálogo inquisitivo. Al utilizar estas técnicas de cuestionamiento, el maestro puede dirigir la comprensión individualizada de un estudiante al provocar un cambio a un nivel más externo de comprensión, mediante la solicitud del redoblado a un nivel previo de comprensión, y mediante la motivación de los estudiantes para validar su propio razonamiento (Pirie & Kieren, 1990).

En particular, una pregunta provocadora llevará al estudiante a un nivel más externo y le permitirá un desarrollo de la comprensión más continuo. La validación de las preguntas proporciona evidencia de que un estudiante está trabajando en un nivel específico de comprensión mediante su motivación para demostrar, de manera verbal o simbólica, las acciones matemáticas actuales (Pirie & Kieren, 1991a). Por lo tanto, para Pirie y Kieren el uso de preguntas provocadoras, invocativas y de validación, coinciden con la afirmación de Glasersfeld acerca de que aún

cuando se puede estar *estudiando la construcción de la realidad matemática de individuos dentro del espacio de su experiencia, en esta construcción no hay finales prescritos con los cuales luchar, a pesar de que pueda haber tareas o espacios bien definidos por la experiencia* (Steffe & Kieren, 1994).

Sóc. –... Pues, en efecto, el buscar y el aprender no son otra cosa, en suma, que una reminiscencia. 81d-pág. 302

Sóc. – ¿Ves, Menón, que yo no le enseño nada, sino que le pregunto todo...? 82e-pág. 304

- **La movilización del pensamiento**

En ocasiones se hace necesario hacer una misma pregunta varias veces; en un primer momento para que el entrevistado dé a conocer lo que sabe al respecto, en momentos posteriores (preguntas de confirmación) para obtener de él respuestas más elaboradas, toda vez que haya sido sometido a un proceso de razonamiento, producto de una indagación intencionada. El diálogo inquisitivo-discursivo, pero cordial, le debe permitir al entrevistado identificar características comunes, elaborar conjeturas y modificar muchas ideas del concepto en cuestión. Para esto, se pueden emplear diferentes mecanismos como visual-geométricos, verbales o escritos, entre otros. En tal sentido, se puede hablar de la **movilización del pensamiento** (inferimos del texto: *Structure and Insight* pág. 28 que la movilización del pensamiento es la extensión, ampliación o modificación de nuevas estructuras sobre las cuales las concepciones nuevas que se van generando a través de la entrevista complementan las anteriores o las modifican), (van-Hiele, 1986).

En términos de la teoría PK, hablar de la movilización del pensamiento durante la entrevista da lugar indiscutiblemente al proceso de redoblar. Por tal razón, las preguntas deben estar orientadas a localizar ciertos momentos problemáticos, en los cuales el entrevistado deberá revisar y reelaborar algunos procesos cognitivos por los que al parecer ya había transitado, con el fin de que el entrevistado extienda, amplíe o modifique sus concepciones para generar la nueva estructura de comprensión, y es en ese momento donde se dará lugar a la movilización del pensamiento.

Sóc. – Si este lado fuera de dos pies y este otro también de dos, ¿cuántos pies tendría el todo? Míralo así: si fuera por aquí de dos pies, y por allí de uno sólo, ¿no sería la superficie de una vez dos pies? 82c-pág. 304.

Sóc. – Si uno lo siguiera interrogando muchas veces sobre esas mismas cosas y de maneras diferentes, ten la seguridad que las acabaría conociendo con exactitud, no menos que cualquier otro. 85c-pág. 311

- **El aporte de información**

Algunas de las preguntas que se formulan brindan información necesaria (definición de nuevos conceptos, relaciones con otras ideas afines, ampliación del vocabulario, entre otros) para que el entrevistado razone y logre la comprensión del concepto. Sin embargo, es importante advertir que la información suministrada no debe sugerir enseñanza ni explicación alguna.

Sóc. – Los sofistas la llaman diagonal, y puesto que si diagonal es su nombre, de la diagonal se llegará a obtener, como tú dices, servidor de Menón, la superficie doble. 85b-pág. 311.

En este apartado, el aporte de información acerca del concepto de diagonal garantiza un lenguaje más refinado sobre el razonamiento del estudiante, propiciando avanzar en el proceso de comprensión.

- **La problematización con las ideas**

La reflexión por parte del entrevistado sobre sus concepciones alrededor del concepto, le permiten hacerse conciente y enriquecer su propio saber o explicitar sus carencias o dificultades. En el último caso, el entrevistado presenta un estado de contradicción, de problematización, de conflicto interno, de confrontación con sus ideas; algunas veces sus ideas cambiarán totalmente la estructura de pensamiento que tenía del concepto (disonancia cognitiva), en otras, requerirá de la ayuda del entrevistador para elaborar, modificar o ampliar sus nuevas estructuras de pensamiento. El entrevistado deberá centrar su atención en el conflicto de ideas para conseguir una mayor objetividad en sus respuestas.

El entrevistador debe parecerse al pez torpedo, aquel que entorpece al que se le acerca y lo toca (vuelve añicos las creencias para racionalizar el conocimiento) para obtener del entrevistado un conocimiento racionalizado y más elaborado.

Sóc. – Entonces de la línea de tres pies tampoco deriva la superficie de ocho.

Servidor. – Desde luego que no.

Sóc. – Pero entonces, ¿de cuál? Trata de decírnoslo con exactitud. Y si no quieres hacer cálculos, muéstranosla en el dibujo.

Servidor. – ¡Por Zeus!, Sócrates, que yo no lo sé.

Sóc. – ¿Te das cuenta una vez más, Menón; en que punto se encuentra ya del camino de la reminiscencia? Porque al principio no sabía cual era la línea de la superficie de ocho pies, como tampoco ahora lo sabe aún, si embargo, creía entonces saberlo y respondía con la seguridad propia del que sabe, considerando que no había problema. Ahora, en cambio, considera que está ya en el problema, y como no sabe la respuesta, tampoco cree saberla. 84a-pág. 308

- **El paso por los tres momentos**

Se considera que el entrevistado pasa por tres momentos: Creer saber la respuesta a la pregunta y luego, a través de las mismas preguntas, darse cuenta que no sabe (problematizándolo) y por último, al estar en contradicción consigo mismo, se plantea la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto.

Sóc. – Al problematizarlo y entorpecerlo, como hace el pez torpedo, ¿le hicimos algún daño?...

Le hemos hecho, al contrario, un beneficio para resolver como es la cuestión. Ahora, en efecto, buscará de buen grado puesto que no sabe, mientras que muchas veces antes, delante de todos, con tranquilidad, creía estar en lo cierto al hablar de la superficie doble y suponía que había que partir de una superficie del doble de largo...

¿Crees acaso que él hubiera tratado de buscar y aprender esto que creía que sabía, pero ignoraba, antes de verse problematizado y convencido de no saber, y de sentir el deseo de saber? 84b-pág. 308.

El paso por los tres momentos en la entrevista de carácter socrático, puede ser comparado con los obstáculos epistemológicos que son necesarios afrontar en la comprensión de un concepto matemático, en el contexto de la teoría de (Bachelard, 1938). Aunque se reconoce que son ámbitos conceptuales distintos, desde el punto de vista pragmático, son

procesos que contribuyen en el proceso de avance en la comprensión matemática.

- **La red conceptual**

Las preguntas deben estar formuladas de manera que el entrevistado construya una red conceptual alrededor del concepto en cuestión, recurriendo a sus elementos sobre los cuales va a razonar. La construcción de la red se facilita mediante mecanismos concretos: visual-geométricos, verbales o escritos.

Sóc. – Entonces de la línea de tres pies tampoco deriva la superficie de ocho.

Servidor. – Desde luego que no.

Sóc. – Pero entonces, ¿De cuál? Trata de decírnoslo con exactitud. Y si no quieres hacer cálculo, muéstranosla en el dibujo. 83e-pág. 308.

La red conceptual se hace evidente e imposible de evitar durante toda la entrevista y el estudiante entrevistado razona sobre ella y la amplía (lo cual es generado en la mayoría de los casos por el redoblamiento, de acuerdo a la teoría PK), pero el refinamiento en sus razonamientos depende en gran medida del manejo adecuado por parte del entrevistador durante su aplicación, es decir, la entrevista debe estar diseñada de tal forma que no se produzca una enseñanza directa, sino más bien, una enseñanza acompañada de un razonamiento inquisitivo que permita que los estudiantes pasen de las situaciones concretas a las abstractas y viceversa, para así facilitar la comprensión del concepto.

En este sentido y en el contexto de la teoría PK, se hace necesario que el diseño de las preguntas esté orientado a evidenciar en el entrevistado, las complementariedades de la acción y la expresión, que son las que al fin de cuentas, permiten que la red conceptual se refine cada vez más y el entrevistado progrese en su comprensión.

1.9.3 El proceso de razonamiento infinito.

De acuerdo al problema enunciado en la presente investigación, comprender los procesos de razonamiento infinito se convierte en el eje transversal que permite conectar la relación inversa entre las tangentes y las cuadraturas. De hecho, allí radica la genialidad de Newton y Leibniz al lograr superar los

razonamientos finitos y estáticos (geométricos y aritméticos) de sus antecesores, tales como los del mismo Isaac Barrow.

Si bien es cierto que fueron los pitagóricos quienes manejaron por primera vez en matemáticas, el infinito potencial, el primer teórico del infinito fue Aristóteles, quien consideraba que el infinito es lo que no se deja recorrer y carece de límite. Distinguió dos clases diferentes de infinito: el infinito actual, cuya infinitud es independiente del tiempo, y el infinito potencial, que es una construcción a lo largo del tiempo.

Dos de los factores que impidieron a los griegos concebir el infinito actual, fueron: Los argumentos aristotélicos en contra del infinito actual y el principio euclidiano de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Desde la experiencia docente, observamos que en nuestros estudiantes, el primer acercamiento con la idea de infinito se da en la Aritmética con los conjuntos numéricos; que en definitiva es una idea de infinito potencial. Ellos evocan “*uno, dos, tres, ... hasta infinito*” pero no conciben que aunque hay infinitos elementos, el conjunto pueda tener una cardinalidad.

De hecho, pareciera ser que la naturaleza del razonamiento humano, concibiera en primera instancia un infinito potencial para poder, posiblemente, comprender el infinito actual, el infinito como una totalidad.

Aristóteles negaba al infinito actual toda existencia física o matemática. Para él, si bien es cierto que los matemáticos tienen necesidad de considerar magnitudes mayores o más pequeñas que toda magnitud dada, no le es posible obtener totalidades infinitas en acto, determinadas aunque no limitadas. De ahí que afirmara que todas las objeciones que se pongan al infinito, son objeciones al infinito actual. Para este filósofo griego, el infinito matemático está indudablemente relacionado con la categoría de *cantidad*, pero sólo como infinito potencial, cantidad que puede volverse más grande o más pequeña, sin que dicho devenir llegue a transformarse en ser. De acuerdo a la concepción aristotélica, el infinito potencial consiste en no afirmar que existe un infinito real, sino reformular la afirmación, de forma que permita que las cantidades sean en todo momento tan grandes o tan pequeñas como sea preciso.

Si se trata entonces de que los estudiantes comprendan procesos de razonamiento infinito haciendo uso de la relación inversa entre las tangentes y las cuadraturas, se considera conveniente tener en cuenta los razonamientos infinitos más contemporáneos, como por ejemplo los de Leibniz, quien consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores que todos los reales positivos. Para él los infinitesimales son *incomparables*, porque con respecto a las cantidades

finitas son *como granos de arena al mar* (Edwards J. T., 1982). También creía que las líneas rectas y curvas eran polígonos con infinito número de lados (polígonos infiniláteros), que las superficies curvas, poliedros de infinitas caras (poliedros infiniédricos), que el movimiento variado era una sucesión de movimientos uniformes, etc; de tal forma que las cantidades quedaban descompuestas en elementos más sencillos y por lo tanto más fáciles de captar. Por esto, Leonhard Euler le dio el nombre de *Análisis Infinitesimal*, al área de la Matemática que hoy conocemos como Cálculo o Análisis Matemático.

1.9.4 La visualización matemática

El mecanismo de la visualización matemática ha sido fundamental en el desarrollo de varias propuestas de investigación en Educación Matemática, dadas las ventajas que ofrece al momento de aplicar las intervenciones al interior de las aulas con los estudiantes, más aún cuando se trata de abrir las puertas hacia la formalización en matemáticas.

De acuerdo a Guzmán la visualización en Matemáticas no es lo mismo que lo que algunas corrientes de psicólogos llaman visualización. Para ellos la visualización es una técnica, entroncada en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne (años cincuenta), que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos. Con la visualización matemática se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas en el campo de estudio (De Guzmán, 2001).

Una gran parte de la visualización usada en investigaciones en Educación Matemática, se ha desarrollado mediante la capacidad de imaginación y representación con instrumentos convencionales como lápiz, papel, tiza o tablero. La fidelidad y exactitud de tales representaciones debe estar en función del tipo de trabajo de visualización que se requiere. No tiene objeto utilizar compás y regla cuando con un dibujo a mano suficientemente claro queda sugerido en la medida en que se quiere presentar, como es el caso en la mayor parte de los problemas del Análisis Matemático en los que una visualización sea suficiente. Pero es claro que, en la actualidad, se dispone de un instrumento extraordinariamente potente, el computador, cuya influencia sobre el quehacer matemático se va dejando sentir en muchos aspectos y uno de ellos es, obviamente, la visualización.

En lo que se refiere, en particular, al Análisis Matemático, la existencia de programas matemáticos, tales como DERIVE®, MAPLE®, MATHEMATICA®, CABRI®; GEOGEBRA®, entre otros, con capacidades de representación extraordinariamente versátiles e interactivas, aplicables en todos los campos imaginables de la Matemática actual, está cambiando ya nuestra forma misma de practicar tanto las actividades de investigación como las de la interacción enseñanza-aprendizaje a todos los niveles.

En la presente investigación, la entrevista de carácter socrático hace uso de la visualización matemática para la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, usando el *software* Geogebra®, con el fin de facilitar a los estudiantes la comprensión mediante procesos de razonamiento infinitos, inevitables a la hora de abordar conceptos con paso al límite.

Finalmente, las interpretaciones propias de los estudiantes ante una visualización matemática pueden ser distintas, pero igualmente correctas o incorrectas, lo cual propicia evidencia de una descripción de la manera en la que el estudiante está comprendiendo. Teniendo en cuenta que la entrevista socrática facilita la observación y análisis de casos particulares en los sujetos cuando evidencian comportamientos, gestos o evocan ideas para explicar situaciones matemáticas, la visualización inmersa en el diseño de las preguntas se convierte en un mecanismo apropiado en el marco de la teoría PK.

1.9.5 Las TICs y el Geogebra®.

Desde hace varias décadas se comenzó a especular sobre el impacto que la revolución en las TICs podría tener en la educación, en todos sus niveles. Esa especulación, y los múltiples ensayos que la siguieron, se han convertido en los últimos años, especialmente a partir del desarrollo de la Web, en un gran movimiento que está transformando la educación en muchos lugares del mundo desarrollado. En esta dirección, las TICs se convierten en una herramienta fundamental, necesaria e inevitable que propicia ambientes de aprendizaje en todos los campos de la ciencia, para nuestro caso, en el campo de las Matemáticas, y que teniendo los cuidados necesarios para ser utilizadas como ayuda didáctica para la adquisición de conocimiento matemático, facilitan sin lugar a dudas, la comprensión de razonamientos infinitos.

Precisamente, dentro de la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior, es fundamental la utilización de procesadores geométricos, algebraicos y analíticos para la enseñanza de los campos de la disciplina.

Este tipo de aplicaciones permite abordar la Geometría y el Análisis desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los alumnos a visualizar contenidos matemáticos que son un poco más complicados de abordar desde un dibujo estático, como por ejemplo, procesos de razonamiento infinito.

El *software* libre también ha hecho aportes significativos en el desarrollo de este tipo de herramientas. Sin duda una de las más conocidas y que mezcla la funcionalidad de un procesador geométrico, algebraico y analítico es el *Geogebra®* (Geometría-Álgebra-Cálculo); un *software* escrito en java muy fácil de usar y que resulta ser una poderosa herramienta para manipular ciertos comandos, lo que permite visualizar resultados analíticos y geométricos en la enseñanza de conceptos matemáticos. El *software* fue desarrollado por Markus LLohenwartre en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de la matemática escolar.

En la investigación, el Geogebra® permitió durante la entrevista que el estudiante interactúe, manipule y corrobore ciertos resultados, que manualmente son complejos de comprobar con ciertas funciones previamente establecidas por el investigador (las derivadas y correspondientes antiderivadas), y así poder calcular pendientes de tangentes y áreas bajo curvas (cuadraturas) con la ayuda de tablas numéricas. Por último, observará una estabilización de los datos para poder realizar el salto a procesos de razonamiento geométricos y estáticos que están relacionados directamente con la idea de infinito.

2 LA RELACIÓN INVERSA ENTRE CUADRATURAS Y TANGENTES: ASPECTOS HISTÓRICOS Y DIDÁCTICOS

La importancia del TFC, en cuanto a su reconocimiento como algoritmo universal para la obtención de las cuadraturas, mediante la resolución del problema inverso de la tangente, no se logra apreciar hasta los desarrollos de Newton y Leibniz.

En la presente investigación, se considera imprescindible realizar un rastreo epistemológico sucinto en la evolución histórica del TFC desde los griegos, pasando por los aportes de Newton hasta Cauchy y Lebesgue, con el fin de identificar algunas dificultades que pueden presentar los estudiantes de nuestros días, a través del análisis de los obstáculos presentados en la historia.

Abordaremos el TFC desde tres ámbitos que son esenciales para la presente investigación: el histórico, que permite situar los momentos y dificultades desde los griegos hasta nuestros días; los antecedentes de las investigaciones que se han hecho a nivel de su enseñanza y, por último; la presentación que hacen los textos escolares contemporáneos. Sin duda alguna, estos elementos facilitarán una mejor descripción del razonamiento a observar en los estudiantes para la implementación de la entrevista socrática.

2.1 Evolución histórica del TFC

Se presentan los métodos utilizados para las cuadraturas y tangentes de forma independiente, para luego rastrear de forma sucinta la evolución histórico-epistemológica del TFC.

2.1.1 El cálculo de áreas y el problema de las cuadraturas: La diferencia

Como preámbulo a la descripción breve de algunas técnicas para las cuadraturas, es importante destacar el hecho histórico de que el cálculo de áreas y el problema de las cuadraturas no son equivalentes. Para Wallis por ejemplo, el problema de la cuadratura de una curva se reduce a calcular la razón entre el área de la figura curvilínea T (área buscada), formada por la curva y los segmentos paralelos a los ejes coordenados, y el polígono P , circunscrito en T (se muestra en la figura siguiente); concretamente, se trata de calcular x , en la proporción $\frac{T}{P} = \frac{1}{x}$.

El lenguaje algebraico actual no es empleado por Wallis, sin embargo, será usado aquí por practicidad y para facilitar al lector una rápida comprensión. Wallis empieza encontrando un valor para x en el caso de las parábolas de cualquier orden¹¹. La siguiente figura muestra cómo establecer la proporción entre el triángulo curvilíneo OAB y el paralelogramo $OCAB$ circunscrito en el triángulo curvilíneo:

De acuerdo a las condiciones anteriores, se tiene que los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 , paralelos a OC , tienen una razón n -ésima de la razón que hay entre los segmentos C_1A_1 y C_2A_2 donde n es un entero positivo. En la actualidad

se tendría: $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{(C_1A_1)^n}{(C_2A_2)^n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

¹¹ Se entiende por parábola de orden n a las curvas de la forma $y = ax^n$. Específicamente, Wallis llama simplemente parábola a la curva de ecuación $y = ax^2$ y parábola cúbica a la curva de ecuación $y = ax^3$.

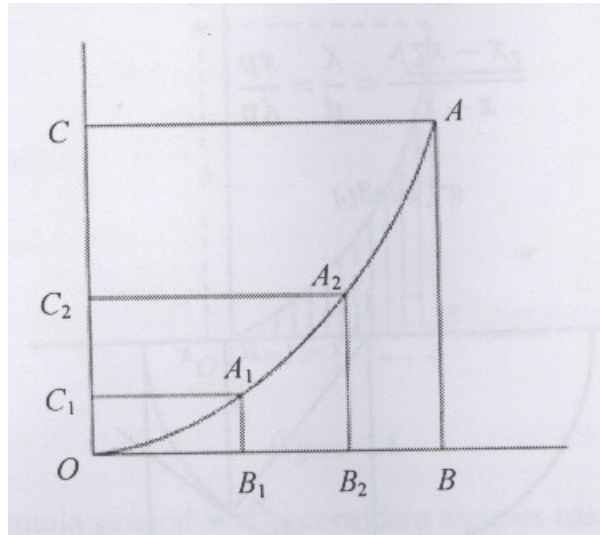


Figura 2.1 El triángulo curvilíneo y las cuadraturas.

Considerando la cuadratura del paralelogramo $OCAB$, se trata de hallar x de modo que: $\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OCAB} = \frac{1}{x}$.

En el caso $n=1$, OA es una recta, OAB un triángulo rectilíneo y así $x=2$ mediante la Geometría Euclidiana. Para el caso $n > 2$ Wallis sigue los procedimientos de Cavalieri y considera el triángulo OAB y el paralelogramo $OCAB$ formados de una infinidad de segmentos paralelos. Lo sorprendente en el proceder de Wallis, fue alejarse del método algebraico de Cavalieri y establecer un formalismo para las sumas infinitas a través del método de interpolación. De este modo, al tomar la región limitada por $y = x^n$, el eje x y la recta $x = a$, se tiene que:

$$\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OCAB} = \frac{\sum_{x=0}^a y}{\sum_{x=0}^a b} = \left[\frac{\left(\frac{0.a}{h}\right)^n + \left(\frac{1.a}{h}\right)^n + \dots + \left(\frac{h.a}{h}\right)^n}{a^n + a^n + a^n + \dots + a^n} \right]_{h \rightarrow \infty} = \left[\frac{\sum_{i=0}^h i^n}{\sum_{i=0}^h h^n} \right]$$

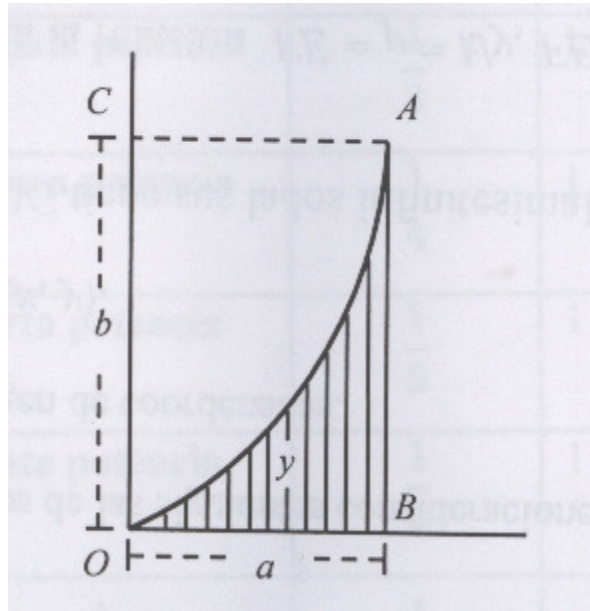


Figura 2.2 Cuadratura para $y = x^n$.

Más adelante se describirá en detalle la intervención de Wallis en el desarrollo de la fórmula general para la cuadratura básica $\int_0^a x^k dx$.

2.1.2 Métodos y técnicas para las cuadraturas

Entre muchos de los métodos utilizados para las cuadraturas, desde Arquímedes hasta el s. XVII, se resaltan los siguientes:

2.1.2.1 La cuadratura de la Espiral de Arquímedes. El método de exhaución

La cuadratura de la Espiral de Arquímedes es particularmente interesante, dado que constituye uno de los ejemplos más representativos de la aplicación del método de exhaución de los griegos a los problemas de cuadraturas, influenciando el trabajo de los métodos de cuadraturas aritméticas del siglo XVII.

Arquímedes en su obra sobre las espirales, define la espiral que lleva su nombre y luego obtiene cuadraturas de diversas áreas. Las figuras siguientes ofrecen una representación de lo que definió como *la primera recta* (que une el punto inicial con el final), la *primera área* (región determinada por la curva y la primera recta) y el *primer círculo* (con centro en el origen de la espiral y radio la primera recta).

Arquímedes logra demostrar que *la primera área*¹² es un tercio del primer círculo, esto es, $a(E) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^3$. Para llegar a este resultado,

Arquímedes demuestra las siguientes proposiciones mediante métodos geométricos:

$$1) (a^2n^2 + \dots + a^2n^2) + a^2n^2 + a(a + 2a + 3a + \dots + na) = 3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \dots + (na)^2]$$

$$2) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

$$3) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$4) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

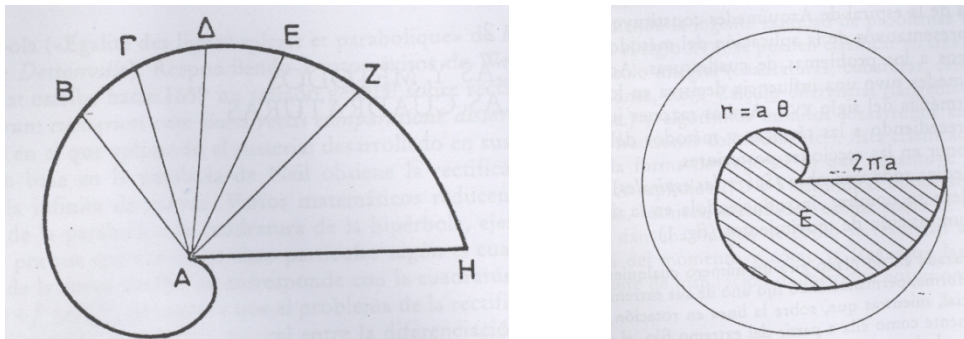


Figura 2.3 En ambas ilustraciones, la primera recta y la primer área; en la ilustración de la derecha, el primer círculo.

Arquímedes resuelve el problema, a partir de esta última desigualdad, considerando sectores circulares inscritos y circunscritos:

¹² Proposición XXIV de su obra sobre espirales.

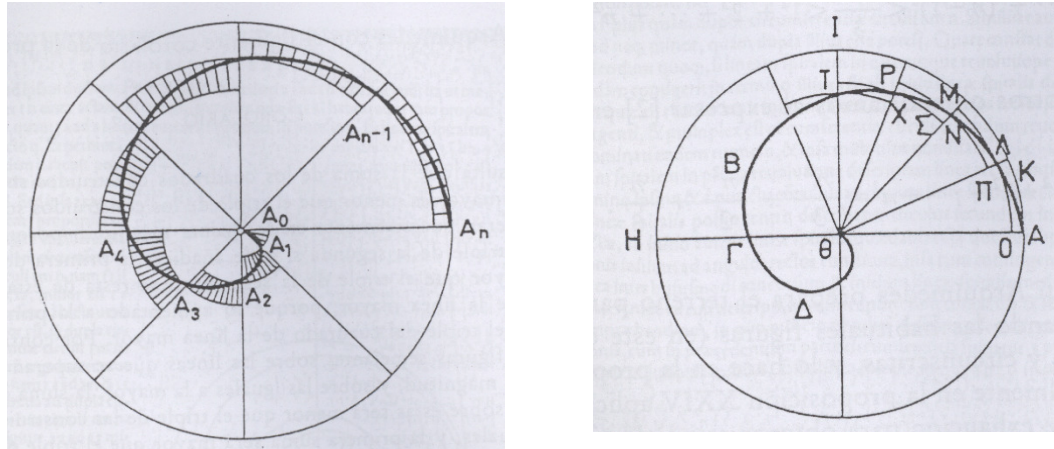


Figura 2.4 Sectores circulares inscritos y circunscritos a la Espiral de Arquímedes.

Se divide el círculo C en n sectores, que interceptan a la espiral en los puntos O, A_1, A_2, \dots, A_n . Si se considera $OA_1 = c, OA_2 = 2c, \dots, OA_n = nc$.

De esta manera la región espiral E contiene una región P , formada por sectores circulares inscritos P_i , de radios $0, c, \dots, (n-1)c$ y está contenida en una región Q , formada por sectores circulares circunscritos Q_i , de radios $c, 2c, \dots, nc$, para verificar fácilmente que $a(P) < a(E) < a(Q)$.

La expresión $a(Q) - a(P)$ es igual al área de un sector circular y por tanto puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando n lo suficientemente grande, de modo que conociendo previamente que el área de la espiral es $a(E) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^3$, éste se confirmará con todo rigor mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución.

Supongamos que $a(E) < \frac{1}{3}a(C)$ y escojamos n suficientemente grande para que se verifique que $a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(E)$. Como $a(P) < a(E)$, se tiene que $a(Q) < \frac{1}{3}a(C)$.

Ahora, la razón de las áreas de sectores circulares semejantes es igual a la razón de los cuadrados de sus radios (de acuerdo a Euclides), es decir,

$$\frac{a(Q_i)}{a(C_i)} = \frac{(ic)^2}{(nc)^2}, \quad i=1,2,3,\dots,n, \text{ donde } C_i \text{ son los sectores del círculo } C$$

circunscrito a la espiral. De esta última igualdad (aplicando las propiedades de la suma de las proporciones), se obtiene que

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{c^2 + (2c)^2 + \dots + (nc)^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}, \text{ lo que resulta ser}$$

consecuencia de la desigualdad 4). De esta última igualdad se obtiene el resultado $a(Q) > \frac{1}{3}a(C)$ lo que contradice una desigualdad anterior, y de

esta manera no puede suceder que $a(E) < \frac{1}{3}a(C)$.

En forma análoga, si se supone que $a(E) > \frac{1}{3}a(C)$, se logra llegar a las desigualdades $a(P) > \frac{1}{3}a(C)$ y $a(P) < \frac{1}{3}a(C)$, lo que contradice el último supuesto.

Luego, por la propiedad de tricotomía, necesariamente $a(E) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^3$ (Edwards J. T., 1982).

De hecho, este resultado se puede obtener con la ayuda del cálculo integral en coordenadas polares de manera muy simple: si considera la ecuación de la Espiral de Arquímedes como $r(\theta) = a\theta$, entonces su área es

$$a(E) = \frac{1}{2}\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} [r(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} [a\theta]^2 d\theta = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2.$$

Es importante anotar que al generalizar la desigualdad 4) para cualquier entero k , mediante la aplicación de diversas fórmulas obtenidas para hallar la suma de potencias de enteros consecutivos, se conseguía calcular áreas¹³ para las espirales generalizadas $r = a\theta^k$, de donde tras un simple cambio aparecían las ideas para calcular áreas en las parábolas generalizadas $y = ax^k$, $k=1,2,3,\dots$, es decir, obtener resultados equivalentes a lo que se

denomina *cuadratura básica*: $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

¹³ Calcular áreas o cuadrar son acciones que indican la misma acción en este contexto.

Todo este trabajo, sin embargo, adolecía de rigor, dado que al soslayar la rigidez de la exhaustión, se aplicaban ideas de aproximación mediante límites, en forma intuitiva.

2.1.2.2 La cuadratura básica $\int_a^0 x^k dx$

Seguramente, la importancia de esta cuadratura radica en ser el fundamento para el desarrollo de las técnicas de cuadraturas del siglo XVII, mediante artificios aritmético-infinitesimales y en particular, de indivisibles.

Se ha observado que Arquímedes ha utilizado dos resultados importantes:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{y} \quad 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Mediante estas igualdades, Arquímedes obtiene resultados equivalentes a las integrales $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$ y $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$, las cuales hoy establecemos

mediante los límites:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

De la misma manera, Cavalieri con su trascendental *método de los indivisibles*, descubre la cuadratura para los enteros $k = 1, 2, \dots, 9$.

Después de 1635, Fermat, Roberval, Pascal, Torricelli y Wallis dan pruebas, más o menos rigurosas, para el cálculo del área bajo la parábola generalizada $y = ax^k$ (k entero positivo). Muchas de ellas se basan en fórmulas para la suma de las primeras potencias de enteros (que sustituirían al argumento intuitivo de los indivisibles de Cavalieri) y que conducen a las

desigualdades: $1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \dots + n^k$, generalización del mismo resultado de Arquímedes para $k=2$, de las que precisamente se

deduce el límite
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$
 que es utilizado implícitamente, a través de la doble reducción al absurdo, como lo hizo Arquímedes.

En particular, esto para Wallis significa que en la proporción $\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OCAB} = \frac{1}{x}$, $x = k+1$, y así, considerando la región limitada por la curva $y = x^k$, la recta $x = a$ y el eje x , y dado que el área del paralelogramo $OCAB$ es a^{k+1} (de base a y altura a^k), entonces $\frac{1}{k+1} a^{k+1}$ corresponderá a la cuadratura de la región OAB ; resultado que puede escribirse como $Cuad.[x^k]_0^a = \frac{1}{k+1} a^{k+1}$.

Vale la pena aclarar dos aspectos importantes; el primero tiene que ver con que esta presentación contempla un salto cualitativo profundo, pues pasa por la acción de asignarle un valor numérico a cada cuadratura, que modernamente corresponde a la noción de área; el segundo con el hecho de que ninguno sigue fielmente todos los pasos que en rigor hay que dar y dejan la sensación que el camino a seguir es elemental.

Así las cosas, la cuadratura se calcula dividiendo el intervalo $[0, a]$ en n sub-intervalos de longitud $\frac{a}{n}$, para construir a continuación los habituales rectángulos inscritos P_n y circunscritos Q_n , teniendo todos por base $\frac{a}{n}$ y altura la determinada por la correspondiente ordenada, de manera que al sumar las áreas se obtiene:

$$a(P) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k] \text{ y } a(Q_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k].$$

Si S es el área limitada por la curva $y = x^k$ en el segmento $[0, a]$, fácilmente se observa que se verifica:

$$a^{k+1} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{a^{k+1}}{n} < a(S) < a^{k+1} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$$

que son las desigualdades básicas para iniciar la doble reducción al absurdo que les conduzca al resultado conjeturado $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

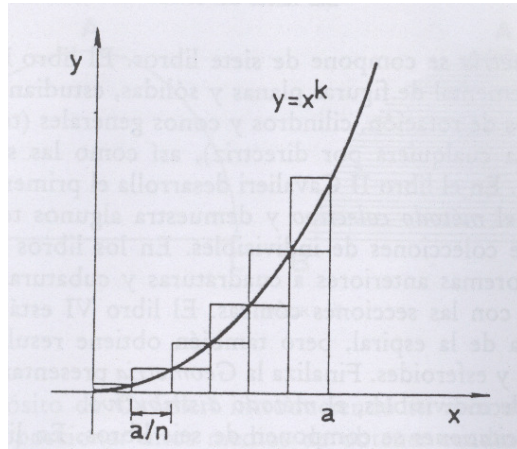


Figura 2.5 Rectángulos inscritos P_n y rectángulos circunscritos Q_n .

Pero (Recalde, 2000), muestra cómo Wallis va más allá; considera el caso de exponentes racionales positivos. El procedimiento consiste en interpolar valores intermedios de los resultados de la forma $\frac{1}{k+1}$; para ello se empeña en encontrar la ley de formación. En este sentido, observa que los denominadores conforman una sucesión aritmética y esto lo lleva a la construcción de la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	...	10
q							
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$...	$\frac{1}{11}$
2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$...	$\frac{2}{12}$
3	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$...	$\frac{3}{13}$
4	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$...	$\frac{4}{14}$
5	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$...	$\frac{5}{15}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		...
10	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{14}$...	$\frac{10}{15}$

Tabla 2.1 Obtención de la razón entre la región de la cuadratura de la región acotada por $y = x^q$, la recta $x = a$ y el eje x .

Wallis obtiene la razón entre la cuadratura de la región acotada por la curva

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \text{ la recta } x=a \text{ y el eje } x; \text{ esto es: } \left[\frac{\sum_{i=0}^h i^{\frac{p}{q}}}{\sum_{i=0}^h h} \right]_{h \rightarrow \infty} = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{q}{p+q} \text{ que}$$

corresponderá a la cuadratura de la región OAB , limitada por la curva $y = x^{\frac{p}{q}}$,

$$\text{la recta } x=1 \text{ y el eje } x, \text{ Cuad.} \left[x^{\frac{p}{q}} \right]_0^1 = \frac{p}{p+q}.$$

En términos actuales, y teniendo en cuenta la aclaración anterior,

$$\text{corresponde a la integral, } \int_0^1 x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+1}, \quad p, q \in \mathbb{Z}^+.$$

Con referencia a los resultados anteriores, Wallis encuentra la cuadratura de

la región OAB , limitada por la curva $y = \left(1 - x^{\frac{p}{q}}\right)^q$, la recta $x=1$ y el eje x .

Para ello simplemente aplica el desarrollo binomial en consideración y supone aditividad, de tal forma que si tomamos, por ejemplo, $p=2$ y $q=3$, tenemos:

$$\text{Cuad.} \left[\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \right]_0^1 = \text{Cuad.} [1]_0^1 - 3 \text{Cuad.} \left[x^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 + 3 \text{Cuad.} \left[x^{\frac{2}{3}} \right]_0^1 - \text{Cuad.} \left[x^{\frac{3}{3}} \right]_0^1.$$

Wallis encuentra una ley de formación no directamente para la región en consideración, sino para los valores inversos, analizando las cuadraturas de la región OAB , a partir de las variaciones de p y q , entre 1 y 10; tales valores se designan por $F[p, q]$, de tal forma que:

$$F[p, q] = \frac{1}{\text{Cuad.} \left[\left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q \right]_0^1}. \text{ Estos valores son consignados en la siguiente}$$

tabla:

q	0	1	2	3	4	...	10
p							
0	1	1	1	1	1	...	1
1	1	2	3	4	5	...	11
2	1	3	6	10	15	...	66
3	1	4	10	20	35	...	286
4	1		15	35	70	...	1001
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		...
10	1	11	66	286	1001	...	184756

Tabla 2.2 Obtención de los valores para la cuadratura de la curva $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Wallis observa que los argumentos de la tabla anterior corresponden a los del triángulo de Pascal con los valores ubicados de manera rectangular, en la cual se cumple la regla de formación: $F[p, q] = F[p, q-1] + F[p-1, q]$.

Retomando el planteamiento inicial, Wallis entiende que la cuadratura del círculo corresponde a la cuadratura de la región OAB , limitada por la curva $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ y los ejes coordenados, como se representa en la siguiente figura.

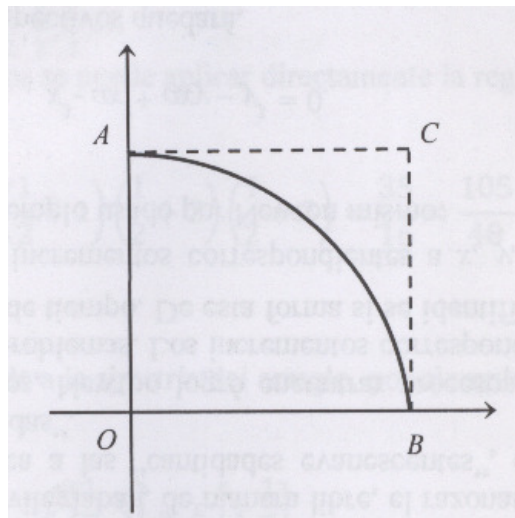


Figura 2.6 Cuadratura del círculo para los valores $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$, en la curva

$$y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q.$$

En consecuencia, la cuadratura del círculo corresponde a los valores $p = \frac{1}{2}$ y

$$q = \frac{1}{2}, \text{ en la curva } y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q.$$

2.1.2.3 Las cuadraturas de las hipérbolas. Primer método infinitesimal de la progresión geométrica de Fermat.

El método se basa en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, la cual Fermat enuncia así (Edwards J. T., 1982):

Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos como el mayor es a la suma de los términos restantes.

Se puede comprobar que esta propiedad es equivalente a la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente.

En un comienzo, Fermat considera las hipérbolas $yx^n = k$ y manifiesta:

Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio¹⁴, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general (Sestier, 2000).

Se desarrolla la demostración para $n = 2$ y con base en la Figura que sigue y de la definición de la hipérbola, deduce:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG}{IH} \\ 2) \quad & \frac{AO^2}{AH^2} = \frac{IH}{NO} \end{aligned}$$

Continuando el texto anterior, Fermat afirma quee:

¹⁴ Dado que la hipérbola $yx = k$ tratada por Apolonio, corresponde a una serie geométrica divergente.

El área indefinida que tiene por base EG y que está acotada de un lado por la curva ES y de otro, por la asíntota infinita GOR , es igual a una cierta área rectilínea.

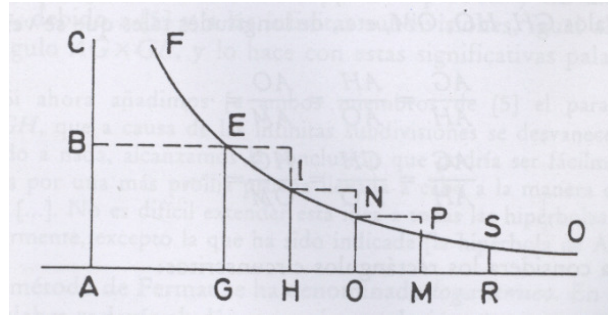


Figura 2.7 Cuadratura de la hipérbola.

Fermat se refiere al área del rectángulo $AGEB$ como área rectilínea y apoyándose en la Figura anterior, comienza a construir los elementos necesarios para resolver la cuadratura de la hipérbola.

Considérense los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente: AG, AH, AO, \dots Supongamos que estos términos están muy próximos, para que en términos de Diofanto, se puedan *adigular*¹⁵. También se supone que los primeros intervalos GH, HO, OM, \dots son suficientemente iguales.

Fermat divide el eje GOR a la derecha del punto G en intervalos GH, HO, OM, \dots de longitudes tales que se verifique:

$$3) \quad \frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM} = \dots$$

$$4) \quad \frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM} = \dots$$

Considérese ahora los rectángulos circunscritos $R_1 = EG \times GH, R_2 = IH \times HO, R_3 = NO \times OM, \dots$ y comprueba que R_1, R_2, R_3, \dots , forman una progresión geométrica decreciente de razón $\frac{AG}{AH}$. En efecto, aplicando las igualdades 1), 2), 3) y 4), se obtiene:

¹⁵ La adigualdad o pseudo-igualdad es el procedimiento que consiste en hacer igual dos cantidades muy próximas, pero que en realidad, no son iguales. Este término es introducido por Diofanto y utilizado por Fermat en uno de sus textos.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{EG \times GH}{IH \times HO} = \frac{AH^2 \times GH}{AG^2 \times HO} = \frac{HO^2 \times GH}{GH^2 \times HO} = \frac{HO}{GH} = \frac{AH}{AG} \quad y$$

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{IH \times HO}{NO \times OM} = \frac{AO^2 \times HO}{AH^2 \times OM} = \frac{AH^2 \times HO}{AG^2 \times OM} = \frac{AH^2 \times AG}{AG^2 \times AH} = \frac{AH}{AG}.$$

Y así de forma sucesiva se demuestra que R_1, R_2, R_3, \dots , es una progresión geométrica decreciente a la que Fermat le aplica la propiedad equivalente a su sumación¹⁶. Sea S su suma, entonces se tiene que $\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$, de

donde se deduce que $\frac{AH - AG}{AG} = \frac{EG \times GH}{S - EG \times GH}$, obteniéndose $\frac{GH}{AG} = \frac{EG \times GH}{S - EG \times GH}$ y por último $S - EG \times GH = EG \times AG$.

Como Fermat ha supuesto que unos intervalos estaban lo bastante cercanos para que otros fueran suficientemente iguales, deduce que el área definida por la hipérbola y las líneas GH, GE es, debido a la última igualdad y a las infinitas sub-divisiones, igual al área del rectángulo $AG \times GE$.

Este método se ha llamado *logarítmico*, término que Fermat aludía a una cierta relación entre una progresión geométrica y una aritmética; sin embargo, hoy a su método se le llamaría *exponencial* y se desarrollaría mediante la integral $\int_a^\infty \frac{k}{x^2} dx = \frac{k}{a}$.

2.1.2.4 Las cuadraturas de las parábolas generalizadas. Segundo método de la progresión geométrica de Fermat

En su tratado sobre cuadraturas, Fermat también utilizó el método de la progresión geométrica para la cuadratura de parábolas generalizadas $y = x^{\frac{p}{q}}$,

¹⁶ Término que hace referencia a la suma de una serie infinita, en este caso se trata de una

serie geométrica, esto es $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$, $|r| < 1$

estableciendo la conjetura de Wallis $\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{a^{\frac{p+q}{q}}}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}}$, aunque los

resultados se publicaron más tarde.

En el lenguaje matemático actual, la cuadratura de las parábolas de Fermat se podría enunciar así:

En la Figura 2.5 se muestra cómo se subdivide el intervalo $[0, a]$ en una sucesión infinita de sub-intervalos con extremos x_n , siendo $x_n = ar^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y $0 < r < 1$. Para cada sub-intervalo se considera el rectángulo circunscrito a la curva, de base $x_n - x_{n+1}$ y altura dada por la ecuación de la curva $y = x^{\frac{p}{q}}$, es decir, $x_n^{\frac{p}{q}}$.

Tomando $s = r^{\frac{p+q}{q}}$, $t = r^{\frac{1}{q}}$, la suma $A(r)$ de las áreas de los infinitos rectángulos, teniendo en cuenta que forman una progresión geométrica de razón $r^{\frac{p+q}{q}}$ es:

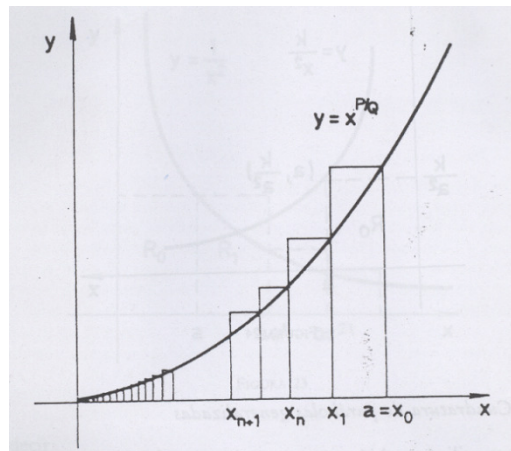


Figura 2.8 Cálculo del área bajo la curva, usando rectángulos circunscritos.

$$\begin{aligned}
 A(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{\frac{p}{q}} (x_n - x_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)^{\frac{p}{q}} (ar^n - ar^{n+1}) \\
 &= a^{\frac{p+q}{q}} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n(p+q)}{q}} = a^{\frac{p+q}{q}} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s^n \\
 &= a^{\frac{p+q}{q}} (1-r) \left[\frac{1}{1-s} \right] = a^{\frac{p+q}{q}} (1-r) \left[\frac{1-t^q}{1-t^{p+q}} \right].
 \end{aligned}$$

Como se verifica que $(1-t)(1+t+t^2+\dots+t^{k-1})=1-t^k$, se deduce finalmente

que: $A(r) = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1+t+t^2+\dots+t^{q-1}}{1+t+t^2+\dots+t^{p+q-1}}$. (Collette, 2002).

De esta manera, el área comprendida bajo la curva, el eje x y la abscisa $x=a$, se obtiene tomando el límite cuando $(r \rightarrow 1, t \rightarrow 1)$, de donde se

deduce finalmente en términos actuales, que $\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{a^{\frac{p+1}{q}}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}}$.

Se destacan tres elementos esenciales, en las cuadraturas de Fermat: la división del área bajo la curva en áreas infinitamente pequeñas, la suma aproximada del área bajo la curva y un intento de dar el paso al límite, mientras crece el número de elementos de área infinitamente pequeños. Estos elementos son fundamentales para lo que se conoce hoy como integral definida.

2.1.2.5 La generalización de las cuadraturas, de acuerdo a Newton

Newton generaliza sus resultados, a partir de procedimientos que tienen que ver con su llamado *binomio de Newton*, la cuadratura del círculo y la aceptación de cuadraturas para funciones polinómicas. El cálculo, como rama autónoma empieza a emerger históricamente. Esto se nota con mayor claridad en la regla 1 de su memorable *De analysi*, donde aborda el caso de exponentes fraccionarios:

Regla 1: Si $y = ax^{m/n}$, entonces $\frac{na}{m+n} x^{m+n/n}$ corresponde a la cuadratura.

Newton incorpora el símbolo “o” en la demostración de este resultado para representar una cantidad muy pequeña, pero diferente de cero. Ello significa

que puede actuar como denominador, pero cuando aparece sumando se desvanece, por ser tan pequeña que no adiciona nada: “*o*” simboliza un incremento infinitesimal.

De acuerdo a (Recalde, 2000), Newton inicialmente considera el siguiente caso particular: sea la figura siguiente, en la cual $\text{área } ABD = z$, $AB = x$, $BD = y$. Se toma $BM = o$, $BK = v$, tales que, $\text{área } BDLM = \text{área } BKHM = ov$.

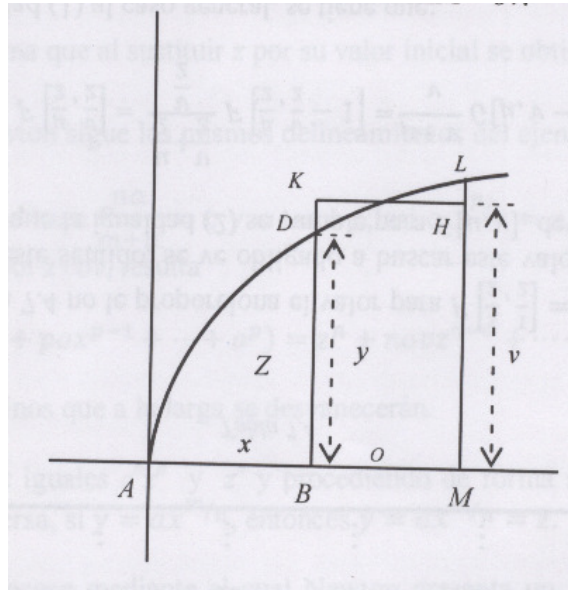


Figura 2.9 La variación de *o* en la abscisa produce una variación *ov* en el área total.

Newton toma específicamente la curva, $z = \frac{2}{3} x^{3/2}$, de donde, $z^2 = \frac{4}{9} x^3$.

Una variación de *o* en la abscisa, produce una variación *ov* en el área total, de tal suerte que, $(z + ov)^2 = \frac{4}{9} (x + o)^3$.

Desarrollando los dos binomios quedará:

$$z^2 + 2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9} (x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3).$$

Empleando la sustitución $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, simplificando y dividiendo los dos miembros de la expresión resultante por o , dado que es diferente de cero, quedará, $2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$.

Newton entonces, toma BM infinitamente pequeño, de tal manera que v se hace igual a y , y además o se hace igual a cero, quedando:

$$2zy = \frac{4}{3}x^2, \text{ de tal forma que al sustituir } z \text{ por su valor inicial se obtiene } y = x^{1/2}.$$

Para el caso general, Newton sigue los mismos delineamientos del ejemplo:

Si $\frac{na}{m+n}x^{m+n/n} = z$, se hace $\frac{na}{m+n} = c$ y $m+n = z$; así $c \cdot x^{p/n} = z$, y por lo tanto $c^n \cdot x^p = z^n$; sustituyendo x por $x + o$ y z por $z + ov$, resulta:

$$c^n(x^p + pox^{p-1} + \dots + o^p) = z^n + novz^{n-1} + \dots + o^n v^n,$$

omitiendo los otros términos que a la larga se desvanecerán.

Cancelando los términos iguales $c^n x^p$ y z^n y procediendo de forma similar al ejemplo se obtiene $y = ax^{m/n}$. De manera inversa, si $y = ax^{m/n}$, entonces $y = ax^{m/n} = z$.

Se hace notar que este es un proceso mediante el cual Newton presenta un método para hallar la razón instantánea de una variable respecto a otra. Específicamente, está mostrando que el área puede obtenerse mediante el proceso de hallar una razón de cambio. Dicho en los términos actuales, las operaciones de calcular cuadraturas y hallar razones de cambio son inversas, enunciado que constituye una versión primaria de lo que ahora denominamos el teorema fundamental del álgebra.

2.1.3 Métodos y técnicas para las tangentes

Aunque en la actualidad, en los cursos regulares del Cálculo se imparte el tema de la diferenciación y de las rectas tangentes, previo a la integración y el cálculo de las áreas, el desarrollo histórico de estos conceptos sucedieron al contrario, pues las cuadraturas se trabajaron desde los griegos, mientras que los métodos de las rectas tangentes sólo se comienzan a trabajar hasta el s. XII.

El problema de las tangentes a las líneas curvas aparece, aparte de las epístolas que las explican, en los siguientes trabajos o memorias de Fermat:

- T.1. En el *Methodus* de 1629-361. Fermat describe la primera versión del método de las tangentes, descubriendo la tangente a la parábola y aduciendo que se reconduce al método de máximos y mínimos, que le precede en la memoria.
- T.2. En el M.2 (*Ad eandem methodum*) de 1638. Tras resolver el problema de Pappus mediante el algoritmo del *Methodus*, Fermat aplica su método a las tangentes y obtiene la tangente a la elipse.
- T.3. En el *Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes*, que se le denomina el *Méthode expliquée*. Se trata de un documento, que acompaña a una carta enviada por Fermat a Mersenne en Junio de 1638, anexa un documento contestando a algunas objeciones de Descartes e intentando justificar que efectivamente el método de tangentes deriva de su método de máximos y mínimos. En concreto, demuestra para la parábola que la obtención de un mínimo proporciona la normal y de ésta obtiene la tangente. Además obtiene aplicando su método la tangente al *Folium de Descartes*, el problema a cuya resolución le había desafiado éste.
- T.4. En *Doctrinam Tangentium*, memoria que Mersenne hizo circular hacia octubre de 1640. Esta memoria es probable que fuera escrita en conjunción con la *Investigación analítica*, cuando alrededor de 1640 Fermat se decidió a contestar a las acusaciones de Descartes sobre sus métodos de máximos y mínimos y el de tangentes, e inició la revelación de los fundamentos de los mismos. Fermat realiza en pocas frases la síntesis de su investigación matemática, en Geometría Analítica y, en extremos y tangentes. Esta memoria representa por su contenido la más sofisticada versión del método de las tangentes, obteniendo las tangentes a las curvas clásicas: Cisoide, Concoide, Cuadratriz, así como la tangente a la curva más famosa del momento, la Cicloide, donde se aprecia la potencia del método. Trata también un problema de inflexión y por la nueva visión de antiguos y modernos conceptos, así como por la constante evolución de la *adigualdad* hacia *lo aproximadamente igual*, abriendo la puerta hacia la rectificación y la cuadratura.

2.1.3.1 El método de adigualdad de Fermat: para parábolas y elipses

La tangente a la parábola.

Utilizando el método de *adigualdad* en la segunda parte del *Methodus*, para trazar la tangente a una parábola en un punto, Fermat manifiesta que su método de las tangentes es una aplicación de su método para los máximos y mínimos (Edwards J. T., 1982):

Nosotros reconducimos al método precedente la invención de las tangentes en puntos dados de curvas cualesquiera.

Fermat considera la parábola BDN con vértice C y diámetro DC , y se plantea trazar la tangente en un punto B de la misma, tal como se muestra en la Figura 2.6. Sea ésta BE , que interseca al eje en el punto E . Fermat continúa:

Si se toma sobre la recta BE un punto cualquiera O , desde el que se traza la ordenada OI , al mismo tiempo que la ordenada BC desde el punto B , se

tendrá: $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puesto que el punto O es exterior a la parábola.

1) $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$. De la semejanza de triángulos rectángulos se tiene:

2) $\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$, de donde se deduce finalmente:

3) $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$

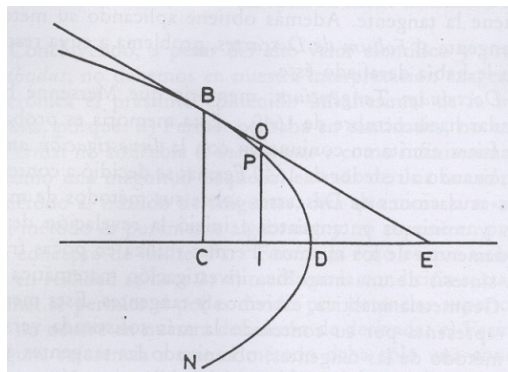


Figura 2.10 La tangente a la parábola de Fermat.

Sea $CD = d$, $CI = e$. Se trata de determinar el segmento $CE = a$ (subtangente).

A partir de 4 se puede escribir:

$$4) \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2} \text{ de donde resulta:}$$

$$5) d(a-e)^2 > a^2(d-e)$$

Y de aquí:

$$6) da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e. \text{ Ahora, Fermat sustituye la desigualdad 7 por la adigualdad:}$$

$$7) da^2 + de^2 - 2dae \approx da^2 - a^2e$$

Manifestando:

“adigualdemos” según el método precedente; se tendrá eliminando términos comunes: $de^2 - 2dae \approx -a^2e$

Fermat continua trasponiendo términos y dividiendo por e , $de + a^2 \approx 2da$, ignorando el término que todavía contiene la e y así obtiene $a^2 = 2da$, de donde resulta finalmente:

$$8) a = 2d, \text{ Fermat comenta el resultado:}$$

Hemos probado de esta forma que CE es el doble de CD , lo que es conforme a la verdad.

Y termina diciendo:

Este método nunca falla, y puede ser aplicado a un gran número de cuestiones muy hermosas; mediante él, he encontrado los centros de gravedad de figuras limitadas por líneas rectas y curvas, así como los de los sólidos y otras numerosas cosas que podremos tratar en otra parte si dispongo del tiempo para ello.

Aplicando el resultado 9 de Fermat, en términos actuales, a la obtención de la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2px$, se tendría:

Siendo m la pendiente de la recta tangente en el punto B de coordenadas $B = (x^\circ, y^\circ)$, se obtiene,

$$m = \frac{BC}{EC} = \frac{y^\circ}{2x^\circ}$$

de donde resulta para la ecuación de la tangente en B :

$$y - y^\circ = \left(\frac{y^\circ}{2x^\circ} \right) (x - x^\circ).$$

Operando resulta:

$$yy^\circ = p(x + x^\circ),$$

ecuación habitual de la tangente a la parábola.

La tangente a la elipse.

Fermat aplicando su método de máximos y mínimos, considera la elipse ZDN de eje ZN y centro R , y planea trazar la tangente en un punto D de la misma. Sea esta DM , que interseca al eje en el punto M . Tracemos la ordenada DO desde el punto D y pongamos, en notaciones algebraicas, $OZ = b$, $ON = g$. Hemos de determinar el segmento $OM = a$ (subtangente) (Edwards J. T., 1982).

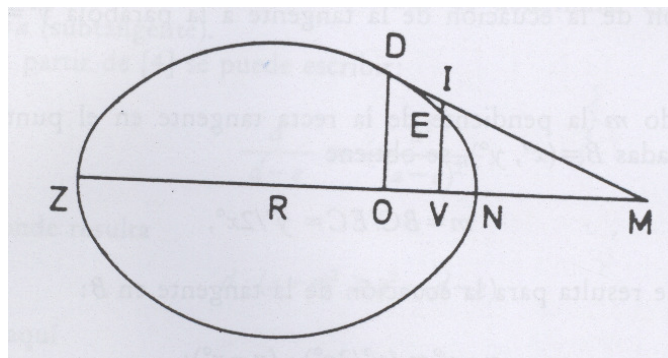


Figura 2.11 La tangente a la Elipse de Fermat.

Toma a continuación un punto V cualquiera comprendido entre O y N : puesto que DM es tangente a la elipse, si por un punto V , tomando *ad libitum* entre O y N ... Y traza la ordenada IEV , paralela a DO , que corta la tangente DM en el punto I y a la elipse en el punto E .

Aplicando para la elipse la propiedad de generación de las cónicas en forma de proporción, se tiene:

1) $\frac{DO^2}{EV^2} = ZO \frac{ON}{ZC} VN$ D. De la semejanza de triángulos rectángulos resulta:

2) $\frac{DO}{IV} = \frac{OM}{VM}$

DM es la tangente a la elipse y todos sus puntos, excepto D , son exteriores a la elipse, por tanto $IE > EV$, lo que combinando con 1 y 2, permite escribir:

3) $ZO \frac{ON}{ZV} VN > \frac{OM^2}{VM^2}$

Llamando $OV = e$, los segmento ZV, VN y VM serán:

$ZV = b + e$

4) $VN = g - e$

$VM = a - e$

La desigualdad 3 se expresara:

5) $\frac{bg}{(b+e)(g-e)} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$

Por consiguiente:

6) $bg(a-e)^2 > a^2(b+e)(g-e)$

Ahora Fermat introduce su idea de *adigualdad*:

Es preciso por tanto, según mi método, comparar por *adigualdad* estos productos, eliminar lo que es común y dividir lo que queda por e ... Es decir, Fermat escribe:

$$7) \quad b \cdot g (a - e)^2 \approx a^2 \cdot (b + e)(g - e) \text{ que desarrollado es:}$$

$$bga^2 + bge^2 - 2bgae \approx bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2 \quad \text{Eliminando términos comunes:}$$

$$bge - 2bga \approx -ba^2 + ga^2 - a^2e$$

Suprimiendo términos donde todavía aparece la e

$$8) \quad -2bga \approx -ba^2 + ga^2$$

Fermat obtiene por fin la solución; con referencia a 8 dice:

... miembros que es preciso igualar, según el método. Trasponiendo como conviene, se tendrá $ba - ga = 2bg$.

Es decir, según el resultado de Fermat, el segmento de subtangente a sería igual a:

$$9) \quad a = \frac{2bg}{(b - g)}$$

Posteriormente Fermat confirma la validez de su solución comparándola con la solución de Apolonio,

Fermat termina diciendo:

Podría añadir otros numerosos ejemplos, tanto del primer caso de mi método como del segundo, pero los descritos son suficientes y prueban de sobra que el método es general y no falla jamás.

En realidad los métodos de *adigualdad* para las tangentes funcionan para un amplio conjunto de curvas (las curvas algebraicas) y así se ha hecho más arriba para la parábola y la elipse. Realmente como en el caso de extremos,

el método de tangentes se puede traducir o interpretar en el lenguaje del Cálculo diferencial moderno. Pero mucho más interesante, históricamente, es la cuestión de estudiar por qué Fermat estaba convencido que el método funcionaba e investigar como se le ocurrió.

2.1.3.2 El método del círculo de Descartes

Descartes desarrolla en el libro II de *La Geometría* un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas, el llamado *método del círculo*. Se trata de un método puramente algebraico, donde, a diferencia de los métodos de Fermat, queda bien claro que no aparecen consideraciones de tipo infinitesimal.

Descartes abordó el problema de las tangentes en 1637 intentando previamente, determinar la “normal” a la curva de un punto M dado. Recurriendo a los principios de su Geometría Analítica y ponderando su importancia en la resolución de los problemas sobre curvas, Descartes introduce el problema:

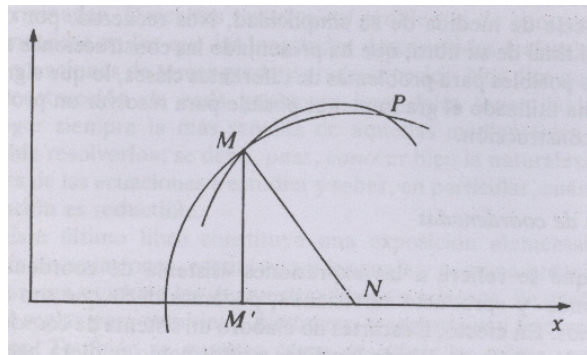


Figura 2.12 La tangente a la Elipse de Fermat.

Si N es el punto donde la normal (perpendicular) corta al eje de las x , la circunferencia descrita con este punto como centro, con radio NM , será tangente en M a la curva. Pero si N no coincide exactamente con el pie de la normal, el radio NM cortará a la curva en un segundo punto P que se aproximará indefinidamente a M , cuando N se aproxime indefinidamente al punto que coincide con el pie de la normal. Este método está fundado en el principio siguiente: una línea cualquiera variable que corta a una curva dada en un punto fijo M dado y en un segundo punto P variable que se aproxima indefinidamente a M , llega a ser tangente a esta curva cuando los dos puntos de intersección coinciden (Alarcón & C, 2011).

Consideremos el ejemplo de la parábola:

$$y^2 = 2mx;$$

la normal AM , de coordenadas (x, y) , pasa por el centro de la circunferencia, de abscisa x_1 cuya ecuación es:

$$(x - x_1)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

La intersección de la curva con la circunferencia proporciona:

$$(x - x_1)^2 + 2mx - r^2 = 0$$

Y, desarrollando:

$$x^2 - 2(x_1 - m)x + x_1^2 - r^2 = 0$$

Si se quiere que los puntos M y P coincidan, hace falta que el discriminante de esta última ecuación se anule, de donde la raíz doble será:

$$x = x_1 - m$$

Conociendo la abscisa x del punto de tangencia y el valor m de la parábola dada, se encuentran x_1 , y conociendo el centro de la circunferencia se conocerán la normal y la tangente.

Este primer método de las tangentes fue seguido de otros dos métodos propuestos por Descartes para apoyar su argumentación en la polémica que enfrentó a Fermat. El segundo método consistía en determinar la tangente a una curva considerándola como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir. Fue propuesto como respuesta a las modificaciones y correcciones hechas por Descartes a la regla de los máximos de Fermat. El último método de Descartes, que dio a conocer algunos días después del segundo, expresa el punto de vista generalmente adoptado ahora: la tangente está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva venga a coincidir con el primero.

2.1.3.3 La regla de Sluse

René-Francois de Sluse (1622-1685), nació en Visé, cerca de Lieja, de una familia valona. Fue canónigo de la catedral de Lieja durante más de treinta años. Se habla de él como de un hombre de una erudición formidable y dotado, para las matemáticas, de un gran espíritu de invención y de generalización. En sus momentos de ocio – muy raros, según él - De Sluse llegó a escribir algunos raros textos que le valieron inmediatamente la estima de los matemáticos de su tiempo.

La primera solución al problema de las tangentes ofrecida por De Sluse es, en el fondo, el método cinemático de Roberval y Torricelli. Influenciado por Torricelli, el canónigo de Lieja permaneció en Italia desde 1642 hasta 1651; intentó entonces generalizar el método de composición de velocidades a todos los movimientos uniformemente acelerados. Así, para la distancia recorrida $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, Torricelli había encontrado que la velocidad se expresaba mediante la notación actual $t \frac{ds}{dt} = 2as$ (donde $s = 0$ cuando $t = 0$ y a es una constante). De Sluse reemplazó el 2 en esta última fórmula por una constante k , de donde:

$$t \frac{ds}{dt} = kas$$

Desde el punto de vista analítico, la combinación de las dos fórmulas siguientes $t \frac{ds}{dt} = k$ y $s = at^k$ (donde a es una constante) proporciona, cuando $a = 1$, la relación fundamental:

$$\frac{d}{dt}(t^k) = kt^{k-1}$$

válida para todo k real.

El segundo método del científico de Lieja conducía precisamente a esta última fórmula, pero sólo para valores enteros y positivos de k . Por desgracia para él, cuando estuvo en posesión del resultado de su segundo método, había perdido probablemente de vista el primero, y por ello no se le ocurrió establecer una comparación entre ambos.

El mérito del canónigo de Lieja, en la búsqueda de la tangente a una curva cuya ecuación es de la forma $f(x, y) = 0$, donde f es una función

polinómica,; consistió en desarrollar un método que permita escribir inmediatamente la solución en la forma actual $\frac{y f_y}{f_x}$.

La regla de De Sluse puede ser enunciada como sigue: La subtangente será el cociente obtenido colocando en el numerador todos los términos que contienen y , multiplicado cada uno por el exponente de la potencia de y que aparece en ellos y, en el denominador, todos los términos que contienen x , cada uno multiplicado por el exponente de la potencia de x que aparece en ellos, dividido por x . Este resultado fue conocido por Hudde en 1659.

En 1659, De Sluse publicó un libro popular titulado *Mesolabum* en el que proseguía los trabajos de sus predecesores a propósito de las construcciones geométricas de las raíces de una ecuación. Demostró, por su método de resolución geométrica de ecuaciones, que dada una cónica pueden construirse las raíces de toda ecuación cúbica o cuártica por intersección de una cónica y una circunferencia.

De Sluse utiliza, en lugar de las x e y de Descartes, las variables e y a de Fermat. Una re-edición de esta obra en 1668, aparecida en las *Philosophical Transactions* de 1669, alaba este libro como la mejor contribución a este tipo de geometría desde Descartes.

Después de la muerte de Désargues en 1661, de Pascal en 1662 y de Fermat en 1665, la supremacía francesa en matemáticas llega a su fin. Queda Roberval como única figura prestigiosa, pero sus contribuciones no son ya significativas y su influencia es restringida a causa de su negativa a publicar sus descubrimientos. Sin embargo, un matemático de talento asegura el relevo en lo que se refiere a la geometría.

2.1.3.4 Los métodos cinemáticos de Roberval

Roberval y Torricelli desarrollaron entre 1630 y 1640 un método para el trazado de tangentes. Torricelli lo dio a conocer en su obra, pero Roberval como era habitual en él no lo publicó, conociéndose vía los *Cogitata physico-mathematica* del padre Mersenne y, ya en 1693, por un tratado de F. du Verdu, discípulo de Roberval (Collette, 2002).

Toricelli da a conocer en su *Opera geometrica* un método para el trazado de tangentes, basado en argumentos cinemáticos; método desarrollado por Roberval y Torricelli entre 1630 y 1640. En él, Roberval establece que la dirección del movimiento de un móvil que describe una circunferencia es la perpendicular en el extremo del diámetro, y de aquí, generalizando, enuncia

lo que él llama axiomas o principios de invención para encontrar las tangentes a las curvas. El método de Roberval utiliza el concepto intuitivo de movimiento instantáneo y se basa en tres principios básicos:

1. Considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil.
2. Considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento instantáneo en ese punto móvil.
3. Si el movimiento del punto que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la bien conocida, ley del paralelogramo.

Roberval consiguió con su método determinar las tangentes de todas las curvas típicas de la época, como por ejemplo de la Espiral de Arquímedes, la Cicloide y las cónicas. Exponemos el caso de la Cicloide.

Considerando que el punto P que describe la cicloide en instante genérico, está sometido a dos movimientos:

- a) Un movimiento rectilíneo uniforme de dirección PH , paralela a la base AN , y
- b) Un movimiento de rotación uniforme alrededor de la circunferencia generatriz, cuya dirección PK es la de la tangente a ésta en P .

La razón entre ambas velocidades es la razón entre AN y la semicircunferencia NLV , es decir igual a 1, de modo que $PH = PK$ (en longitud). De la igualdad de velocidades (el paralelogramo de la ley es un rombo) se deduce que la dirección del movimiento resultante y por tanto de la tangente en P , es la bisectriz del ángulo que forman los segmentos PH y PK .

Se verifica, además, que la recta PQ que une el punto P de tangencia con el punto Q , en el cual el círculo generador que pasa por P toca a la base, es la normal a la cicloide en P . En efecto, el triángulo RPQ es isósceles ya que $RP = RQ$ (por tangencia y potencia), además PH es paralela a AN , luego

$$\sphericalangle RPQ = \sphericalangle PQR = \sphericalangle QPH,$$

de donde resulta que PQ es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle RPH$. Siendo PS la bisectriz del ángulo HPK si tiene que PQ y PS son bisectrices interior y exterior del mismo ángulo, en particular PQ y PS son perpendiculares, y como PS es la tangente en P , PQ será la normal en P .

Roberval demuestra fácilmente que la tangente a la cicloide es la recta por P paralela a LV , siendo NLV el círculo generador central (que da el vértice a la cicloide), que es el mismo resultado obtenido por Fermat con su método de las tangentes.

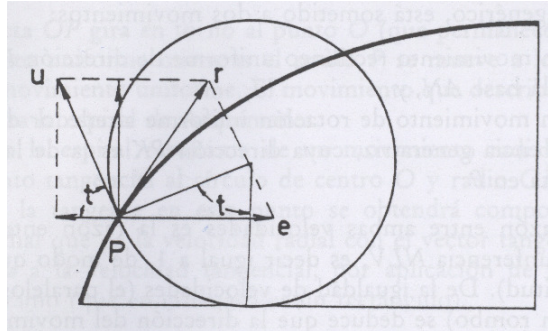


Figura 2.13 los métodos cinemáticos de roberval para la tangente a la Cicloide.

En coordenadas cartesianas sabemos que la ecuación de la cicloide viene dada por:

$$1) \quad x = t - \text{sen } t \quad \text{e} \quad y = 1 - \text{cos } t$$

Los vectores de velocidad instantánea en el punto P serán:

$$e = (1, 0) \text{ para la traslación.}$$

$$u = (-\text{cos } t, \text{sen } t) \text{ para la rotación.}$$

Según la *ley del paralelogramo*, el vector velocidad instantánea en el punto P es u y por tanto la dirección de la tangente a la cicloide en P será:

$$2) \quad v = (1 - \text{cos } t, \text{sen } t)$$

Se observa que el último resultado se podría obtener mediante la derivación término a término de 1), lo que confirma, al menos para este caso, la validez del método de Roberval.

2.1.3.5 Los métodos diferenciales de Barrow

La forma geométrica de Barrow, a pesar de sus magníficos resultados, le impidió desarrollar el enfoque infinitesimal del Cálculo, pues su obra padece

una total limitación operacional que hace imprescindible la utilización constante de figuras geométricas complejas, a las que se esclaviza, porque en su descripción minuciosa puede estar la clave de la demostración. Barrow utiliza, en efecto, cerca de ciento ochenta figuras en escasamente cien páginas.

Barrow, con ayuda de su joven alumno Newton, realiza la primera exposición orgánica del incipiente Cálculo, obteniendo numerosos teoremas geométricos, en parte nuevos, que representan en conjunto un gran avance para el Cálculo. No sólo problemas de cuadraturas (cambio de variable, etc.), tangentes (pendiente de funciones definidas implícitamente, propiedades aditivas de la derivada, etc.), rectificación de curvas (resultados equivalentes a la fórmula $ds^2 = dx^2 + dy^2$ rectificación de la parábola, etc.), sino también un embrión geométrico del teorema fundamental del Cálculo.

Barrow critica el enfoque aritmético y algebraico que Wallis, Fermat y Descartes le habían dado al Cálculo y, por el contrario, prefiere razonar en un lenguaje geométrico algo artificioso, que oculta el importante valor y la novedad de los resultados, lo que da la apariencia de ser una compleja generalización de los resultados geométricos clásicos de los antiguos y que hacen su obra de difícil lectura. Sin embargo, cuando se refunde su obra en términos de nuestro Análisis matemático actual (lo que hacen algunos libros de Historia de las Matemáticas), aparecen multitud de reglas de uso común y teoremas de diferenciación e integración en los textos de la materia.

Sólo en un caso parece que el enfoque de Barrow ha sido analítico, se trata de su método infinitesimal para la determinación de tangentes, donde aparece el famoso *triángulo característico* o *triángulo diferencial*, ya utilizado por Torricelli, Pascal, Neil, entre otros, y que es la piedra angular del desarrollo del Cálculo de Leibniz.

En referencia a ello, Barrow afirma (Edwards J. T., 1982):

Hemos terminado de esta manera la primera parte..., suplementariamente a esto hemos añadido en forma de apéndice un método para encontrar tangentes mediante el cálculo, frecuentemente usado por nosotros...

En base a la Figura 2.10, establece:

Sean AP y PM dos líneas rectas dadas, PM cortando a la curva dada en M , y supongamos que MT corta a la curva en M y corta a la recta AP en T .

En orden a encontrar el segmento PT , consideremos un arco de la curva infinitamente pequeño MN . Tracemos NQ y NR , paralelas respectivamente a NP y AP . Sean $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$ y $NR = e$ otros segmentos determinado por la naturaleza de la curva. Comparamos MR con NR por medio de una ecuación obtenida por cálculo. A continuación observaremos las siguientes reglas (Edwards J. T., 1982):

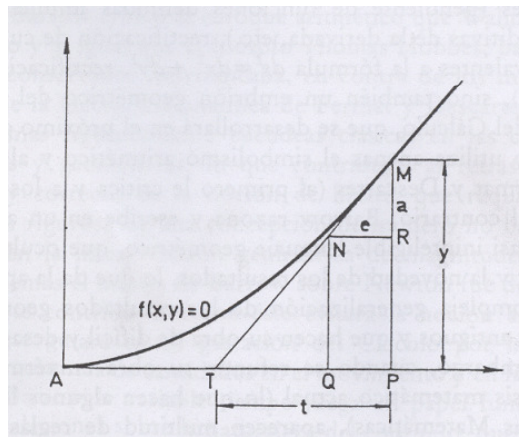


Figura 2.14 El triángulo característico de Barrow.

Regla 1: En el cálculo omitiremos todos los términos conteniendo potencia* de a o e , o productos de ellos.

Regla 2: Después de formar la ecuación desecharemos todos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen a o e (estos términos pasándolos a un lado de la ecuación serán siempre igual a cero).

Regla 3: Se sustituye m (o MP) por a y t (o PT) por e , de aquí se encontrará la cantidad PT .

Es decir, Barrow determina la tangente a la curva dada de forma implícita por $f(x, y) = 0$. Para ello considera un arco MN de la curva infinitamente pequeño. Si $m = (x, y)$, N será $N = (x - e, y - a)$ y plantea la ecuación:

$$1) \quad f(x - e, y - a) = f(x, y) = 0,$$

ya que M y N son puntos de la curva. A continuación aplica tres reglas:

R.1. Se eliminan todos los términos que contienen potencias de e o de a , o productos de ellos.

R.2. Se ignoran todos los términos que no contienen e o a .

R.3. De la ecuación resultante se obtiene $\frac{a}{e}$, que por la semejanza del triángulo característico MNR con el triángulo MTP nos proporciona la pendiente de la tangente

$$2) \quad m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e},$$

de donde se puede obtener el valor de la subtangente $t = PT$.

Vemos cómo Barrow aplica el triángulo característico bajo la idea esencial de que la tangente es la posición límite de la secante cuando a y e se aproximan a cero, aplicando el límite a base de despreciar los *infinitesimales de orden superior*.

Dada una curva general definida implícitamente,

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} x^i y^j,$$

Se escribe:

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} (x+e)^i (y+a)^j = f(x+e, y+a),$$

desarrollando los binomios $(x+e)$ e $(y+a)$ y aplicando las reglas 1 y 2 de Barrow, se obtiene:

$$3) \quad f(x, y) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} (ix^{i-1}y^j e + jx^i y^{j-1} a) = 0,$$

de donde la pendiente de la tangente vendrá dada por¹⁷:

$$4) \quad m = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{e} = - \frac{\sum_{i,j=0}^n ix^{i-1}y^j}{\sum_{i,j=0}^n jx^i y^{j-1}} = \frac{\delta f}{\delta x} / \frac{\delta f}{\delta y}$$

¹⁷ Notación usada en la actualidad.

de modo que las reglas de Barrow permitirían obtener una derivación analítica de la regla de Sluse.

Una aplicación del método de Barrow, se hace a continuación para la *kappa-curva*. En la Figura, ABH es un ángulo recto, siendo A un punto fijo. Sea K un punto cualquiera de BH , se une A con K y se toma M sobre AK , de manera que $AM = BK$, Se obtiene así una curva $ANMS$, cuya tangente en un punto M se quiere determinar.

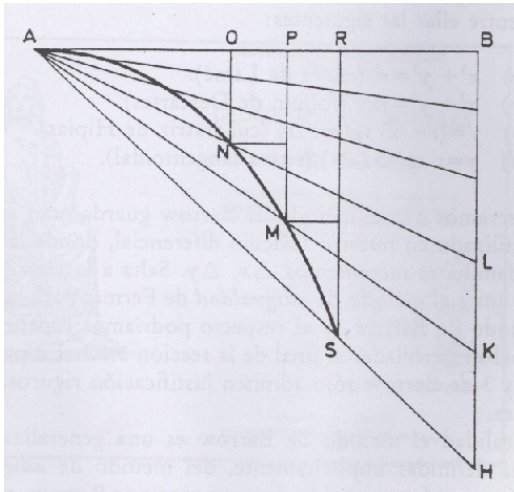


Figura 2.15 La tangente a la kappa-curva con el método de Barrow.

Barrow obtiene primero la ecuación de la curva. Para ello traza PM perpendicular al eje AB y considera $AP = x$, $PM = y$. Sea r la longitud AB , se tiene:

$$\frac{BK}{PM} = \frac{AB}{AP},$$

es decir

$$\frac{BK}{y} = \frac{r}{x}$$

de donde

$$BK = \frac{ry}{x},$$

Además $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2$, y como $BK = AM$, será $x^2 + y^2 = \left(\frac{ry}{x}\right)^2$ y

por lo tanto:

$$x^4 + x^2y^2 = r^2y^2,$$

que es la ecuación del lugar geométrico.

El cálculo de la tangente en el punto M se desarrollaría así. Ecuación (1):

$$(x-e)^4 + (x-e)^2(y-a)^2 - r^2(y-a)^2 = x^4 + x^2y^2 - r^2y^2$$

Operando:

$$(x^4 - 4x^3e + 6x^2e^2 - 4xe^3 + e^4) + (x^2 - 2xe + e^2)(y^2 - 2ya + a^2) - (-r^2)(y^2 - 2ya + a^2) \\ = x^4 + x^2y^2 - r^2y^2$$

$$\text{Regla 1. } (x^4 - 4x^3e) + (x^2 - 2xe)(y^2 - 2ya) - (-r^2)(y^2 - 2ya) = x^4 + x^2y^2 - r^2y^2$$

$$\text{Regla 2. } 4x^3e + 2x^2ya + 2xy^2e - 2r^2ya = 0, (2x^3 + xy^2)e = (-x^2y + r^2y)a$$

Regla 3. $m = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{e} = \frac{2x^3 + xy^2}{r^2y - x^2y}$ ¹⁸, resultado que se puede confirmar mediante la aplicación de las formulas (4).

Barrow aplico su método de tangentes a un gran número de curvas, entre ellas las siguientes:

- a) $x^3 + y^3 = r^3$ (curva de Lamé)
- b) $x^3 + y^3 = rxy$ (folium de Descartes)
- c) $y = (r-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2r}\right)$ (cuadratriz de Hipias)
- d) $y = r \tan\left(\frac{\pi x}{2x}\right)$ (curva tangentoidal)

Se puede observar que en el lenguaje matemático actual, las letras e , a son los familiares incrementos Δx , Δy y en particular, las reglas 1 y 3 de Barrow sólo admiten justificación rigurosa mediante los límites.

En realidad el método de Barrow es una generalización, para funciones definidas implícitamente, del método de *adigualdad* de Fermat (que no fue

¹⁸ Notación usada en la actualidad.

conocido directamente por Barrow, pero que es muy probable que le llegara a través de los trabajos de Huygens, Gregory y Wallis), lo que acerca entre sí a los dos matemáticos del siglo XVII que más contribuyeron a anticipar nociones del Cálculo diferencial e integral.

2.1.4 La conexión entre las cuadraturas y las tangentes: Una breve introducción desde los griegos hasta Newton

Ya los griego 2000 años atrás habían desarrollado trabajos sobre áreas y tangentes. Arquímedes (287-212 a.C.) por ejemplo, halló el área de una sección de parábola, lo que en términos actuales significa calcular la expresión $\int_0^b x^2 dx$. También logró determinar el área de una elipse así como el área y el volumen de una esfera. Apolonio (alrededor de 260-200 a.c.) por su parte, escribió acerca de tangentes a elipses, parábolas e hipérbolas, y Arquímedes analizó las tangentes a ciertas curvas en forma de espiral. *Ni siquiera intuyeron que los problemas de **área** y **tangentes** estarían relacionados muchos siglos después.*

En el Medioevo, las investigaciones sobre el movimiento, en particular las de Oresme (1325-1382), conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo (1564-1642) recoge estas consideraciones, que son demostradas en seguida con argumentos de indivisibles. También Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento-tiempo, la dirección de éste es la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad es la pendiente de la línea de tangente.

En el siglo XVII, mientras Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) desarrollaban muchas ideas en torno a la Geometría Analítica y el Álgebra, también en conjunto con Torricelli (1608-1647), Cavalieri (1598-1647) y Wallis (1616-1703) trabajaban sobre áreas y cuadraturas.

Torricelli aborda todos estos resultados medievales y los desarrolla en su escrito *De motu gravium* incorporado a su *Opera Geometrica* de 1644, de modo que tras nuevas especulaciones cinemáticas obtiene para curvas particulares (parábolas de orden cualquiera¹⁹) resultados fácilmente generalizables, que permiten establecer, desde un punto de vista cinemático,

¹⁹ Se entiende por parábola de orden n a las curvas de la forma $y = ax^n$.

el carácter inverso de las operaciones de cuadratura (que dan el espacio conocida la velocidad) y de construcción de tangentes (que dan la velocidad conocido el espacio).

En otras palabras, si $s = s(t)$ y $v = v(t)$ representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se verifica:

- El área limitada por la curva $v = v(t)$ y el eje de abscisas representa, para cada t , el espacio recorrido $s = s(t)$.
- La pendiente de la tangente a la curva $s = s(t)$ representa, para cada t , la ordenada de la curva $v = v(t)$ en la abscisa.

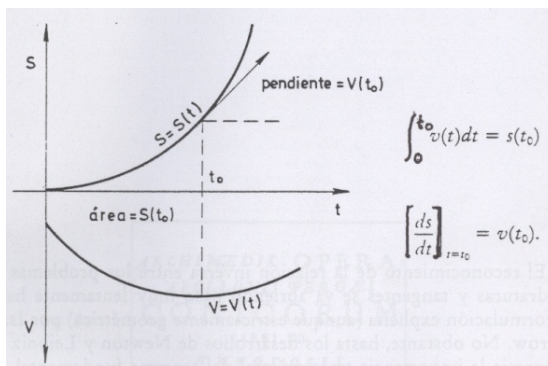


Figura 2.16 El carácter inverso entre cuadraturas y tangentes desde un punto de vista cinemático.

Mientras tanto, Cavalieri también halla el área bajo la curva $y = x^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ de acuerdo a un método en el que la longitud de los cálculos aumentaba a medida que el exponente se hacía mayor. A partir del valor $n = 9$, aseguró que el patrón debería ser válido para exponentes mayores. En los siguientes 20 años, varios matemáticos justificaron su conjetura, de manera que el cálculo del área bajo $y = x^n$ para n entero positivo n , que se toma como ejemplo, representa un gran triunfo.

Más tarde, Wallis halló el área bajo la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ por un método que tiene más carácter mágico que matemático. Sin embargo, Fermat obtuvo el mismo resultado con ayuda de series geométricas infinitas.

El problema de determinar tangentes a curvas estuvo en boga en la primera mitad del siglo XVII. Descartes mostró cómo hallar una recta perpendicular a una curva en un punto P (mediante la construcción de un círculo que toca la

curva sólo en P); la tangente fue entonces la recta que pasa por P y es perpendicular a esa recta.

Fermat, que tanto se prodigó en anticipar resultados de Cálculo Diferencial e Integral, aplicando su método de máximos y mínimos al cálculo de tangentes y centros de gravedad, que redujo los problemas de rectificación a cuadraturas (tras el previo cálculo de la tangente), que utilizó infinitesimales aritméticos y geométricos, si llegó a percatarse de la relación inversa de las cuadraturas con las tangentes, no llegó a advertir la profunda significación del hecho, lo que le obligó a utilizar hábiles artificios geométricos. Como mucho Fermat intenta demostrar, con un razonamiento nada claro, que si dos curvas tienen en cada punto la misma pendiente, las curvas tienen la misma forma, es decir, en nuestro lenguaje que $f'(x)$ determina $f(x)$ salvo una constante (Edwards J. T., 1982). Claro está que de los diversos métodos de Fermat, se deduce para casos particulares, la relación inversa que manifiestan las expresiones (Leibniz, 1684):

$$F(t) = \int_0^t x^n dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ y } F'(t) = t^n$$

Por la misma época, Gregory de Saint Vincent descubre en 1647 que la función de área hiperbólica $f(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$ cumple la propiedad $f(t.r) = f(t) + f(r)$, llegando así a la relación inversa $f(t) = \log t$ y $f'(t) = \frac{1}{t}$.

La situación era propicia para la unión de las técnicas acerca de *tangentes* y *áreas*. Sin lugar a dudas fue Isaac Barrow (1630-1677), quien fuera profesor de Isaac Newton (1642-1727) en Cambridge, el matemático que con mayor precisión formuló el problema de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Ya en su *Lectura I* enuncia el principio de Oresme y Galileo y en su *Lectura X* enuncia y demuestra, con un razonamiento impecable, una relación importante entre cuadraturas y tangentes.

Con referencia a la Figura 2.13, Barrow describe (Edwards J. T., 1982):

Sea ZGE una curva cuyo eje es VD . Consideremos las ordenadas (VZ, PG, DE) perpendiculares al eje y continuamente creciendo desde la coordenada inicial VZ ; sea VIF una línea tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al eje VD y cortando a las curvas en los puntos EIF , el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio interceptado $VDEZ$; sea un punto T en el eje VD tal que $DE : DF = R : DT$ y

unimos (T con F). Entonces TF cortará a la curva (la cual es la tangente a curva²⁰).

Tomemos un punto I en la curva VIF (primeros del lado de F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ e IL paralelo a VD , cortando las líneas dadas como se muestra en la misma Figura; entonces, $LF : LK = DF : DT = DE : R$, es decir, $R \times LF = LK \times DE$.

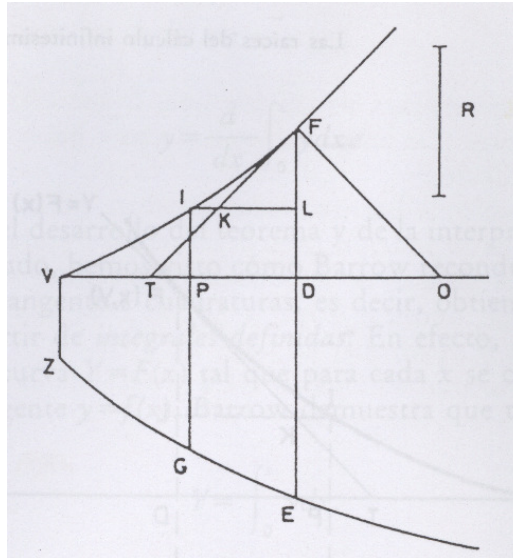


Figura 2.17 El carácter inverso entre cuadraturas y tangentes desde el punto vista geométrico de Barrow.

Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene $R \times LF = \text{área } PDEG$, por tanto $LK \times DE = \text{área } PDEG$, por tanto $LK \times DE = \text{área } PDEG < DP \times DE$, por tanto se tiene $LK < DP < LI$.

Análogamente, si el punto I estuviera del otro lado de F , se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar que $LK > DP > LI$.

De aquí se deduce que es bastante claro que toda la línea TKF permanece en o debajo de la curva $VIFI$.

Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ , PG y DE decrecen continuamente, la misma conclusión se obtiene mediante un argumento

²⁰ La tangente TF era concebida como la tangente a una circunferencia y no en términos del Cálculo Infinitesimal actual (no como concepto de aproximación local).

similar; sólo una particularidad ocurre, a saber: en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD .

Corolario. Obsérvese que $DExDT = RxDF = \text{área } VDEZ.$ "

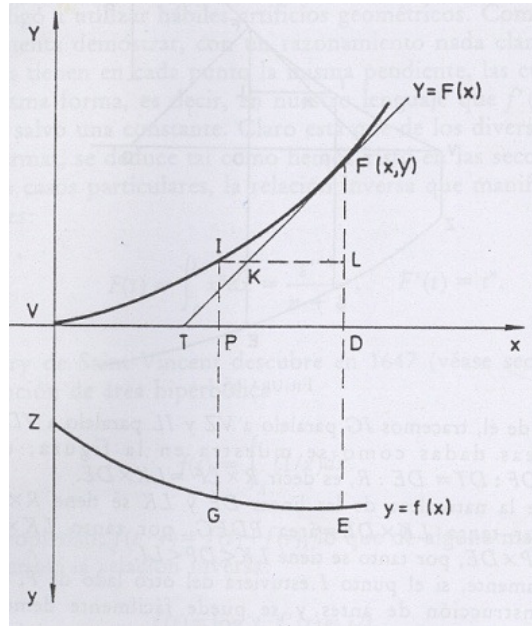


Figura 2.18 El carácter inverso entre cuadraturas y tangentes en el contexto funcional.

Veamos ciertas conclusiones fundamentales que podemos inferir del resultado de Barrow. Dada una curva $y = f(x)$, donde f es una función creciente y orientada hacia abajo, como lo muestra la siguiente Figura, se construye una curva $Y = F(x)$ con la condición de que la ordenada genérica $Y = DF$ representa el área determinada por la curva $y = f(x)$ y las ordenadas $F(0) = VZ$ y $f(x) = DE$, es decir: $Y = \int_0^x y dx$.²¹

Para construir la tangente a la curva $Y = F(x)$ en el punto $F(x, Y)$, Barrow, partiendo del punto $D = (x, 0)$, elige sobre el eje x el punto T , tal que se tenga la relación $DT = \frac{Y}{y} = \frac{DF}{DE}$, y demuestra que la recta TF es la tangente.

²¹ Notación usada en la actualidad.

Ahora bien, como se tiene $\frac{DF}{DT} = DE = y$, el resultado es equivalente a $\frac{dY}{dx} = y$, es decir, $y = \frac{d}{dx} \int_0^x y dx$.²²

A través del desarrollo del teorema y de la interpretación que del mismo se ha dado, hemos visto cómo Barrow reconduce el problema inverso de la tangente a cuadraturas, es decir, obtiene *integrales indefinidas* a partir de *integrales definidas*. En efecto, si se quiere determinar una curva $Y = F(x)$ tal que para cada x se conoce la dirección de la tangente $y = f(x)$, Barrow demuestra que tal curva es $Y = \int_0^x y dx$, ya que tomando el punto T de modo que $DT = \frac{Y}{y}$, TF es la tangente a la curva $y = f(x)$, que como se sabe es única. Lo que no resuelve Barrow es el problema de obtener *integrales definidas* a partir de *integrales indefinidas*, es decir, no resuelve cuadraturas por medio del teorema de inversión, a base de expresarlas en términos de antiderivadas, que es la aplicación esencial del Teorema Fundamental del Cálculo.

Además, el enfoque de Barrow es estrictamente geométrico (Bobadilla, 2008) y sólo asegura y prueba que la recta TF es tangente a la curva $Y = F(x)$ en el sentido clásico griego de *la línea recta que toca en un único punto a la curva*. De manera que Barrow, autoimponiéndose un estático lenguaje geométrico, aborta la visión clara y práctica de la interrelación entre los problemas de cuadraturas y tangentes, que a nivel cinemática tan claramente aparecían como inversos. Al no sustituir el ente geométrico tangente por el correspondiente ente analítico (derivada), Barrow cercena la posibilidad de generalización y algoritmización que encerraba su magnífico teorema. Barrow descubre un hecho fundamental que vincula las cuadraturas con las tangentes, pero no alcanza a calibrar la trascendental importancia que tiene.

Claro está que Barrow no había reducido a un algoritmo universalmente válido su método de tangentes, y es evidente que la importancia del carácter recíproco de la derivación y la integración queda puesta de manifiesto sólo cuando se dispone de un método general para la obtención analítica de las derivadas o geoméricamente para construir tangentes. De haber sido así, Barrow hubiera sido el descubridor del Cálculo.

Pero fue finalmente Isaac Newton, quien advirtió el inmenso alcance de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Cuando llegó a Cambridge

²² Notación usada en la actualidad.

en 1661, y durante los años 1665 y 1666, pasados en la granja de su familia para evitar la plaga, fue capaz de sustraerse del purismo geométrico euclídeo de su maestro, desplegando toda la instrumentalización analítica necesaria para reconvertir y desarrollar las ideas geométricas de Barrow, dando a luz un algoritmo automático para la resolución de los problemas de cuadraturas y tangentes: *El Teorema Fundamental del Cálculo* (Stein, 1995).

Desde el punto de vista contemporáneo (s. XX), Bobadilla expone como Lebesgue en su tesis doctoral, generaliza el TFC de la integral de Riemann al resolver el problema de las funciones primitivas, recurriendo a la teoría de la medida y ésta a su vez a la Geometría (Bobadilla, 2008):

En Lebesgue hay un aprovechamiento de los métodos geométricos y los métodos analíticos, permitiéndole resolver varios problemas de las Matemáticas, en particular el cálculo de primitivas: enuncia y demuestra el TFC bajo su nueva definición de integral para una clase más amplia de funciones, cumpliendo con los cánones de rigor establecidos dentro del Análisis Matemático...

Se trata ahora de observar como el TFC evoluciona a través de la historia, desde Leibniz hasta Lebesgue.

2.1.5 El TFC en Leibniz

La manera en que Leibniz pasa de lo discreto a lo continuo, teniendo en cuenta los indivisibles de Cavalieri y los trabajos posteriores de Pascal, le permite admitir la existencia de magnitudes infinitesimales como componentes de la totalidad. Las curvas se le presentan compuestas de partes ubicadas de acuerdo a un orden determinado, que le permiten plantear diferencias infinitesimales entre términos consecutivos. Las curvas pueden verse como una poligonal cuyos lados, en el límite, la agotan completamente.

Se define entonces una sucesión de ordenadas equidistantes, con una separación de una unidad entre ellas sobre la curva. La cuadratura de la curva en consideración corresponde aproximadamente a la suma de las ordenadas, y la diferencia entre dos ordenadas consecutivas da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente. Se concluye así, que entre más pequeña la unidad, mejor será la aproximación, es decir, si la unidad corresponde a una cantidad infinitamente pequeña, la suma de las ordenadas será igual a la cuadratura y la diferencia de dos ordenadas consecutivas será igual a la pendiente. Esto conlleva a Leibniz a la idea de reciprocidad entre la determinación de cuadraturas y tangentes. Justamente,

esta última relación es la que le da autenticidad a su trabajo en comparación a Pascal, quien había llegado hasta el cálculo de cuadraturas sin interesarse en las tangentes ni mucho menos en la relación inversa de estas dos operaciones.

Sin embargo, este es un proceso general que no ayuda en la resolución de casos concretos. Por tal razón, Leibniz recurre al triángulo característico incorporado también por Pascal, pero sacándole un mayor provecho conceptual, pues lo utiliza como soporte en la identificación de la determinación de cuadraturas y tangentes como operaciones inversas.

En (Recalde, 2000), se muestra cómo Leibniz identifica en primer lugar, algunas propiedades del triángulo característico de acuerdo a la representación de la figura siguiente:

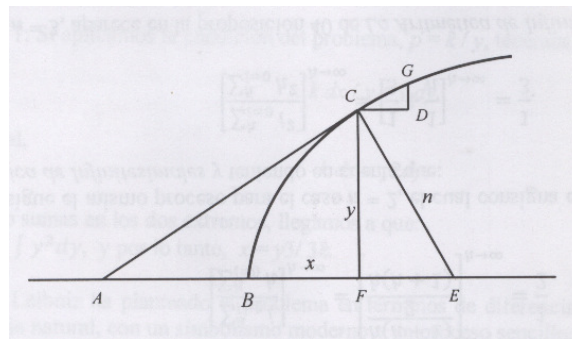


Figura 2.19 El triángulo característico incorporado por Pascal y usado por Leibniz para la determinación de cuadraturas y tangentes como operaciones inversas.

AC es la tangente a la curva BCG , $CE = n$ es la normal correspondiente, $CF = y$ es perpendicular a AE . CGD es el triángulo característico.

De la figura se tiene que los triángulos FCE y CDG son semejantes, por lo tanto,

$$CG \cdot y = CD \cdot n, \text{ y por lo tanto } \Sigma CG \cdot y = \Sigma \cdot n,$$

en el que el primer término se interpreta como el momento total del arco de la curva con respecto al eje x ; el segundo término corresponde a la cuadratura formada de las normales trazadas a lo largo del eje x .

En la misma figura se parte de las siguientes consideraciones:

El punto A corresponde al origen de coordenadas.

El punto C tiene coordenadas (x, y) .

El triángulo característico CDG tiene sus lados infinitesimales, de tal forma que $CD = dx$, $DG = dy$.

Para la curva particular se toma la relación $FE = p = k/y$, FE corresponde a la subnormal, k es constante.

Partiendo de estas consideraciones se tiene que $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$, pues los triángulos CDG y ACF son semejantes. Además, dado que los triángulos CDG y FCE son semejantes, se tiene que $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, de donde, $p dx = y dy$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran lo anterior.

Ejemplo 1: Si aplicamos la condición del problema, $p = k/y$, tenemos, $k dx/y = y dy$, de lo cual $k dx = y^2 dy$. Tomando sumas en los dos extremos, llegamos a que

$$\int k dx = \int y^2 dy, \text{ y por lo tanto, } x = y^3/3k.$$

Se observa que Leibniz plantea el problema en términos de diferencias y sumas, de una manera que se nos antoja natural, con un simbolismo moderno y un proceso sencillo; pero la verdad es que este paso no fue inmediato.

Ejemplo 2: Sea la parte superior de la circunferencia $y = \sqrt{2x - x^2}$; de acuerdo a la figura se tendrá:

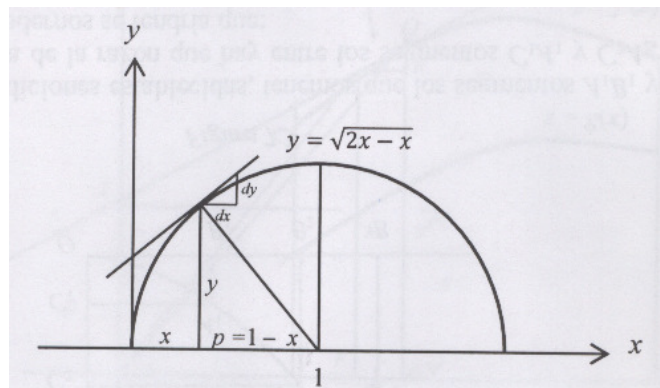


Figura 2.20 La determinación de la tangente al círculo $y = \sqrt{2x - x^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Pero es el TFC concebido por Leibniz como el resultado más importante que lo erige como uno de los creadores del cálculo, el cual es establecido de manera general mediante su método de *transmutación*.

El método de transmutación se puede expresar en los siguientes términos:

Sean A y B dos regiones planas, cada una dividida en indivisibles (éstos pueden ser tomados como una infinidad de rectángulos infinitesimales). Si existe una correspondencia uno a uno entre los indivisibles en A y los de B , tales que indivisibles correspondientes tengan iguales áreas, entonces se dice que B es derivado de A por transmutación, concluyendo que tiene áreas iguales.

El proceso seguido por Leibniz se enuncia a continuación:

Sea la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = A$ y $x = B$. Tomemos un punto $P(x, y)$ y formemos el triángulo característico PQR , tal que $Q(x + dx, y + dy)$. Sea la tangente determinada por el arco infinitesimal $ds \cong PQ$, cuya prolongación corta al eje y en el punto $T(0, z)$; localizamos el punto S , tal que OS (de longitud p) sea perpendicular a la tangente SQ , como se muestra en la figura siguiente:

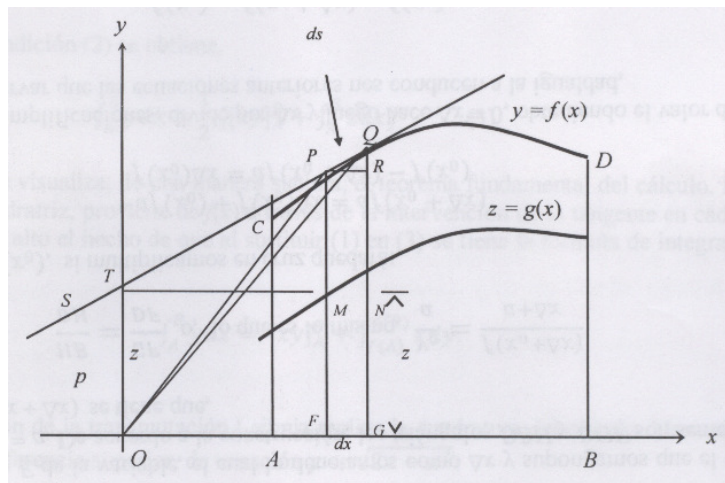


Figura 2.21 El método de transmutación de Leibniz.

Como los triángulos PQR y TMP son semejantes se tiene que, $\frac{TM}{PR} = \frac{MP}{QR}$, es decir $\frac{x}{dx} = \frac{y-z}{dx}$, de lo cual se tiene que $z = y - x \frac{dy}{dx}$ (1).

También se tiene que $\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}$, pues los triángulos PQR y OTS son semejantes.

El área del triángulo infinitesimal OPQ es, $a(OPQ) = \frac{1}{2}p \cdot ds = \frac{1}{2}z \cdot dx$

De esta forma, si se considera la región acotada por $f(x)$ y los segmentos OC y OD formada por los triángulos infinitesimales OPQ , entonces se tiene,

$$a(\text{región } OCD) = \frac{1}{2} \int_A^B z \, dx, \text{ donde } z = g(x) \quad (2)$$

De las condiciones del problema, y tal como se puede verificar de la gráfica, se tiene que: $a(ACDB) = a(\triangle ODB) + a(\text{región } OCD) - a(\triangle OCA)$ expresión equivalente a:

$$\begin{aligned} \int_A^B y \, dx &= \frac{1}{2} B \cdot f(B) - \frac{1}{2} A \cdot f(A) + a(\text{región } OCD) \\ &= \frac{1}{2} [xy]_A^B + a(\text{región } OCD) \end{aligned}$$

Remplazando la condición (2) se obtiene, $\int_A^B y \, dx = \frac{1}{2} [xy]_A^B + \int_A^B z \, dx$ (3).

En este resultado se visualiza, de una manera sucinta, el teorema fundamental del cálculo. La curva $z = g(x)$, llamada la cuadratriz, proviene de $f(x)$ a través de la intervención de la tangente en cada punto. No podemos pasar por alto el hecho de que al sustituir (1) en (3) se tiene la fórmula de integración por partes:

$$\int_A^B y \, dx = [xy]_A^B + \int_{f(A)}^{f(B)} x \, dy$$

Como una aplicación de la transmutación Leibniz realiza la cuadratura del círculo. Veamos el caso tomando la semicircunferencia superior, de ecuación $y = \sqrt{2x - x^2}$.

De acuerdo al resultado del ejemplo 1 se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

por lo tanto,

$$z = y - x \frac{1-x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}},$$

de donde,

$$x = \frac{2z^2}{1+z^2}$$

Calculando el área del cuarto de círculo se obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y dx = \frac{1}{2} ([x\sqrt{2x-x^2}]_0^1 + \int_0^1 z dx) \quad (\text{aplicando 3})$$

Para calcular $\int_0^1 z dx$, Leibniz recurre a la gráfica:

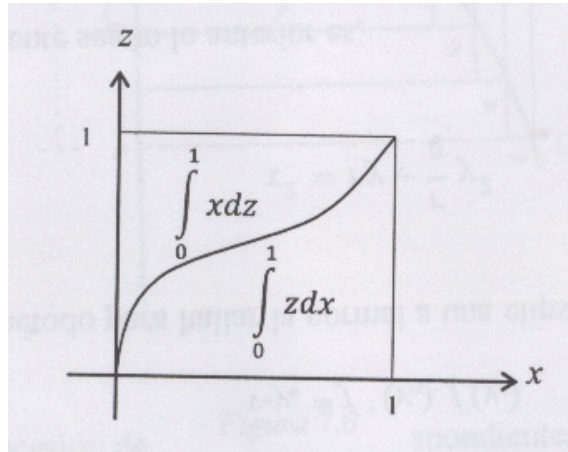


Figura 2.22 El método de transmutación de Leibniz.

De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y dx = \frac{1}{2} ([x\sqrt{2x-x^2}]_0^1 + \int_0^1 zy dx) = \frac{1}{2} [1 + (1 - \int_0^1 x dz)] \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{1+z^2} = 1 - \int_0^1 z^2 (1 - z^2 + z^4 + \dots) dz \\ &= 1 - [\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 + \dots] \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

2.1.6 El TFC en Cauchy

Cauchy logra, al igual que para la derivación, definir la operación de integración independientemente de las aplicaciones a las cuadraturas, y la efectúa sobre el objeto función. Cauchy reconoce las propiedades de las funciones continuas²³ y, define sumas parciales S_n y S_m correspondientes a dos particiones, tales que difieran en una cantidad arbitrariamente pequeña cuando las longitudes de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sean arbitrariamente pequeños. Es decir, el valor de la suma S “termina por ser sensiblemente constante”, alcanzando un límite que depende únicamente de f y de los valores extremos de las particiones, a lo que Cauchy designa como integral definida.

Si bien el cálculo de Newton y Leibniz brinda una solución genérica al problema de las cuadraturas, es a partir de la demostración de la existencia de la integral para funciones continuas que el problema de la cuadratura de figuras planas alcanza su punto extremo, pues permite asignarle a cada región plana un número determinado que corresponde a su medida. El problema de la medida relativa proveniente de la antigüedad griega se va transformando en el problema de la medida absoluta. Sin embargo aún hace falta establecer un cuerpo numérico que sirva de reglilla referencial de la medida.

Cauchy es quien primero presenta una prueba propiamente analítica de lo que hoy denominamos el teorema fundamental del cálculo, aunque ya Newton y Leibniz habían evidenciado la relación inversa entre el cálculo de tangentes y el problema de cuadraturas. Su demostración constituye un punto de partida en la implementación de los cánones de rigor en la idea de fundamentar el análisis sobre bases conceptuales firmes.

La prueba de Cauchy se basa en dos resultados previamente demostrados (Recalde, 2000): el teorema del valor medio para integrales y la aditividad de la integral definida sobre intervalos. Se transcribe a continuación la demostración que aparece en su *Cálculo infinitesimal*:

Teorema: Si $f(x)$ es finita y continua en el intervalo $[x_0, X]$ y $F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$, entonces se tiene que $F'(x) = f(x)$.

²³ Cauchy demuestra que la continuidad es una condición suficiente para la existencia de la integral definida.

Demostración: Si en la integral definida $\int_{x_0}^x f(x)dx$ variamos uno de los dos límites de integración, por ejemplo X , la integral en sí misma variará con esa cantidad. Y si el límite X , ahora variable, es remplazado por x obtenemos como resultado una nueva función de x la cual será la que es llamada una integral tomada desde $x = x_0$. Sea,

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx \quad (1)$$

una nueva función. Del teorema de valor intermedio para integrales se tiene que:

$$F(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad F(x_0) = 0, \quad 0 < \theta < 1 \quad (2)$$

Por la aditividad de integrales se tiene:

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^x f(x)dx = \int_x^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta_\alpha),$$

o, lo que lo mismo, $F(x + \alpha) - F(x) = \alpha f(x + \theta_\alpha) \quad (3)$

Se sigue de la ecuación (2) y (3) que si la función $f(x)$ es finita y continua en una vecindad de todo valor particular de la variable x , la nueva función $F(x)$, no sólo es finita sino también continua en la vecindad del valor, y por lo tanto, a un incremento infinitamente pequeño de la x , corresponde un incremento infinitamente pequeño de $F(x)$. Entonces, si la función $f(x)$ permanece finita y continua de $x = x_0$ a $x = X$, lo mismo ocurre para la función $F(x)$. En suma, si ambos miembros de la fórmula (3) son divididos por α , nosotros concluimos tomando el límite que $F'(x) = f(x)$, como se quería demostrar.

2.1.7 La integral de Riemann

Corresponde a Riemann, en 1851, la generalización de la definición de integral, cuando ya antes, Dirichlet, en 1829 demuestra que la función característica de los racionales no era integrable en el sentido de Cauchy y posteriormente se establece como meta para la época la integración de funciones discontinuas.

En el marco de su disertación *Sobre la representatividad de una función en series trigonométricas*, Riemann estableció su definición de integral cuando aplicaba como profesor en la universidad de Gotinga. Para ello, observó que al calcular el valor de las sumas parciales, Cauchy utilizaba el valor de la función en el mínimo de cada subintervalo. Riemann hizo un leve cambio al imponer la condición de la existencia de límite para cualquier valor del intervalo siguiendo el proceso a continuación:

De acuerdo a (Recalde, 2000), para Riemann, una función f , definida y acotada en un intervalo $[a, b]$, es integrable, si para cada partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, la suma, $S = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ converge a un límite determinado, para cada $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, y cuando la norma de la partición P , simbolizada como $\|P\|$, tiende a cero; donde $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$. Ese límite constituye, por definición,

$$\int_a^b f(x)dx$$

Riemann presenta dos formas equivalentes a la definición para demostrar la integrabilidad de una función:

f es integrable en un intervalo $[a, b]$ si y sólo si, para toda partición P , se tiene que,

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \dots + D_n \Delta x_n) = 0$$

$D_i =$ oscilación de f en $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$.

f es integrable en un intervalo $[a, b]$ si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$, existe $d > 0$ tal que, si P es una partición de norma menor que d , entonces $S(P, \sigma) \leq \varepsilon$, donde $S(P, \sigma)$ denota la suma de las componentes de $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$ en los cuales $D_i > \sigma$.

Para mostrar que efectivamente su definición de integral elige funciones con alto grado de discontinuidades, Riemann presenta un ejemplo de tales funciones de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} x - n, & \text{donde } n \text{ es el entero más cercano a } x \\ 0, & \text{cuando } x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \end{cases}$$

Tomando como base $g(x)$ se define la sucesión $\{g_n(x)\}$, donde $g_n(x) = g(nx)$, la cual sirve de base para definir la función:

$$f(x) = g_1(x) + \frac{g_2(x)}{2^2} + \frac{g_3(x)}{3^2} + \dots + \frac{g_n(x)}{n^2} + \dots$$

Riemann demuestra que f es discontinua en todos los puntos de discontinuidad de las g_n , es decir, en los puntos de la forma $p/2q$, donde p impar y primo relativo con q ; para ello utiliza el resultado:

$$f(x \pm 0) - f(x) = \pm \left(\frac{1}{2q^2} \right) \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = \pm \frac{\pi^2}{16q^2}$$

De esta forma, f es discontinua en una infinidad de puntos en un intervalo cualquiera. f es integrable en cualquier intervalo, porque para todo $\sigma > 0$, existe sólo un número finito de puntos $x = p/2q$, en los cuales $f(x - 0) - f(x + 0) = \pi^2/8q^2$, es mayor que σ .

En principio, la definición de Riemann hizo pensar que se había logrado caracterizar el concepto de función integral en su máxima extensión; sin embargo, era claro que el teorema fundamental del cálculo debería cumplirse; es decir, si una función f tenía una derivada f' acotada e integrable en el sentido de Riemann en el intervalo $[a, b]$, debería cumplirse que,

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a);$$

resultado que Cauchy había probado para funciones continuas en la vigésima sexta lección de su *Cálculo infinitesimal*. Sin embargo, Dini demostraría un resultado que se tomaría de base para construir contraejemplos. Dini notó que si f es tal que para todo intervalo existen puntos t , tales que $f'(t) = 0$, y si $f'(t)$ es acotada, entonces para todo $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x f'(t) dt = 0,$$

puesto que en las sumas que definen la integral,

$$S = \sum_{i=1}^n f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

se pueden tomar siempre los t_i tales que $f'(t_i) = 0$.

De esta manera, se tendría,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = 0,$$

de donde $f(x) = f(a)$, para todo $x \in [a, b]$.

Sin embargo, Dini sospechaba la existencia de funciones del tipo anterior para las cuales f' no era integrable. Un ejemplo de tales funciones fue construido por el sueco T. Broden en 1896:

Sea $g(x) = x^{1/2}$, $x \in [-1, 1]$. En $x = 0$ se tiene $g'(0) = \infty$, para los demás valores $g'(x)$ existe y es finita.

Tomemos $\{a_n\} \subset [-1, 1]$ un subconjunto denso. Se define,

$$g_n(x) = g(x - a_n) = (x - a_n)^3, \text{ para cada } n.$$

g' existe para todo $x \in [-1, 1]$, y $g'_n(a_n) = \infty$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n},$$

por lo tanto,

$$f'(a_n) = \infty, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dado que cada $g_n(x)$ es estrictamente creciente, entonces f es estrictamente creciente.

Lo anterior significa que f tiene inversa h continua, $h = f^{-1}$, definida en $[f(-1), f(1)]$. Puesto que $h'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, $y = f(x)$, entonces $h'(b_n) = 0$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, donde $b_n = f(a_n)$.

Es fácil comprobar que h' es acotada, se anula en un conjunto denso de puntos $\{a_n\}$ y es estrictamente creciente, luego no es constante; por lo tanto, no sería Riemann integrable.

Resultados como el anterior demostraron las limitaciones de la integral de Riemann. Fue Lebesgue en 1902, quien generalizó la definición de integral

de una manera que corregía los defectos de la integral de Riemann a través de la teoría de la medida.

2.1.8 La integral de Lebesgue

Lebesgue desarrolla el concepto moderno de integral en el segundo capítulo de su tesis doctoral en el año 1902. Este capítulo es bastante significativo desde el punto de vista histórico, dado que enmarca la respuesta a los problemas de sus antecesores con respecto a la definición de integral. Para ello, Lebesgue interrelaciona una variedad de conceptos y procedimientos. Una de las cuestiones que no puede pasar desapercibida tiene que ver con el proceso usado por Lebesgue para formalizar la noción de integral. Se hace referencia al hecho de que aunque la integral surge como operación del análisis con el propósito de fundamentar la salida dada desde el cálculo al problema milenario de las cuadraturas, Lebesgue nota que los problemas de la integral de Riemann no pueden solucionarse desde el análisis, sino a partir de la teoría de la medida abstracta; sin embargo, la teoría abstracta de la medida hunde sus raíces en la geometría. Detallemos el proceso seguido por Lebesgue.

Para Lebesgue, desde el punto de vista geométrico, el problema de la integral, es el siguiente:

Dada una curva C por su ecuación $y = f(x)$ (f es una función continua positiva, los ejes son rectangulares) hallar el área de un dominio limitado por un arco de C , un segmento de 0_x y dos paralelas al eje y , de abscisas dadas por a y b , ($a < b$).

Esta área constituye, para Lebesgue, la integral definida de f entre a y b , y se representa por

$$\int_a^b f(x) dx$$

En primera instancia, Lebesgue recuerda que Arquímedes había resuelto parte del problema, hace más de dos mil años, a través del método exhaustivo. Lo interesante del caso es que este método tiene alguna similitud con el de los contenidos, dado que se realiza por medio de la inscripción y circunscripción de figuras rectilíneas. Justamente, éste es el camino seguido por Lebesgue para llegar a su generalización.

Lebesgue inicia su proceso de generalización tomando una región R , en la cual inscribe y circunscribe rectángulos. Las bases de los rectángulos tienen por longitudes $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, y las alturas, tienen por longitudes $m_1, m_2, m_3, \dots, M_1, M_2, M_3, \dots$ que corresponden, respectivamente, a los valores, inferior y superior de f en los intervalos correspondientes a cada uno de los δ_n .

Si cada uno de los δ_n va tendiendo a cero se obtendrá dos valores, que Lebesgue denomina s y S :

$$s = \Sigma \delta_i m_i \text{ y } S = \Sigma \delta_i M_i.$$

Tal como lo expresa Lebesgue, Gaston Darboux en *Mémoire sur les fonctions discontinúes* [Dar75], ha demostrado que para funciones acotadas, tanto s como S tienden a límites específicos; el primero se denomina integral por defecto $(\int_{\underline{}} f(x)dx)$ y el segundo integral por exceso $(\int_{\overline{}} f(x)dx)$. Cuando los dos límites coinciden, entonces la función es integrable, como sucede con las funciones continuas. De hecho, la igualdad entre s y S , corresponde a la definición de las funciones *Riemann-integrables* (R-integrables).

Los problemas encontrados en la integral de Riemann, hacen que Lebesgue siga el mismo libreto, pero leído a la inversa. En (Recalde, 2000), se muestra como Lebesgue parte de una función f acotada, definida en el intervalo $[a, b]$. Como f es acotada, existen m y M , tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Además Lebesgue impone la hipótesis que para todo $c, d, m < c < d < M$, el conjunto $\{x: c \leq f(x) \leq d\}$ sea L-medible.

A continuación, se toma una partición P del intervalo $[m, M]$:

$$P = \{m = y_0, y_1, \dots, y_n = M\},$$

y se define $e_k = \{x/y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}$, $k = 0, \dots, n - 1$. Como, por hipótesis, cada e_k es medible se toman las sumas,

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i m(e_i),$$

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_{k+1} m(e_i),$$

f es integrable si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \|P\| \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty, \|P\| \rightarrow 0} \delta_n$$

y este límite corresponde a la expresión $\int_a^b f(x)dx$.

Actualmente a las funciones que cumplen la propiedad anterior se les denomina L-integrables. Lebesgue llama la atención en el hecho que las sumas σ_n y δ_n tienen sentido para funciones que no necesariamente son continuas, sino también para las funciones sumables. Para estas funciones σ_n y δ_n tienen un mismo límite independientemente de la forma como se realice la partición P , tal como lo demuestra Lebesgue.

Tomando como base las definiciones anteriores, se demuestra que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función f -integrable tiene medida cero. Esto es, sean A y B dos números arbitrarios y E es el conjunto de puntos tales que:

$$A \leq f(x) \leq B.$$

Los puntos de discontinuidad corresponden a los puntos límites de E , los cuales forman un conjunto e de medida cero. Además como $E \cup e$ es cerrado, entonces es medible; como e es medible, entonces E también es medible y f es sumable.

A continuación Lebesgue generaliza su noción de la integral a funciones f definidas para los puntos de un conjunto E , diferente a un intervalo. Sea $E \subset [A, B]$; se define la función $F(x)$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{si } x \in [A, B] - E \end{cases}$$

La integral de F se calcula en la forma ya establecida. De esta manera se tiene que,

$$\int_E f(x)dx = \int_A^B F(x)dx$$

El siguiente paso de Lebesgue, fue explicitar las diferencias entre su integral y la integral de Riemann. En ese sentido se propone dar ejemplos de funciones L-integrables que no son R-integrables. Aunque Lebesgue se explaya en la caracterización de funciones que cumplan esta característica, basta aquí traer a colación la función característica de los racionales presentada por Dirichlet en la primera mitad del siglo XIX.

Lebesgue prueba que su teoría de la integral restauraba el teorema fundamental del cálculo para derivadas acotadas; para lograr este propósito en primer lugar presenta la definición de integral indefinida de la siguiente forma:

Definición: Se llama integral indefinida de una función $f(x)$, que tiene integral definida en $[a, b]$, a una función $F(x)$, definida en $[a, b]$, tal que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

De la anterior definición se puede obtener la igualdad $F(x) = \int_a^x f(x) + F(a)$, lo cual significa que toda función con integral definida, admitirá una infinidad de integrales indefinidas, las cuales se diferencian por la constante $F(a)$. Después de mostrar que $F(x)$ es continua, el siguiente paso de Lebesgue es demostrar que toda función derivable acotada admite una integral indefinida; teorema que justamente constituía uno de los problemas de la integral de Riemann.

2.2 El estado del arte del TFC: algunos artículos o memorias relacionadas

Al respecto, se han encontrado algunos estudios en artículos, como los que se describen a continuación, que dan cuenta de algunas dificultades para comprender el concepto de recta tangente a una curva en un punto y de otro lado el de cuadratura o cálculo del área de una región plana cualquiera, y proponen ciertos mecanismos didácticos (visuales, virtuales, escritos, orales) como estrategia para superar tales dificultades; otros, realizan una exploración epistémica de los conceptos y explican en forma adecuada la evolución desde sus inicios hasta nuestros días, con el fin de consolidar estrategias didácticas. Sin embargo, en la revisión de la literatura, no se logra encontrar un estudio dentro de un marco teórico de comprensión, que dé cuenta de los obstáculos de los estudiantes a la hora de establecer la relación inversa que tales conceptos presentan. Relacionamos algunos artículos al respecto:

- **Algunas configuraciones epistémicas de la integral en una variable real desde su origen hasta su consolidación** (Capace, 2007). En este trabajo se indaga sobre el origen, evolución, desarrollo y aplicaciones más relevantes de la integral en una variable real, ofreciendo un estudio detallado desde el origen de una solución de cuadratura hecha por Hipócrates en el año 450 a.c., hasta las

sospechas de Newton al percatarse de la estrecha relación que tiene con las rectas tangentes a las curvas, hasta consolidarse el Teorema Fundamental del Cálculo.

- **Desarrollo de un producto multimedial sobre integral definida para estudiantes universitarios de carreras no matemáticas.** (Engler, 2008). El trabajo tiene como objetivo aportar un recurso multimedial de apoyo para el estudio de la integral definida y su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas (lo cual involucra el concepto de cuadratura en el Teorema Fundamental) para estudiantes de carreras universitarias de disciplinas científicas pero no matemáticas, con el fin de lograr mejorar el aprendizaje. La obra está desarrollada en HTML y se ofrece a través del portal web de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral.
- **Una aproximación socioepistemológica al estudio de la integral definida** (Cabañas & Cantoral, 2004). El trabajo presenta los resultados parciales de una investigación relacionada con una particular interpretación de la integral definida desarrollada en el marco de la *aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa*. Describe, en un primer término, el tratamiento escolar de la integral definida que suele ser usado en la enseñanza contemporánea del Teorema Fundamental del Cálculo y se discuten algunos resultados de investigación que exhiben las dificultades de los estudiantes ante dicho tratamiento.
- **Presentación dinámica de Teoremas del Cálculo: el caso del Teorema Fundamental del Cálculo Integral** (Sarmiento, 2005). Esta memoria, exhibe en particular el *software*: Derive, como recurso mediador de enseñanza entre el estudiante y el objeto a enseñar (el TFC) y pretende mostrar paso a paso los comandos requeridos para visualizar la relación entre el comportamiento de la deriva y la respectiva antiderivada.

2.3 El TFC en los textos escolares

Con el fin de realizar un estudio comparativo en cuanto a la presentación del TFC en algunos textos escolares de Análisis Matemático, se presentan elementos generales que en ellos aparecen con el objeto de poder realizar una sencilla, pero interesante caracterización. Los textos incluidos en este estudio son: (Purcell & Varberg, 2007), (Stein, 1995), (Edwards & D, 2008), (Stewart, Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas, 2001),

(Stewart, 2006), (Apostol, 1996), (Bartle & Sherbert, 1996), (Larson, Hostetler, & Edwards, 2006), (Thomas, 2006).

- **El orden de las dos “partes” del TFC.** Al comienzo de la investigación, se había advertido acerca de las dos partes que presenta el TFC; una que se refiere a la derivación de una integral, y la otra, a la integración de una derivada. La mayoría de los textos se refieren a ellas como el primer TFC y el segundo TFC (el cual es nuestro objeto matemático a trabajar), a diferencia de (Bartle & Sherbert, 1996) y (Larson, Hostetler, & Edwards, 2006), quienes prefieren invertir los nombres. Explicitemos los teoremas y una sencilla demostración.

Primer TFC.

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x un punto (variable) en (a, b) . Entonces $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$.

Bosquejo de la demostración. Se muestran los elementos esenciales de la demostración, pues la demostración rigurosa es algo extensa y exige de las propiedades de comparación, acotamiento y linealidad, para integrales definidas.

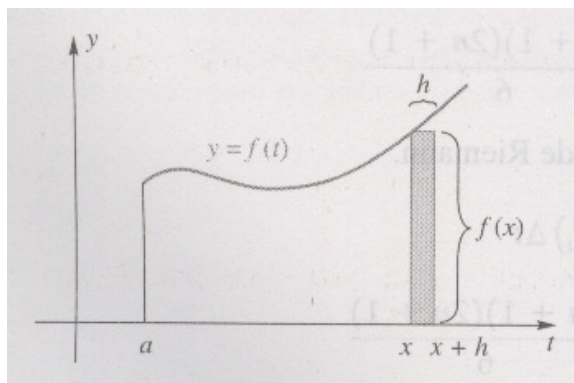


Figura 2.23 Gráfica para el bosquejo de la demostración del primer TFC.

Para x en $[a, b]$, se define $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ (función de acumulación). Entonces para x en (a, b) se cumple:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c)h}{h} \stackrel{\text{(T. del V.M.)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

(Téngase en cuenta que f es continua y $c \rightarrow x$ cuando $h \rightarrow 0$).

Segundo TFC (ó TFC).

Sea f continua (y por lo tanto integrable) en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea F cualquier antiderivada de f en el mismo intervalo. Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

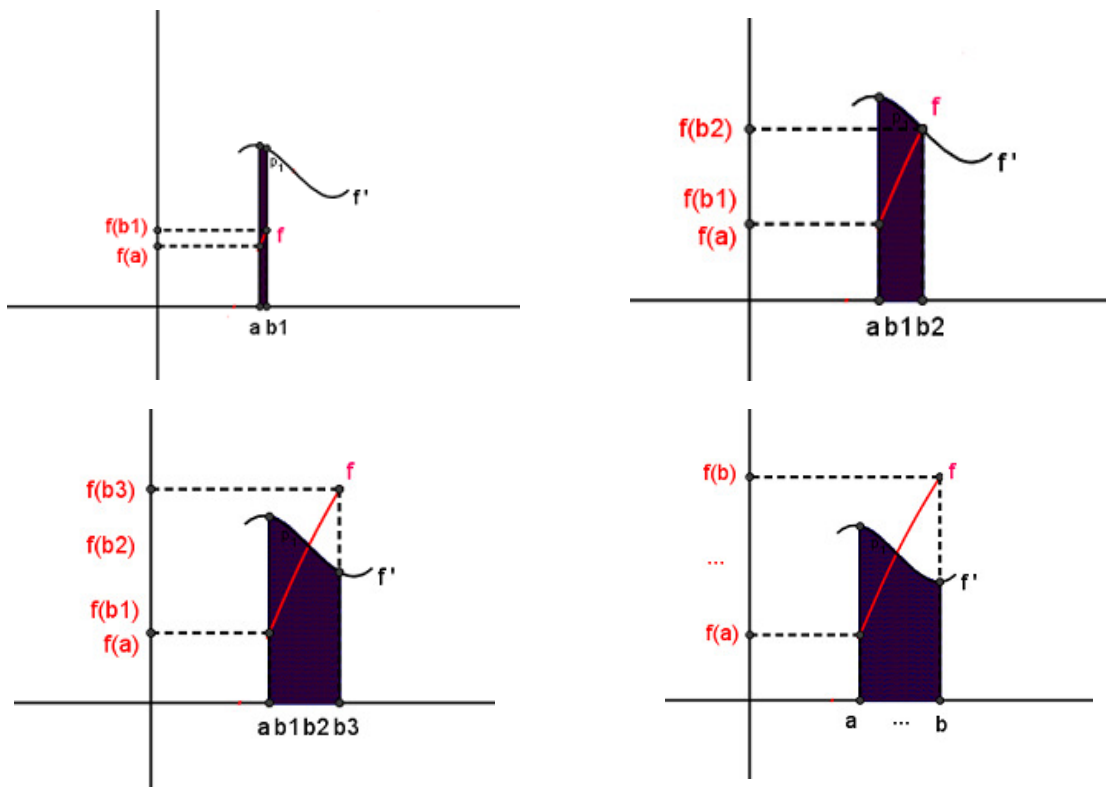


Figura 2.24 Gráfica que permite visualizar el valor del área bajo una función como la diferencia entre dos ordenadas en la respectiva entiderivada.

Demostración.

Se define la función de acumulación $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, luego, por el primer TFC, se cumple que $G'(x) = f(x)$, para toda x en (a,b) . De esta manera, G es una antiderivada de f , al igual que lo es F . Se concluye entonces que $F'(x) = G'(x)$ y por lo tanto, para toda x en (a,b) se cumple $F(x) = G(x) + C$.

Se puede establecer entonces que para alguna C se cumple en $x = a$ que $C = F(a) - G(a) = F(a) - \int_a^a f(t)dt = F(a) - 0 = F(a)$ y de esta manera, $G(x) = F(x) - G(a)$ para toda x en (a,b) ; a la vez que, si $x = b$, se tiene que $F(b) - F(a) = [G(b) + C] - F(a) = [G(b) + C] - C = G(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Esta presentación hace que la demostración del segundo TFC sea más elemental, pues hace uso de la primera parte; sin embargo, al intercambiar el orden en la presentación de las dos partes, tal como lo hacen Bartle y Larson, se hace necesario recurrir a las sumas telescópicas y al Teorema de Valor Medio²⁴ para la demostración de la primera parte, y luego, al T.V.M. para integrales para la demostración de la segunda; por supuesto, siendo también la última demostración más sencilla.

- **La presentación del Teorema del “cambio total”.** Algunos autores como Stewart, prefieren presentar previamente el segundo TFC como Teorema de Evaluación²⁵ y luego, con una diferencia un tanto sutil, presentan el llamado Teorema del “cambio total”, el cual muestra a $F'(x)$ en el integrando, en vez de $f(x)$, con el fin de enfatizar que la derivada $F'(x)$ es la razón de cambio de $y = F(x)$ con respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio (total) cuando x cambia de a hacia b . Al respecto, escribe (Stewart, 2006):

Advierta que y podría, por ejemplo, incrementarse y luego decrecer de nuevo. Si bien y podría cambiar en ambas direcciones, $F(b) - F(a)$ representa el cambio total en y .

Por último Stewart ofrece algunos ejemplos tales como: *el cambio total de volúmenes en depósitos de fluidos, velocidades de reacción, tasas de crecimiento poblacional, costos, entre otros.*

²⁴ Abreviamos como T.V.M.

²⁵ Se pretende calcular tempranamente integrales definidas y recurrir a series telescópicas y al T.V.M. para su demostración.

Teorema del cambio total.

La integral de una razón de cambio es el cambio total

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **La presentación rigurosa y simbolismo complejo.** En textos como el de Apostol, el TFC es presentado para integrales de Riemann-Stieljes sin ningún gráfico, con el fin de extender la teoría a funciones que no necesariamente son continuas. Por lo tanto, esta visión formalista requiere de definiciones, teoremas y simbolismo algo complejos que no son convenientes de abordar para alguien que se inicia en la comprensión del TFC. Primer y segundo T.V.M, supremos, ínfimos, acotamiento y funciones de variación acotada, son algunos de los términos que se introducen en este tratamiento. Veamos la presentación de las dos versiones del Teorema en este contexto (Apostol, 1996).

Primer TFC.

Sea α una función de variación acotada en $[a,b]$ y supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$. Definimos F por medio de la ecuación $F(x) = \int_a^x f d\alpha$, si $x \in [a,b]$. Entonces se tiene:

- F es de variación acotada.
- En cada uno de los puntos en los que α es continua, F también lo es.
- Si $\alpha \nearrow$ en $[a,b]$, la derivada $F'(x)$ existe en cada punto x de (a,b) en que $\alpha'(x)$ exista y f sea continua. Para tales x se tiene:

$$F'(x) = f(x)\alpha'(x).$$

Segundo TFC.

Supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Sea g una función definida en $[a, b]$ tal que la derivada g' exista en (a, b) y cuyo valor sea $g'(x) = f(x)$ para cada x de (a, b) .

Supongamos además que, en los extremos, los valores $g(a+)$ y $g(b-)$ existen y satisfacen $g(a) - g(a+) = g(b) - g(b-)$.

Entonces se tiene que: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$.

En el desarrollo y demostraciones de estas dos versiones, se aprecia que la regla de la cadena está hecha explícita.

Si bien, el objetivo de nuestro estudio no es realizar un desarrollo matemático del TFC, sí se pretende poner en contexto los conceptos matemáticos y procesos de razonamiento infinito que en él intervienen.

2.4 Tratamiento didáctico para el TFC

Para el segundo TFC, se destacan dos visualizaciones interesantes, que podrían dar ideas importantes para su comprensión:

- **La estrategia de los zooms**²⁶. (Larson, Hostetler, & Edwards, 2006) trata de hacer una analogía, evidenciando como la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación (para diferenciales). Al respecto, exhibe una Figura bien interesante para la enseñanza del TFC y señala:

²⁶ Término acuñado por el autor de la presente investigación.

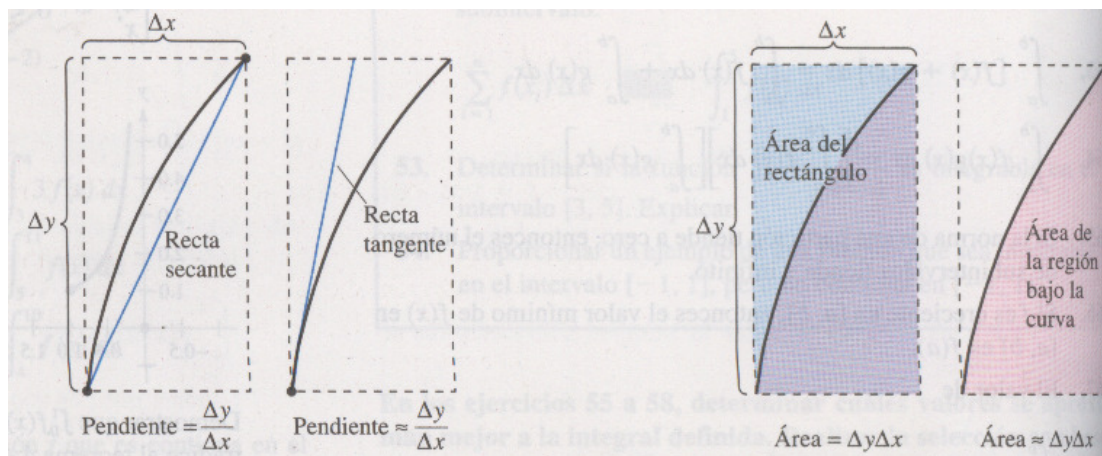


Figura 2.25 La estrategia de los zooms para pendientes y áreas.

Para saber cómo Newton y Leibniz habrían pronosticado esta relación, se consideran las aproximaciones que se muestran en la Figura. La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (la pendiente de la secante). De manera similar, el área de la región bajo una curva se definió utilizando el producto $\Delta y \Delta x$ (el área del rectángulo). De tal modo, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que lo son las operaciones inversas de división y multiplicación. El TFC establece que los procesos de límite (utilizados para definir la derivada y la integral) preservan esta relación inversa.

Aclarando que la visualización matemática es importante, pero usada con cuidado de no generar conceptos-imagen erróneos que impidan un correcto concepto-definición (en términos de Tall y Vinner), se hace necesario precisar el cuidado que se debe tener con esta visualización, para no caer en el error de confundir procesos aritméticos con procesos de razonamiento infinito (los cuales tienen que ver con el paso al límite) que intervienen en el TFC.

- **El doble plano de Barrow²⁷**. Es una estrategia visual-geométrica inspirada en los trabajos geométricos de Barrow para el TFC, la cual

²⁷ Término acuñado también por el autor de la presente investigación e inspirado en los trabajos geométricos de Barrow sobre el TFC.

consiste en un *doble semiplano cartesiano simétrico*, esto es, dos semiplanos cartesianos con un eje x común y, encima y debajo de éste, dos semi-ejes y positivos con un mismo origen; lo cual implica que ambos semi-ejes quedan sobre una misma recta y sólo contengan a los cuadrantes I y II.

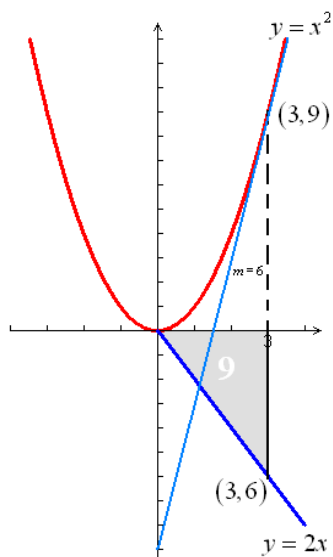


Figura 2.26 El doble plano de Barrow

En el semiplano superior se grafican las funciones y en el semiplano inferior se grafican las respectivas derivadas.

Esta visualización exige el empleo de figuras simétricas con respecto a un eje (para graficar las derivadas en el semiplano inferior), sin embargo, facilita observar la relación entre las pendientes en la función y las ordenadas en la derivada, al igual que el área bajo la derivada y las ordenadas en la función (El TFC).

La visualización está restringida inicialmente sólo para funciones positivas, dada la naturaleza de la construcción inicial expuesta por el ingenioso Isaac Barrow.

- **El Teorema de la brocha**²⁸. Aunque se insiste, el primer TFC no es nuestro tema de interés, igualmente se destaca el “Teorema de la brocha” como una estrategia visual-geométrica que permite establecer la relación que puede existir entre un área barrida y una longitud (valor

²⁸ También es llamado el teorema de la “brocha retráctil” o del “rodillo”

de la función). Los textos que exponen esta estrategia son los de (Purcell & Varberg, 2007), (Stein, 1995) y (Edwards & D, 2008).

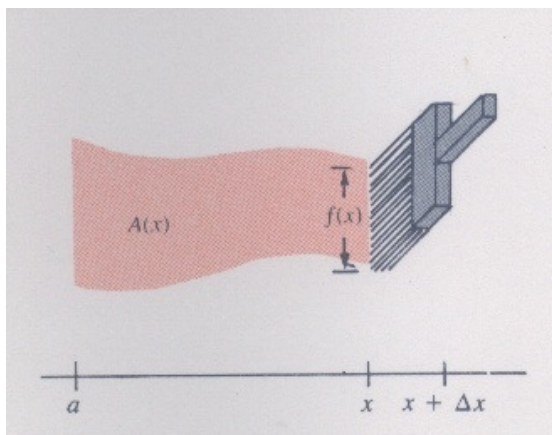


Figura 2.27 El Teorema de la brocha para el primer TFC.

Al respecto, Stein señala:

El primer TFC debe tener sentido para cualquiera que haya pintado una pared con una brocha. Cuanto más ancha sea la brocha, mayor es la longitud del área que se puede cubrir. Supóngase que la brocha se mantiene como se muestra en la Figura y que se desplaza una distancia Δx . El área barrida es aproximadamente “el ancho de la brocha por Δx ”. Sea $f(x)$ el ancho de la brocha (a medida que se presiona la brocha, $f(x)$ puede aumentar). Luego, $\Delta A \approx f(x)\Delta x$, o bien, $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$. Y si $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene $\frac{dA(x)}{dx} = f(x)$.

Puesto que $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, se tiene $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$, que es el Primer TFC (Judith Grabiner llama a esto el “Teorema del Limpiaparabrisas”).

3 LA ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL TFC EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE PK

Ya en el Capítulo 1 se ha descrito en detalle algunos aspectos a tener en cuenta para la aplicación de una entrevista de carácter socrático, el decálogo para su diseño y la justificación acerca de su pertinencia con la teoría de PK. En el contexto del presente estudio, la entrevista tiene una doble intención, de un lado, que el maestro reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza del mismo, de tal forma que se genere la necesidad de diseñar una red de relaciones para propiciar el acercamiento del estudiante al concepto; de otro, que le permita al entrevistado progresar en la comprensión sobre el concepto elegido.

La red de relaciones interviene durante toda la entrevista y el estudiante entrevistado razona sobre ella y la amplía, pero el refinamiento y evolución de su comprensión depende en gran medida del manejo adecuado por parte del entrevistador durante su aplicación, es decir, la entrevista debe estar diseñada de tal forma que no se produzca una enseñanza directa, sino más bien, una enseñanza gradual que permita que los estudiantes pasen de las situaciones concretas a las abstractas y viceversa, para así conseguir el nivel de comprensión deseado.

La entrevista socrática que se ha diseñado en este estudio, permite la detección de los niveles de comprensión, en el contexto de la teoría de PK y constituye una experiencia pedagógica para la comprensión de la *relación inversa entre cuadraturas y tangentes*.

Se describe a continuación cómo se logra consolidar el guión de entrevista socrática para la comprensión del TFC, la inclusión del Geogebra® en la

entrevista, una caracterización general y finalmente, los descriptores hipotéticos para los cuatro primeros niveles de la teoría de PK.

3.1 Consolidación del guión entrevista

El trabajo de campo se realizó en tres fases, cada una con una versión distinta pero mejorada del guión entrevista, de acuerdo a su refinamiento; inicialmente se aplica a 5 entrevistados, tres de los cuales son estudiantes de grado 11° de una institución educativa de la ciudad de Medellín de carácter oficial, y los otros dos, estudiantes de Ingeniería de la universidad de Antioquia, también de carácter oficial. Se diseñan descriptores hipotéticos, de acuerdo a la experiencia del investigador para los primeros seis niveles en el marco de la teoría de PK.

En la fase inicial del trabajo y de acuerdo con los descriptores hipotéticos que se tenían hasta el momento, se diseña y aplica la primera versión del guión entrevista, que contenía veintiocho preguntas que se encontraban agrupadas en tres bloques plenamente diferenciados, pero que no necesariamente estaban presentadas en forma consecutiva. En el primer bloque de preguntas se indagó por algunos conceptos geométricos como son los de pendiente, recta, y área de figuras geométricas básicas; en el segundo, se propone que el entrevistado bosqueje funciones, dado el comportamiento de su respectiva derivada o su respectiva anti-derivada²⁹ haciendo uso de procesos de razonamiento infinito, y en el tercero, se intenta que el entrevistado establezca la relación entre las ordenadas en la función y el área bajo la respectiva derivada.

Algunas dificultades presentadas en esta primera versión del guión dan cuenta de la poca fluidez que se logra conseguir en el intercambio de preguntas y respuestas: la entrevista no indaga por los valores de las pendientes negativas, lo que dificulta en el bloque 2, que el entrevistado bosqueje las respectivas derivadas de funciones en los intervalos que decrece; se usan términos como los de tasa de variación, abscisa, ordenada, entre otros, que no resultan muy familiares; se observan algunas preguntas muy cerradas que impiden que el entrevistado razone con más naturalidad y, por último, no se tienen en cuenta suficientes preguntas que involucren los procesos de razonamiento infinito necesarios para entender las ideas de

²⁹ Los términos de derivada y anti-derivada no se utilizan en forma explícita en la entrevista, dado que no es necesario que los entrevistados hayan pasado por cursos de Cálculo Diferencial o integral. Los términos, por el contrario, aparecen en forma encubierta, con el fin de dar mayor confianza al entrevistado.

cuadratura y tangente. En esta se fase, cuatro estudiantes logran un nivel 1 de comprensión y tan sólo uno logra un nivel 2, de acuerdo a la teoría de PK.

En la segunda fase, se modifican los descriptores para ser agrupados en cuatro grupos que corresponden a los primeros cuatro niveles de comprensión de la teoría de PK, pues el objetivo de nuestro estudio es favorecer el avance en la comprensión del TFC desde un punto de vista visual-geométrico, mediante la implementación y diseño de la entrevista de carácter socrático, mas no conseguir la comprensión formal del TFC en el contexto de las funciones de variable acotada o del concepto de vecindad. En este orden de ideas, fue necesario diseñar una segunda versión del guión entrevista, ajustando algunas preguntas que indaguen por las pendientes negativas de rectas que pasan por el segundo cuadrante, y de cómo varían tales pendientes a medida que las rectas se acercan al eje x ; se provee también al entrevistado de aporte de información adicional que le permita avanzar en la entrevista y propiciar el refinamiento de su lenguaje y, por último, agregar unas cuantas preguntas, que faciliten que el entrevistado razone con mayor profundidad en los procesos de razonamiento infinito involucrados en la visualización del cálculo de pendientes de tangentes y áreas bajo curvas en un intervalo.

En esta segunda fase, se aplica la versión dos del guión a otros cinco entrevistados: dos estudiantes de grado 11° y tres de carreras de Ingeniería, también de las instituciones descritas anteriormente. Durante las entrevistas se percibe una mayor fluidez entre entrevistado y entrevistador, además de que el razonamiento y la amplitud en las respuestas de los estudiantes mejoró notablemente. Tres estudiantes logran razonar en un nivel de comprensión 2, uno de ellos en un nivel de comprensión 3 y el último en un nivel de comprensión 4, de acuerdo a los descriptores establecidos. Sin embargo, resulta conveniente mejorar las últimas preguntas y adicionar otras cuantas, con las que se pretende que el entrevistado establezca la relación entre el área bajo una curva en un intervalo y la diferencia de ordenadas de la anti-derivada en el mismo intervalo, en primer lugar con funciones lineales, luego con cuadráticas y por último con otras más complejas como las trigonométricas.

De esta manera, se logra consolidar el guión entrevista definitivo, de carácter semi-estructurado, para realizar el estudio cualitativo sobre la comprensión del TFC en diez estudiantes, entre universitarios y de grado 11°, mejorando la descripción de la comprensión y consiguiendo el objetivo del presente estudio. Sobre este análisis volveremos más adelante.

3.2 El guión entrevista

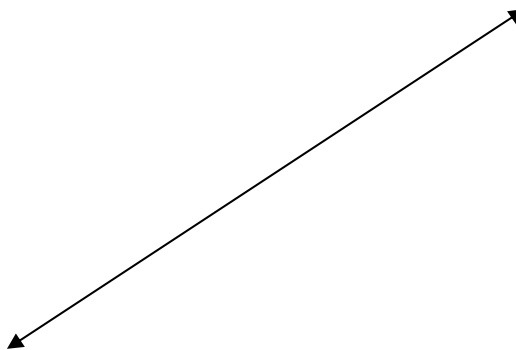
Se ha mencionado que la entrevista está concebida como una red de relaciones, permitiendo que detrás de cada pregunta se esconda una intencionalidad que sólo el entrevistador conoce y, que a medida que se avanza en su aplicación, el entrevistado entreteja, relacione, razone, reflexione e infiera, a partir de dicha red. En este estudio, la red de relaciones sobre la que el entrevistado razonará serán los procesos de razonamiento infinito involucrado en los conceptos de tangentes y cuadraturas que enmarcan el TFC. En esta red intervienen conceptos tales como los de pendiente, área, tangente, función-pendiente y ordenada.

Es importante resaltar que para el diseño de esta entrevista, muchos de los conceptos que gravitan alrededor del TFC están implícitos o encubiertos. Se espera que el entrevistado, en la medida que avanza en el diálogo, los relacione de forma intuitiva y espontánea para lograr describir de manera fiel los razonamientos, que permitan establecer la evolución en la comprensión de los entrevistados.

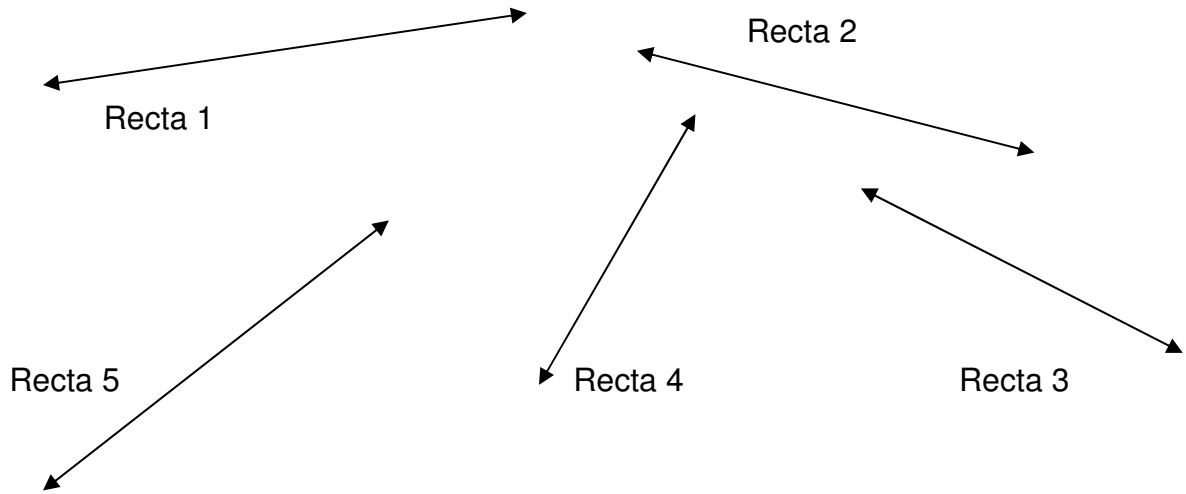
A continuación, se presenta el guión entrevista:

GUIÓN DE ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA LA RELACIÓN INVERSA ENTRE CUADRATURAS Y TANGENTES

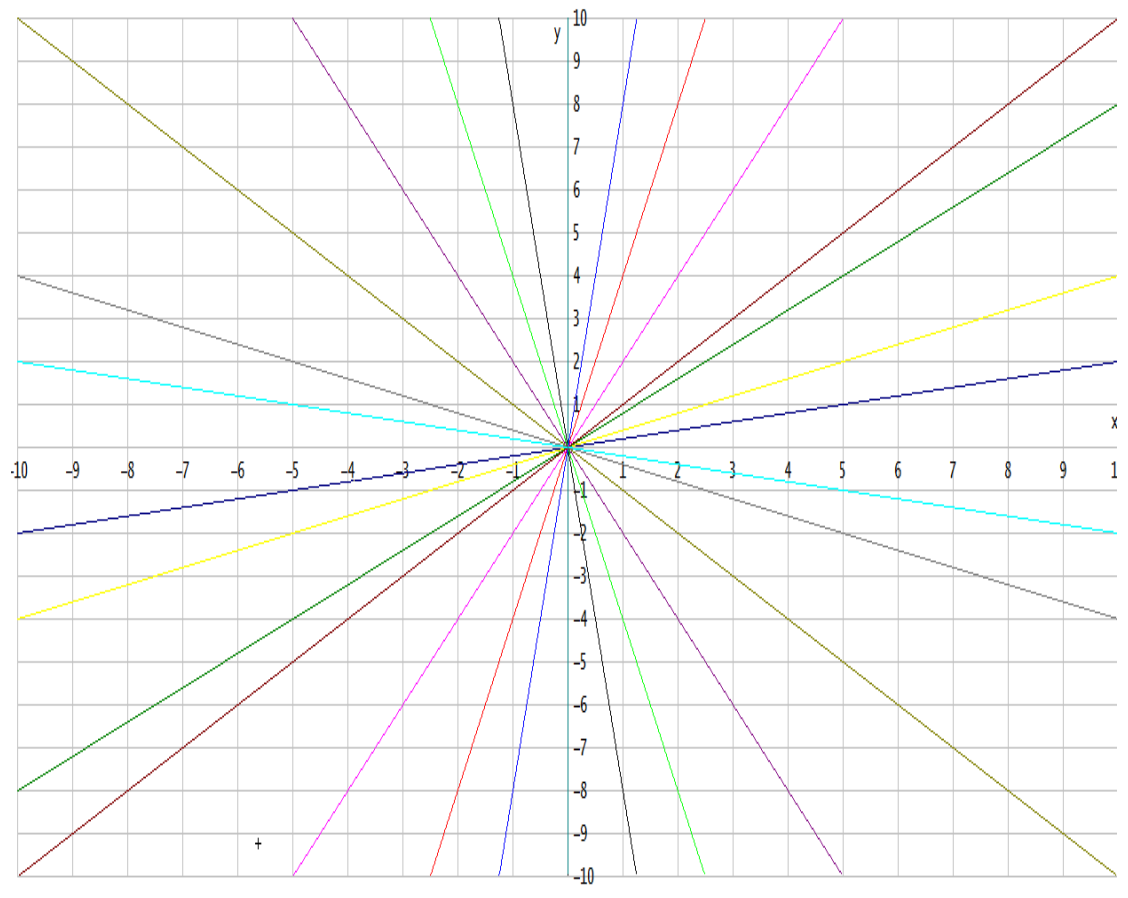
1. Considera la recta que se muestra a continuación. ¿Crees que tiene longitud?, ¿crees que tiene pendiente?, en caso afirmativo, ¿podrías describir un método para calcular sus medidas?



2. En la siguiente ilustración se muestra una secuencia de rectas. ¿Cuál de ellas crees que tiene la mayor pendiente y cuál la menor pendiente?, ¿podrías calcular exactamente la pendiente de cada una de ellas?

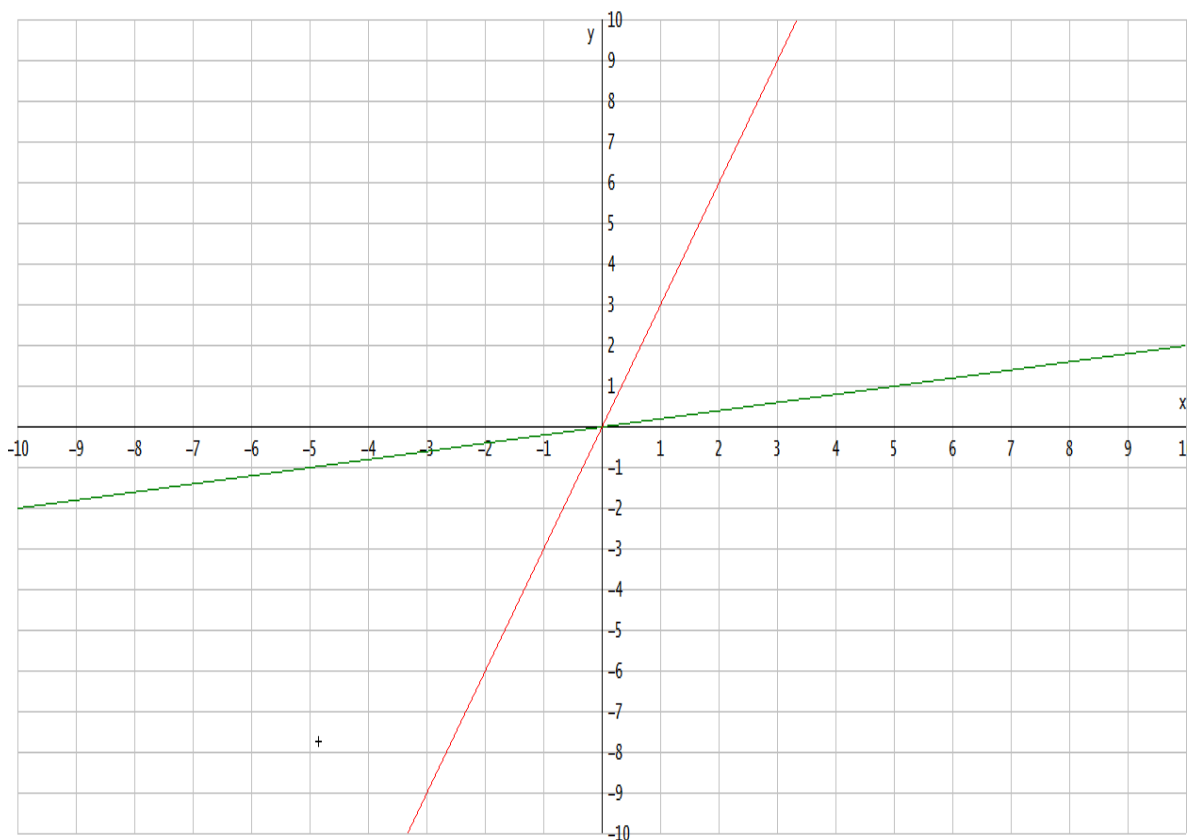


3. ¿Podrías describir las pendientes de las rectas que se presentan en el plano cartesiano que se muestra a continuación?, ¿podrías calcularlas?

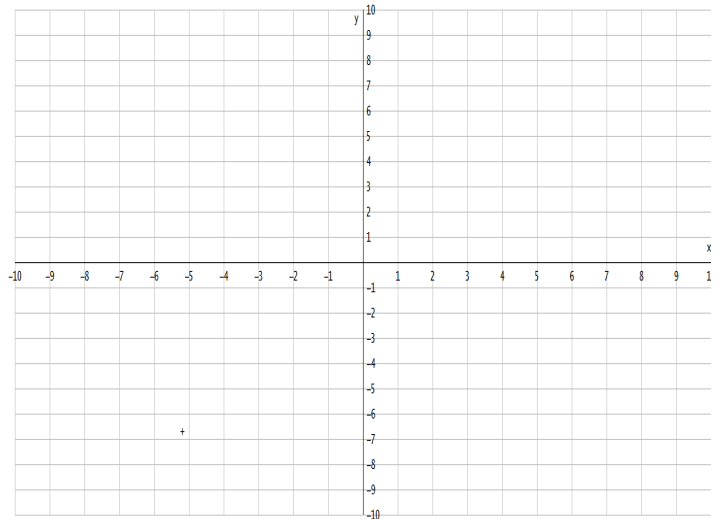
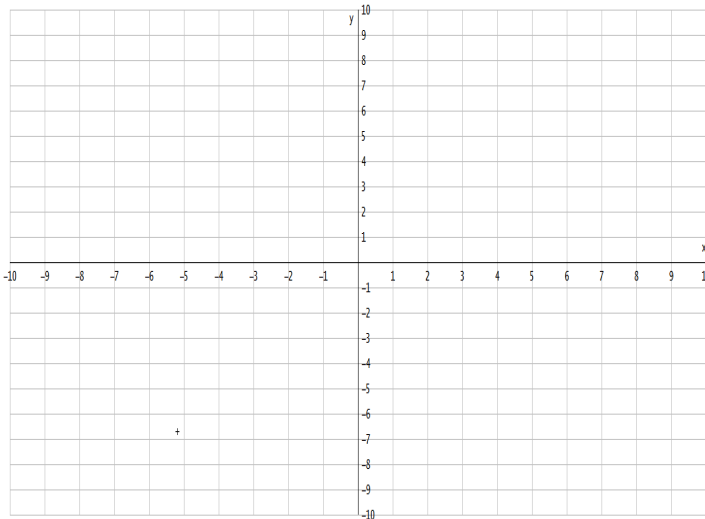
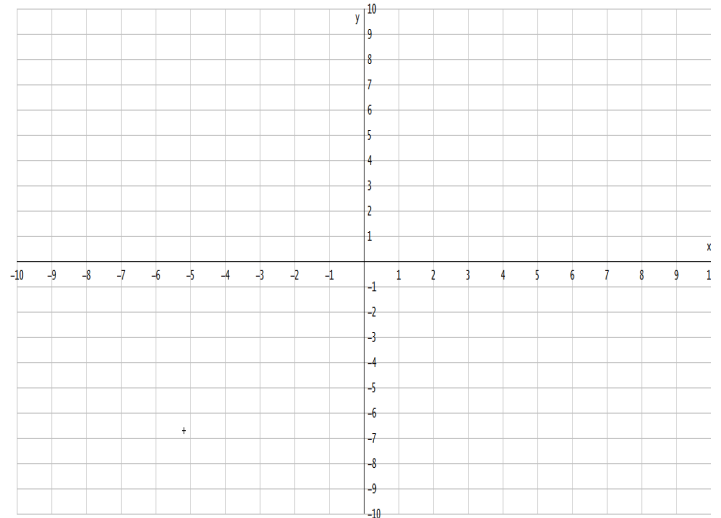
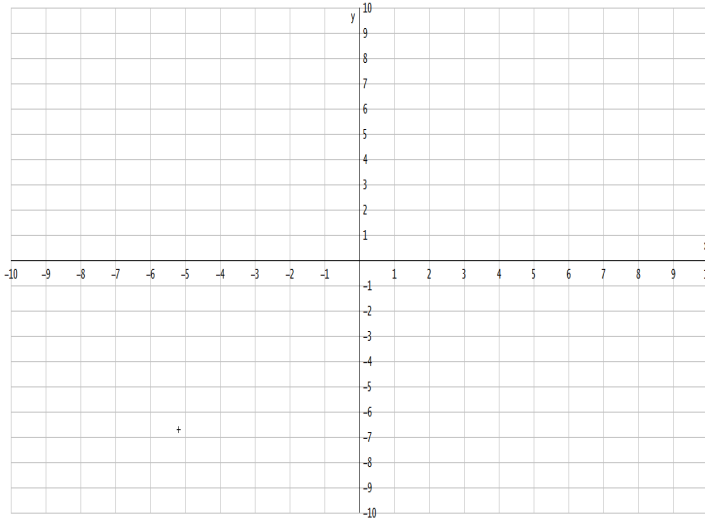


Aporte de información: Observa que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=0$ y $y=x$ varían entre 0 y 1, mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=x$ y $x=0$ varían entre 1 e ∞ . De la misma manera, los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=-x$ y $y=0$ varían entre -1 y 0, mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $x=0$ y $y=-x$ varían entre $-\infty$ y -1 .

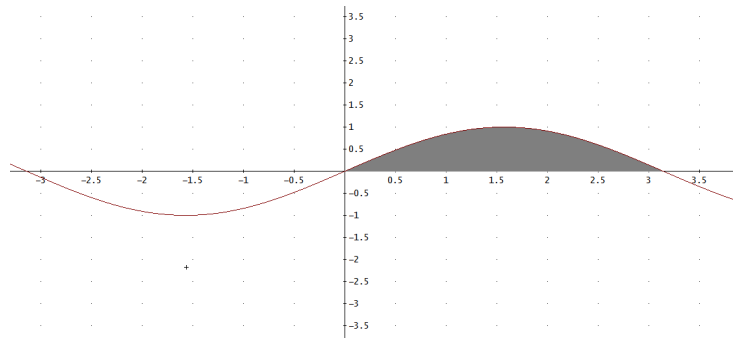
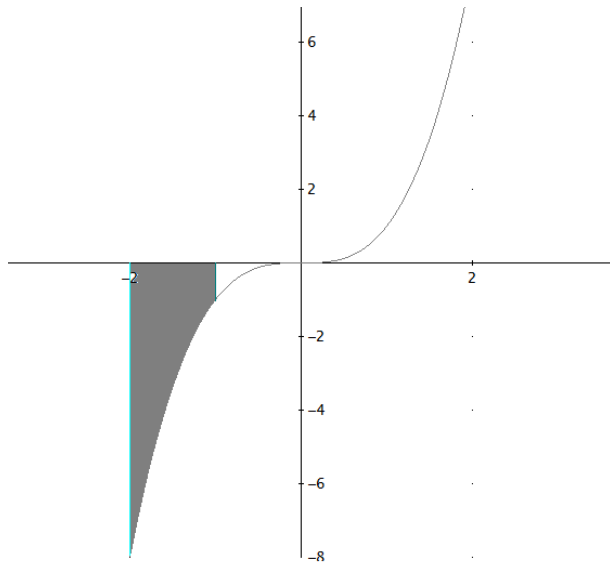
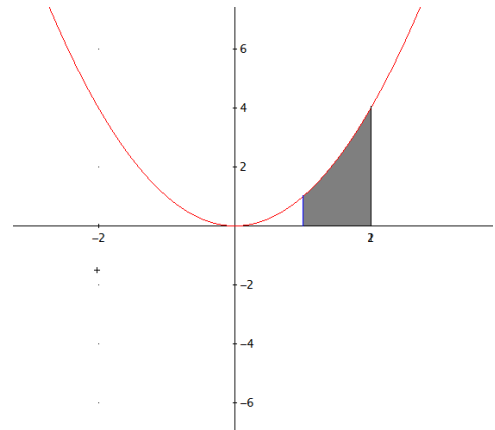
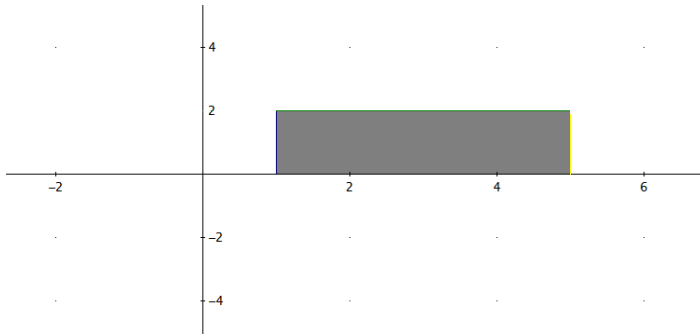
4. Dadas las dos rectas de diferente pendiente en el plano cartesiano, ¿cuántas rectas de pendientes distintas existen entre ellas?



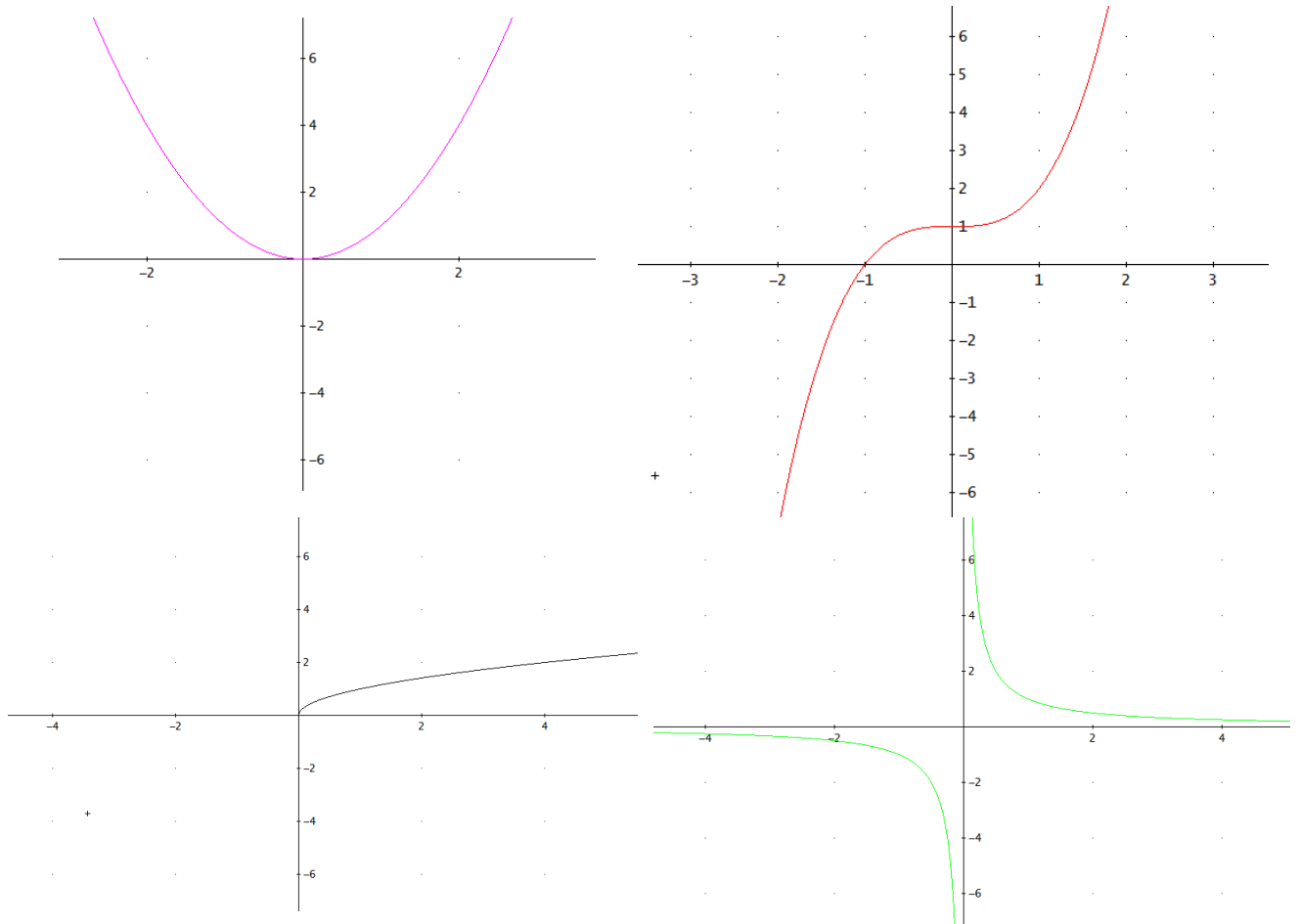
5. ¿Podrías bosquejar en cada uno de los planos cartesianos algunas funciones que conozcas, exhibiendo sus nombres y expresiones algebraicas?



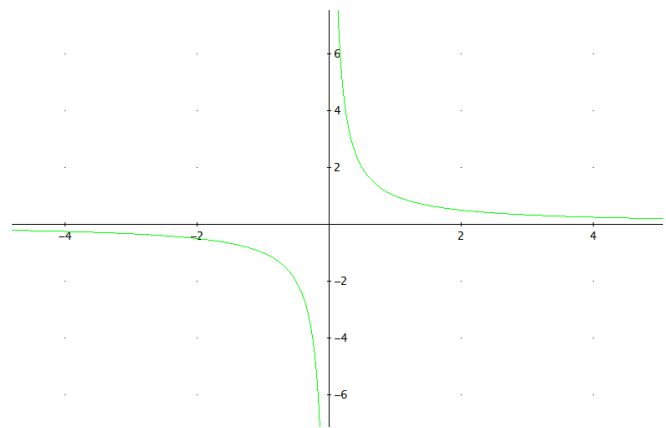
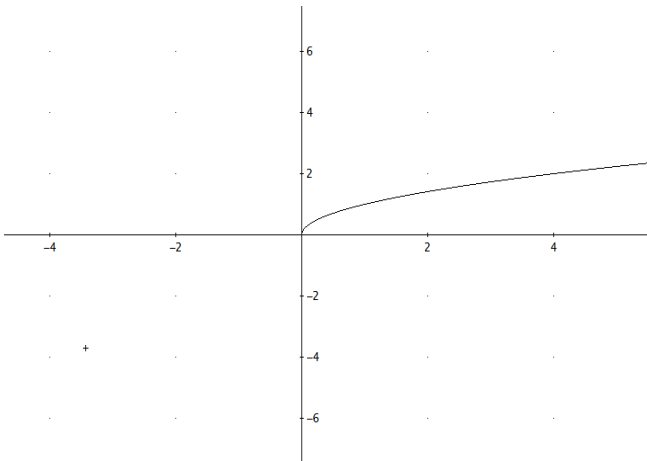
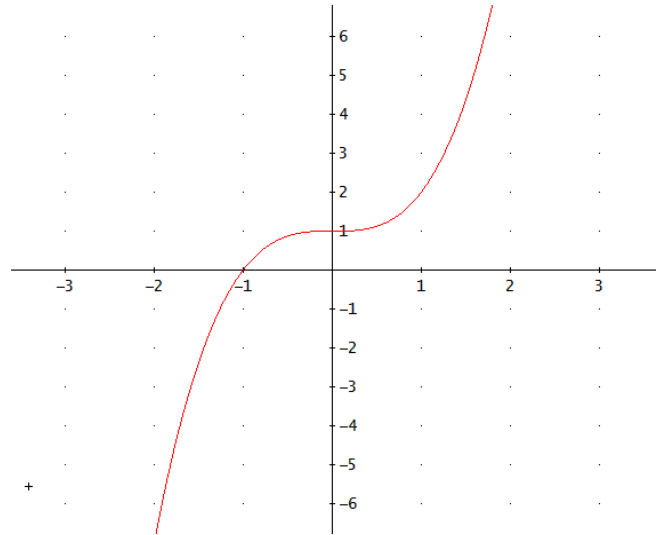
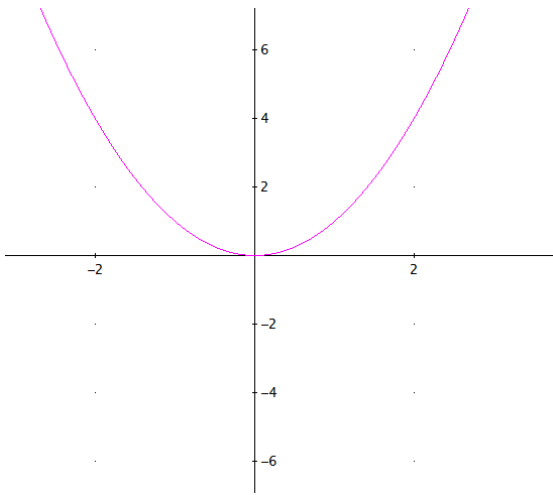
6. Ahora, ¿podrías describir todas las curvas que limitan cada una de las siguientes regiones sombreadas?



7. Describe los intervalos (en el eje x) en los que las siguientes funciones son positivas y en los que son negativas (en el eje y).

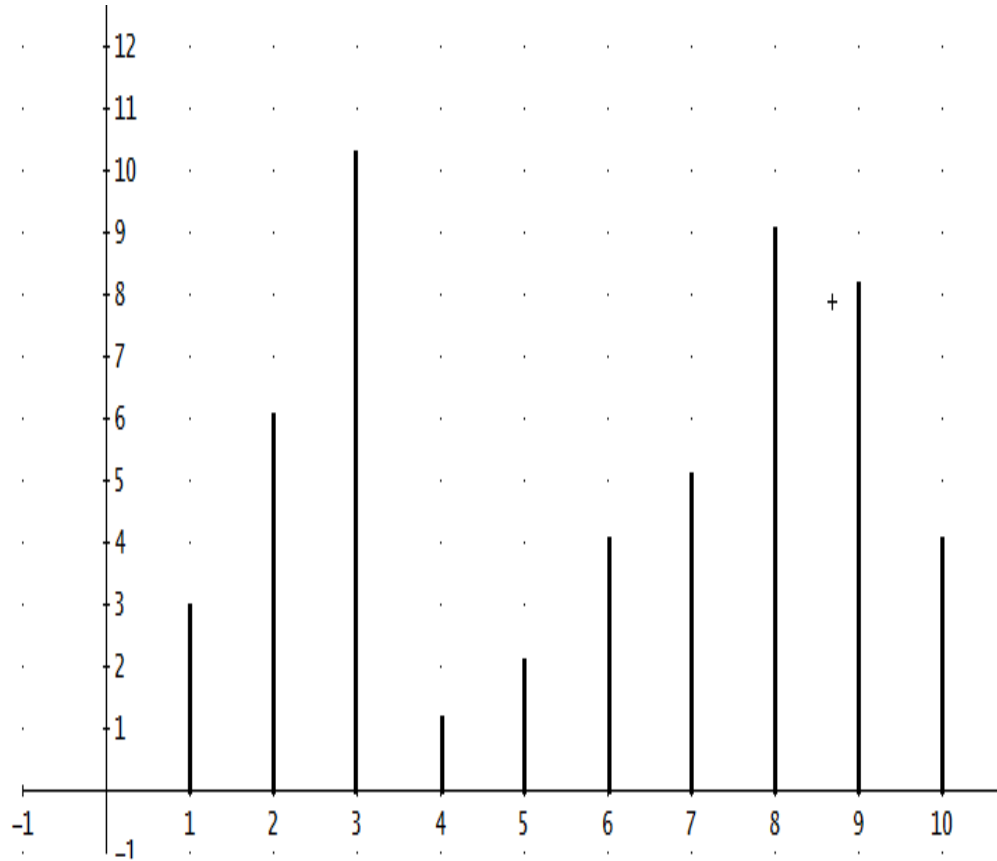


8. A continuación se presentan las mismas funciones de la pregunta anterior. Para cada una de ellas describe los intervalos (en el eje x) para los que la función es positiva o negativa. ¿Qué relación encuentras entre esos intervalos y aquellos en los que cada función crece o decrece?

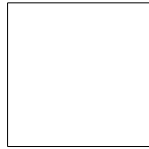


Aporte de información: Dado el punto (x, y) en el plano cartesiano, al valor de x se le llama **abscisa** y al valor de y **ordenada**.

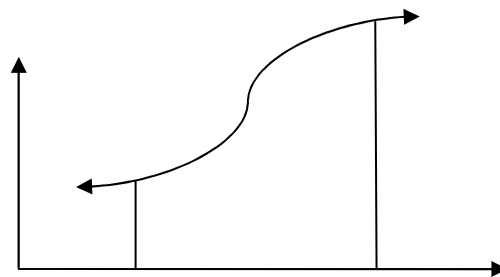
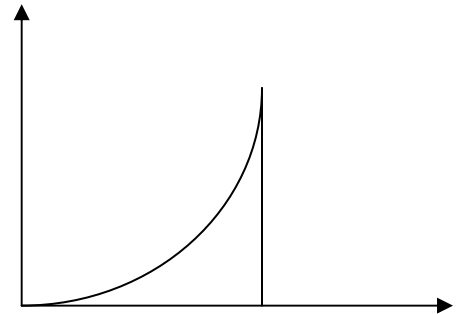
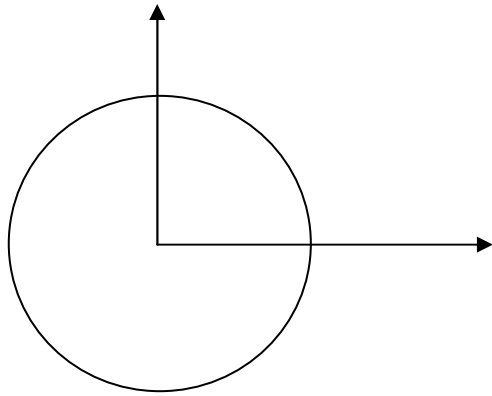
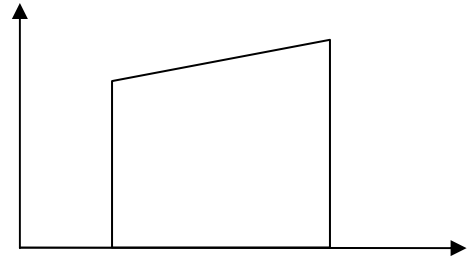
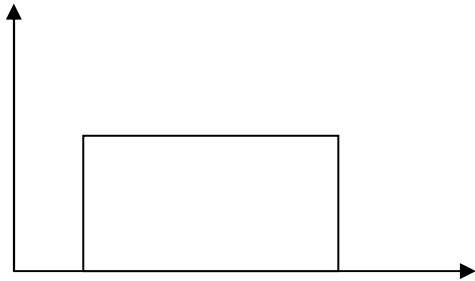
9. En el plano se muestran algunos segmentos verticales sobre el eje x . ¿Cuál es la diferencia de las ordenadas de los puntos superiores de dos segmentos cualesquiera?, ¿podrías encontrar otro par de segmentos, cuya diferencia de ordenadas sea igual en sus puntos superiores?



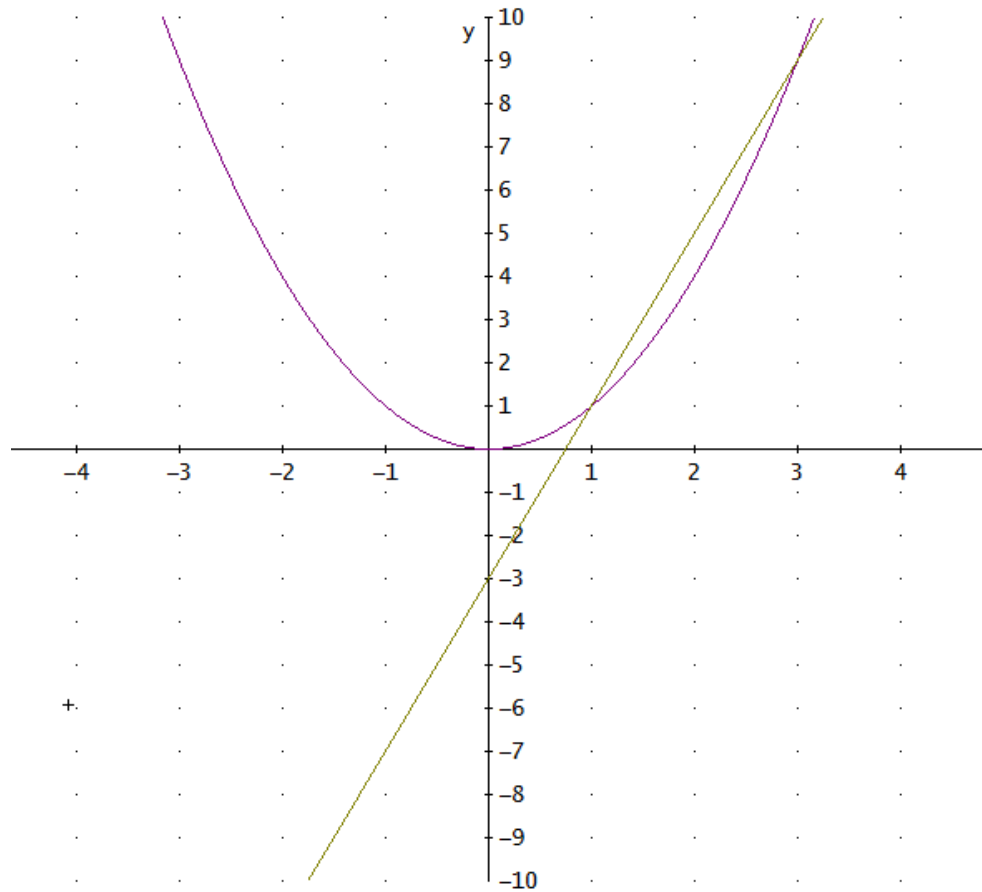
10. ¿Crees que las dos figuras que se muestran a continuación pueden tener la misma área?, ¿por qué?



11. Considera las siguientes regiones limitadas en el primer cuadrante del plano cartesiano, tal como lo muestra la figura. ¿Crees que se puede calcular el área de cada una de ellas?, en caso afirmativo, ¿cómo?

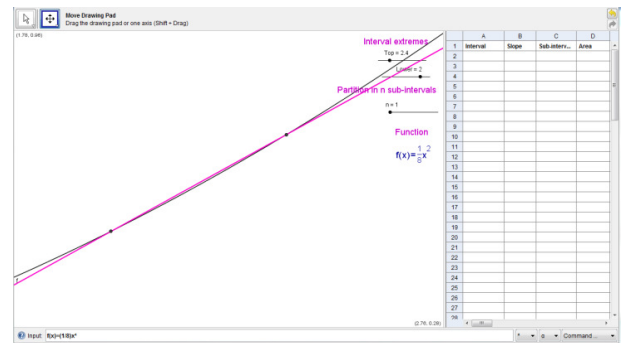
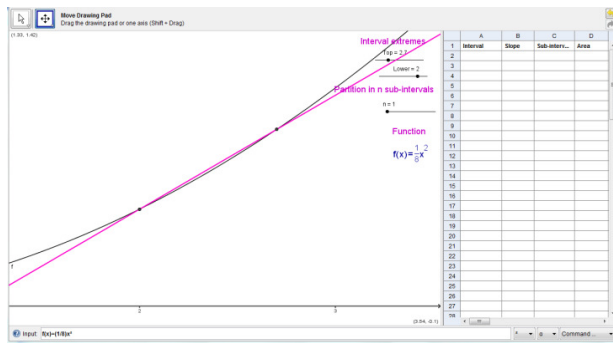
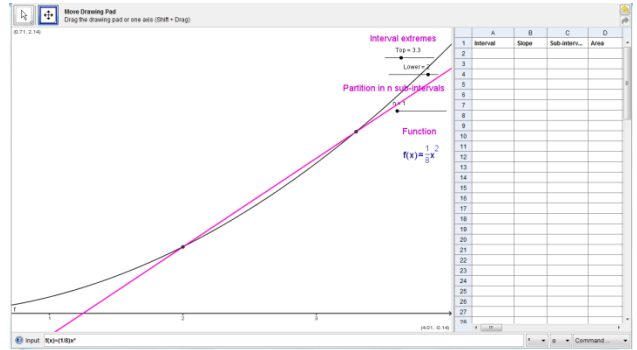
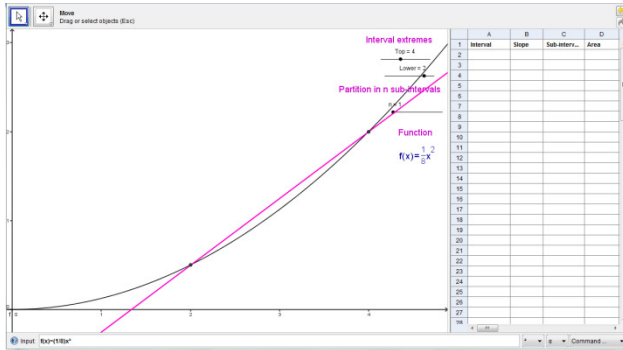


12. Considera la parábola $y = x^2$ y una recta que la corta en los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$. ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

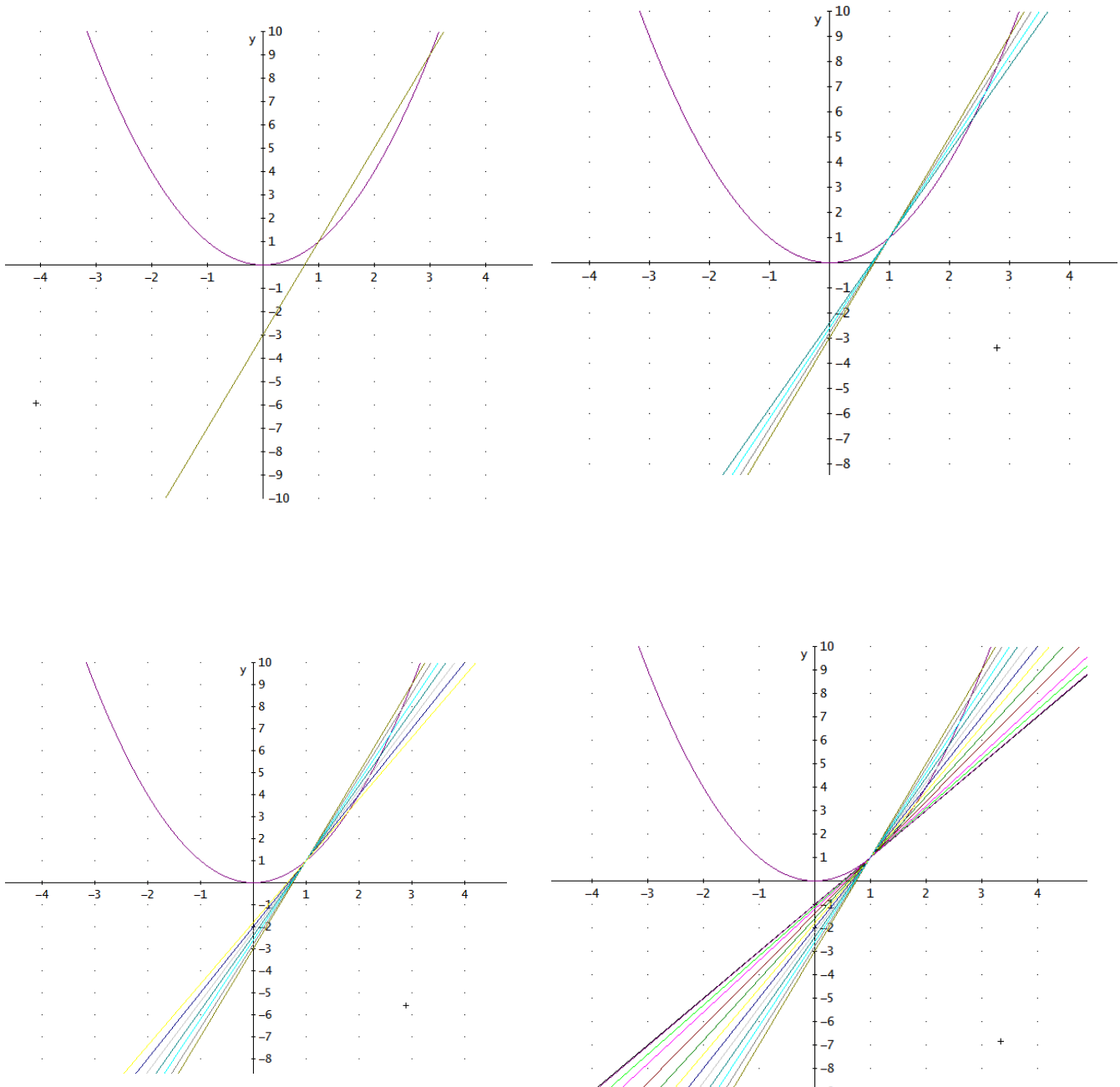


134 | 3 LA ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL TFC EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE PK
René Alejandro Londoño Cano

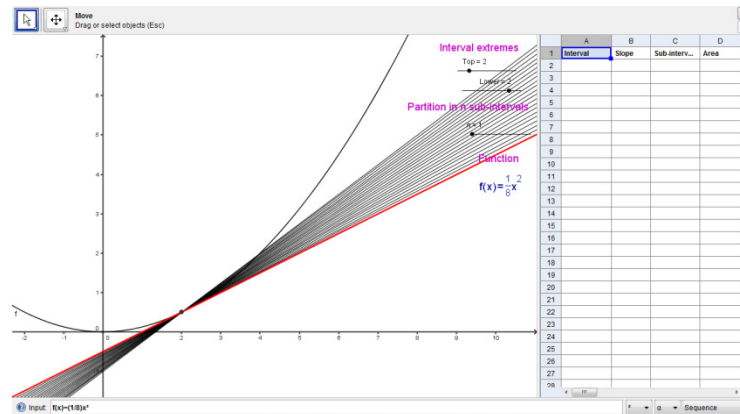
12H.(Maniupulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, con una secante que la corta en los puntos (2,4) y (4,16). Si haces zoom (acciona la barra de herramientas), ¿qué observas?



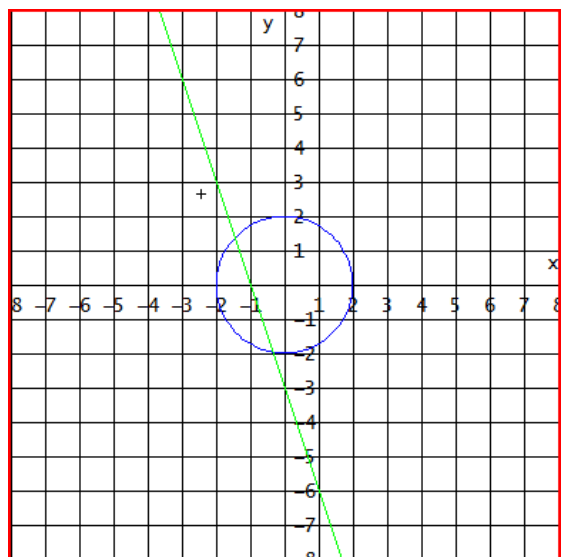
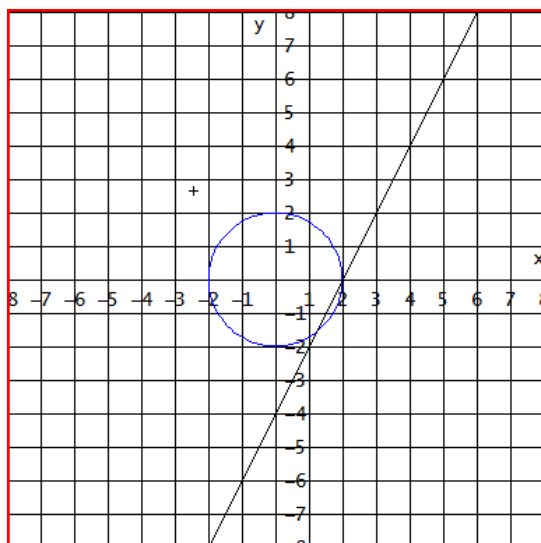
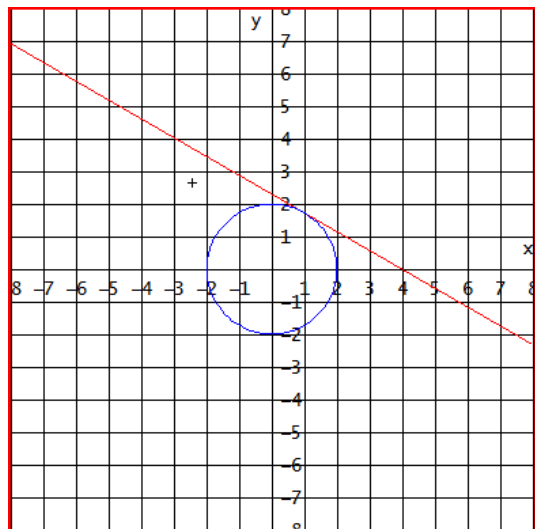
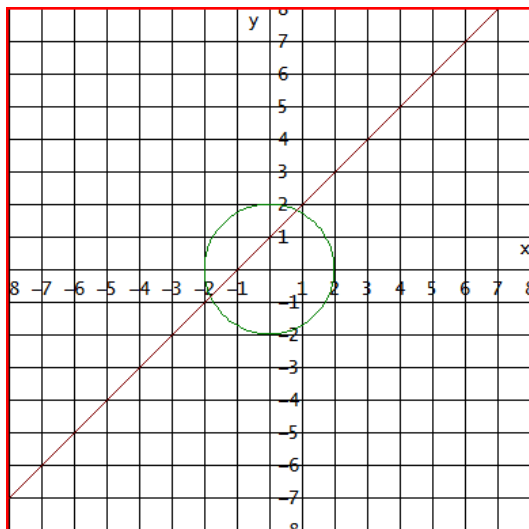
13. En la siguiente sucesión de imágenes se observa cada vez, un mayor número de rectas secantes que cortan a la curva $y = x^2$ en el punto (1,1) y otro punto cada vez más cercano a él. ¿Podrías describir el conjunto de secantes que se estabilizan en la recta que sólo corta a la curva en el punto (1,1)?, ¿podrías describir esta última recta?



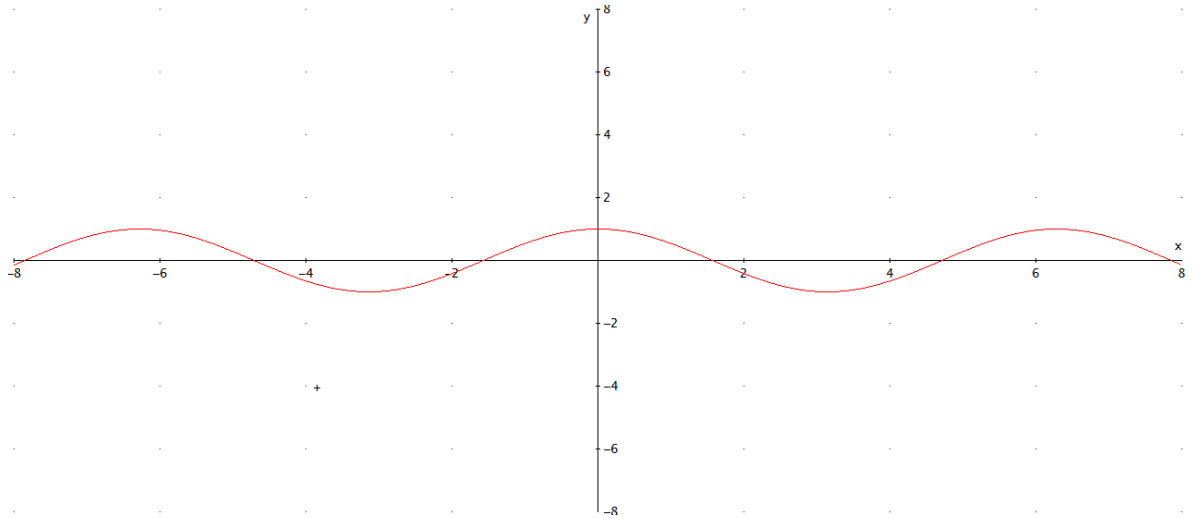
13H.(Manipulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, con una secante que la corta en los puntos (2,4) y (4,16). Usando el deslizador (se activa el deslizador *Top*) traza secantes de tal manera que la abscisa $x=4$ (punto móvil) coincida con la abscisa $x=2$. ¿Podrías describir el conjunto de secantes que se estabilizan en la recta que sólo corta a la curva en el punto (2,4)?, podrías describir esta última recta?



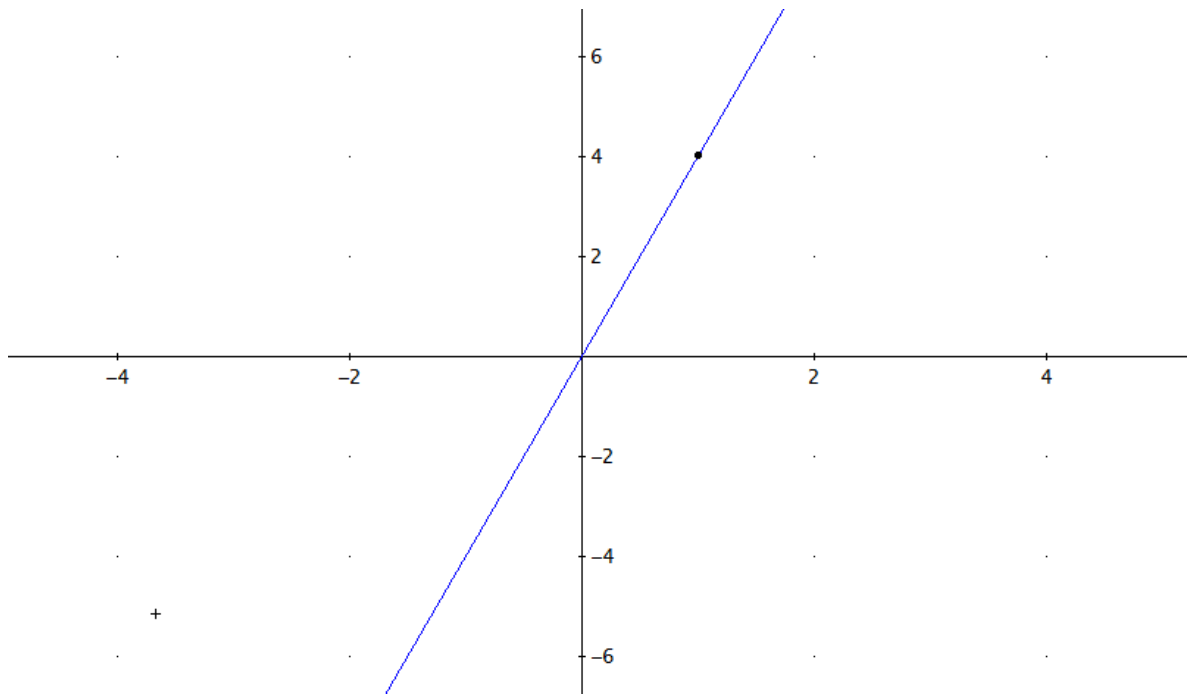
14. ¿En cuál de las siguientes gráficas se podría afirmar que la recta es tangente a la circunferencia?, ¿podrías decir con tus palabras lo que consideras el concepto de recta tangente a una circunferencia?



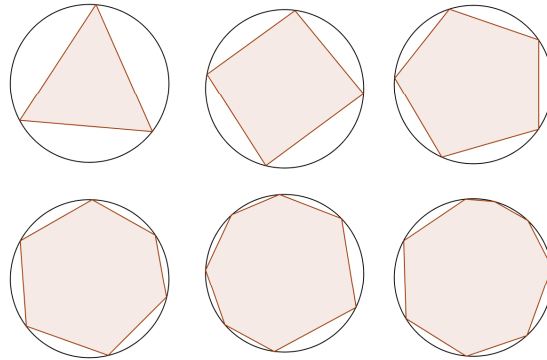
15. Ahora, considera la función $y = \cos x$. ¿Podrías describir las características de la recta tangente a la curva en el punto $(0,1)$? ¿qué diferencia tiene ésta con la de la circunferencia?



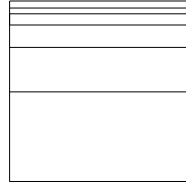
16. ¿Considera el punto que se encuentra marcado en la siguiente función lineal. ¿Podrías describir la recta tangente a la función en dicho punto?, ¿cuántos puntos tienen en común una función lineal y la recta tangente a ella en un punto?



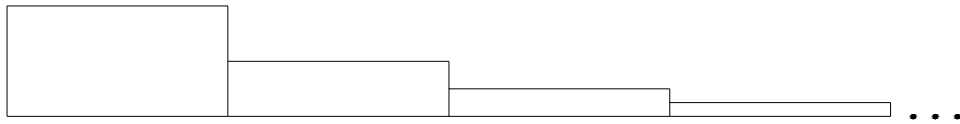
17. Considera ahora los polígonos inscritos que se presentan en las circunferencias iguales de la figura. Si el número de lados de los polígonos crece en forma infinita, ¿podrías afirmar a qué valor se acerca el área de los polígonos así construidos?



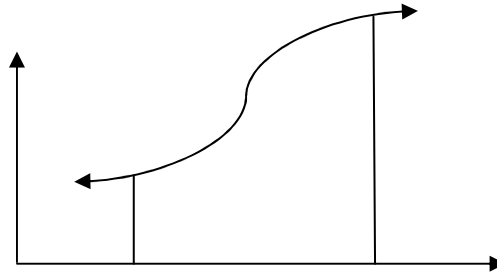
18. El siguiente rectángulo se ha dividido a la mitad; luego, la parte superior a la mitad; de nuevo, la parte superior a la mitad, y así sucesivamente como muestra la figura:



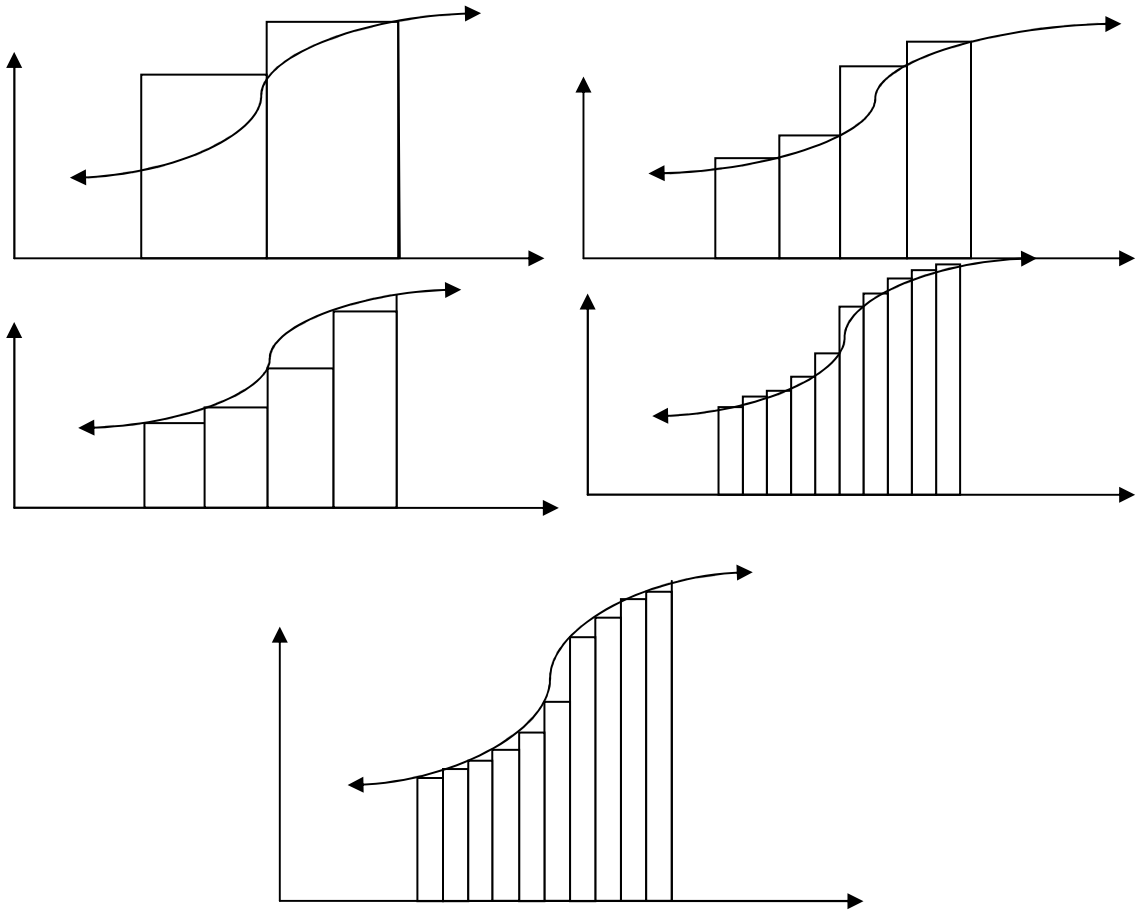
¿Crees que es posible disponer las superficies rectangulares en las que ha quedado dividido el anterior rectángulo como una escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior, como muestra la figura?, ¿Podría la escalera tener área?



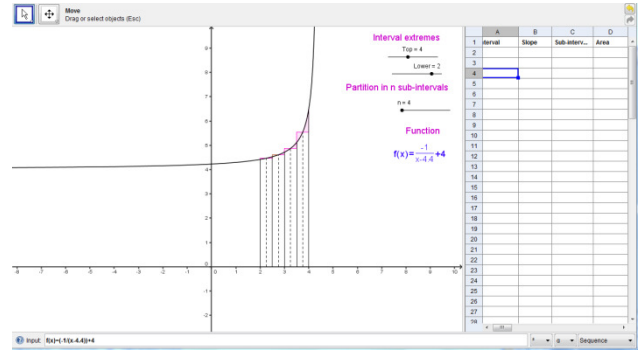
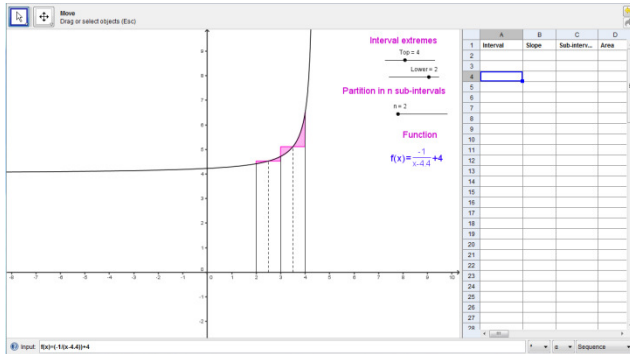
19. Considera de nuevo la siguiente región:



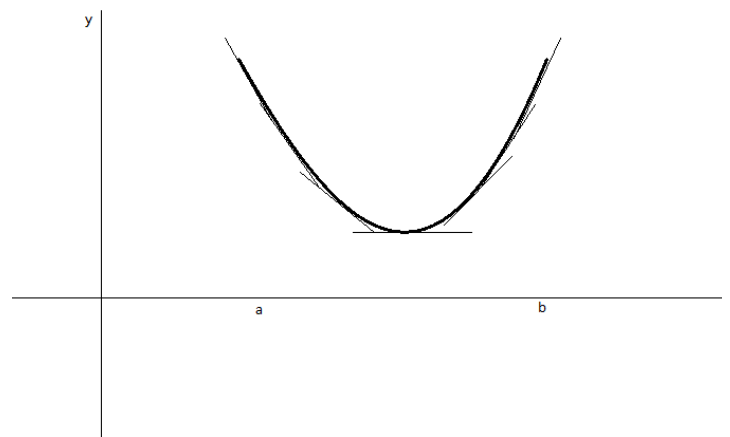
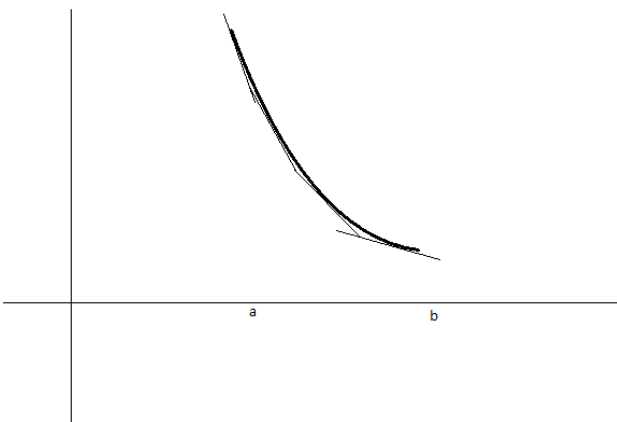
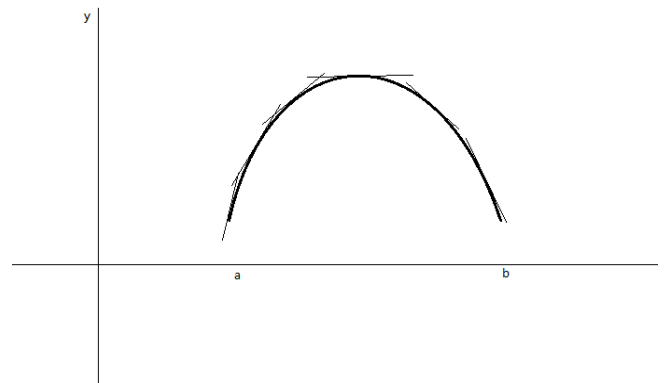
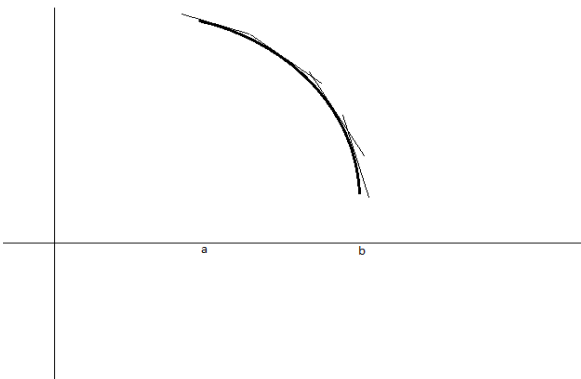
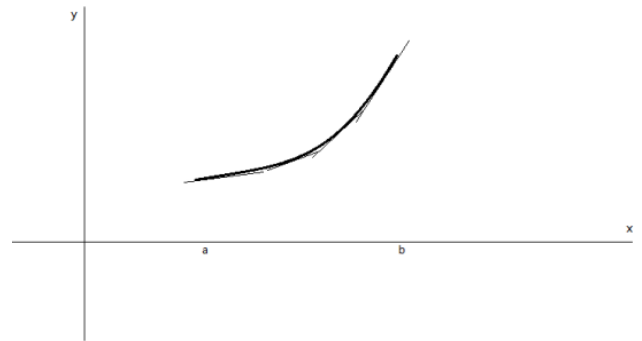
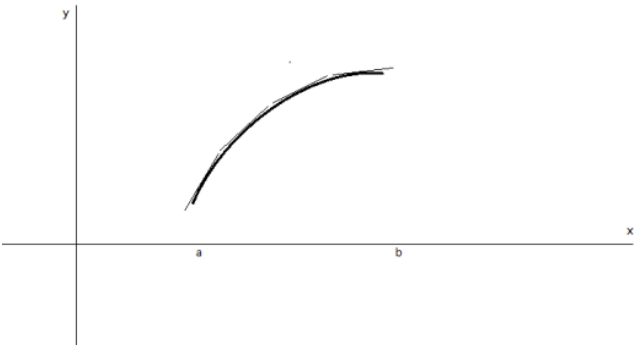
¿Las siguientes particiones realizadas, te dan alguna idea de cómo calcular su área?, ¿podrías explicarlo?



19H.(Manipulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{-1}{x-4.4} + 4$. Si consideras el intervalo $[2,4]$ (se activan los deslizadores *Top*, *Lower*, y *partition in n sub-intervals*), divide la región en cualquier número de sub-intervalos ¿tales particiones realizadas, te dan alguna idea de cómo calcular su área?, ¿podrías explicarlo?

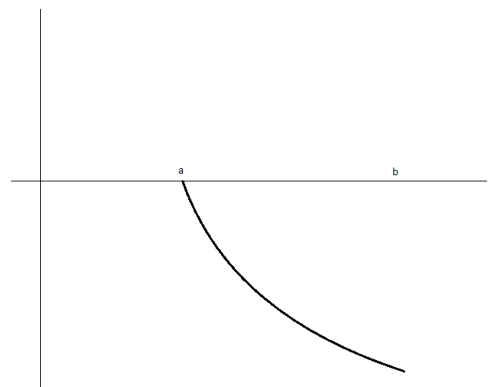
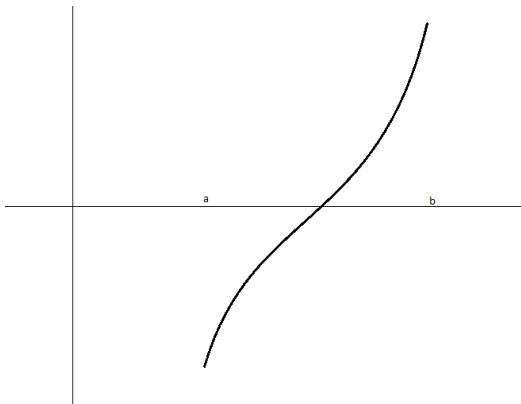
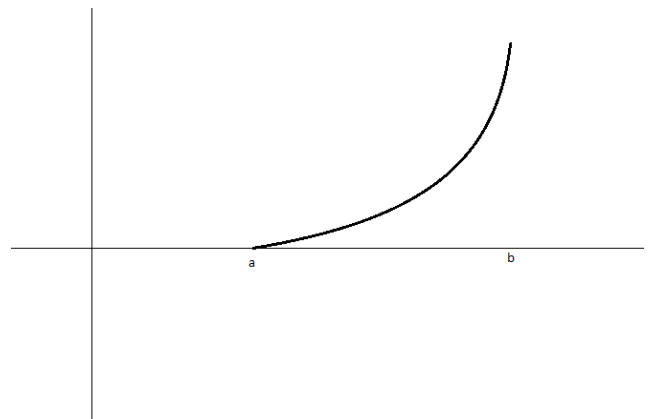
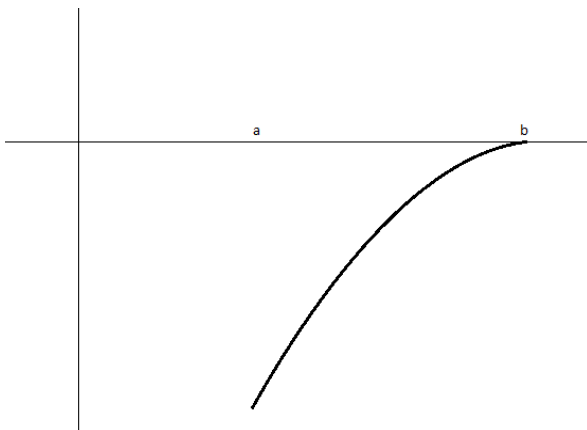
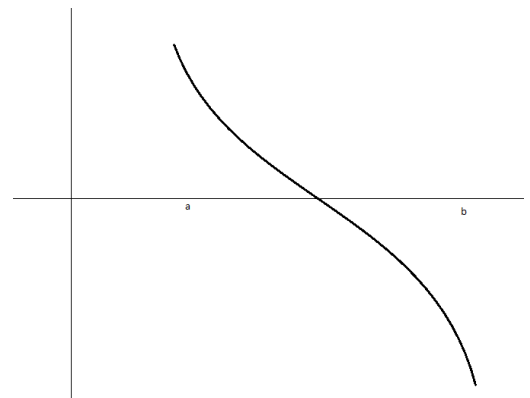
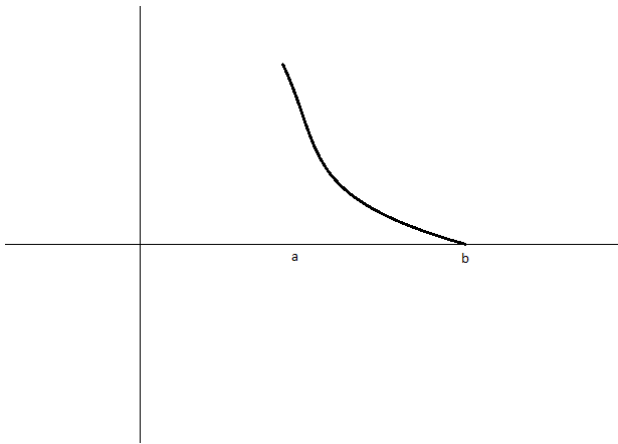


20. En cada una de las siguientes curvas se encuentran graficados trozos de tangentes en algunos de sus puntos. ¿Podrías describir sus comportamientos de acuerdo al valor y signo de sus pendientes, en cada caso?

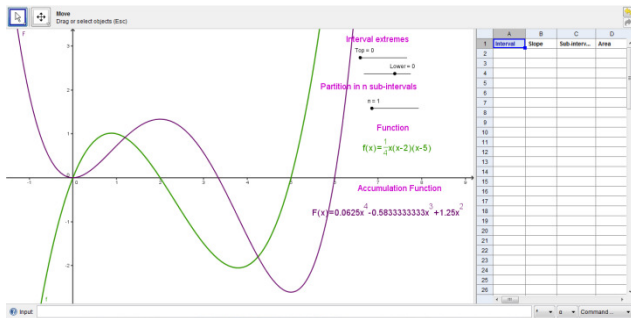
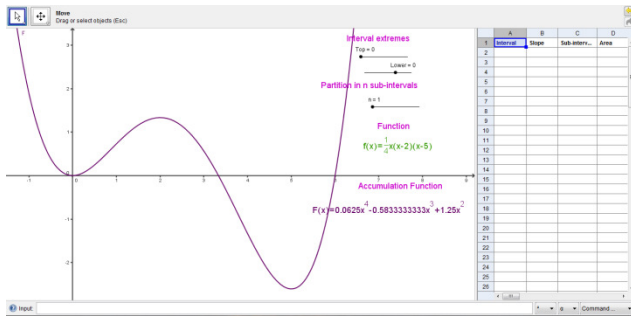
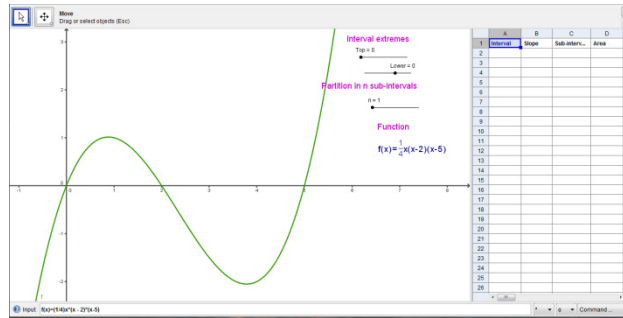


Aporte de información: A las funciones que tienen como ordenada, la pendiente de la recta tangente a otra función dada, en cada punto de igual abscisa, se les llama funciones-pendiente.

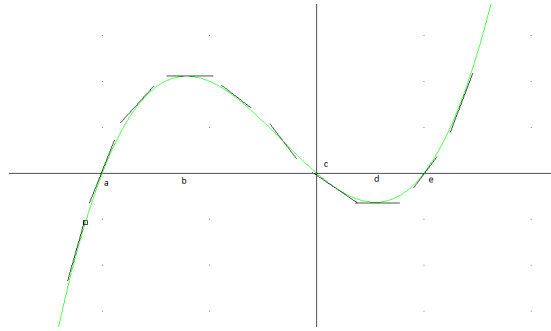
21. ¿Podrías identificar cuáles de las siguientes funciones-pendiente corresponden a cada una de las funciones presentadas en la pregunta anterior?, ¿por qué?



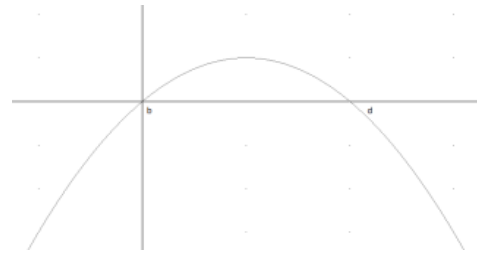
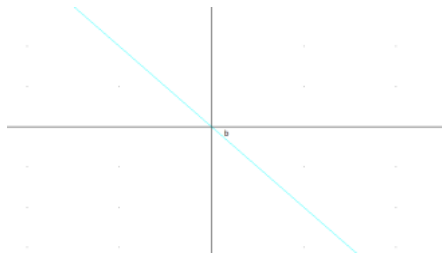
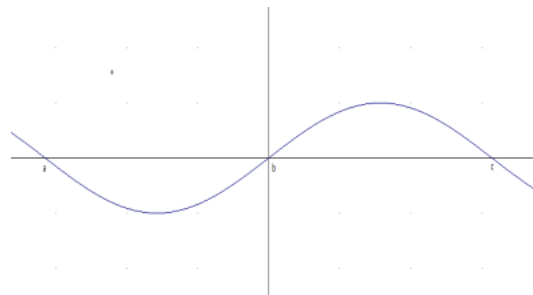
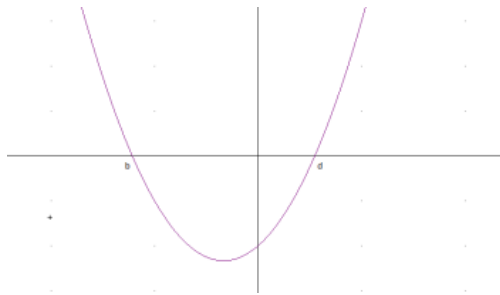
21H. (Manipulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x-5)$. (Se exhiben cinco posibles funciones-pendiente para la función graficada). ¿Podrías identificar cuáles de las siguientes funciones-pendiente corresponden a cada una de las funciones anteriores?, ¿por qué? (finalmente se presentan las dos gráficas: la función y su correspondiente función-pendiente).



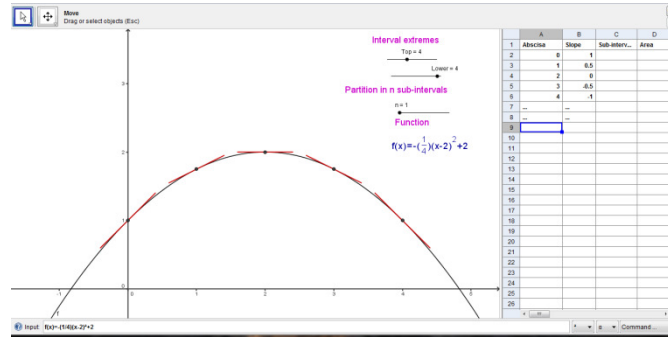
22. Dada la siguiente función,



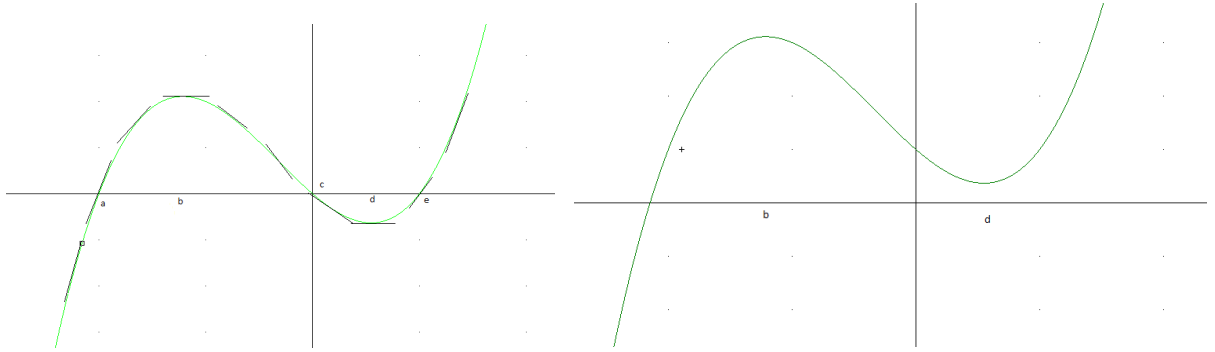
¿podrías identificar cuál de las siguientes curvas corresponde a la función-pendiente?, ¿por qué?



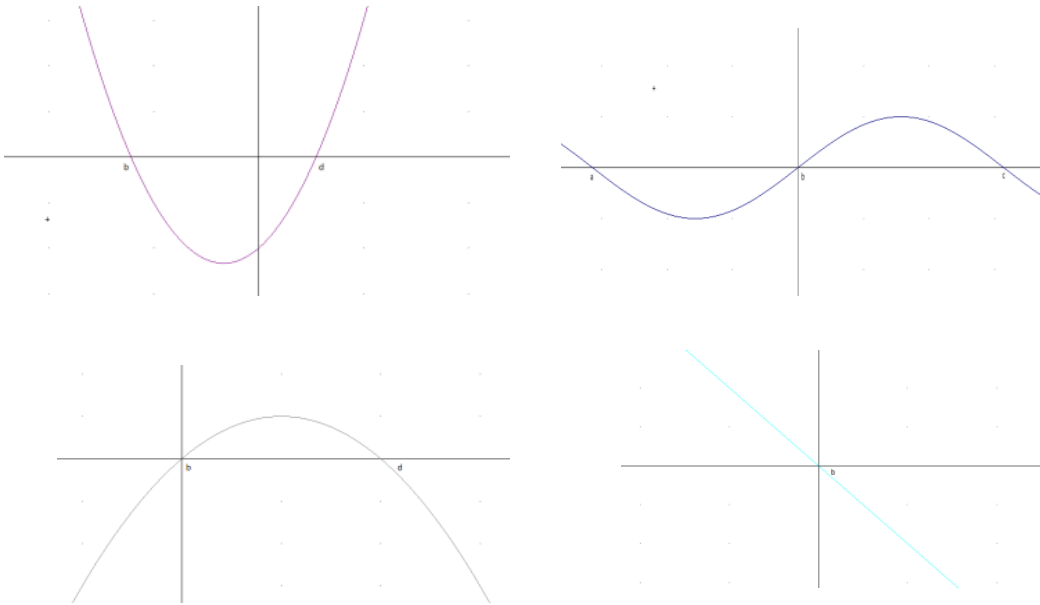
22H.(Manipulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{8}(x-2)^2 + 2$ con trozos de tangentes trazados en algunos de sus puntos. ¿Podrías describir sus comportamientos de acuerdo al valor y signo de sus pendientes, en cada caso? (corroborar los valores en la tabla).



23. A continuación se presentan dos funciones. La función de la derecha representa una traslación vertical de la primera.

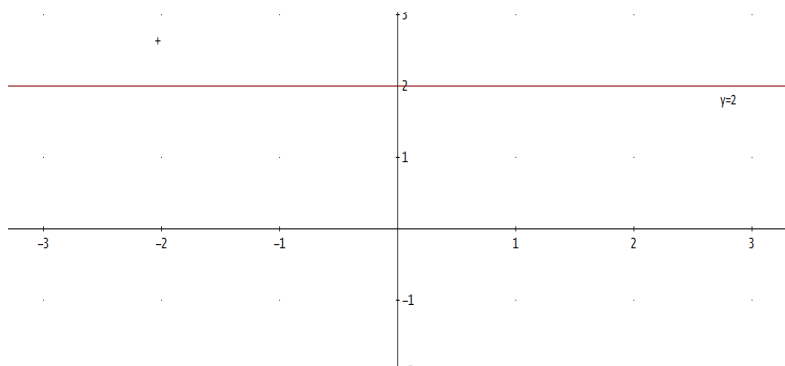


¿Podrías identificar cuál de las siguientes funciones corresponden a las funciones-pendiente de cada una de las anteriores?, ¿por qué?



Aporte de información: La traslación vertical de una función de la forma $y = f(x) + C$, se obtiene variando el valor de la constante. Sin embargo, todas ellas coinciden si se superponen.

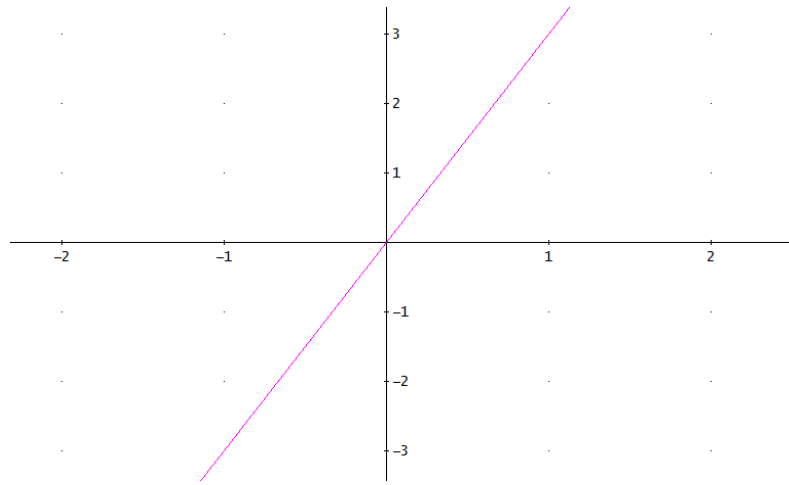
24. Considera la función constante $y = 2$, como lo muestra la figura.



Traza la respectiva función-pendiente. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

25. Traza otras funciones constantes y sus respectivas funciones-pendiente. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?

26. Considera la función lineal $y = 3x$, como lo muestra la figura.

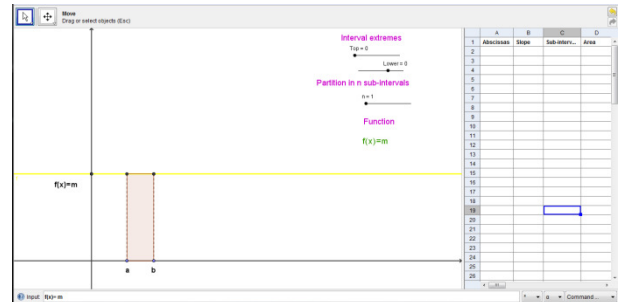


Traza la respectiva función-pendiente. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

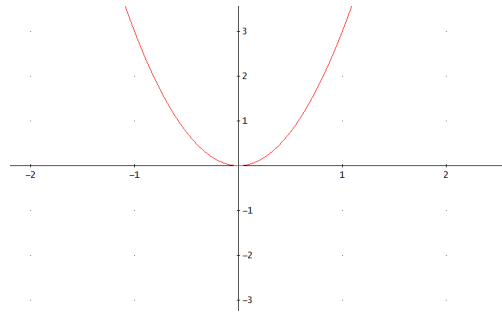
27. Traza otras funciones lineales de la forma $y = 3x + C$ y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

28. Traza otras funciones lineales y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?

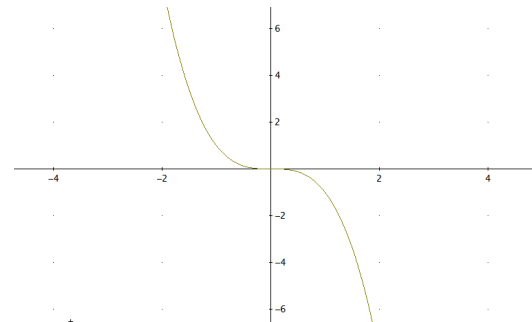
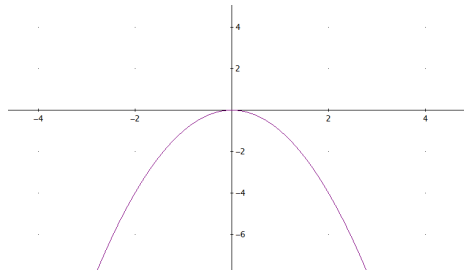
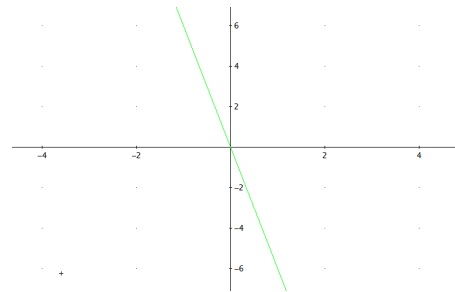
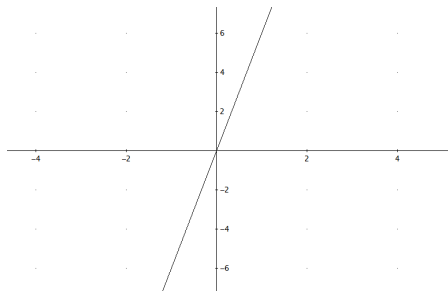
28H. (Manipulación de la herramienta: Geogebra®). Grafica, por ejemplo, cualquier función de la forma $f(x) = mx$ (Se activa la barra de entrada) y su respectiva función-pendiente. Luego, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?



29. Considera la función cuadrática $y = 3x^2$, como lo muestra la figura.



¿Cuál de las siguientes curvas crees que sea la correspondiente función-pendiente?, ¿por qué?

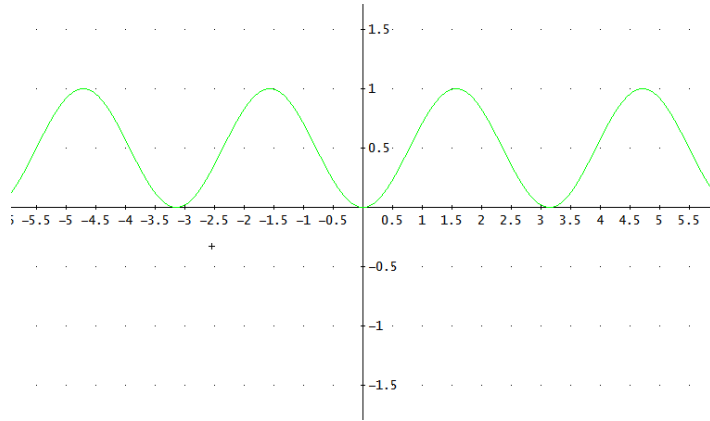


30. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?

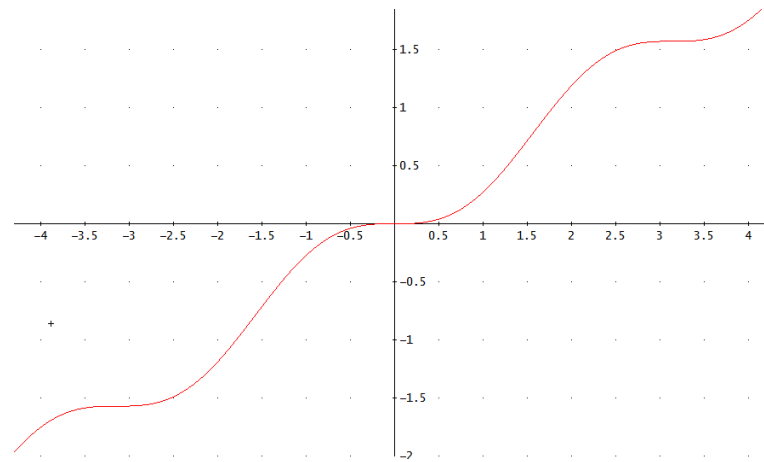
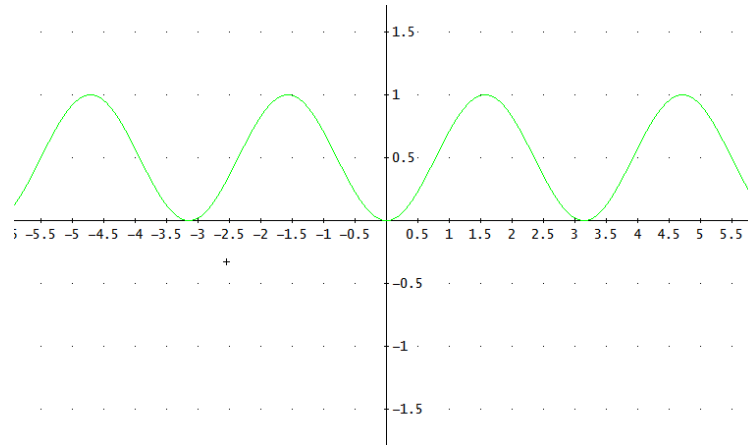
31. Traza otras funciones cuadráticas de la forma $y=3x^2+C$ y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

32. Traza otras funciones cuadráticas y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?

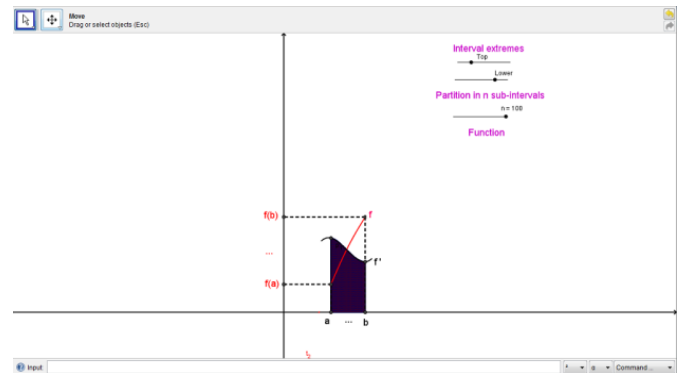
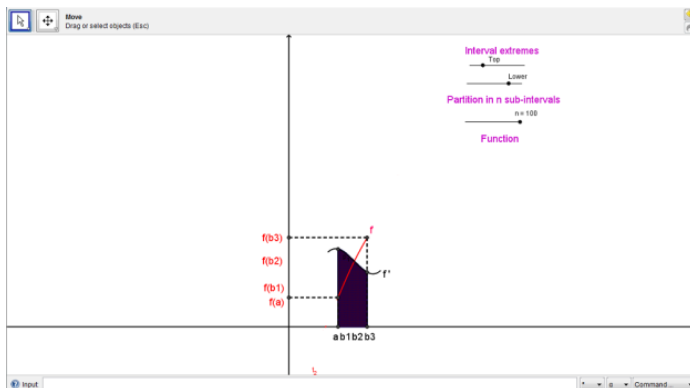
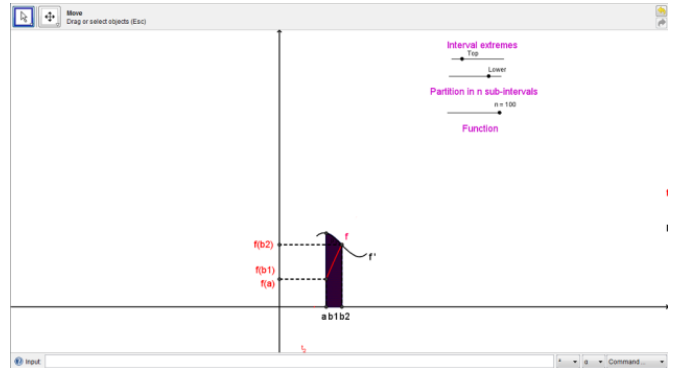
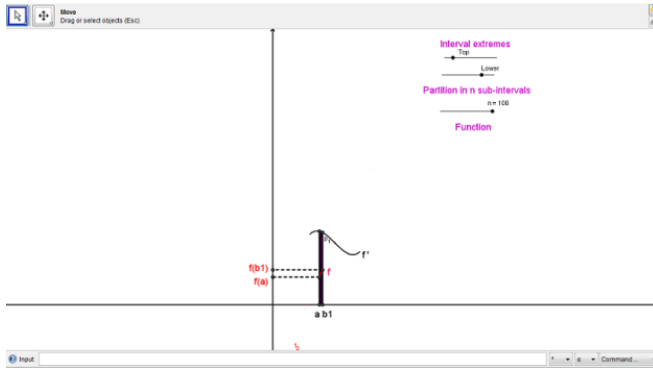
33. La función que se muestra a continuación, corta al eje x en los valores múltiplos de π . ¿Podrías explicar cómo calcular el área limitada por la función y el eje x , en el intervalo $[0, \pi]$?



34. A continuación se muestran dos gráficas, la primera corresponde a la función-pendiente $f(x) = \text{sen}^2 x$ de la función original $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\text{sen}2x}{4}$.
¿Podrías calcular el área limitada por la función $f(x) = \text{sen}^2 x$ y el eje x en el intervalo $[0, \pi]$? ¿cómo explicarías el procedimiento?



34H. (Manipulación de la herramienta: Geogebra®). A continuación, se muestran los trazos de dos gráficas, f (en rojo) y su correspondiente función-pendiente f' (en negro); (se activa el deslizador Top) ¿Podrías explicitar un método para calcular el área limitada por f' y el eje x en el intervalo $[a, b]$?



3.3 Niveles y descriptores para el TFC

En el contexto de la teoría de PK y fruto del trabajo de campo realizado, se enuncian los descriptores que corresponden a los niveles de comprensión 1, 2, 3 y 4 diseñados para el TFC. En este punto es necesario recordar que no es propósito del presente estudio, abordar los descriptores de los demás niveles de la teoría, dado que nuestro tratamiento no es de carácter formal, sino de carácter visual-geométrico, con el fin de establecer la correspondencia entre áreas y diferencia de longitudes y facilitar posteriormente el acceso a la formalidad.

Para los primeros tres niveles de comprensión, además de los descriptores correspondientes, se presentan uno o varios descriptores llamados *descriptores de separación*, nombre que indica que son requisito prioritario para distinguir el paso entre uno y otro nivel. Por esto, en el guión entrevista, encontraremos algunas preguntas llamadas *preguntas discriminantes*³⁰, las cuales darán cuenta del cumplimiento de los descriptores de separación.

A continuación, se enuncian los descriptores para la comprensión del TFC, en el marco de la teoría de PK.

Nivel 1. Primitive knowing

De acuerdo a la información arrojada por las entrevistas, desde el inicio de la primera fase hasta la última, se requiere que los entrevistados afloren sus ideas intuitivas y experiencias de aprendizaje relacionadas con los siguientes descriptores:

- 1.1 Caracteriza las pendientes de un conjunto de rectas dadas en el plano cartesiano, en forma ascendente
- 1.2 Reconoce y traza funciones elementales³¹ de la forma $y = f(x)$ en el plano cartesiano.

³⁰ Estas preguntas están relacionadas directamente con los descriptores de separación, las cuales indican un avance en el nivel de comprensión en la teoría de PK.

³¹ También son llamadas funciones básicas y son las usadas con mayor frecuencia dada su fácil representación gráfica y simple expresión analítica. Entre ellas se puede apreciar:

$$y = c, y = mx + b, y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}, y = |x|, \dots$$

- 1.3 Grafica regiones limitadas por una función y el eje x , entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.
- 1.4 Reconoce visualmente los intervalos en los que una función es positiva o negativa, independiente de sus intervalos de monotonía.
- 1.5 Reconoce geoméricamente la diferencia entre dos segmentos verticales y su correspondiente medida.
- 1.6 Calcula áreas de rectángulos, círculos, sectores circulares y trapecios.

Descriptorios de separación...

- 1.7 Se le dificulta estimar la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto, haciendo uso de procesos de razonamiento infinitos.
- 1.8 Se le dificulta estimar el área de una región limitada por una función y el eje x en un intervalo cerrado, haciendo uso de procesos de razonamiento infinito.

Nivel 2. Image making

Teniendo en cuenta que en este nivel de comprensión, las imágenes creadas por el entrevistado (que no son necesariamente pictóricas) transmiten significados, sean mentales o físicos, que permiten obtener ideas sobre el objeto matemático, se relacionan los siguientes descriptorios:

- 2.1 Calcula o estima pendientes de rectas secantes a funciones.
- 2.2 Calcula o estima pendientes de rectas tangentes a funciones, haciendo uso del “haz de secantes”.
- 2.3 Calcula o estima áreas de regiones limitadas por una función y el eje x , realizando particiones en un intervalo cerrado.
- 2.4 Asocia la diferencia positiva de ordenadas en dos puntos de una función, como la diferencia de las medidas de dos segmentos verticales, tomados desde el eje x hasta la función.

Descriptor de separación...

- 2.5 No establece las relaciones existentes entre la gráfica de una función y su respectiva función pendiente.

Nivel 3. Comprensión de la imagen

En este nivel, los entrevistados reemplazan imágenes asociadas a una sola actividad, por imágenes mentales, las cuales se convierten en imágenes orientadas por un solo proceso. En coherencia con lo anterior, los descriptores correspondientes a este nivel son:

- 3.1 Caracteriza las pendientes de una función en un intervalo, de acuerdo a su monotonía o concavidad.
- 3.2 Grafica algunas funciones elementales y traza las respectivas funciones pendiente (la derivada de cada función), en otro plano cartesiano, haciendo uso de algunos puntos representativos.
- 3.3 Traza otro tipo de funciones pendiente, a partir de funciones más complejas.
- 3.4 Reconoce que una función pendiente es la misma para varias funciones de la forma $y = f(x) + C$.
- 3.5 Caracteriza una función a partir de su función pendiente, de acuerdo a su monotonía y signo.
- 3.6 Esboza la gráfica de una función, dada su función pendiente (y viceversa).
- 3.7 Reconoce que la diferencia positiva de ordenadas en los extremos de un intervalo cerrado, es constante para funciones de la forma $y = f(x) + C$.
- 3.8 Compara la diferencia de ordenadas de una función en los extremos de un intervalo cerrado, con el área bajo la función pendiente en el mismo intervalo.

Descriptor de separación...

- 3.9 Se le dificulta calcular el área bajo una función pendiente en un intervalo cerrado, conociendo los valores de las ordenadas en la respectiva función, para los extremos del intervalo.

Nivel 4. Observación de la propiedad

El entrevistado está en la capacidad de desarrollar un concepto-definición, creado a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas. Por tal razón, los descriptores correspondientes a este nivel de comprensión se describen a continuación:

- 4.1 Relaciona la diferencia de ordenadas de una función en los extremos de un intervalo cerrado, con el área bajo la función pendiente en el mismo intervalo.
- 4.2 Para determinar el área bajo una función pendiente en un intervalo cerrado, evidencia la necesidad de conocer la diferencia de las ordenadas correspondientes de la función en el mismo intervalo.
- 4.3 Dada una función, afirma que: “La diferencia de dos ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ en dos puntos de una función, es igual al área bajo la curva de su correspondiente función-pendiente en el intervalo $[a,b]$ ”
- 4.4 Dada una función, afirma que: “La ordenada en un punto de una función pendiente, es igual a la pendiente de la recta tangente a la función correspondiente en el punto de igual abscisa”.

3.4 Análisis del guión-entrevista

Con el fin de describir las características del guión entrevista para dar una idea global de su estructura y especificar la distribución de las preguntas, de acuerdo a los bloques que las agrupan, se explicita la manifestación del TFC que se abordará, el dispositivo sobre el cual se dotará al entrevistado para que razone a profundidad, el análisis de la red de relaciones que hay inmersa y los conceptos encubiertos y, finalmente, se detallará la intencionalidad de cada una de las preguntas. Este análisis permite consolidar finalmente los descriptores de nivel y abordar de manera más clara, el estudio cualitativo sobre los diez entrevistados que ya mencionamos anteriormente.

3.4.1 Manifestación del TFC en el guión entrevista

Se trata de comprender el TFC desde un punto de vista visual-geométrico, con el fin de descubrir la relación inversa entre las cuadraturas y las tangentes para cualquier función y su correspondiente función-pendiente³².

3.4.2 Dispositivo a utilizar en el guión-entrevista

Cuando hablamos del dispositivo o el mecanismo utilizado en el guión entrevista para la comprensión del TFC, hacemos referencia al material (no necesariamente tangible) que servirá de enganche para motivar el razonamiento durante la mayor parte de la entrevista, en la manifestación antes mencionada.

Para este caso, nuestro dispositivo será dotar el TFC de una componente visual-geométrica que consiste en asociar la igualdad de dos cantidades de distinta naturaleza: un área (en la función) y la diferencia de dos longitudes de segmentos verticales (diferencia de ordenadas en la función-pendiente), ubicados en el plano cartesiano. Básicamente, este dispositivo se implementa a partir de la pregunta número 9.

3.4.3 Características generales del guión entrevista

El guión-entrevista se ha dividido en cuatro bloques de preguntas en correspondencia con los niveles abordados, los procesos de razonamiento infinito considerados y la intencionalidad de la pregunta; es decir, los bloques están elaborados de acuerdo a la manera de cómo el conjunto de preguntas permiten detectar cada uno de los niveles de razonamiento. En cada bloque, la entrevista hace explícitos los instantes de *folding-back*, *complementariedades de acción* y *complementariedades de expresión*, características que son objeto de estudio en el proceso cualitativo a desarrollar en el próximo capítulo.

Primer bloque: preguntas 1, 5, 6, 9, 11, 12, 14, 16 (8 preguntas). En este primer bloque, el guión de entrevista está diseñado con una doble intención:

³² Como se observa en el guión-entrevista, el término función-pendiente hace referencia a la derivada de otra función de forma encubierta.

por un lado, propiciar que el entrevistado responda desde su experiencia cotidiana con el fin de darle confianza, es decir, que responda con naturalidad y en forma espontánea, disminuyendo la presión que ejercen las preguntas acerca del saber matemático; por otro lado, facilitar que el entrevistado razone sobre propiedades y característica de funciones que le son familiares, aflore posibles razonamientos para tangentes y áreas y, afiance el dispositivo ya descrito mediante las infinitas diferencias de cantidades para un mismo resultado.

Segundo bloque: Preguntas 2, 3, 4, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 29 (10 preguntas). Se somete por primera vez al entrevistado a procesos de razonamiento infinito, mediante preguntas que hacen referencia a las pendientes de rectas tangentes, los zooms que proporcionan la idea de aproximación de la tangente a la curva y particiones para la estimación de áreas. También se destacan preguntas en las que se hace caer en cuenta al entrevistado, de que muchos procesos de razonamiento infinito no siempre producen resultados infinitos, también pueden ser finitos.

Las preguntas de este bloque, pretenden que por primera vez, el entrevistado pase por los tres momentos que menciona el decálogo para una entrevista de carácter socrático, ya descrito en el primer capítulo: Creer que sabe la respuesta a la pregunta, darse cuenta que no la sabe (entorpecerlo) y por último, llegar a su comprensión mediante un proceso de razonamiento, en este caso, a través del mecanismo visual-geométrico. Es aquí donde la característica del *Folding Back* cobra importancia para el presente estudio y vincula de manera especial la entrevista con el marco teórico. En el diseño de las preguntas, se destacan algunas que propician posibles redoblamientos necesarios para el avance en la comprensión.

Tercer bloque: Preguntas 7, 8, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 (11 preguntas). En esta etapa de la entrevista, además de continuar reforzando los procesos de razonamiento infinito involucrados, se pretende que el entrevistado asocie el comportamiento de las tangentes a una función con la gráfica de la respectiva función-pendiente y viceversa. Después de este trabajo, el entrevistado es sometido a comparar resultados para la estimación de áreas y el cálculo de diferencia de ordenadas en funciones constantes, lineales y cuadráticas, con el fin de que establezca posibles conjeturas.

En este bloque, se exhiben todos los posibles comportamientos de una tangente a una función, en lo que se refiere al signo del valor de su pendiente y crecimiento o decrecimiento de su razón de cambio.

Cuarto bloque: Preguntas 30, 31, 32, 33, 34 (5 preguntas).

Con tan sólo cinco preguntas, el cuarto bloque examina la comprensión del TFC extendiendo su aplicación a cualquier función continua, desde el punto de vista geométrico, incorporando con la ayuda de la visualización, la asociación que el entrevistado establece entre las pendientes de tangentes y el trazo de la función-pendiente, para que luego evoque en un lenguaje matemático adecuado el Teorema en cuestión.

3.4.4 Descripción de la herramienta (Geogebra®) en la entrevista

En el Capítulo 1 se especifica la importancia del Geogebra® para visualizar desde puntos de vista meramente intuitivos muchos conceptos matemáticos que permiten discernir y conjeturar sobre diversos resultados. En nuestra entrevista, siete preguntas³³ son clave para que las posibles respuestas de los entrevistados sean corroboradas o refutadas, de acuerdo a los procesos de razonamiento infinitos sobre los cuales se desea actuar. A continuación, se describen las principales características de la herramienta, las cuales permiten manipular las secciones por parte del entrevistado con el fin de conseguir la comprensión de los procesos de razonamiento infinito involucrados en el TFC.

Nuestra herramienta muestra una ventana que contiene cinco secciones: barra de herramientas, barra de entrada, gráfica, deslizadores y tabla de valores; tal como lo muestra la Figura. *La barra de herramientas* se encuentra en la parte superior de la ventana y sirve para realizar modificaciones con el zoom y elegir los objetos con los que se desea interactuar en la gráfica: trazo de líneas, ubicación del cursor, ubicación de puntos, entre otros; *la barra de entrada* se localiza en la parte inferior y permite digitar la función a trazar; *la sección gráfica* permite observar el trazo de la función digitada en la barra de entrada y es la sección más amplia de la ventana; *los deslizadores* permiten elegir los extremos del intervalo sobre el cual se desea trabajar, el número de sub-intervalos en los que se realizará la partición (si se desea aproximar un área) y la visualización algebraica de la función trazada y, por último; la sección de *tabla de valores* que consta de cuatro columnas que permitirán visualizar de una manera dinámica el intervalo, las pendientes de las secantes y la tangente en un punto, el número de sub-intervalos y las áreas aproximadas de las regiones encerradas, haciendo uso de los puntos medios como puntos representativos. En la Figura 3.1 se identifican las secciones ofrecidas por la herramienta.

³³ Las preguntas que hacen referencia al uso de la herramienta Geogebra son: 12, 13, 19, 21, 22, 28 y 34.

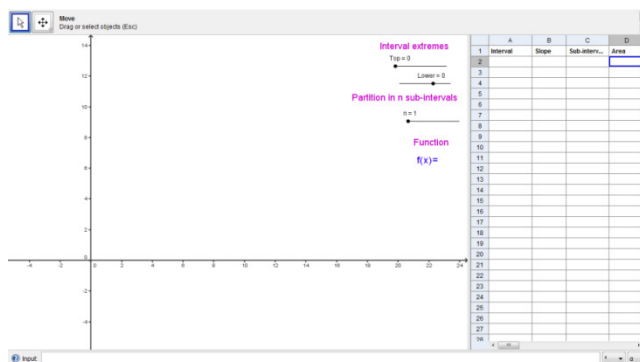


Figura 3.1 El ambiente ofrecido por la herramienta Geogebra®.

3.4.5 Análisis de las preguntas

En esta sección se explica la intencionalidad de cada una de las preguntas, con el fin de lograr la comprensión de la red de relaciones que hay implícita. Se hace necesario entonces, revisar los conceptos matemáticos que gravitan en torno al TFC, como son los de: línea recta, pendiente, tangente, secante, función, segmento, diferencia, segmento, área, monotonía, ordenada, región plana y derivada; Será necesario entonces retomar algunos conceptos matemáticos que ayudan al entrevistado a construir su red de relaciones para alcanzar un alto nivel de comprensión.

El eje central del guión entrevista para la comprensión del TFC es la asociación entre áreas y diferencia de segmentos, y dado que tiene una componente de manipulación aritmético-algebraica a la que todo entrevistado intenta recurrir, pero que no es el propósito de la entrevista, se hace necesario que las preguntas estén diseñadas de tal forma que el entrevistado llegue al concepto, acudiendo sólo a la componente visual geométrica.

Para la docencia de las Matemáticas es de suma importancia disponer de una imagen intuitiva de un concepto formal no trivial; parece natural entonces plantearse una estrategia docente distinta de la habitual. En el guión entrevista se plantea una visualización geométrica que deberá permitir al entrevistado comprender y asimilar el dispositivo subyacente al TFC, y por tanto, el proceso de razonamiento infinito que conlleva, evitando los obstáculos de comprensión asociados a: la notación simbólica, los cálculos algebraicos, las ideas previas y las imágenes erróneas.

Finalmente, para entrar en las particularidades de las preguntas, se destacan cuatro aportes de información en las preguntas 4, 9, 21 y 24, los cuales procuran facilitar el avance en la comprensión y el uso de la herramienta

Geogebra® en las preguntas 12, 13, 19, 21, 22, 28 y 34, ya descrito en el primer capítulo, y que se considera fundamental para corroborar resultados de procesos infinitos sobre los cuales el entrevistado razona.

Pregunta 1. Se consigue brindar confianza al entrevistado preguntando por algunas propiedades geométricas de la línea recta, pues es una idea que corresponde al primitive knowing de nuestro marco teórico, para luego pasar sin problemas al concepto de segmento de recta. También se pregunta por la posible mediada de la respectiva pendiente, con el fin de que asocie esta idea con la inclinación de la recta.

Pregunta 2. Durante la fase inicial para el diseño y aplicación de la entrevista, se evidencia la dificultad por parte de los entrevistados para ordenar un conjunto de rectas, de acuerdo a su grado de inclinación, sobre todo para las decrecientes (las cuales tienen pendiente negativa). Esta pregunta indaga por el razonamiento de este fenómeno y más adelante, con la ayuda de otras preguntas posteriores, hacen reflexionar al entrevistado sobre posibles errores o lo hacen ratificar sus conjeturas correctas. Este es el primer momento en el que el entrevistado es sometido a un proceso de razonamiento infinito, en cuanto a que se le obliga a pensar en secuencias de rectas e infinitas pendientes.

Pregunta 3. Se inspecciona la descripción de los entrevistados con respecto a las pendientes de varias líneas rectas graficadas en el plano cartesiano, las cuales se visualizan en una figura, e igualmente se pide estimar la pendiente para algunas de ellas. Esta pregunta intenta hacer consciente al entrevistado, sobre el sorprendente comportamiento de los valores de las pendientes para las rectas con ángulos entre 0° y 45° (los cuales varían entre 0 y 1) y para las rectas con ángulos entre 45° y 90° (los cuales varían entre 1 e ∞); es decir, como en ángulos de igual medida, los valores fluctúan en intervalos de muy distinta mensurabilidad; de manera análoga sucede en rectas de pendientes negativas. Por supuesto, se invita de nuevo a pensar en el proceso de razonamiento infinito.

Pregunta 4. Es la primera pregunta en la cual se da un aporte de información, la cual pretende esclarecer que *los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=0$ y $y=x$ varían entre 0 y 1, mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=x$ y $x=0$ varían entre 1 e ∞ . De la misma manera, los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=-x$ y $y=0$ varían entre -1 y 0 , mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $x=0$ y $y=-x$ varían entre $-\infty$ y -1 .* Este hecho es fundamental comprenderlo para conseguir el objetivo que se persigue posteriormente, pero se debe ser consciente de que la pregunta no es simple de responder, pues se evidencia en el trabajo de

campo que la mayoría de los estudiantes no han pasado por esta experiencia en cuanto al concepto dependiente, en los cursos regulares de Cálculo o Geometría Analítica. Se debe adquirir por parte del entrevistado la idea de que entre dos rectas cualquiera, siempre hay infinitas rectas y, por consiguiente, infinitos valores para sus correspondientes pendientes.

Pregunta 5. El conocimiento de algunas funciones elementales es necesario dentro del *primitive knowing*, como objetos sobre los cuales se harán evidentes las complementariedades de la acción o de la expresión, o porque no, redoblamientos a conocimientos anteriores.

Pregunta 6. La verbalización correcta de los límites de una región cerrada por varias curvas elementales en el plano cartesiano, es indispensable para el refinamiento del lenguaje matemático, el cual posteriormente será utilizado para enunciar en forma correcta el TFC. Se quiere que el entrevistado describa la región limitada así: *la región está limitada en su parte superior por la curva..., en su parte inferior por el eje x , a la derecha por la recta vertical $x = a$ y a su izquierda por la...*

Preguntas 7 y 8. De acuerdo a la experiencia del investigador, se hace evidente que nuestros estudiantes en forma frecuente confunden el signo de la función en un punto (positiva si está por encima del eje x o negativa si...) con la monotonía (creciente o decreciente); en otros casos asocian el signo de la función con los valores en el eje x . Estas preguntas son cruciales para tener en cuenta en el discurrir de la entrevista, dado que con estas propiedades se construirá el concepto de *derivada* de forma encubierta (*función-pendiente*). El entrevistado deberá hacer consciente el hecho de que los intervalos en los que una función es positiva o negativa, son independientes de los intervalos de monotonía.

Pregunta 9. Es la segunda pregunta que contiene previamente un aporte de información y permite dotar al entrevistado de los términos *ordenada* y *abscisa*, y así alimentar su lenguaje matemático. Quizás es una de las preguntas más importantes, dado que involucra el dispositivo de la diferencia de segmentos. El entrevistado deberá asociar infinitos pares de segmentos para una misma diferencia de medidas, recurriendo de nuevo a los procesos de razonamiento infinito.

Pregunta 10. Con el fin de afianzar el uso de procesos de razonamiento infinito, sobre los que debe actuar constantemente, se le presenta un cuadrado y un rectángulo para que analice las posibilidades de tener la misma área. También tiene la intención de involucrar por primera vez el concepto de área, el cual es fundamental para la comprensión del TFC.

Pregunta 11. En esta pregunta se presentan cinco regiones en el primer cuadrante, limitadas por rectas verticales y una función. Se indaga por la estrategia que utilizaría el entrevistado para calcular sus respectivas áreas, presentando en los tres primeros casos un cuadrado, un trapecio y un círculo, respectivamente, previendo que el entrevistado conoce cómo proceder para hacer los respectivos cálculos, dado que es una pregunta que corresponde al *primitive knowing*; la cuarta región está limitada superiormente por un cuarto de circunferencia, con el fin de aumentar el grado dificultad y que comience a razonar con técnicas ya sean geométricas o analíticas y, en el último caso, se presenta una región irregular para que razone sobre particiones en sub-intervalos infinitos. Es aquí donde el entrevistado se ve en la necesidad de construir caminos más efectivos, que permitan llegar al cálculo de áreas para una región cualquiera, lo que alude por primera vez, pero en forma encubierta, al TFC.

Pregunta 12. Se muestra una recta secante a la parábola $y = x^2$, dados los dos puntos de corte. Se pretende que el entrevistado retome el concepto de pendiente desde el punto de vista analítico y, a la vez, comience a razonar sobre las propiedades de las rectas secantes a las curvas. Para conseguir tal razonamiento, se usa la herramienta Geogebra® para realizar zooms que permitirán, mediante preguntas adicionales (dado el carácter semi-estructurado de la entrevista), facilitar la visualización de los acercamientos entre la recta secante y la porción de curva interceptada.

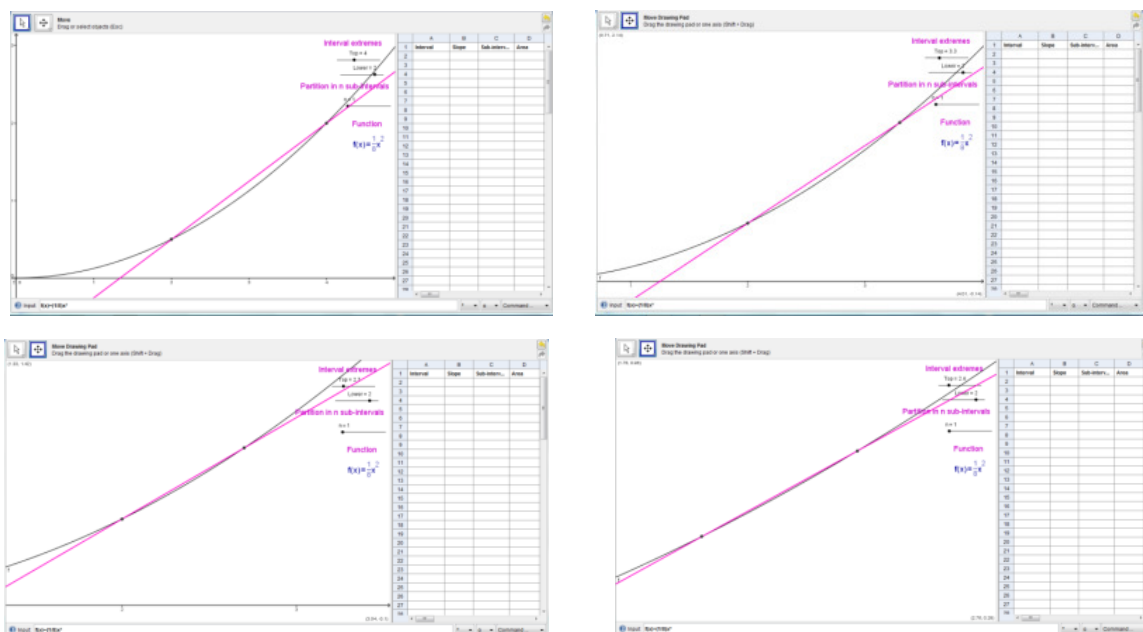


Figura 3.2 El uso del Geogebra® para realizar zooms y visualizar el acercamiento entre la secante y la función.

Pregunta 13. Una vez el entrevistado haya pasado por los conceptos de pendiente y secante, acudimos al proceso dinámico para comprender el concepto de recta tangente como el límite de un haz de secantes (Esteban, 2003). En primer lugar, se hace razonar al entrevistado mediante gráficos sucesivos de rectas secantes que cortan a la parábola $y = x^2$, dejando un punto fijo y el otro móvil que se acerca cada vez más al primero, lo que produce la sensación del dinamismo. En un segundo momento, se acude a la herramienta Geogebra® mostrando la función $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ con una secante que la intercepta en los puntos (2,4) y (4,16). Accionando los deslizadores, el entrevistado visualiza las secantes que la herramienta permite trazar sucesivamente para valores de 0,1 en 0,1 en el eje de las abscisas y, simultáneamente, analiza los valores de las respectivas pendientes en la tabla de valores; así corrobora sus conjeturas o las refuta y reflexiona con respecto a las respuestas dadas anteriormente.

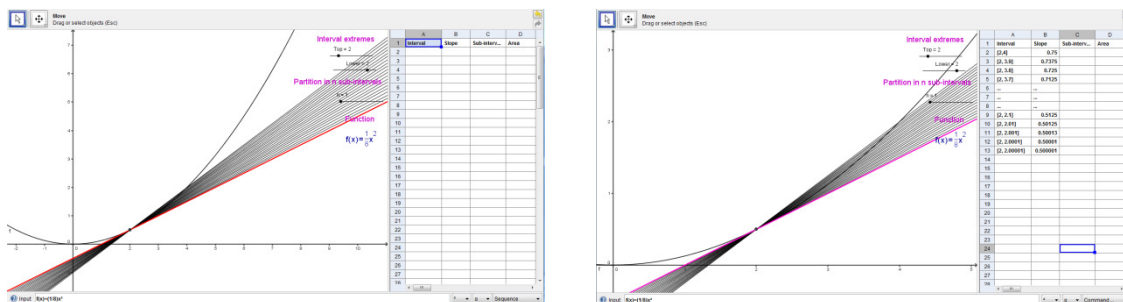


Figura 3.3 El uso del Geogebra® para realizar zooms y visualizar el acercamiento entre la secante y la función.

Pregunta 14. La historia de las Matemáticas hace evidente la diferencia entre la concepción de tangente a una circunferencia y la tangente a una curva cualquiera. Esta pregunta permite, además de brindar aún más confianza y naturalidad en las respuestas de los entrevistados, propiciar un posible *Folding Back* en la próxima pregunta, de tal forma que genere un choque conceptual³⁴ para acceder a la comprensión de recta tangente como un concepto de aproximación local.

Pregunta 15. La pregunta confronta las respuestas anteriores con la tangente a la curva coseno que la corta en las infinitas ordenadas $y = 1$. Se pretende aquí que el entrevistado *redoble*, propiciando la concepción de que una recta tangente puede cortar a la curva en infinitos puntos y no siempre

³⁴ El entorpecimiento mencionado en el decálogo de una entrevista de carácter socrático.

en un solo punto, como en el caso de la circunferencia. Este hecho permite afianzar que se trata de un concepto de aproximación local y no de carácter global, como habitualmente es concebido.

Pregunta 16. Una vez más, se insiste con la recta tangente como concepto de aproximación local. En esta pregunta se evidencia durante la primera fase del trabajo de campo realizado, que la mayoría de los entrevistados no son conscientes de que la recta tangente a otra recta dada es ella misma y por lo tanto, la corta en todos sus infinitos puntos. Al mostrar un punto sobre una recta dada e indagando por la caracterización de la recta tangente que pasa por dicho punto, se encuentra que para los entrevistados no es fácil desligarse de la concepción de recta tangente a una circunferencia. La pretensión es que el entrevistado reflexione sobre este hecho.

Pregunta 17. Como abrebocas para comenzar a razonar con áreas y la idea de infinito, se propone al entrevistado analizar y comparar las áreas de polígonos inscritos a una circunferencia con el área de la misma circunferencia, comenzando por un triángulo hasta llegar a polígonos de *infinitos lados*. Se persigue que el entrevistado comprenda que las áreas son iguales cuando el proceso se realice de manera infinita.

Pregunta 18. El objetivo de la pregunta es conseguir la idea de partición infinita con el fin de que posteriormente sea considerada como una manera eficaz para calcular áreas. El entrevistado debe lograr visualizar que un rectángulo dividido a su vez en varios rectángulos (a la mitad, luego la superficie que queda a la mitad y así sucesivamente) se puede representar como una escalera infinita decreciente y viceversa; esto lo llevará una vez más a consolidar su red de relaciones y comprender que ambas superficies tienen área finita. Obsérvese que dado el rectángulo es fácil visualizar tal conjetura, sin embargo, si sólo se da la escalera infinita decreciente, le es más difícil decidir si ella tiene área o no.

Pregunta 19. Con la ayuda de la pregunta anterior y visualizando las particiones de la región, se provoca al entrevistado para que conciba las áreas de regiones irregulares mediante sumas de áreas infinitas de rectángulos y, una vez más, afiance sus procesos de razonamiento infinito. En esta pregunta se acude a la herramienta Geogebra®, en un primer momento activando los deslizadores *Top*, *Lower* y *partition in n sub-intervals*, para que considere la región limitada por la función $f(x) = \frac{-1}{x-4.4} + 4$ y el eje x en el intervalo $[2,4]$. Luego, el entrevistado continúa manipulando la herramienta para realizar análisis con otras funciones y deberá observar que en la tabla de valores los cálculos arrojados para el área de la región

considerada se estabilizan en un solo valor, en la medida en que crece más y más el número de sub-intervalos en los que la región queda dividida.

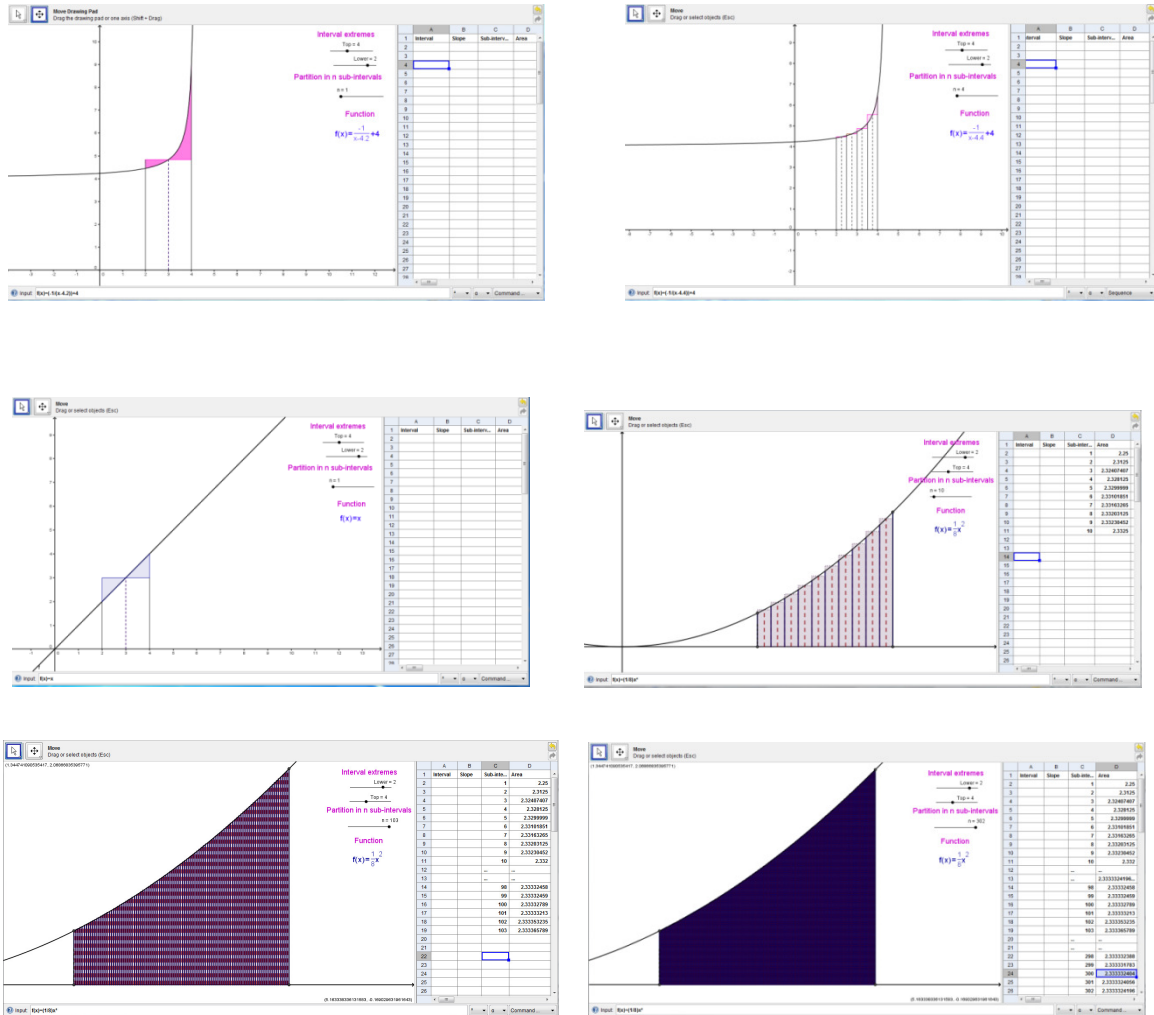


Figura 3.4 El uso del Geogebra® para la visualización de las particiones de una región y la estabilización de los cálculos de las áreas, de acuerdo a las particiones realizadas.

Pregunta 20. De acuerdo a los posibles comportamientos de una función, en cuanto a crecimiento y concavidad se refiere, se muestran seis porciones de curva con trozos de tangentes en algunos de sus puntos. El entrevistado deberá evocar que: para curvas crecientes cóncavas hacia abajo, los valores de las pendientes son positivos y decrecen; para curvas crecientes cóncavas hacia arriba, los valores son positivos y crecen; para curvas decrecientes cóncavas hacia abajo, los valores son negativos y disminuyen; para curvas decrecientes cóncavas hacia arriba, los valores son negativos y aumentan y;

que en los puntos extremos los valores de las pendientes son cero. Esta pregunta se considera clave para la construcción posterior de la derivada (llamada en la entrevista función-pendiente) y así poder razonar sobre la relación inversa entre cuadraturas y tangentes.

Pregunta 21. Se introduce como aporte de información el concepto de derivada, pero de manera encubierta usando el término de *función-pendiente*, pues desde el Capítulo 1 se advierte que la entrevista está diseñada para estudiantes que posiblemente no han pasado por cursos regulares de Cálculo Diferencial. Se pretende que el entrevistado comience a realizar constructos mentales y asociaciones entre una función y su respectiva derivada, con el fin de que evidencie claramente que esta última se construye tomando la pendiente de la tangente como la ordenada en la misma abscisa. En la herramienta Geogebra® se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x-5)$ y cinco funciones más, de las cuales deberá identificar cuál de ellas es la respectiva derivada. Por último, el entrevistado corrobora o refuta sus aseveraciones mediante la herramienta.

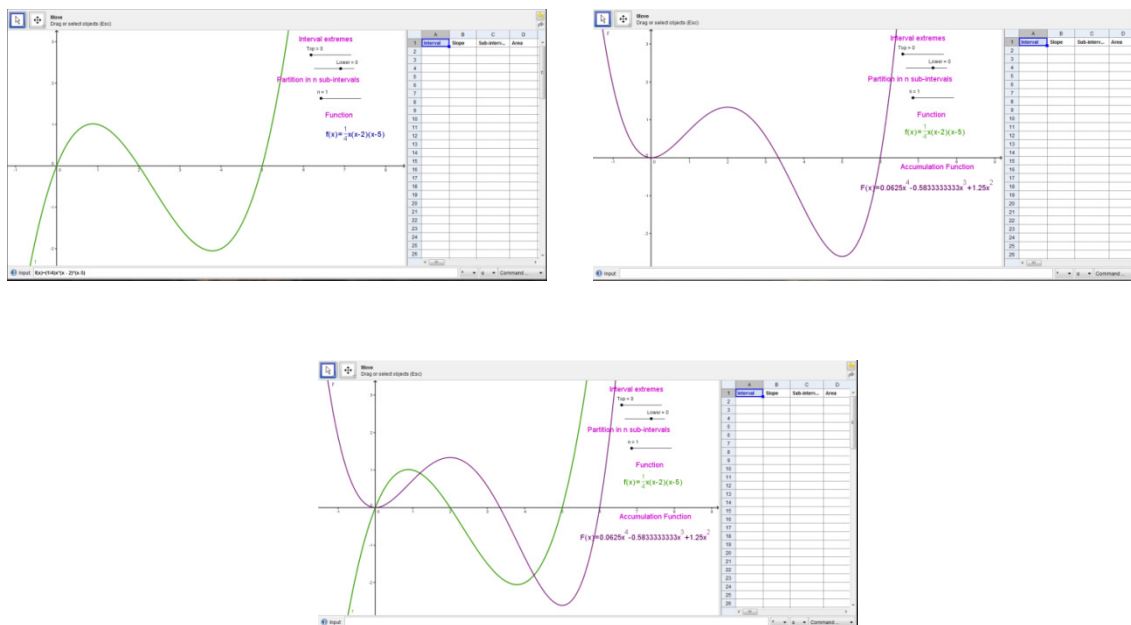


Figura 3.5 El uso del Geogebra® para la visualización de una función y su respectiva derivada.

Pregunta 22. Esta pregunta pretende confirmar que el entrevistado ha hecho consciente la construcción de la derivada, una vez descrito y comprendido el comportamiento de las tangentes, de acuerdo a sus valores. Acudiendo a la

herramienta Geogebra®, se muestra la función $f(x) = \frac{1}{8}(x-2)^2 + 2$ y, activando los deslizadores, el entrevistado visualiza las tangentes en algunos puntos y observa en la tabla de valores el comportamiento de sus respectivas pendientes. Se espera que en este punto de la entrevista se consiga el objetivo que se persigue en la pregunta, pues en caso contrario, no se podrá acceder a la comprensión del TFC.

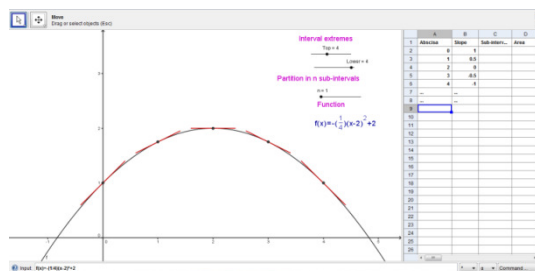


Figura 3.6 El uso del Geogebra® para la visualización de trozos de tangentes en algunos de sus puntos y el comportamiento de los valores de sus respectivas pendientes.

Pregunta 23. Se muestran dos funciones, una de ellas es la traslación vertical de la otra. Se quiere hacer razonar al entrevistado sobre el comportamiento invariante de las pendientes de las tangentes para toda una familia de funciones de la forma $y = f(x) + C$, lo que le permitirá conjeturar que la derivada es la misma para ambas.

Pregunta 24, 25, 26, 27 y 28. Antes de la pregunta 24, se aporta información para que el entrevistado corrobore o refute sus conclusiones, con respecto a la pregunta anterior. Este grupo de preguntas exhibe funciones constantes y lineales (con traslaciones verticales) para que el entrevistado construya las respectivas derivadas y empiece a comparar la diferencia de ordenadas en la función, con el área limitada por su derivada y el eje x en el mismo intervalo. Al entrevistado le resultará muy fácil calcular las áreas limitadas por las derivadas y el eje x en un intervalo, pues puede acudir a los métodos geométricos que ya conoce (primitive knowing). Estas preguntas entrenan al entrevistado para afrontar el bloque 4, lo que permitirá finalmente que evoque claramente y con el lenguaje adecuado el TFC. La herramienta Geogebra® es usada en la pregunta 28, con el fin de que corrobore o refute sus conjeturas a las que llegó anteriormente.

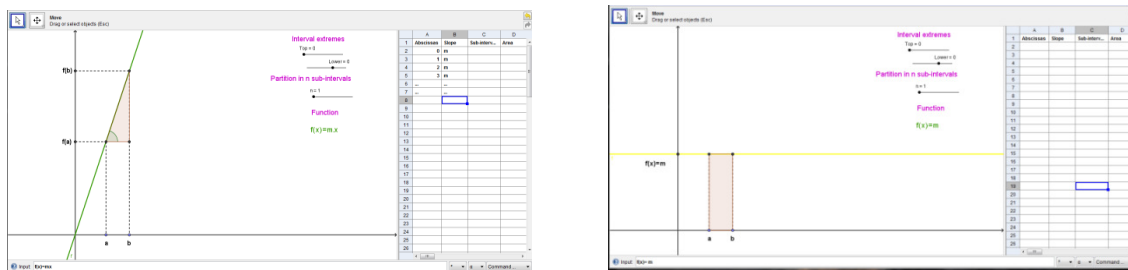


Figura 3.7 El uso del Geogebra® para la visualización de los valores, que corresponden a diferencia de ordenadas en la función y área en la respectiva derivada.

Pregunta 29. A esta altura de la entrevista, se quiere confirmar una vez más mediante una función cuadrática, que el entrevistado la asocia con su respectiva derivada, teniendo en cuenta el comportamiento de las pendientes de las tangentes y poder así acceder a las preguntas del bloque 4.

Pregunta 30, 31 y 32. Después del trabajo efectuado con las preguntas 24 a 28 con funciones constantes y lineales, se quiere que el entrevistado reflexione sobre sus conjeturas, ahora con funciones cuadráticas.

Pregunta 33. El objetivo ahora, es que el entrevistado generalice sus conjeturas para cualquier función continua, con el fin de llegar a conclusiones que evidencien la comprensión del TFC. Se presenta una función trascendente para indagar sobre el área limitada por ella y el eje x en un intervalo determinado. La intencionalidad es que el entrevistado evoque la necesidad de tomar la función presentada como la derivada (función-pendiente) y busque construir la función original respectiva, para calcular la diferencia de ordenadas en el intervalo, el cual equivale al área a calcular.

Pregunta 34. Es la última pregunta de la entrevista y exige al entrevistado, mediante un razonamiento refinado, evocar en un lenguaje matemático la relación inversa que existe entre las cuadraturas en la derivada y las tangentes en la función original. Para ello, se presenta la función $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\text{sen}2x}{4}$ y su respectiva derivada $f(x) = \text{sen}^2x$ y de nuevo, se indaga por el procedimiento que aplicaría para calcular el área limitada por la función $f(x) = \text{sen}^2x$ y el eje x en el intervalo $[0, \pi]$.

Este capítulo puede ser considerado como el horizonte que permitirá describir y analizar con mayor precisión, los avances y dificultades presentados durante el desarrollo del trabajo de campo en el próximo capítulo.

4 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA INFORMACIÓN

En las investigaciones que se enmarcan en el contexto educativo, se destaca el enfoque y análisis cualitativo, como la metodología más apropiada para la recolección de la información sobre comportamientos, actitudes y aptitudes de los estudiantes, con el fin de describir los análisis respectivos llevados a cabo en el proceso de comprensión. Un argumento que soporta lo anterior, tiene que ver con la concepción de los procesos educativos como fenómenos sociales, que son fundamentados más en procesos de carácter inductivo como explorar y describir, para luego generar perspectivas teóricas y metodológicas que ayudan a fortalecer el trabajo en el aula.

4.1 El enfoque cualitativo de nuestro estudio

Dado que nuestro estudio se enmarca en el campo de la Educación Matemática, se ha elegido precisamente el enfoque cualitativo, con el fin de que la entrevista socrática para la comprensión del TFC se convierta en una experiencia educativa, que permita precisamente realizar exploraciones y descripciones sobre los entrevistados, que nos acerquen cada vez más a una interpretación adecuada de cómo comprenden los conceptos involucrados.

El enfoque cualitativo se caracteriza por estar fundamentado en métodos de recolección de datos no estandarizados y en procedimientos que son analizados caso por caso y dato por dato, hasta llegar a una perspectiva más general, construyendo hipótesis que se van refinando conforme se recaban más datos.

En el desarrollo de esta sección explicitaremos el método, el diseño, la selección de los participantes entrevistados y, la forma en que se recolectó y analizó la información.

4.1.1 El método

El estudio de casos es una investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real (Yin, 2009), en la que los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente visibles, y en la que se utilizan distintas fuentes como evidencia: observaciones, entrevistas, cuestionarios, entre otros. Por su parte, (Salkind, 1999) lo define como el método empleado para estudiar a un individuo o una institución, en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible.

Aunque los estudios de casos han sido considerados tradicionalmente, como un método de investigación débil, existe un punto de vista contrario que la concibe como una valiosa herramienta de investigación, ampliamente utilizada en el análisis de la información dentro de las distintas disciplinas científicas, como lo es el contexto educativo, dado que permite observar y analizar particularidades que otros métodos no logran identificar.

Se concibe así el método de casos como el más adecuado para el presente estudio, dadas las ventajas que ofrece para dilucidar comportamientos, actitudes y conocimientos que evidencian el avance en la comprensión de los entrevistados, identificando tres casos, de acuerdo al nivel de comprensión alcanzado, tal como se describen a continuación.

4.1.2 El diseño y la identificación de los tres casos

El diseño de una investigación es el plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información requerida y poder cumplir cabalmente con el objetivo trazado. En este orden de ideas, el estudio plantea al comienzo la identificación del problema y se decide consolidar una entrevista de carácter socrático durante tres fases: la inicial, que es aplicada a cinco estudiantes, y en la que se identifican algunas dificultades en la consecución de las preguntas para cumplir con el objetivo que se persigue, lo que se evidencia en las respuestas; la intermedia, que es aplicada a un segundo grupo del mismo número de estudiantes y demuestra la necesidad de otras preguntas que afiancen y profundicen sobre los procesos de razonamiento infinito y, por último, la final, que corresponde a la versión más refinada y es aplicada a

diez estudiantes entre universitarios y de educación media; esta última versión es con la que se desarrolla nuestro estudio cualitativo.

En esta etapa final, se logran identificar tres tipos de entrevistados, de acuerdo a los resultados y el avance en la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes: el primer grupo se etiqueta como caso *de tipo 1 o caso Valentín*, en el que se identifican dos estudiantes (uno de la universidad de Antioquia³⁵ y el otro del colegio Gimnasio Vermont³⁶) que logran llegar sólo hasta el nivel 2 (*Image making*) de comprensión en nuestro marco teórico; el segundo se etiqueta como *caso de tipo 2 o caso Sabina*, y a él pertenecen cuatro estudiantes (dos de la U. de A y dos del CGV) que logran ubicarse en el nivel 3 (*Image having*) de comprensión y, el tercer grupo se etiqueta como *caso de tipo 3 o caso Luciana*, al que pertenecen cuatro estudiantes (tres de la U. de A y uno del CGV) que logran llegar al nivel 4 (*Property noticing*) de comprensión.

Para el análisis de la información, se analizan los tres casos de entrevista para cada uno de los bloques de preguntas, desde tres de las características que la teoría de PK presenta: *Folding Back*, *complementariedad de la acción* y *complementariedad de la expresión*. Es necesario puntualizar que cualquier expresión de duda o desconocimiento que implique acudir a conceptos anteriores, sin haber realizado procesos de comprensión, no son susceptibles de ser considerados como momentos de *Folding Back*; en nuestro estudio y, de acuerdo a la teoría de PK, el *Folding Back* se considera como un fenómeno que ocurre, cuando se observa una reexaminación en los niveles de comprensión anteriores que involucran una asociación de ideas entre los conceptos, y no se puede reducir al sólo recuerdo de ellos. Una vez se haya dado el *Folding Back*, se considera que hay avance a un nivel de comprensión superior, cuando necesariamente haya pasado de nuevo por las complementariedades de la acción y la expresión en el nivel de retroceso y esté razonando con los conceptos y procesos del nuevo nivel.

Por lo anterior, el diseño de nuestro estudio es de carácter *fenomenológico*, pues se pretende reconocer las percepciones de los entrevistados y el significado de los fenómenos o experiencias que se dan durante la entrevista, todo esto en función de las respuestas dadas, las cuales finalmente evidencian la comprensión.

El diseño fenomenológico permitirá además:

- Describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante y desde la perspectiva construida colectivamente.

³⁵ Que abreviaremos de ahora en adelante U. de A.

³⁶ Que abreviaremos de ahora en adelante CGV.

- Interpretar los posibles significados en el análisis de los discursos, en concordancia con la teoría de PK.
- Contextualizar por parte del investigador las experiencias de los entrevistados en términos de su temporalidad, espacio, conocimiento y razonamiento sobre los conceptos y procesos de razonamiento infinito.

Dados los aspectos señalados anteriormente para el diseño fenomenológico, los momentos de *Folding Back* son fácilmente identificados en cada uno de los tres casos durante el presente estudio, al igual que aquellas situaciones que durante la entrevista identifican el paso por las *complementariedades de la acción y la expresión*.

4.1.3 La selección de los participantes entrevistados

Teniendo en cuenta que los conceptos tratados para la comprensión del TFC no requieren que los entrevistados hayan pasado por un curso regular de Cálculo Diferencial, se eligieron diez estudiantes, seis de ellos de la U. de A. que están en el primer semestre de Ingeniería y los otros cuatro de grado 11° del CGV, Institución Educativa de carácter privado.

4.1.4 La recolección de la información

La entrevista de carácter socrático es el instrumento utilizado para la recolección de los datos en el presente estudio, dadas las ventajas y características particulares ya descritas en el Capítulo 1. Sin embargo, sin ser el objetivo central de la investigación, se logra confeccionar un test semi-estructurado producto del guión-entrevista, con el fin de corroborar y por qué no, generalizar resultados analizados durante el trabajo de campo y observando cómo los descriptores actúan para establecer el nivel de comprensión para el TFC a un grupo de 50 estudiantes, en el que participan de último año de bachillerato y primer año de universidad, en los programas de Ingeniería o Licenciatura en Educación Matemáticas y Física. Sobre el test volveremos más adelante.

4.2 El trabajo de campo

Con el fin de describir y analizar las respuestas de los estudiantes durante las entrevistas, son identificados para cada uno de los tres casos los momentos de *Folding Back* y se detallan las complementariedades de la acción y la expresión en cada uno de los bloques de preguntas. El *ATLAS.ti* 6.2 es usado como herramienta para detectar términos o evocaciones en las transcripciones de las entrevistas, que hacen referencia a situaciones de duda, retrocesos, reflexiones tardías, posibles acciones mentales o expresiones que indiquen una caracterización de cómo se está llevando a cabo el proceso de comprensión. Es necesario resaltar que este proceso de análisis de la información se hace mediante una combinación entre las observaciones realizadas durante la entrevista, el contenido del mismo guión de entrevista y la correspondencia con la teoría de PK.

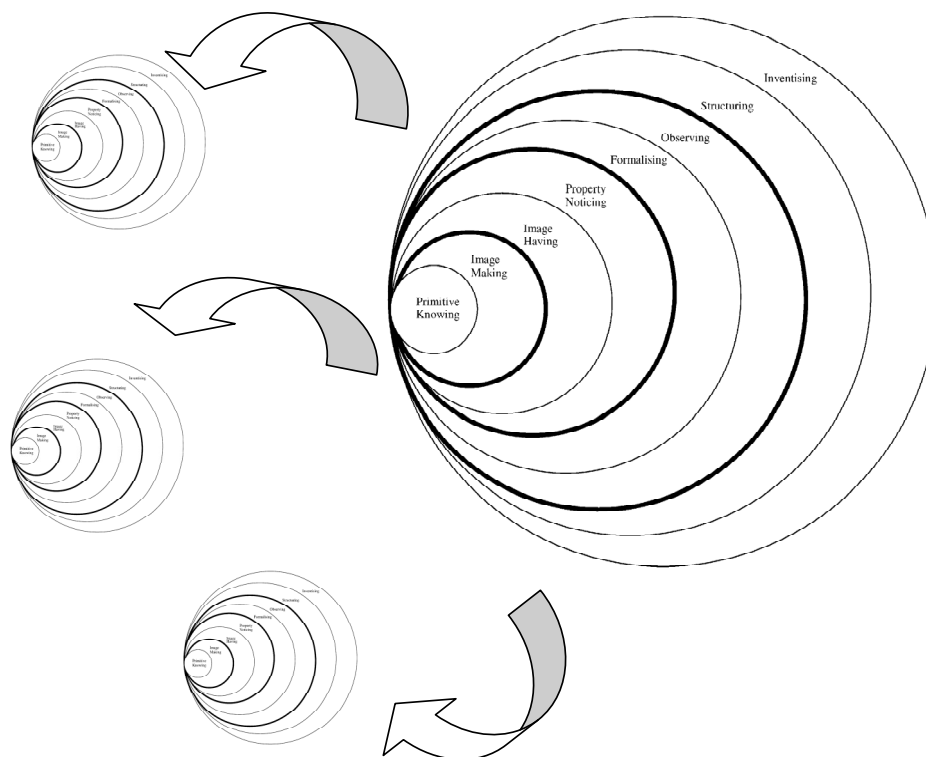


Figura 4.1 Representación gráfica de un posible *Folding Back* en el que se regresa a otro modelo para el tratamiento de un concepto o relación matemática.

Los conceptos de línea recta, pendiente, secante, tangente, función, área, monotonía, derivada, ordenada, región plana y la idea de infinito, están

directamente relacionados con los descriptores ya enunciados en el Capítulo 3 y serán objeto de análisis, en conjunto con los procesos de razonamiento infinito que se relacionan directamente con la *estimación, asociación y caracterización*, lo que indicará cuándo el entrevistado está actuando o expresando en un nivel de comprensión determinado.

Durante el paso por algunos bloques de preguntas en los tres casos (Valentín, Sabina y Luciana), se destaca la posibilidad de constatar situaciones de *Folding Back*, que suponen la necesidad de reexaminar la comprensión en un nivel interno de otro concepto o relación conceptual matemática, que habría sido objeto de estudio en un contexto o situación de aprendizaje anterior (un modelo³⁷ para otro concepto previo), es decir, nuestro estudio pudo determinar como fenómeno emergente la posibilidad de un *Folding Back* que revierte en el modelo de otro concepto matemático anterior, como se muestra en la Figura 4.1, aunque la teoría de PK no sea explícita en este sentido.

Como comentario final, ya en el Capítulo 1 se presentaron dos mapas en Figura 1.1, de acuerdo a (Pirie & Kieren, 1991b) y (Martin, 2008), los cuales representaban los posibles recorridos en la comprensión de dos estudiantes y, en las tablas 1.1 y 1.2, se llevó a cabo una descripción para las complementariedades de la acción y la expresión, de acuerdo a una experiencia de enseñanza para la ecuación cuadrática, exhibiendo los rasgos generales que dan cuenta del momento en que el aprendiz está actuando y expresando. En forma análoga y como producto de nuestro estudio, al finalizar el análisis de las entrevistas se logra consolidar un mapa del recorrido en la comprensión para cada tipo de caso dentro del modelo, de acuerdo a los *Folding Back* identificados y, una caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles 2, 3 y 4, en lo que respecta específicamente a la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes; resultados que son fruto del análisis cualitativo realizado. Los verbos usados para cada complementariedad son los mismos que propone la teoría de PK para etiquetar: *Image doing (hacer)* e *Image reviewing (revisar)*, *Image seeing (ver)* e *Image saying (decir)*, *Property predicting (predecir)* y *Property recording (registrar)*.

La descripción cualitativa, será desarrollada teniendo como base algunos episodios de las entrevistas en cada caso correspondiente, de acuerdo a cada bloque de preguntas.

³⁷ Recuérdese que en el Capítulo 1, se precisó que el término modelo de Pirie & Kieren sólo hace referencia al gráfico fractal que muestra la estructura para un concepto o relación matemática particular. En este sentido, cada entrevistado desarrolla un camino propio dentro del modelo para el avance en la comprensión de un concepto.

4.2.1 Caso tipo 1: Valentín

Bloque 1

Cuando a Valentín se le indaga por las características de una línea recta, muestra el primer síntoma de un *Folding Back*, pues no reconoce inicialmente la diferencia entre una recta y un segmento de recta.

Episodio V1.1: El primer *Folding Back* para Valentín sobre las ideas de recta y segmento de recta en otro modelo

Profesor: Considera la recta que se muestra a continuación. ¿Crees que tiene longitud?, ¿crees que tiene pendiente?, en caso afirmativo, ¿podrías describir un método para calcular sus medidas?

Valentín: Pues sí, porque en la figura se muestran los extremos de la recta y además tiene pendiente, pero no sabría como calcular tales medidas.

Profesor: Entonces, ¿qué diferencia podría tener una recta con un segmento de recta?

Valentín: (Traza en el papel) Ahh, pero es que ya recuerdo que la recta no tiene principio ni fin, que está determinada por dos puntos, que... Por lo tanto no sabría cómo medirla, o mejor, creo que no tiene medida, ¿o sí?

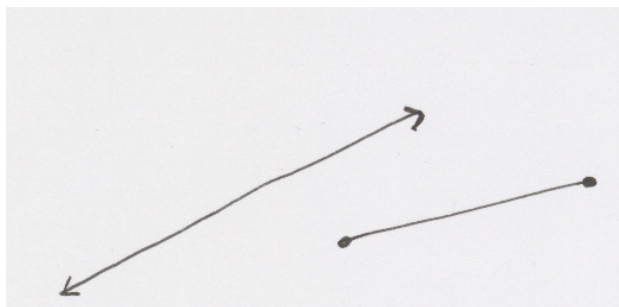


Figura 4.2 Representación gráfica hecha por Valentín para reconocer la diferencia entre una recta y un segmento de recta.

Profesor: Por supuesto que no, porque la recta es indefinida... ¿Pero no podrías por lo menos exhibir algún instrumento que permita medir la pendiente?

Valentín: Es que la pendiente es como el grado de inclinación de una recta, entonces, podría ser el transportador, ya que no tengo cuadrículas para calcularla exactamente.

En este episodio se puede observar que Valentín, transita por un *Folding Back* en el nivel interno de otro modelo (para otro concepto), que hace que reexamine los conceptos y características que giran alrededor de la idea de los elementos geométricos básicos. Se destaca el hecho sobre las preguntas que el investigador propone (alternas al guión) que permiten a Valentín *entorpecerlo*, pero luego hacerlo reflexionar ante su confusión entre los conceptos de recta y segmento de recta. Sin mucho esfuerzo, Valentín actúa realizando una construcción mental que le permite salir de la confusión y, expresa mediante gráficos, lo que recuerda a partir de situaciones de aprendizaje anteriores.

Asocia de manera correcta la pendiente de una recta con el término *inclinación de la recta*.

Episodio V1.2: El segundo *Folding Back* sobre el trazo de la función $y = x^3$ en otro modelo

Profesor: ¿Podrías bosquejar en cada uno de los planos cartesianos algunas funciones que conozcas, exhibiendo sus nombres y expresiones algebraicas?

Valentín: Claro, podría ser $y = x^2$ que tiene esta forma de U, también podría ser $y = x$ que tiene ésta (Las traza correctamente en el papel).

Profesor: Y que tal si graficas funciones constantes o la función $y = x^3$ en otro plano cartesiano?

Valentín: Una función constante podría ser por ejemplo, $y = 2$ que se traza así (traza en el papel) y la función cúbica, mmm..., no la recuerdo, creo que es así (traza en el papel). ¿Puedo hacer la tablita de valores para confirmar mi gráfico?

Profesor: Adelante...

Valentín: Ahh no es así... (cambia el gráfico)

Profesor: ¿Crees que esta porción de la curva si va en el segundo cuadrante?, ¿por qué?

Valentín: (Realiza cálculos) Ahh no, claro que tiene que ser negativo, entonces queda así.

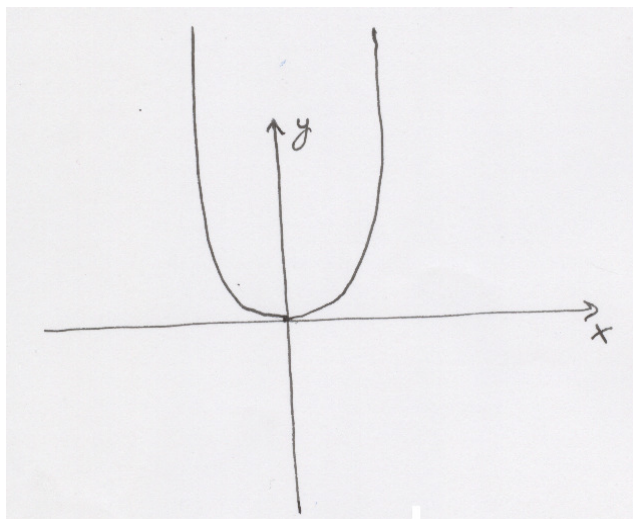


Figura 4.3 Primera representación gráfica de la curva $y = x^3$ hecha por Valentín.

Valentín logra reconocer las formas de algunas funciones elementales como las cuadráticas y las constantes, pero al momento de rastrear su conocimiento primitivo en cuanto a las funciones cúbicas, se verifica que no tiene claro su respectivo comportamiento. Valentín se ve en la necesidad de recurrir a una tabla de valores, que de acuerdo a nuestra teoría de PK, podría ser también un comportamiento o acción de otro concepto en un nivel interior de otro modelo, pues a esta altura del guión, el entrevistado debe haber superado la etapa del trazo de curvas punto a punto y estar en la capacidad de reconocer el comportamiento general de las funciones elementales, en correspondencia con su expresión algebraica.

Aún así, cuando Valentín recurre a la tabla de valores, traza una gráfica para $y = x^3$, correcta en el tramo que corresponde al primer cuadrante, pero la hace pasar por el segundo cuadrante (la concibe como $y = x^2$ y muy contraída verticalmente); al parecer no asocia el carácter cúbico (impar del exponente) de la expresión con los valores negativos para x , lo que arroja resultados negativos y , por lo tanto, el trazo deberá corresponder al tercer cuadrante. El investigador, de inmediato se percata del *Folding Back* y en coherencia con el decálogo para la entrevista de carácter socrático, mediante nuevas preguntas, hace que Valentín caiga en cuenta de su error y actúe mediante el trazo correcto del tramo de la gráfica $y = x^3$ en el tercer cuadrante, expresando finalmente la cualidad de esta expresión cúbica cuando los valores de x son negativos.

Posteriormente, Valentín logra describir en forma completa una región encerrada en el plano cartesiano, lo que se considera fundamental para el enunciado correcto del TFC más adelante.

La pregunta 9, como se dijo en el análisis de las preguntas, es clave para que comprenda el dispositivo con el que Valentín razonará de aquí en adelante. En efecto, Valentín no tiene problema en afirmar que: *“una misma diferencia en la longitud de un par de segmentos, puede ser asociada con infinitos pares de segmentos”*. En el aporte de información para involucrar los términos de abscisa y ordenada, Valentín se muestra un poco confuso y manifiesta no estar familiarizado con dichos términos, sin embargo, durante el transcurrir de la entrevista se logra que Valentín refine su lenguaje adoptándolos cuando expresa sus conjeturas y confirmando la entrevista como una experiencia de aprendizaje.

Cuando se le muestran algunas regiones en el primer cuadrante para que examine la posibilidad de calcular sus respectivas áreas, Valentín recuerda con facilidad las fórmulas para hallar el área de rectángulos, círculos y trapecios, pero se le dificulta recordar la de una región exterior a un círculo e interior al cuadrado que lo inscribe; sin embargo no tarda en expresarla correctamente más adelante, de acuerdo a las preguntas alternas realizadas por el investigador. Cuando se le pregunta por un método para calcular el área de una región irregular, Valentín se muestra impreciso y no logra establecer una descripción correcta de algún método.

Episodio V1.3: Un *Folding Back* sobre el concepto de recta secante a una curva

Profesor: (Manipulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, con una secante que la corta en los puntos (2,4) y (4,16). Si haces zoom (acciona la barra de herramientas), ¿qué observas?

Valentín: Que siempre va a cortar a la curva en dos puntos.

Profesor: ¿Y si realizas el zoom infinitas veces?

Valentín: (Realiza el zoom con la herramienta) Creo que la curva tiende a convertirse en línea recta, pero siempre va a ser cortada en dos puntos por la secante.

Profesor: ¿Es decir que podemos afirmar que una recta secante siempre corta a cualquier curva en dos puntos?

Valentín: Claro.

Profesor: Traza una secante a $y = x^3$ que pase por el origen. ¿En cuántos

puntos la corta?

Valentín: (Traza y señala en la gráfica) En dos, aquí y aquí.

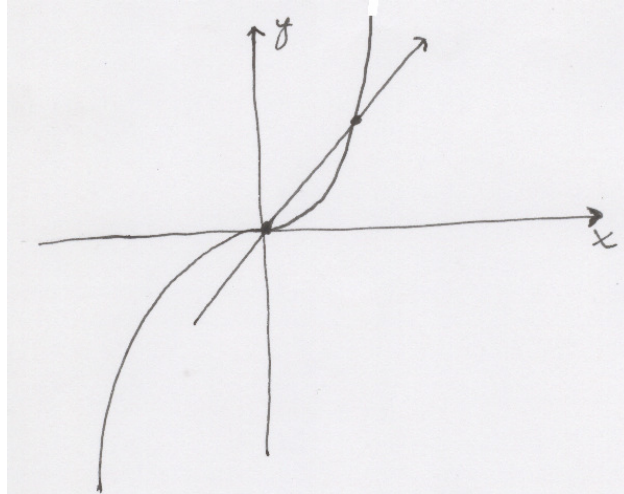


Figura 4.4 Representación gráfica de la curva $y = x^3$ hecha por Valentín y una secante que pasa por origen.

Profesor: Recuerdas que una línea recta no tiene medidas porque es indefinida, ¿verdad?

Valentín: Sí.

Profesor: Entonces prolongala, ¿qué observas?

Valentín: Ahh, es que la curva también se debe prolongar. Claro, la corta en un tercer punto. ¿Entonces se puede concluir que una recta secante puede cortar a una curva en más de dos puntos?

Profesor: ¿Tú que crees?...

Valentín: Que sí.

En este punto de la entrevista, Valentín de nuevo evidencia un *Folding Back* en lo que respecta al concepto de recta secante, pues lo asocia a la secante de una circunferencia, que es cortada sólo en dos puntos exactamente. El investigador recurre a un contraejemplo que obliga a Valentín a exteriorizar una complementariedad de la acción, consistente en trazar una secante a la curva en $y = x^3$ que pase por el origen; en efecto Valentín recuerda que la recta es indefinida al igual que la curva y, en este orden de ideas, la secante cortaría a la curva en más de dos puntos, lo que es expresado correctamente. En términos de Tall y Vinner, lo que Valentín evidencia es un choque entre su concepto-imagen mal concebido y el concepto-definición de recta tangente, lo que garantiza la posibilidad de continuar con la entrevista.

Se destaca en Valentín la concepción de linealidad de una curva cuando se realiza el proceso de zooms, lo que abre las puertas para un correcto razonamiento con procesos infinitos en el siguiente bloque de preguntas.

Más adelante, Valentín no tiene problema en concebir y describir la recta tangente a una circunferencia y a una recta.

Bloque 2

Se consideran los episodios presentados a continuación.

Episodio V2.1: Un *Folding Back* sobre el concepto de pendiente de una recta que lo hace reexaminar en el nivel de Primitive Knowing

Profesor: En la siguiente ilustración se muestra una secuencia de rectas. ¿Cuál de ellas crees que tiene la mayor pendiente y cuál la menor pendiente?, ¿podrías calcular exactamente la pendiente de cada una de ellas?

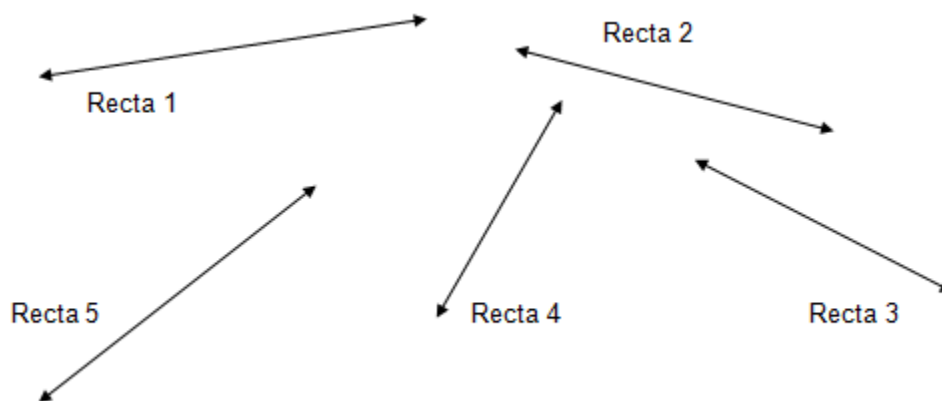


Figura 4.5 Ilustración mostrada en la pregunta 2 de la entrevista.

Valentín: La que tiene mayor pendiente sería la número 2, pues es la que está menos inclinada a la izquierda y la que tiene menor pendiente es la número 1, ya que está menos inclinada a la derecha. Ahora, no puedo calcular exactamente las medidas de las pendientes porque no están en el plano cartesiano.

Profesor: ¿Cómo es eso de “menos inclinada a la izquierda” y “menos inclinada a la derecha”?

Valentín: Sí, es que las de menor pendiente está más cerca del eje x positivo y la que está más alejada es la de mayor pendiente.

Profesor: Veamos... Imagínate una recta que comienza a girar con centro en el origen desde el eje x (desde los 0°) y barre el primer cuadrante y tercer cuadrante, pasando por el eje y , hasta coincidir de nuevo con el eje x .

¿Crees que esta última tiene más pendiente que la inicial?

Valentín: Pero es que es la misma primera.

Profesor: Entonces, ¿qué deduces?

Valentín: O sea que la que está muy cerca por la derecha del eje y es la que tiene mayor pendiente y la que está muy cerca por la izquierda también, pero la pendiente empieza a disminuir, entre tanto la recta gira entre los 90° y los 180° .

En este episodio se indaga de nuevo por el concepto de pendiente, obligando a Valentín a cuantificar pendientes, mediante la comparación de algunos casos concretos. Es aquí donde Valentín realiza un esfuerzo para comenzar a comprender procesos de razonamiento infinito, pero no hace una correcta correspondencia entre los valores y las inclinaciones de las rectas que visualiza. Valentín tiene un concepto-definición erróneo que le hacen pensar en el concepto de pendiente que depende de la ubicación de la recta con respecto al semi-eje x positivo y por eso describe la que está más alejada de ese semi-eje como la de menor pendiente.

Valentín se ve en la necesidad de revisar en el primer nivel de comprensión mediante un *Folding Back* su concepto de pendiente, cuando en algún momento intentó acudir a la expresión analítica para calcularla. Mediante la aplicación de esta expresión y las preguntas con las que el investigador intenta que Valentín asocie la recta de menor pendiente con los valores negativos cada vez más alejados de cero, se consigue finalmente que se prosiga con la entrevista (Paso por la complementariedad de la acción en el nivel 2: *Image doing*). Más adelante, mediante un aporte de información, se logra precisar que los valores de las pendientes de rectas en un cuadrante crecen o decrecen en forma acelerada y no en forma proporcional a los ángulos barridos por las mismas:

Aporte de información: *Observa que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=0$ y $y=x$ varían entre 0 y 1, mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=x$ y $x=0$ varían entre 1 e ∞ . De la misma manera, los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=-x$ y $y=0$ varían entre -1 y 0, mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $x=0$ y $y=-x$ varían entre $-\infty$ y -1 .*

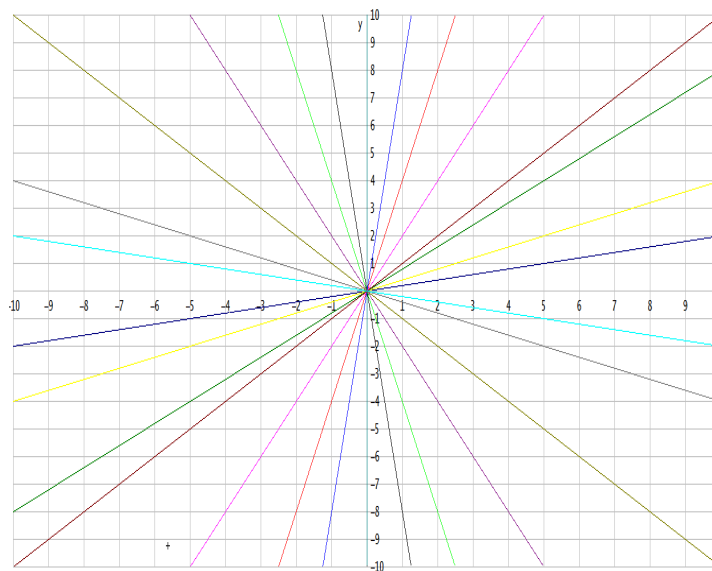


Figura 4.6 Ilustración mostrada a Valentín en la pregunta 3 de la entrevista, antes de proporcionar el aporte de información.

De otro lado, aunque Valentín no logra reconocer de inmediato la tangente como límite de un haz de secantes mediante visualizaciones estáticas, con la ayuda de la herramienta Geogebra® supera la dificultad conceptual. En cuanto al proceso de razonamiento infinito que tiene que ver con las áreas, Valentín expresa en forma adecuada la idea intuitiva de límite como mecanismo para su estimación. Se puede afirmar con certeza que Valentín logra alcanzar el nivel de comprensión del *Image Making*, con respecto al TFC.

Se considera que Valentín *actúa* en el *Image doing* (*hacer*) cuando realiza sus construcciones mentales y grafica la situación y, *expresa* en el *Image reviewing* (*revisar*) cuando verbaliza lo graficado, en el contexto de la teoría de PK.

Después de este *Folding Back*, Valentín intenta razonar con preguntas del nivel de comprensión del *Image Having*.

Bloque 3

En este bloque de preguntas, la imagen deberá ser comprendida en lo que respecta a la construcción de derivadas, mediante la caracterización de los

comportamientos de las tangentes en la antiderivada (llamada función original en la entrevista). Valentín alcanza a razonar en este nivel, observándose un Folding Back que realiza cuando se le indaga por el comportamiento de una función, regresándolo al primer nivel. He aquí el episodio respectivo.

Episodio V3.1: Un regreso del tercer nivel al primer nivel. Un *Folding Back* en el reconocimiento gráfico de las funciones $y = x^3 + C$ y los intervalos de monotonía

Profesor: Identifica las siguientes funciones y describe los intervalos (en el eje x) en los que son positivas y en los que son negativas (en el eje y).

Valentín: La primera se me parece a $y = x^2$ y es positiva en todos los reales, la segunda es la función $y = x^3$ y es positiva de -1 en adelante y negativa desde $-\infty$ hasta -1 , la tercera y la cuarta no sabría identificarlas, pero son positivas en...

Profesor: Un momento..., ¿por qué dices que la primera es $y = x^2$, la segunda $y = x^3$?

Valentín: Pues... Porque tienen la forma.

Profesor: ¿De qué otra forma podrías verificar que la segunda sí es $y = x^3$?

Valentín: No sabría, Ehh...

Profesor: ¿Qué tal mediante una tabla de valores?

Valentín: Pues, si x es igual a 0 , la y también vale 0 , pero no, aquí no daría. No, no sabría... mmm...

Profesor: La función que tú dices identificar como $y = x^3$ es en realidad, $y = x^3 + 1$ porque...

Valentín: Ahh ya comprendo. La función $y = x^3$ es la que pasa por el origen, en cambio, esta que se muestra está subida una unidad.

Profesor: Bien, ¿Y dónde crece la segunda función?

Valentín: Pues donde es positiva, ¿no?

Profesor: Veamos... ¿En $x = -2$ la función crece?

Valentín: Claro.

Profesor: Evalúa la función en $x = -2$. ¿Cuál es el resultado?

Valentín: -8 .

Profesor: ¿Entonces la función es positiva o negativa allí?

Valentín: Ahh no... Entonces es negativa, pero allí crece. Ya. O sea que el valor de la y es el que define el signo de la función y éste es independiente del tramo donde la función crece o decrece, ¿no es así?

Profesor: Dilo de nuevo...

Valentín: La función es positiva cuando el valor de y es positivo, es decir,

cuando la gráfica está por encima del eje x , pero es negativa cuando está por debajo; pero esto es independiente del tramo donde la función crece o decrece.

Profesor: Así es.

Se observa cómo Valentín, en primer lugar no recuerda los procesos de traslación vertical de una función de acuerdo a su expresión algebraica, y posteriormente no distingue el concepto de monotonía, de la propiedad de ser positiva o negativa. El profesor le ayuda a reexaminar sobre este fenómeno mediante los valores que toma la función para que las compare con el gráfico, en donde Valentín identifica un elemento discrepante. Este *Folding Back* hace que Valentín recurra a ideas y conceptos que corresponden a descriptores del nivel de *Primitive Knowing* y se hace necesario para la identificación posterior de los intervalos de crecimiento, decrecimiento y signos en la derivada, para la construcción de la correspondiente anti-derivada. Valentín actúa para superar de nuevo el primer nivel, construyendo tablas de valores y ubicando puntos en el plano cartesiano para compararlos con los puntos en la gráfica que visualiza y, evidencia la *complementariedad de la expresión*, mediante exclamaciones que revelan el paso por los tres momentos que se exponen en el decálogo de una entrevista de carácter socrático, hasta avanzar en su comprensión.

Cuando a Valentín se le propone razonar sobre el comportamiento de las tangentes en porciones de curvas, actúa y expresa en forma correcta sobre las estimaciones de los valores que corresponden a procesos de razonamiento infinito, pero no logra asociarlos con el trazo de una función-pendiente. Valentín se muestra confuso y responde con un lenguaje vago a las preguntas del investigador en esta etapa de la entrevista.

Bloque 4

Valentín desestima el establecimiento de la relación entre las áreas y las pendientes cuando se le dificulta trazar una derivada, de acuerdo al comportamiento de las pendientes en la anti-derivada. Por tal razón, se considera que Valentín no alcanza el nivel de comprensión de *Property Noticing* de nuestro marco teórico.

Mapa del recorrido en el modelo para la comprensión del TFC, en el caso de Valentín

Valentín comienza su recorrido en el nivel de *Primitive Knowing* registrando *foldink back* en otros modelos sobre conceptos e ideas como las de: rectas, segmentos de recta, función cúbica y recta secante³⁸.

Rectas, segmentos de recta, función cúbica y recta secante

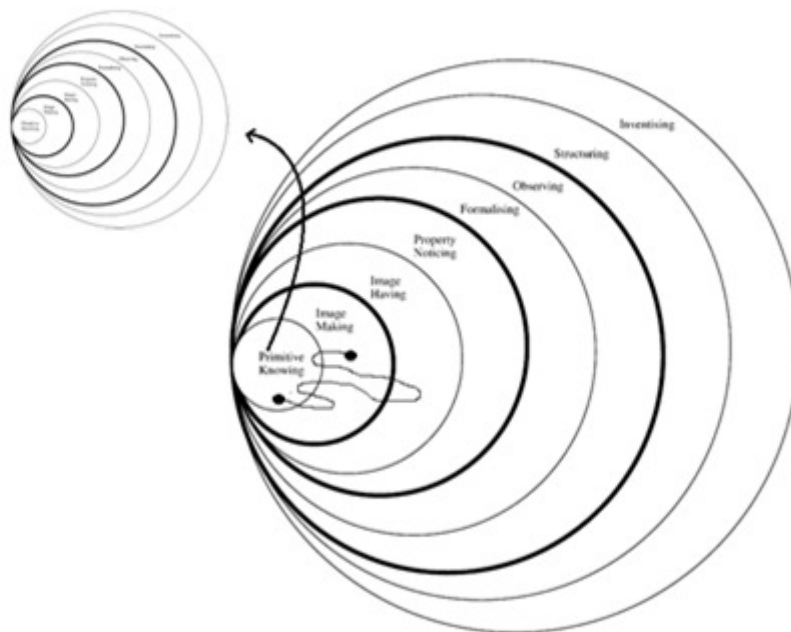


Figura 4.7 Mapa del recorrido en el modelo para la comprensión del TFC, en el caso de Valentín.

Luego, pasa por el nivel del Image Making, registrando *Folding Back* en lo que respecta a la estimación de pendientes, lo cual hacen regresar al nivel de Primitive Knowing. Actuando y expresando, de acuerdo con la teoría de PK, Valentín logra razonar por un momento en el nivel de Image Having al tratar de describir correctamente los comportamientos de rectas tangentes³⁹

³⁸ La flecha que apunta hacia afuera, indica los *Folding Back* realizados en otros modelos para el tratamiento de conceptos o relaciones matemáticas.

³⁹ Valentín alcanza a sobrepasar las dificultades que suelen ocurrir en lo que respecta a procesos de razonamiento infinito, involucrados en los conceptos de tangente y cálculo de áreas de regiones irregulares. De acuerdo al análisis histórico-epistemológico desarrollado en el Capítulo 2, parece ser natural que el acto de comprender estos conceptos del análisis

sobre curvas e identificar la diferencia entre los intervalos de crecimiento y decrecimiento, con los intervalos de ser positiva o negativa y realiza un *Folding Back* que lo regresa al primer nivel. Valentín no logra alcanzar los descriptores del tercer nivel, lo que hace inferir que Valentín alcanza el nivel de comprensión del Image Making (nivel 2).

4.2.2 Caso tipo 2: Sabina

Bloque 1

Sabina también realiza reexaminaciones en el primer nivel durante la entrevista, lo que hace que se generen *Folding Back* en otros niveles internos de conceptos subyacentes que también son tratados en este bloque de preguntas.

Episodio S1.1: El primer *Folding Back* para Sabina sobre las ideas de recta, segmento de recta y semirrecta en otro modelo

Profesor: Considera la recta que se muestra a continuación. ¿Crees que tiene longitud?, ¿crees que tiene pendiente?, en caso afirmativo, ¿podrías describir un método para calcular sus medidas?

Sabina: Longitud, mmm..., creo que sí, pues sería medir con cualquier instrumento de medida longitudinal, podría ser una regla, un metro... y en cuanto a la pendiente, esa si no se puede medir, pues no está ubicada en un plano cartesiano.

Profesor: (Traza un segmento de recta, sin flechas en los extremos) Ahora, observa esta figura geométrica... ¿cómo crees que se llama?

Sabina: Ehh... ¿las flecha indican que la recta continúa en la primera figura?

Profesor: Tu que opinarías...

Sabina: Que sí. Pues,... creo que sí. Y si es así, entonces la línea recta no tiene comienzo ni se sabe dónde termina, en cambio esta otra figura que se llama mmm..., ¿cómo es?, ¿semi-rrecta?, esta sí se sabe donde comienza y donde termina.

relacionados con procesos infinitesimales, ocurre en primer lugar en un contexto geométrico, en el cual su concepto-imagen apenas comienza a asimilarse y luego, ocurre en un contexto analítico, en el cual su concepto-definición es correcto y entra en armonía con el concepto-imagen asimilado; en forma análoga puede ser apreciado con Barrow y su concepción con la recta tangente a una curva en un punto. Lo que Valentín no logra, es la construcción mental de la derivada, de acuerdo a los comportamientos de las pendientes en la función original. Recuérdese que Galileo sólo llega a vislumbrar la velocidad, como la pendiente de la tangente a una curva descrita por un proyectil, pero no construye la derivada.

*Profesor: A esta última a la que te refieres se le llama segmento de recta.
Sabina: Ahh, ya me acordé.*

El episodio muestra que Sabina, de la misma manera que Valentín, asocia de forma incorrecta la idea de línea recta con la de segmento de recta y, con respecto al concepto de pendiente, no logra exhibir un método que le permita estimar su grado de inclinación, pues recurre a la necesidad de un plano cartesiano. Sin embargo, cuando el investigador recurre a la visualización geométrica del segmento de recta con extremos bien definidos, Sabina de forma rápida describe la diferencia entre las flechas que se muestran en la recta y los puntos en los extremos del segmento. Aunque Sabina expresa incorrectamente el término semirecta para referirse al segmento de recta, no hay problema en continuar con la entrevista y hacer la aclaración para diferenciar los dos términos, pues en este análisis se corroboró un proceso de razonamiento correcto en la descripción de los dos entes geométricos, independiente de que los términos (nombres) se hayan recordado o no.

Sabina identifica las formas correctas en el trazo de funciones elementales como las constantes, cuadráticas, cúbicas y algunas racionales, lo cual es suficiente para continuar con el avance para la comprensión del TFC.

Episodio S1.2: Un *Folding Back* con respecto al trazo de las funciones seno y coseno

Profesor: Ahora, ¿podrías describir todas las curvas que limitan cada una de las siguientes regiones sombreadas?

Sabina: Sí, en la primera, la región está limitada por la recta $y = 2$ y el eje x , en la segunda la... y en la última la región está limitada por la función $y = \cos x$ y el eje x .

Profesor: Sabina, vamos por partes. En primer lugar, ¿crees que una región sólo se limita por la curva y un eje?

Sabina: Siii, ¿no?

Profesor: ¿Y las fronteras laterales?... También es importante que especifiques la ubicación de la frontera a describir: si está en la parte superior o...

Sabina: Ya, es decir, las rectas verticales. Ya... entonces, la primera región está limitada en la parte superior por la función constante $y = 2$, en la parte inferior por el eje x , y lateralmente por las rectas verticales $x = 1$ y $x = 5$; en la segunda... y en la última, la región está limitada en la parte superior por la función $y = \cos x$ y en la parte inferior por el eje x . En esta última creo que si basta con describir sólo estos dos límites, ¿verdad?

Profesor: Muy bien. Ahora, ¿por qué crees que la última función corresponde a la función $y = \cos x$?

Sabina: Pues porque tiene la forma.

Profesor: Pero la función seno también tiene una forma parecida...

Sabina: (Realiza cálculos) Profesor, estaba creyendo que con tener la misma forma bastaba para identificar la función, pero ya comprendí. Debo corroborar mediante una tabla de valores que todos los infinitos puntos pertenezcan a la función, y éste no es el caso. Esta última función corresponde a la función seno.

Sabina sale rápidamente del aprieto en el que se encuentra en la primera parte del episodio, cuando se le dificulta describir con un lenguaje preciso los límites que encierran una región plana en el plano cartesiano. Pero más adelante realiza un *Folding Back* que la hace regresar a la construcción de las curvas seno y coseno mediante una tabla de valores. Sabina pasa por la complementariedad de la acción cuando construye imágenes mentales (pues, no escribe) que le permiten asociar puntos coordenados a una y no a la otra gráfica trigonométrica. Luego, usando un lenguaje correcto expresa su avance en la comprensión.

A la hora de responder a la pregunta 9 del test, no duda en expresar que la diferencia de un par de longitudes de segmentos, puede corresponder a infinitos pares de segmentos.

Episodio S1.3: Un nuevo *Folding Back* sobre la composición geométrica de un trapecio para calcular su área

Profesor: Considera las siguientes regiones limitadas en el primer cuadrante del plano cartesiano, tal como lo muestra la figura. ¿Crees que se puede calcular el área de cada una de ellas? En caso afirmativo, ¿cómo?

Sabina: La primera corresponde a un rectángulo y por lo tanto se deben conocer las medidas de su largo y ancho; para la tercera sería un cuarto de

círculo, es decir $\frac{\pi r^2}{4}$, pero para la segunda, no recuerdo la fórmula de un

mmm... ¿esta figura es un trapecio?

Profesor: Claro que sí.

Sabina: Pero no me acuerdo de la fórmula.

Profesor: Y no puedes recurrir a algún método de tal forma que no necesites acudir a la fórmula del trapecio?

Sabina: Mmm... no lo encuentro.

Profesor: Veamos... Pensemos en las figuras que conforman el trapecio, y entonces si...

Sabina: Ahh ya, sólo basta con sumar el área del triángulo con la del trapecio.

Profesor: Así es. ¿Y para la cuarta?

Sabina: Parece que es otro triángulo pero con la hipotenusa un poco curva.

Profesor: ¿Entonces es un triángulo?

Sabina: No propiamente. La pregunta no es explícita. ¿Podría pensar en esa curva como la cuarta parte de una circunferencia?

Profesor: Tú lo has dicho.

Sabina: Entonces sí, es un área del cuadrado menos el área de la cuarta parte del círculo.

Profesor: (Mostrando una región irregular) ¿Y para la quinta figura?

Sabina: Muy complicado. Se podría dividir la figura así (divide la figura en pequeños cuadrados) y al sumar las áreas nos daría una aproximación.

Sabina muestra tener claras las fórmulas para las áreas de rectángulos y círculos, pero no logra recordar el área para un trapecio. Unos segundos más tarde, al realizar un *Folding Back* sobre la composición geométrica de un trapecio, lo logra construir mentalmente como la unión de un rectángulo y un triángulo de forma rápida hasta llegar a la fórmula requerida. Su concepción acerca de la estimación del área de una región irregular, invita a la idea de dividir la región en infinitas sub-regiones (grafica una rejilla en la región) lo que indica al investigador un acercamiento a la idea intuitiva de límite de una suma de Riemann, sin recurrir a sub-intervalos.

Sabina se muestra muy clara conceptualmente con respecto a las ideas de recta secante y tangente a cualquier curva, y hace evidente la separación con el concepto de recta tangente a una circunferencia, pero más adelante, se muestra una ruptura con la concepción de recta tangente a otra recta.

Se destaca el lapsus por el que Sabina transita cuando expresa la hipotenusa de un triángulo como curva, pero se logra establecer que fue tan sólo un lapsus, pues es ella misma quien rectifica su error y permite continuar la entrevista con un razonamiento adecuado para las siguientes preguntas.

Episodio S1.4: Un *Folding Back* sobre el concepto de tangente a una curva

Profesor: Considera el punto que se encuentra marcado en la siguiente función lineal. ¿Podrías describir la recta tangente a la función en dicho punto?, ¿cuántos puntos tienen en común una función lineal y la recta tangente a ella en un punto?

Sabina: ¿La tangente?, ¿podría ser así? (Grafica otra recta que corta a la original sólo en ese punto).

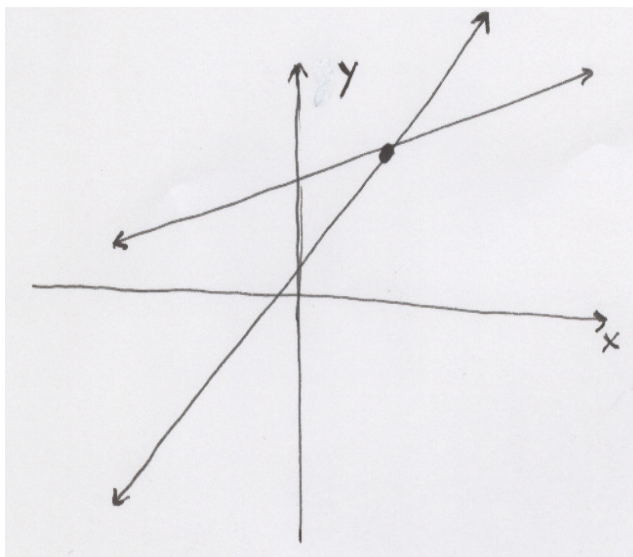


Figura 4.8 La idea inicial de Sabina para la tangente a una recta en un punto.

Profesor: ¿Por qué lo dices?

Sabina: Porque las rectas tangentes cortan en un sólo punto a una curva.

Profesor: Observemos lo siguiente. (Traza una curva que cambia su monotonía en dos puntos) Considera por ejemplo la función que te muestro aquí. Si trazas la tangente por este punto, ¿qué observas?

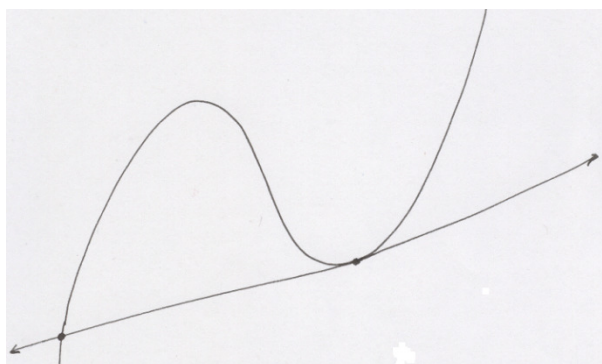


Figura 4.9 Contraejemplo propiciado por el investigador durante la entrevista de carácter socrático, para la comprensión del concepto-definición de una recta tangente a una curva, por parte de Sabina.

Sabina: Como las rectas son indefinidas, cortaría a la curva aquí y aquí. ¿Eso si se puede?

Profesor: Por supuesto... Ahora, ¿cuál crees que sea la pendiente de esta recta aquí?

Sabina: No sabría decirlo exactamente.

Profesor: ¿Y aquí?

Sabina: Pues tampoco sabría decir el valor, pero sería el mismo que en el punto señalado anteriormente, es decir, la pendiente de esa recta es la misma en cualquier punto. De hecho, el número que acompaña a la x en su ecuación siempre es el mismo.

Profesor: ¿Y la tangente?

Sabina: ¿También tendría que ser la misma en todos los puntos?

Profesor: Por supuesto. La tangente a una recta es ella misma.

Sabina: ¿Y entonces la tangente a la circunferencia qué?

Profesor: Ese sería un caso muy particular. Por eso se dice que el concepto de tangente es un concepto de carácter local y no global.

Al inicio del episodio, Sabina se ve *entorpecida* por el concepto-imagen de recta tangente a una circunferencia que regresa a su mente, pues se le dificulta concebir que la tangente a una recta en un punto es ella misma y, que por lo tanto, tienen todos sus infinitos puntos comunes. Pero más adelante, su concepto-definición irrumpe de nuevo, mediante un contraejemplo propiciado por el investigador, lo que hace que el proceso de comprensión avance, pasando por un *Folding Back*. Para superarlo y llegar de nuevo al razonamiento en el *Primitive Knowing*, Sabina pasa por la complementariedad de la acción cuando realiza un constructo mental sobre la forma de la ecuación de la recta, específicamente, de la ecuación pendiente-intercepto, pues logra identificar en ella el valor de la pendiente. Luego, expresa su avance en la comprensión cuando exterioriza la correspondencia entre el valor constante de la pendiente y el registro de una tangente a otra recta como entes geométricos coincidentes.

Bloque 2

Sabina exterioriza dos *Folding Back* en el nivel de comprensión del *Image Making*, los que son exhibidos en los siguientes episodios.

Episodio S2.1: De regreso al primer nivel, experimentando un *Folding Back* en el concepto de pendiente

Profesor: En la siguiente ilustración se muestra una secuencia de rectas. ¿Cuál de ellas crees que tiene la mayor pendiente y cuál la menor pendiente?, ¿podrías calcular exactamente la pendiente de cada una de ellas?

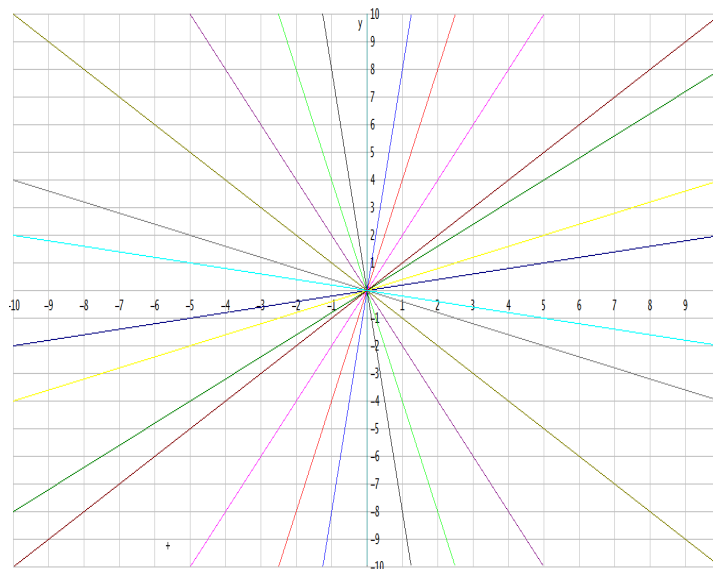


Figura 4.10 Ilustración mostrada a Sabina en la pregunta 3 de la entrevista, antes de proporcionar el aporte de información.

Sabina: La de mayor pendiente es la recta 4 y la de menor es la recta 1 y, para determinar sus valores exactos, necesitaría de un transportador o una cuadrícula.

Profesor: ¿Por qué dices que la número 4 es la de mayor pendiente y la de menor, la 1?

Sabina: Porque la número 4 está más inclinada y la número 1 está menos inclinada.

Profesor: Pero... la recta 3 también está muy inclinada.

Sabina: Sí, pero está muy inclinada pero para el otro lado.

Profesor. ¿Cómo es eso?

Sabina: Sí, es decir, está muy inclinada pero bajando.

Profesor: ¿Y acaso esas también no tienen pendiente?

Sabina: Sí, pero no sabría decirte cual es la diferencia... mmm..., ¿o tienen la misma pendiente?

Profesor: ¿Recuerdas cómo calcular la pendiente de una recta cuando hay cuadrículas?

Sabina: Creo que sí. Ehh... cuando me dan dos puntos de coordenadas, resto las "y" y ese resultado lo divido por la resta de las "x".

Profesor: Tienes razón. Y una recta que baja como tú dices ¿cómo tiene los valores en x ?

Sabina: Ahh, negativos.

Profesor: ¿Y entonces?

Sabina: (Traza rectas en un plano cartesiano) Claro, entonces estas son de pendientes negativas. Pero es que los valores negativos son menores entre más grande sea el número sin el signo.

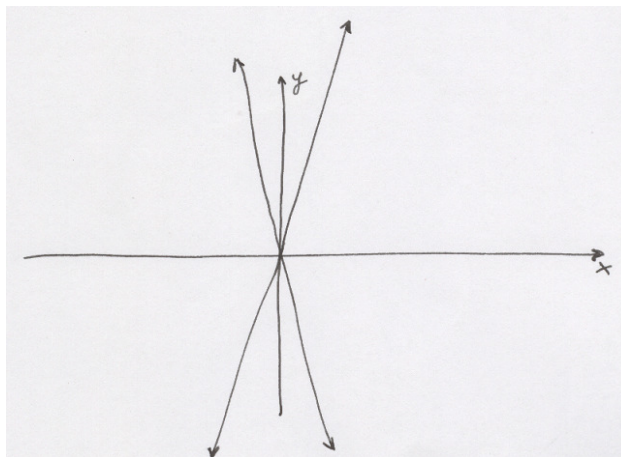


Figura 4.11 Representación gráfica de Sabina para indicar las rectas de mayor pendiente y de menor pendiente en el plano cartesiano.

Profesor: Por supuesto. Con eso que acabas de decir, ¿cuál crees que tiene la menor pendiente?

Sabina: Siendo así, ¿es la número 3?

Profesor: ¿"Por qué lo dices?"

Sabina: Porque entre más empinada esté bajando, más grande será el número, pero más pequeño será el valor, o sea, más cercano a $-\infty$.

Sabina no percibe en un principio pendientes de valores negativos y actúa (Image doing) sólo sobre rectas que crecen de izquierda a derecha. Por consiguiente, es necesario que Sabina revise su concepto de pendiente y lo relacione, tal como lo hizo Valentín, con la expresión analítica que permite su cálculo. Desde luego, Sabina reflexiona ante el hecho y considera la diferencia de las abscisas negativas cuando las rectas decrecen. Ante esta situación, Sabina traza otras rectas decrecientes y corrobora lo que posteriormente expresa (image reviewing): *las rectas que bajan de izquierda a derecha tienen pendiente negativa*. Después de este coherente razonamiento, Sabina no tarda en comprender que las rectas de menor pendiente son las decrecen y están más cerca del eje y , y las de mayor pendiente, están más cerca del eje y creciendo. Este razonamiento evidencia un *Folding Back* al *Primitive Knowing* con sus respectivas *complementariedades de la acción y la expresión*, que la hacen regresar al nivel de comprensión del *Image Making*.

Episodio S2.2: Un *Folding Back* que le permite construir el concepto de recta tangente a una curva cualquiera, desligándolo del concepto imagen de tangente a una circunferencia

Profesor: (Manipulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, con una secante que la corta en los puntos (2,4) y (4,16). Usando el deslizador (se activa el deslizador Top) traza secantes de tal manera que la abscisa $x=4$ (punto móvil) coincida con la abscisa $x=2$. ¿Podrías describir el conjunto de secantes que se estabilizan en la recta que sólo corta a la curva en el punto (2,4)?, ¿podrías describir esta última recta?

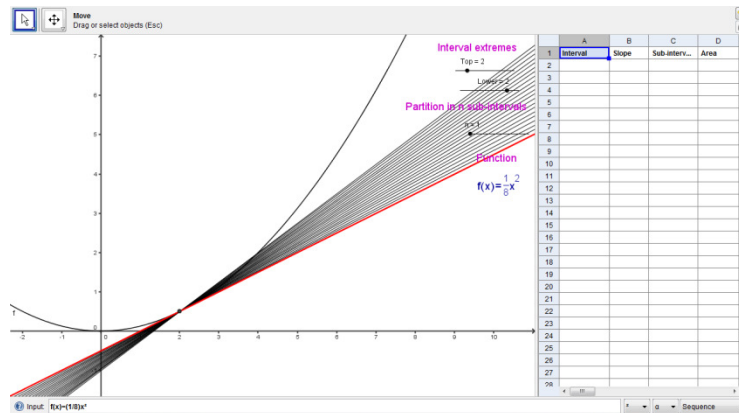


Figura 4.12 Ilustración presentada a Sabina en la pregunta 13H, para el concepto de recta tangente como límite del haz de secantes.

Sabina: Claro, creo que caben muchas rectas hasta llegar a la última que sólo corta a la curva en (2,4). Esta última viene a ser la recta tangente.

Profesor: Vamos por partes, ¿cuántas son muchas?

Sabina: Mmm... Infinitas.

Profesor: ¿Y cómo es eso de que viene a ser tangente?

Sabina: Sí, porque la corta en un solo punto.

Profesor: ¿Es decir que para que una recta sea tangente a una curva, sólo la debe cortar en un sólo punto?

Sabina: Perdón sí, ya recordé que la puede cortar en más de un punto, porque no es un segmento de recta sino una recta.

Profesor: Considera la función $y = \cos x$. ¿Podrías describir las características de la recta tangente a la curva en el punto (0,1)?, ¿qué

diferencia tiene esta recta tangente con la de la circunferencia?

Sabina: Ya entendí. En este caso la puede cortar en infinitos puntos, por ejemplo así (traza la recta tangente a la curva señalando algunos de los infinitos puntos).

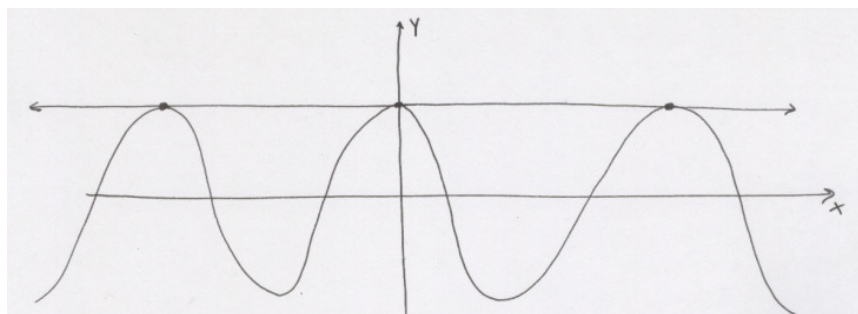


Figura 4.13 Representación gráfica de la recta tangente a la curva $y = \cos x$ que pasa por el punto $(0,1)$, hecha por Sabina.

Profesor: ¿Cuáles son esos puntos en los que las tangentes horizontales cortan a $y = \cos x$?

Sabina: Pues en los múltiplos de 90° .

Profesor: ¿Estás segura?

Sabina: (Se toma un tiempo para realizar cálculos) Perdón, en los múltiplos de 180° .

Profesor: ¿Estos valores en radianes cómo serían?

Sabina: Profe, no recuerdo.

Profesor: Veamos.. ¿Recuerdas cuál es la longitud de la circunferencia?

Sabina: Claro, $2\pi r$. Ahh! ya caigo en cuenta. 180° equivale a la mitad, o sea a π .

Profesor: Siendo así, enuncia una forma general para describir los puntos en los que las rectas tangentes horizontales cortan a la curva $y = \cos x$.

Sabina: (Después de un corto tiempo) La de arriba corta a la curva en los puntos de la forma $(2\pi n, 1)$ y la de abajo la corta en los puntos de la forma $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, o sea en los múltiplos impares de π .

Es claro que en este episodio, Sabina de nuevo llega al *Primitive Knowing* realizando un *Folding Back* que le permite reconstruir su concepto de recta tangente, desvinculándolo del concepto-imagen de recta tangente a una circunferencia; sobre este concepto Sabina ya había actuado, pero muestra que su comprensión en este punto aún está débil. Más aún, Sabina debe regresar al primer nivel de comprensión que le permita también reexaminar su idea de recta. La herramienta Geogebra® es de gran ayuda, pues

realizando manipulaciones con los deslizadores respectivos pasa por la complementariedad de la acción y rápidamente se consigue retomar la comprensión sobre el concepto-definición adecuado de tangente, evocando características generales sobre ella. Al final del anterior episodio se logra identificar un corto momento de *Folding Back*, que hace que Sabina, mediante la ayuda del investigador, reconsidere la conversión de registros al pasar de grados a radianes y viceversa, haciendo que regrese a un nivel interior en otro modelo. Cuando el *Folding Back* es superado, Sabina continúa su paso al nivel del *Image Having*.

Bloque 3

Sabina pasa a este bloque de preguntas registrando complementariedades de la acción y la expresión que dan cuenta de un razonamiento casi que impecable, en el nivel de comprensión del *Image Having*.

Diferencia claramente los intervalos de monotonía y signo de las funciones presentadas durante la entrevista y teniendo en cuenta el comportamiento de algunos trozos de tangentes en porciones de curvas, caracteriza los valores de sus pendientes en forma correcta. Con lo anterior, consigue asociar visualmente la gráfica de la derivada con su respectiva función e interactuando con la herramienta Geogebra®, logra expresar conjeturas, tales como se muestra en el siguiente episodio.

Episodio S3.1: El paso por el nivel de *Image Having* sin registrar *Folding Back*

Profesor:...

Sabina: Cuando la función-pendiente está por encima del eje x , la función original crece; si la función-pendiente está por debajo del eje x , la función original decrece; si la función-pendiente corta al eje x en un punto, allí la función original tiene un máximo o un mínimo; cuando la función-pendiente tiene máximos o mínimos, la función original cambia el sentido⁴⁰, cuando la función-pendiente decrece, la función original tiene el sentido hacia abajo y, cuando la función-pendiente crece, la función original tiene el sentido hacia arriba.

Se aprecia en las conjeturas anteriores que usa en forma correcta los términos de *máximo* y *mínimo*, pero no está familiarizado con las ideas de

⁴⁰ El cambio de sentido al que hace referencia Sabina, hace alusión a la concavidad de la curva.

concauidad y punto de inflexión. Además, cuando se le indaga por el proceso regresivo para que describa las características de la derivada dada la función original respectiva, manifiesta un poco de dificultad y le toma tiempo conseguir la respuesta correcta. Sin embargo, estos pequeños episodios de confusión no impiden el discurrir natural y la conexión correcta de los conceptos para avanzar en la comprensión en este nivel del *Image Having*.

De esta manera, Sabina logra fundar los cimientos que le permiten actuar mentalmente (*Image seeing*) y expresar (*Image saying*) de manera correcta afirmaciones sobre los conceptos e ideas matemáticas que relacionan una función con su respectiva derivada, cumpliendo así con los descriptores del nivel de *Image Having*.

Bloque 4

En este último bloque, Sabina logra razonar correctamente sobre la relación inversa entre pendientes y áreas para funciones constantes y lineales, pero presenta un *Folding Back* que la regresar a pensar sobre los conceptos tratados en el *Image Making*, cuando se le propone comprender la relación inversa entre cuadraturas y tangentes en funciones cuadráticas o de mayor grado.

Episodio S4.1: De regreso al nivel 2, registrando un *Folding Back* sobre las pendientes de una función cuadrática

Profesor: Traza otras funciones cuadráticas de la forma $y = 3x^2 + C$ y sus respectivas funciones-pendiente y compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

Sabina: (Traza en el papel) Esta puede ser la función $y = 3x^2 + 2$ y... no sabría graficar su respectiva función-pendiente... mmm...

Profesor: ¿Qué tal si trazas tangentes en el intervalo $[0,4]$ por ejemplo, y sin calcular describes si las pendientes crecen o decrecen...?

Sabina: (Traza trozos de tangente en el intervalo $[0,4]$ de la función $y = 3x^2 + 2$). Yo observo que las pendientes crecen pero... pues, no sé calcularlas exactamente. ¿Podría ser esta curva? (Traza otra parábola)

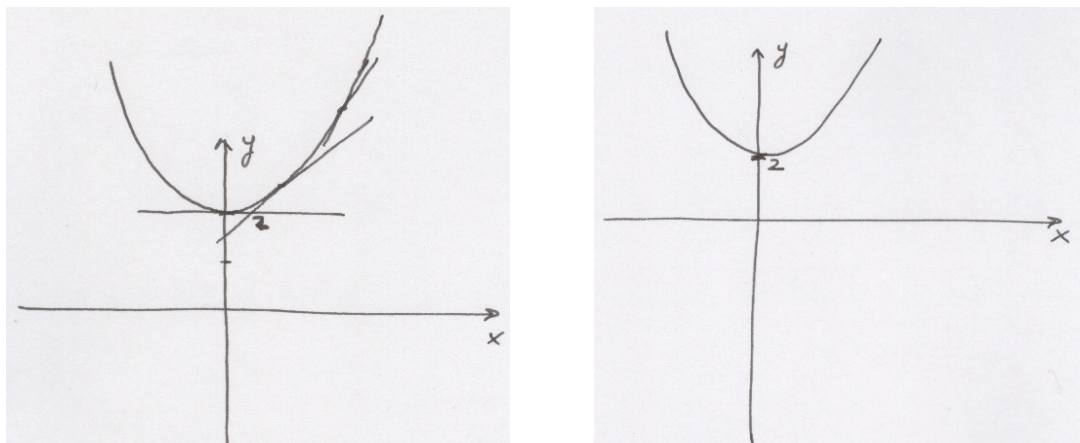


Figura 4.14 Representación gráfica de la curva $y = 3x^2 + 2$ y su posible derivada inicialmente, de acuerdo al proceso de comprensión de Sabina.

Profesor. ¿Por qué crees que es otra parábola?, ¿no puede ser una recta?

Sabina: Imposible que sea una recta, porque los valores de las pendientes crecen muy aceleradamente...

Profesor. Vamos al Geogebra® (se activan los deslizadores) Ubica tangentes en los puntos 0, 1, 2, 3, 4 y verifica en la tabla de valores las pendientes respectivas. ¿Qué observas?

Sabina: Ahh sí, profe, varían linealmente de seis en seis. Entonces si puede ser una recta. ¿No es la recta $y = 6x$?

Se puede interpretar que Sabina asocia correctamente la derivada con la función original en forma visual, pero a la hora de construir un esbozo de la derivada realizando el trazo en la hoja de papel, revela dificultades. Aunque esto no impide que Sabina razone en el nivel de *Property Noticing*, ya que alcanza a vislumbrar la relación inversa entre las pendientes de funciones constantes y lineales con las áreas en sus respectivas derivadas, no logra generalizar un resultado que permita vislumbrar que el TFC lo ha comprendido para todas las funciones continuas, por complejas que puedan resultar.

Sabina siente la necesidad de realizar un *Folding Back* en el nivel de *Property Noticing*, para reexaminar sus actuaciones en los procesos de razonamiento infinitos involucrados en los concepto de tangente y áreas, más específicamente, en la estimación de pendientes y de áreas, las cuales corresponden al *Image Making*. Cuando presenta la dificultad de trazar la derivada de la parábola $y = 3x^2 + 2$, el investigador permite que Sabina

interactúe con la herramienta Geogebra® y, activando los deslizadores y las tablas de valores observa que las pendientes crecen uniformemente, mientras los valores de x son dados de unidad en unidad.

Finalmente, Sabina retoma su nivel de comprensión en el *Image Having*, asociando de nuevo funciones y derivadas de forma visual, pero no logra trascender a la comprensión y consolidación del TFC en el *Property Noticing*.

Mapa del recorrido en el modelo para la comprensión del TFC, en el caso de Sabina.

Sabina comienza su recorrido de comprensión en el nivel de *Primitive Knowing* registrando *foldink back* en otros modelos sobre conceptos e ideas como las de: rectas, segmentos de recta, descripción de las fronteras de una región cerrada, distinción entre el comportamiento de las funciones seno y coseno, área de un trapecio y concepto de recta tangente. Posteriormente pasa al nivel del *Image Making* registrando dos *Folding Back* que la hacen regresar al *Primitive Knowing*: el primero hace que revise el concepto de pendiente relacionado con el comportamiento de los valores negativos de rectas, el otro, hace que reconstruya su concepto de recta tangente, desvinculándolo del concepto-imagen de recta tangente a una circunferencia. Mediante las complementariedades de la acción y la expresión, Sabina logra razonar de nuevo en el *Image Making*, pero requiere de un tercer *Folding Back* en otro modelo para revisar el cambio de registros de grados a radianes.

Una vez superado este último *Folding Back*, Sabina logra comprender los conceptos en el *Image Having* sin ningún contratiempo hasta lograr verbalizar conjeturas que la ubican en el *Property Noticing* por un momento. Pero más adelante, Sabina no logra razonar sobre la relación entre pendientes y áreas en funciones más complejas⁴¹, lo que la obliga a regresar al nivel del *Image Making* para revisar algunos procesos de razonamiento infinito en cuanto a la estimación de pendientes y áreas y así, poder caracterizar de nuevo una derivada con respecto a su función original. Sabina finalmente logra un nivel de comprensión en cuanto al TFC a la altura del *Image Having* (nivel 3).

⁴¹ Resulta interesante como a nivel histórico algunos matemáticos del siglo XVII como Torricelli, alcanzan a vislumbrar la relación inversa entre cuadraturas y tangentes sólo para algunas funciones muy específicas como la parábola general. De igual manera, se puede inferir en forma análoga del análisis descriptivo de Sabina, que el TFC lo concibe sólo para algunas curvas muy particulares como las funciones constantes y lineales sin lograr generalizarlo a cualquier función continua.

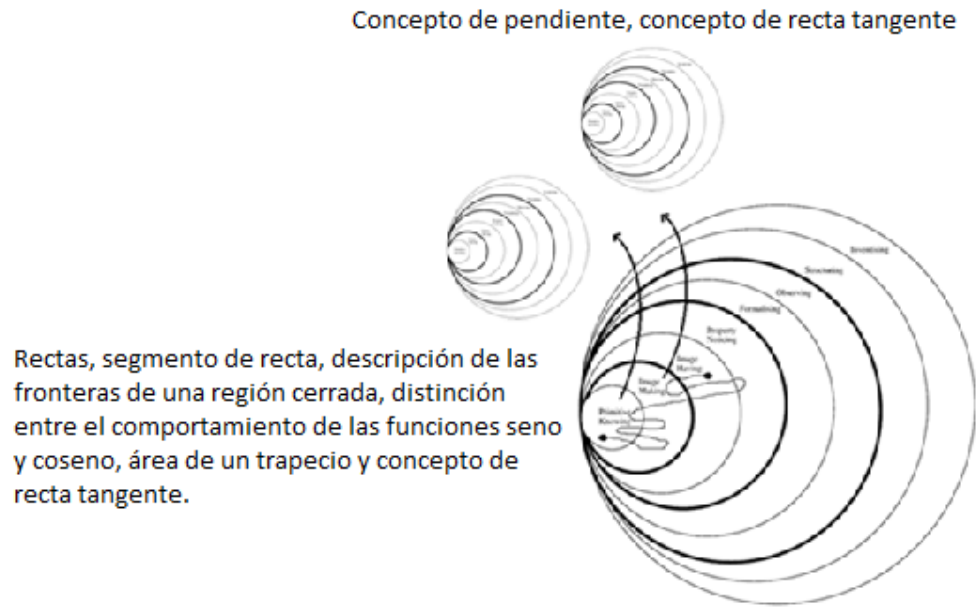


Figura 4.15 Mapa del recorrido en el modelo para la comprensión del TFC, en el caso de Sabina.

4.2.3 Caso tipo 3: Luciana

Bloque 1

Luciana no exhibe episodios donde se evidencie *Folding Back* durante el primer bloque de preguntas y, por el contrario, con un lenguaje coherente y refinado avanza de forma rápida en la comprensión de los conceptos de este bloque.

Tiene claros los conceptos de recta, segmento de recta y pendiente, y esboza con seguridad funciones elementales y trigonométricas en un plano cartesiano. Describe en forma correcta los límites que encierran una región en el plano cartesiano y asocia sin dificultad una diferencia de longitudes a infinitos pares de segmentos, expresando en forma análoga que una cantidad puede expresarse como la diferencia de infinitas cantidades (ya en el campo de la Aritmética).

También evidencia con total claridad el concepto de recta secante y estima áreas de figuras regulares e irregulares.

En la pregunta 16, Luciana llama la atención cuando expresa: *no me imaginaba que la recta tangente a una línea recta es ella misma*, sin necesidad de que el entrevistador, mediante preguntas adicionales la hagan reflexionar ante este hecho. Es decir, aunque Luciana se muestra sorprendida con tal hecho, al parecer el mismo guión entrevista le permite realizar constructos mentales que hacen que ella misma llegue a esa verdad, sin necesidad de recurrir a un *Folding Back*.

Bloque 2.

Luciana razona de forma sorprendente sobre la estimación de las pendientes de rectas en el plano cartesiano y las asocia sin ningún inconveniente con los valores de la recta real (entre $-\infty$ y $+\infty$). Actúa (*Image doing*) sobre visualizaciones geométricas y expresa (*Image reviewing*) con un lenguaje adecuado sus pensamientos y conjeturas. Es consciente de los valores de las pendientes entre cero y uno para rectas con ángulos entre 0° y 45° , y de los valores entre uno e infinito para las rectas con ángulos entre 45° y 90° ; en forma análoga describe los comportamientos de las pendientes para las rectas decrecientes.

Se puede afirmar sin lugar a dudas que Luciana alcanza el nivel de *Image Making* por su avance en la comprensión de los procesos de razonamiento infinito, involucrados en los conceptos de recta tangente como haz de secantes y área de una región como el límite de una suma de Riemann (por supuesto de forma encubierta).

En el siguiente episodio, Luciana demuestra, además de un correcto razonamiento, una verbalización de la regla del punto medio como método eficaz para alcanzar una mejor aproximación del área (proceso de razonamiento infinito), mediante el uso de la herramienta Geogebra®.

Episodio L2.1: Paso por el *Image Making*, actuando y expresando sobre procesos de razonamiento infinitos, sin registros de *Folding Back*

*Profesor: (Manipulación de la herramienta: Geogebra®). En la herramienta se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{-1}{x-4.4} + 4$. Si consideras el intervalo $[2, 4]$ (se activan los deslizadores *Top*, *Lower*, y *partition in n sub-intervals*), divide la región en cualquier número de sub-intervalos ¿tales particiones realizadas, te dan alguna idea de cómo calcular su área?, ¿podrías explicarlo?*

Luciana: (Manipula los deslizadores). Sí, entre más sub-intervalos se tengan mejor es la aproximación al área real, porque los valores parecen estabilizarse o tender a un valor exacto. Pero además, en vez de elegir los extremos de un sub-intervalo, creo que es mejor escoger un punto interior de cada sub-intervalo, o mejor, el punto medio; de esta manera casi que se anulan las áreas que quedan por fuera y por dentro de la región considerada.

Bloque 3

Durante el paso por este bloque de preguntas, Luciana se muestra muy segura de sus respuestas y utiliza un lenguaje muy refinado en sus análisis y conjeturas. Distingue de manera correcta los intervalos de monotonía de los intervalos en los que una función es positiva o negativa y describe acertadamente el comportamiento de los valores de las pendientes, a partir de trozos de tangentes graficados en porciones de curva. Esto hace que Luciana asocie gráficas de derivadas con las de sus respectivas funciones originales, comparando las características entre una y otra, tal como lo hizo Sabina.

Episodio L3.1: Paso por el *Image Having*, actuando y expresando sobre gráficos de funciones y sus derivadas, sin registros de *Folding Back*

Profesor: ...

Sabina: Al parecer, donde la función-pendiente es positiva, la función original crece y cuando la función-pendiente es negativa, la función original decrece; también observo en todos estos casos que si la función-pendiente pasa de ser positiva a negativa, la original tiene un máximo, pero, si la función-pendiente pasa de ser negativa a positiva, la original tiene un mínimo; además cuando la función-pendiente decrece, la original es cóncava hacia abajo y cuando la función-pendiente crece, la original es cóncava hacia arriba, por eso, los máximos o mínimos de la función-pendiente son puntos de inflexión en la función original.

A diferencia de Sabina, Luciana introduce los términos de *concavidad*, en vez de *sentido de la curva* y el término de *punto de inflexión*, en vez de *punto de cambio de sentido*. El hecho de utilizar un lenguaje más refinado que el de Sabina, no es lo que hace que Luciana tenga un mejor nivel de comprensión en este bloque, o que su razonamiento sea más *formal* o si se quiere más *riguroso*; es el hecho de que Luciana sí es capaz de esbozar a lápiz y papel la gráfica de la derivada de una función, lo que evidencia que pasa por la *complementariedad de la acción* en el nivel 3 (*Image seeing*), para después evocar sus conjeturas (*Image saying*).

Pero además de lo anterior, Luciana describe con total naturalidad el proceso contrario; es capaz de trazar un esbozo de la función original, dada la gráfica de su respectiva derivada, lo que no parece ser tan natural en el caso de Sabina y menos en el de Valentín. Otro aspecto a resaltar, es que Luciana de inmediato recuerda que en la pregunta 23 comprendió que dos funciones que difieren en una constante tienen la misma derivada⁴², lo que le facilita comenzar a trazar el esbozo de la función original de una derivada, desde cualquier ordenada, como lo muestra el siguiente episodio.

Episodio L3.2: Actuando y expresando en la construcción de una función, dada la gráfica de su derivada

Profesor: Considera la función-pendiente que se muestra a continuación... ¿Podrías trazar su respectiva función original?

Luciana: Mmm... (Traza en el papel) Si aquí corta al eje x pasando de más a menos, entonces aquí hay un máximo en la función original (ubica un punto en una ordenada cualquiera), si aquí corta al eje x de menos a más...

Profesor: ¿Y por qué ubicas ese punto máximo allí?

Luciana: Ahh... porque antes habíamos dicho que si tengo varias funciones trasladadas verticalmente, la función-pendiente era la misma, porque ésta depende de la forma de la función original y no de la altura a la que esté. Entonces yo puedo ubicar este punto máximo en cualquier altura y y al ir trazando, conservar la forma de manera que las pendientes sean las ordenadas en la función-pendiente.

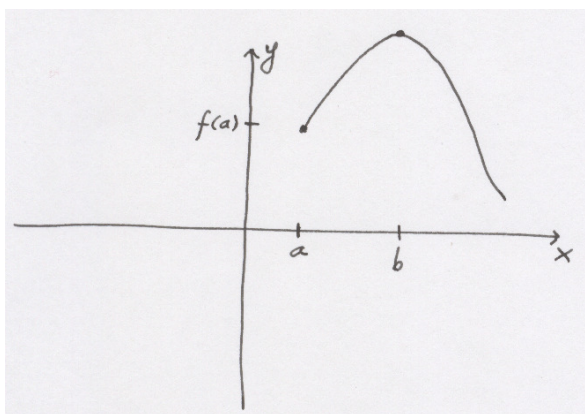


Figura 4.16 Representación gráfica de una función por parte de Luciana, dada la correspondiente gráfica de la derivada.

⁴² En el Capítulo 2 se describe cómo Fermat, en la forma análoga que razona Luciana, descubre el hecho de que si dos curvas tienen en cada punto la misma pendiente, las curvas tienen la misma forma, es decir, en nuestro lenguaje que $f'(x)$ determina $f(x)$ salvo una constante.

Indudablemente, Luciana pasa por el nivel del *Image Having* sin ninguna dificultad y con un intachable razonamiento.

Bloque 4.

Luciana llega a la pregunta 30 del guión de entrevista semi-estructurado razonando en el nivel de comprensión del *Property Noticing*, sin evidenciar ningún *Folding Back*⁴³ hasta el momento. Ella, actúa sobre funciones constantes y lineales, y de inmediato se percata de la relación entre la diferencia de ordenadas en la función original con respecto al área bajo las funciones-pendientes en el mismo intervalo. Pero en el momento de esbozar la función-pendiente de otras funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + C$, Luciana parece sentirse comprometida a trazarla de manera exacta, hasta tal punto de ponerse en la tarea de buscar su expresión algebraica. El siguiente episodio registra el primer *Folding Back* al que Luciana se tuvo que someter, reexaminando en el *Image Having* la manera de construir las derivadas, de acuerdo a las funciones originales. Para ello, evidencia la *complementariedad de la acción*, trazando funciones constantes y lineales con sus respectivas derivadas y expresando los resultados en cada caso.

Episodio L4.1: El primer *Folding Back* que la regresa al *Image Making*, para la construcción de derivadas, dada la función original

Profesor: Traza otras funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + C$ ⁴⁴ y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

Luciana: Pues... No sé cómo explicarlo. Ehh... ¿Puedo volver a pensar sobre las gráficas anteriores?

⁴³ Es importante aclarar que el número de *Folding Back* realizados durante la entrevista es independiente del nivel de comprensión alcanzado o de la calidad en el razonamiento durante la entrevista. El caso de Luciana es un ejemplo de un buen nivel de comprensión, que no necesariamente se debe a la ausencia de *Folding Back* hasta el momento.

⁴⁴ Esta pregunta corresponde a la número 32 del guión de entrevista socrático, con una pequeña variación: En el guión se deja que trace cualquier función cuadrática y su respectiva función-pendiente, mientras que en esta pregunta se le pide a Luciana trazar una función de la forma $y = ax^2 + C$, que de hecho exige un razonamiento de más alto calibre, dado el excelente desempeño en el avance de la comprensión, mostrado hasta el momento.

Profesor: Por supuesto.

Luciana: (Traza funciones constantes y lineales y sus respectivas funciones-pendiente, tal como lo hizo en el bloque 3) Aquí el área es 0 en este intervalo y la diferencia de ordenadas en la función original también es 0. Lo mismo pasa en esta función porque...

Profesor: Y entonces, ¿en esta cuadrática qué pasa?

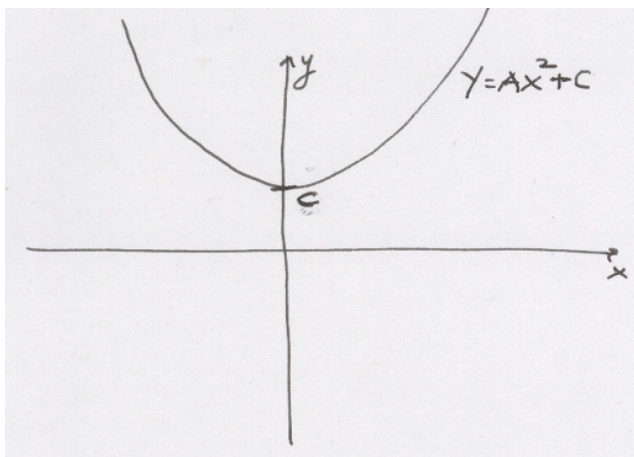


Figura 4.18 Representación gráfica de la función $y = ax^2 + C$, por parte de Luciana.

Luciana: Debe pasar lo mismo. En cierto intervalo escogido, el área bajo la... ¿Es la función original o la función-pendiente?... es igual a la diferencia de ordenadas en la otra, ¿cuál es que es?

Profesor: Vuelve y razona sobre las funciones constantes y las rectas.

Luciana: (Traza en el papel) Ahh ya. El área bajo la función-pendiente coincide con la diferencia de ordenadas en la función original que es de la forma $y = ax^2 + C$.

Profesor: ¿Y cómo puedes verificar esto?

Luciana: Graficando la función pendiente. Mmm... Pero es que aquí las pendientes varían.

Profesor: ¿Cómo varían?

Luciana: (Acciona los deslizadores en el Geogebra® y actúa sobre varias funciones cuadráticas) Crecen de $2a$ en $2a$ así como en $y = 3x^2 + C$ crecían de seis en seis. O sea que varían en forma constante; entonces es la recta $y = 2ax$ y, en efecto, el área en este intervalo coincide con la diferencia de ordenadas acá.

Luciana vuelve al nivel de comprensión del *Property Noticing*, pero rápidamente recurre a procesos de razonamiento infinito con la ayuda de la herramienta Geogebra®, la cual le permite actuar (*Image doing*) sobre funciones cuadráticas y analizar la variación de los valores de las pendientes, expresando sus resultados en forma verbal (*Image reviewing*), lo que evidencia otro *Folding Back* que lo regresa al nivel del *Image Making*, pero que muy sagazmente supera. Resulta interesante analizar cómo Luciana logra generalizar que las pendientes de la parábola $y = ax^2 + C$ varían de $2a$ en $2a$ uniformemente, a través de la herramienta Geogebra®, lo que hace que de nuevo se ubique en el nivel de comprensión del *Property Noticing*.

Una vez superados los anteriores *Folding Back*, Luciana continúa comparando las áreas en las derivadas con la diferencia de ordenadas en la función original, actuando sobre funciones más complejas.

En la pregunta 33, se le indaga por el área bajo una función cualquiera (no se especifica la expresión algebraica) y sin dificultad, la etiqueta como función-pendiente y solicita la necesidad de una respectiva función original, para calcular la diferencia de ordenadas. Estas complementariedades de la acción y la expresión, ubican a Luciana sin lugar a dudas en el nivel de comprensión del *Property Noticing*, como se muestra en el siguiente episodio.

Episodio L4.2: Expresando (*Property recording*) en el *Property Noticing* el enunciado correcto del TFC

Luciana: Para calcular el área limitada por una función y el eje x en un intervalo cerrado, basta con considerarla como una función-pendiente y hallar la respectiva función original para calcular la diferencia de ordenadas en el mismo intervalo, el cual coincide con el área pedida. Por ejemplo aquí (Traza en el papel), para encontrar el área sombreada en este intervalo de esta gráfica, la considero como si fuera una función-pendiente y, bastaría construir la función original, supongamos que sea esta (Traza en el papel), y hallar la diferencia de las ordenadas en los extremos del intervalo⁴⁵.

⁴⁵ Es importante aclarar en este punto que Luciana hace su razonamiento, suponiendo que la gráfica de la derecha es la función original de la función dada. En esta parte de la entrevista, Luciana se esmera por enunciar el TFC, comparando el área en la función-pendiente con la respectiva diferencia de ordenadas en la función original, sin aún preocuparse por construir esta última correctamente.

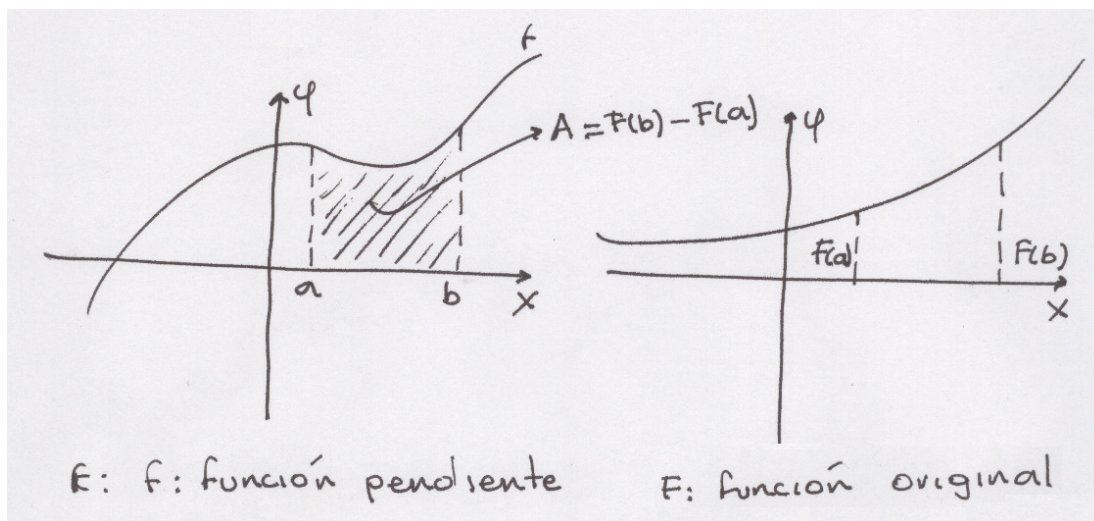


Figura 4.19 Representación gráfica de cómo Luciana avanza en la comprensión del TFC en el nivel de *Property Noticing*.

Más adelante, Luciana va más allá de este razonamiento cuando trata de construir punto a punto (*Property Predicting*) una función original, a partir de la gráfica de su derivada, trabajando sobre sub-intervalos muy pequeños y usando un razonamiento para encontrar cada punto, lo que en términos matemáticos puede resumirse en la expresión $f'(b) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y así encontrar $f(b)$ mediante $f(b) \approx f'(b)(b - a) + f(a)$.

Este alcance permite conjeturar que Luciana logra permear el nivel de comprensión del *Formalizing*, dada la elaboración mental que la entrevista le ha permitido construir, sin embargo, afirma que el procedimiento sería muy dispendioso y no alcanza a pasar por la *complementariedad de la acción*, prefiriendo continuar con los esbozos de las funciones originales, más que con las construcciones exactas. El siguiente episodio constata este hecho.

Episodio L4.3: Un indicio de estar razonando en el nivel de comprensión del *Formalizing*

Profesor: Y, ¿cómo graficarías la función original, a partir de una función-pendiente?

Luciana: Como existen muchas funciones originales para una misma función-pendiente, escogemos una ordenada cualquiera como extremo izquierdo en el mismo intervalo y, en porciones de sub-intervalos muy pequeños, usar el

hecho de que la ordenada en la función pendiente, es la pendiente en la función original. Algo así como multiplicar la ordenada en la función-pendiente por la longitud del intervalo sobre el cual se está trabajando, y sumarle la ordenada inicialmente escogida en la función original. Así encontraríamos otro punto de la función original. Pero, bueno, sería un procedimiento muy dispendioso. Esa sería una manera...

Mapa del recorrido en el modelo para la comprensión del TFC, en el caso de Luciana.

Luciana comienza su recorrido de comprensión en el nivel de *Primitive Knowing* sin registrar *Folding Back* alguno, y continúa su avance en la comprensión del TFC hasta llegar a razonar en el nivel del *Property Noticing* sin ningún contratiempo. Ya en el cuarto nivel, Luciana reexamina la forma en cómo en el *Image Having* construyó las derivadas, dada la correspondiente función original y transcurre por la complementariedad de la acción acudiendo a las funciones constantes y lineales sobre las cuales ya había razonado antes, para luego expresar de nuevo y en forma correcta la caracterización correspondiente entre las gráficas de funciones y derivadas. Sin embargo, se vuelve a registrar otro *Folding Back* que hace que Luciana regrese al nivel de *Image Making*, para retomar los procesos de razonamiento infinito que involucran la comprensión en cuanto al comportamiento de los valores de las pendientes para una recta.

Finalmente, Luciana exhibe un razonamiento puramente infinitesimal que hace pensar que llega hasta el nivel de comprensión del *Formalizing*, cuando describe un método que permite trazar de manera exacta la función original, dada la derivada; esto lo hace de forma desprevenida. Sin embargo, Luciana lo expresa, pero no alcanza a actuar, pues afirma que sería un camino algo dispendioso. Esta descripción permite ubicar a Luciana en el nivel de comprensión del *Property Noticing*.

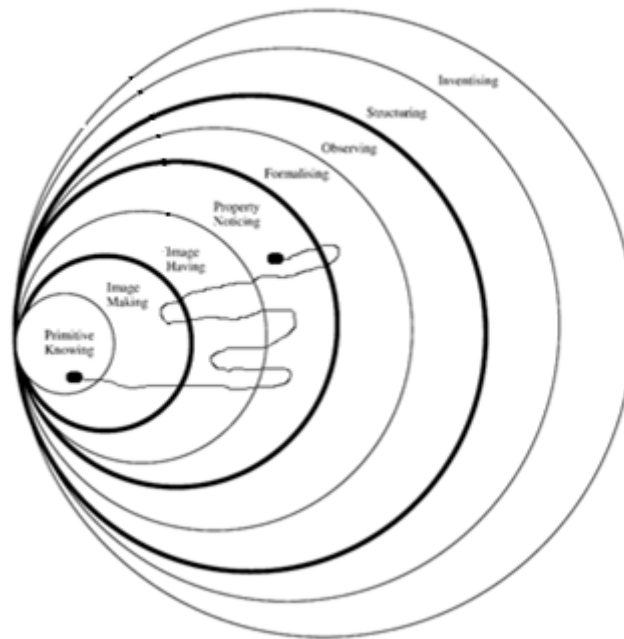


Figura 4.20 Mapa del recorrido en el modelo para la comprensión del TFC, en el caso de Luciana.

4.3 Diagrama general proporcionado por el ATLAS.ti 6.2 en al análisis cualitativo

Después de haber detallado momento a momento los Folding Back en cada uno de los casos: Valentín, Sabina y Luciana, y dilucidar el camino o trayectoria en el modelo de la teoría de PK, se considera pertinente mostrar el diagrama general que el ATLAS.ti 6.2 proporciona, de acuerdo a los códigos y familias de códigos introducidos para realizar el análisis ya descrito. No se trata de realizar un diagrama para cada caso, pues este trabajo ya fue expuesto en cada uno de los mapas de recorrido; se trata más bien de ilustrar mediante el diagrama los conceptos y actitudes identificados durante la aplicación de las entrevistas socráticas en momentos de *Folding Back*, además de las asociaciones, caracterizaciones y manifestaciones acaecidas durante el paso por las complementariedades de la acción y la expresión, en lo que respecta a la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes.

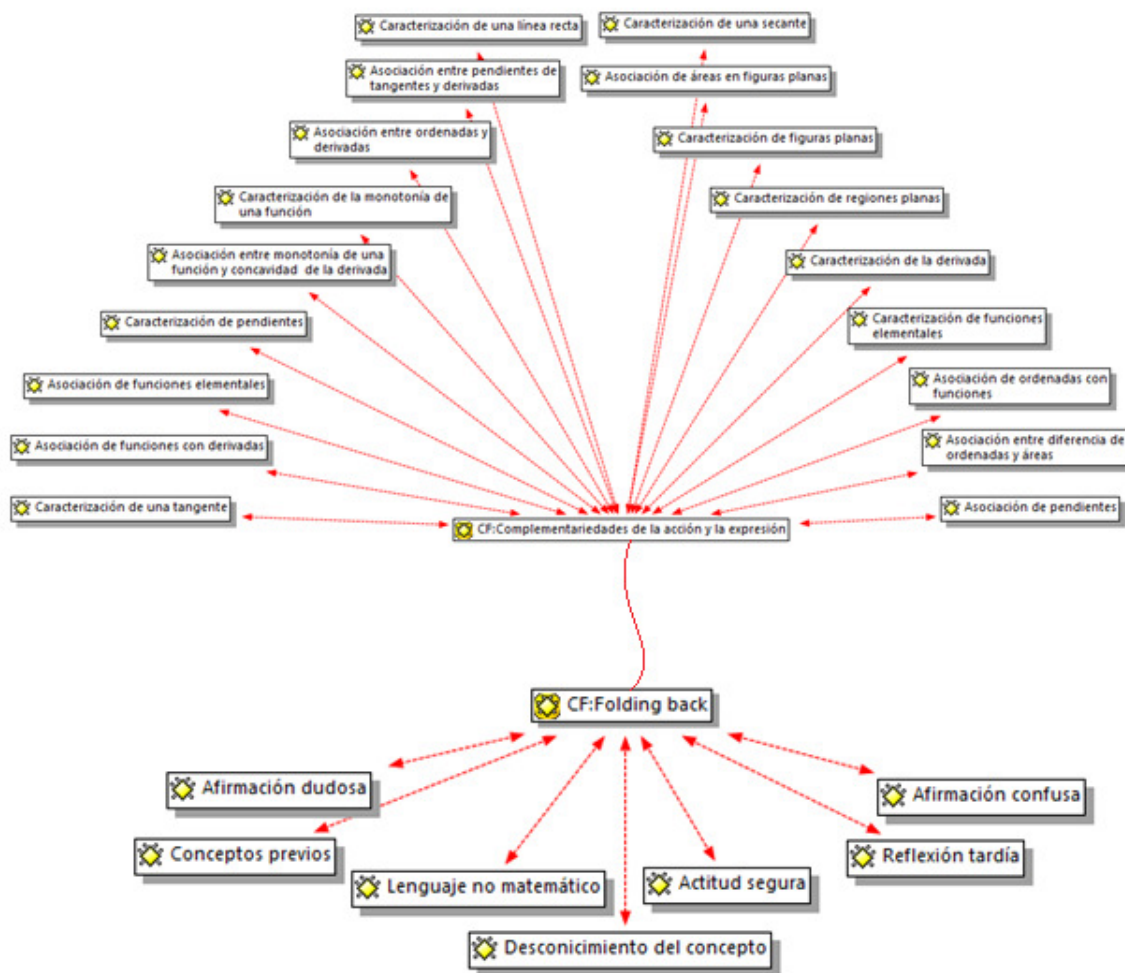


Figura 4.21 Diagrama general proporcionado por el ATLAS.ti 6.2 en el análisis cualitativo para la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes.

El diagrama revela cómo las afirmaciones dudosas o confusas, el desconocimiento de conceptos previos, las reflexiones tardías y las actitudes de seguridad o inseguridad, de acuerdo al caso, son aspectos claves para identificar posibles momentos de *Folding Back* en la comprensión del teorema en cuestión. Pero de la misma manera, las diversas asociaciones entre los conceptos relacionados con procesos de razonamiento infinito, las estimaciones de áreas y de pendientes y la forma de caracterizar otros conceptos, determinan la ejecución de las complementariedades de la acción

y la expresión, las cuales generan inevitablemente un avance en la comprensión por parte de los entrevistados.

4.4 Consolidación de las características para las complementariedades de la acción y la expresión en la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes

La tabla 4.1 se muestra una caracterización para las complementariedades de los niveles 2, 3 y 4, análoga a la que se hizo para el concepto de ecuación cuadrática en el Capítulo 1. Los rasgos que aquí se describen, son producto de los análisis que se realizaron durante el proceso cualitativo en los estudios de caso realizados y dan cuenta del momento en que el aprendiz está *actuando* o *expresando*.

4.5 Consolidación de la entrevista mediante sólo el Geogebra®

Es necesario mencionar en esta sección del Capítulo, un aporte adicional que nuestro estudio consiguió consolidar, sin ser motivo de un análisis cualitativo a profundidad, tal es el caso del diseño y aplicación de la entrevista antes descrita. Se trata de una entrevista para la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, que se logra fundamentar sólo con la interacción de la herramienta Geogebra®, y para la cual, fue escogido un estudiante con las aptitudes y destrezas necesarias para manipularla con facilidad y así observar en detalle, la evolución en la comprensión del TFC.

Sin lugar a dudas, esta entrevista se convierte en una experiencia alternativa de carácter didáctico mediante el uso de las TICs, que ayuda a analizar y entender con más objetividad y profundidad cómo evoluciona el proceso de comprensión en los estudiantes en cuanto al TFC. Como producto de esta experiencia se elaboró un artículo, el cual se encuentra en proceso de publicación en la actualidad, ver el Anexo 1.

Nivel	Acción	Expresión
Image making	<p>Image doing Construcción de una imagen mental o física de los conceptos de pendiente, tangente y área de una región plana, mediante procesos de razonamiento infinito. La visualización matemática le permite por medio de tablas de valores</p> <p>Sigue las instrucciones dadas por el profesor sin ningún tipo de análisis. No examina los resultados.</p> <p>No ha pasado al image reviewing cuando reconoce los procesos de razonamiento infinitos involucrados, pero se considera incapaz de expresar paso a paso la construcción de los conceptos de tangente y área.</p>	<p>Image reviewing Consideración de la imagen como un todo. Examina paso a paso las instrucciones dadas por el profesor, en la construcción de los conceptos de pendiente, tangente y área. Verbaliza la construcción de la recta tangente como haz de secantes y la estimación de áreas, acudiendo a particiones infinitas, brindando importancia al orden en el que se ejecutan las instrucciones.</p> <p>También es capaz de explicar la recta tangente como el producto de una realización sucesiva de zooms, pero no relaciona pendientes con áreas</p>

Nivel	Acción	Expresión
Image having	<p>Image seeing Descripción del comportamiento de los valores de las pendientes en una función dada, para graficar la respectiva derivada, teniendo en cuenta los conceptos de monotonía y concavidad.</p> <p>Identificación de un elemento discrepante con el concepto de recta tangente, pues al trazar la recta tangente a funciones que son cortadas en infinitos puntos, supera la idea de tangente a una circunferencia. No es capaz de expresar el concepto de recta tangente cuando se ha desligado de la idea de tangente a una circunferencia.</p>	<p>Image saying Explicación del por qué un elemento discrepante con el concepto de recta tangente no se acomoda a su imagen. Articula las características de una recta tangente a una función, la cual es cortada en infinitos puntos y está en capacidad de hablar acerca de sus acciones y llevarlas más allá de la acción de graficar la tangente.</p>

Nivel	Acción	Expresión
<p>Property noticing</p>	<p>Property predicting Reconocimiento de las propiedades que tienen un función y su respectiva derivada.</p> <p>Identificación de la relación inversa entre las cuadraturas en la derivada y las tangentes en la función original correspondiente, inicialmente para funciones lineales y luego, para funciones continuas más complejas.</p>	<p>Property recording Evocación del TFC haciendo un registro mental y usando un lenguaje matemático adecuado: <i>El área limitada por una derivada y el eje x en un intervalo, corresponde a la diferencia de las ordenadas en la función original correspondiente, en los extremos del mismo intervalo.</i></p>

Tabla 4.1 Caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión para los cuatro primeros niveles de la teoría PK, con referencia a la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, de acuerdo al análisis cualitativo realizado en el presente estudio.

Finalmente, se puede concluir de este análisis cualitativo, que los diversos fenómenos presentados en cada uno de los casos (Valentín, Sabina y Luciana) dan cuenta de cómo los descriptores están en correspondencia de manera directa con los niveles, en el modelo de la teoría de PK y funcionan durante el discurrir de la entrevista de carácter socrático para contribuir, en compañía de los *Folding Back* y las complementariedades de la acción y la expresión, con el avance en la comprensión del TFC.

4.6 Tratamiento estadístico

A continuación se desarrolla un tratamiento estadístico de los resultados realizados en el trabajo de campo, con el fin de corroborar algunas conclusiones y generalizar algunos resultados, mediante el diseño y aplicación masiva de un test semi-estructurado, producto del guión de entrevista socrático diseñado.

4.6.1 Descripción y estructura del test escrito

Teniendo en cuenta las posibles limitaciones que las entrevistas individuales presentan durante el desarrollo del trabajo de campo, tales como: el requerimiento de un tiempo considerable, la dificultad para masificar la aplicación y la posible subjetividad en la que se puede caer al evaluar las respuestas obtenidas, se consolida el test semi-estructurado para la comprensión del TFC en el marco de la teoría de PK, que posibilitará determinar el nivel de comprensión a un buen número de estudiantes y permitirá generalizar y verificar algunos resultados.

El test se ha denominado **LA RELACIÓN INVERSA ENTRE TANGENTES Y ÁREAS** y consta de 34 preguntas, cada una con cinco opciones de respuesta, cuatro de ellas escogidas entre las más representativas y que son resultado de la aplicación de la entrevista; y una quinta opción abierta, para que puedan contestar según su propia opinión.

Se ha elegido un grupo piloto de 50 individuos, conformado por estudiantes de último año de bachillerato y estudiantes universitarios de primer año de ingeniería.

Se entrega a cada estudiante un cuadernillo con las preguntas y las hojas de respuestas; en él aparecen las siguientes instrucciones:

“Cada pregunta te ofrece **cinco** opciones de respuesta (a, b, c, d y e), de las cuales deberás escoger **sólo una**. No dejes ninguna pregunta en blanco y no respondas al azar.

En todas las preguntas, la quinta opción (marcada con la letra e) es: *Ninguna de las anteriores*. Debes seleccionar esta opción cuando no entiendas el enunciado de la pregunta o cuando te parezca que las otras opciones de respuesta (a, b, c y d) no se ajustan a lo que crees que sería correcto. En este caso debes escribir la respuesta que consideres conveniente en el cuadernillo adicional, además de marcar la opción “e” en la hoja de respuestas.

Es posible que en algunas preguntas te parezca que hay varias opciones de respuesta correctas. Escoge aquella opción de respuesta que te parezca más precisa desde el punto de vista matemático, de acuerdo con lo que piensas acerca del tema”.

Se hace especial énfasis en cuanto al anonimato del test, en cuanto que sólo se piden las respuestas y una información adicional que permite realizar un breve estudio descriptivo, clasificando a los estudiantes de acuerdo a la institución a la que pertenece, su programa, su edad y su sexo. (En el Anexo 2 se muestra la hoja de respuestas que se empleó para obtener dicha clasificación)

El test está diseñado en cuatro bloques de preguntas que permiten detectar el nivel de comprensión en la teoría de PK, pero las preguntas correspondientes a cada bloque no son consecutivas, pues la secuencia obedece a la estrecha relación en el razonamiento de una pregunta con su anterior o su posterior, en otras palabras, las preguntas del test están claramente diferenciadas, pero estrechamente relacionadas. Anteriormente en la Sección 3.4, ya se había descrito la red de relaciones correspondiente a cada bloque de preguntas.

En el Anexo 3 se presenta el test escrito que finalmente se obtuvo, después de haber sido rediseñado en varias ocasiones.

4.6.2 Análisis estadístico

Es pertinente en el presente estudio, precisar por escrito algunas consideraciones importantes, de acuerdo a los resultados obtenidos en el análisis cualitativo. Por lo tanto, el tratamiento estadístico abordado persigue corroborar las conclusiones obtenidas a través de la entrevista socrática. Esto implica evidentemente una selección de instrumentos estadísticos adecuados. El trabajo estadístico se lleva a cabo teniendo en cuenta:

- Elección de un grupo piloto de 50 estudiantes.
- Confirmación de la existencia de grupos de respuestas (patrones) suficientemente uniformes, a través de los instrumentos estadísticos correspondientes, de modo que se pueda identificar con los niveles de comprensión.
- Diseño de un procedimiento de corrección o de valoración de la prueba, de modo que se automatice la clasificación de los estudiantes de acuerdo con su nivel de razonamiento en el TFC.

El proceso se inicia con la aplicación del algoritmo K-medias, cuya finalidad es precisamente la determinación de la existencia de grupos, que en este estudio son cuatro. La tarea dispendiosa y delicada es confirmar que cada grupo representa un nivel de comprensión en correspondencia con la teoría de PK. Luego, con un análisis discriminante se realiza una comprobación de la robustez de los resultados obtenidos. Posteriormente, se hace una descripción tanto del algoritmo k-medias como del análisis discriminante.

4.6.2.1 Recolección y codificación de los datos

En la siguiente página se presentan una tabla y un diagrama estadístico que resumen la identificación y las características. El diagrama caracteriza a la población estudiada, identificando el 34% correspondiente a estudiantes del grado 11° del CGV y el 66% restante a estudiantes de la U. de A.; entre estos últimos, el 18% son estudiantes de Ingeniería y el 16% estudiantes de Licenciatura en Educación Matemáticas y Física de la Facultad de Educación.

GRUPO	PROGRAMA	TOTALES PROGRAMA	TOTALES GRUPO	TOTAL GRUPO PILOTO
Universitarios Universidad de Antioquia	Facultad de Ingenierías. 1er. Año	9	17	50
	Facultad de Educación. Lic. en Educ. Matemáticas y Física. 2º año	8		
Último año de bachillerato CGV	Grado 11°	33	33	

Tabla 4.2 Características generales del grupo piloto.

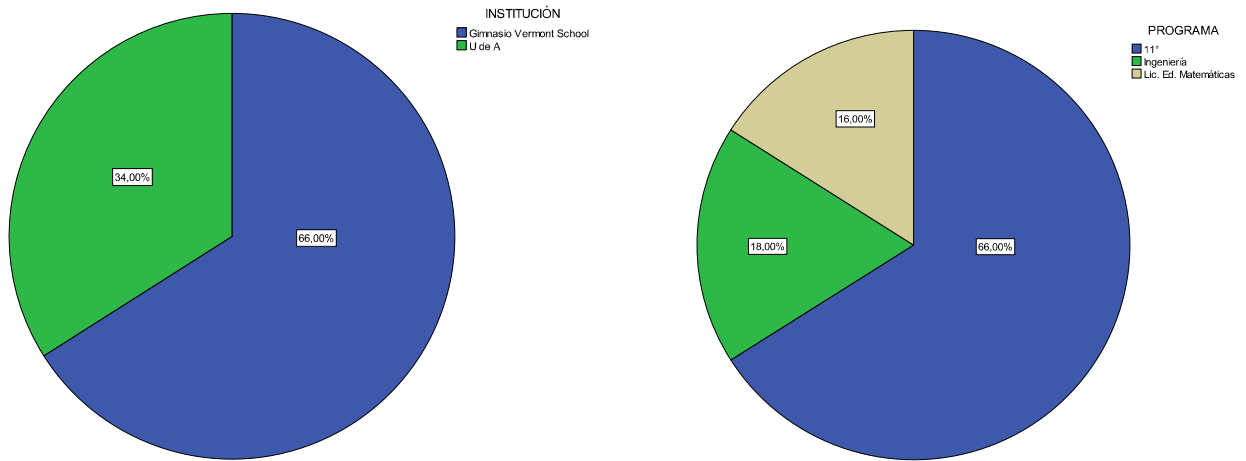


Figura 4.22 Distribución del grupo piloto por institución y por programas.

Dado que se realizará un análisis multivariado discriminante y que los datos obtenidos son de tipo cualitativo, se elaboró un patrón ideal de respuestas que corresponde a la mejor opción en cada pregunta, es decir, en una misma pregunta el estudiante, quizás pueda encontrar varias opciones que pueden parecer correctas, pero sólo una lo es, dado que se persigue un refinado razonamiento para obtener la comprensión de los conceptos o ideas a indagar.

La tabla siguiente muestra las respuestas correctas que corresponden a cada pregunta:

PREGUNTA	MEJOR OPCIÓN DE RESPUESTA	PREGUNTA	MEJOR OPCIÓN DE RESPUESTA
P 1	c	P 18	c
P 2	d	P 19	d
P 3	d	P 20	d
P 4	c	P 21	a
P 5	d	P 22	b
P 6	b	P 23	b

P 7	a	P 24	a
P 8	d	P 25	c
P 9	a	P 26	d
P 10	c	P 27	d
P 11	c	P 28	d
P 12	a	P 29	a
P 13	b	P 30	d
P 14	d	P 31	b
P 15	c	P 32	d
P 16	d	P 33	c
P 17	c	P 34	c

Tabla 4.3 Mejor opción de respuesta en el test diseñado.

Luego, se codificaron todas las respuestas obtenidas por el estudiante asignando el valor “1” en el caso de que su respuesta sea correcta y el valor de “0” en caso contrario. De esta manera, se obtuvo una matriz de datos de tipo cuantitativo con 34 variables que tomaban los valores de “0” ó “1”. La matriz obtenida se muestra en el Anexo 4.

4.6.2.2 Análisis de clusters y descripción del algoritmo k-medias

El análisis de clusters es una técnica utilizada para clasificar los objetos o casos en grupos relativamente homogéneos llamados clusters o conglomerados. Los objetos en cada grupo tienden a ser similares entre sí y diferentes a los objetos en otros grupos. Este análisis se conoce también como análisis de clasificación o taxonomía numérica.

Tanto el análisis de clusters como el discriminante se ocupan de la clasificación. Sin embargo, el análisis discriminante requiere del conocimiento previo de participación en el grupo de cada objeto o caso que se incluye, a fin de desarrollar la regla de clasificación. Por el contrario, en el análisis de cluster no hay información a priori acerca de la participación en el grupo de ninguno de los objetos. Los datos sugieren los grupos y no se definen previamente.

La mayor parte de estos métodos son procedimientos relativamente sencillos, basados en algoritmos. Los estadísticos y conceptos siguientes están relacionados con el análisis de cluster:

- **Programa de aglomeración.** Ofrece información sobre los objetos o casos que se combinan en cada etapa de un proceso de agrupación jerárquica.
- **Centroide de agrupamiento.** El centroide de agrupamiento son los valores medios de las variables para todos los casos u objetos de un grupo particular.
- **Centros de agrupamiento.** Son los puntos de partida iniciales en la agrupación no jerárquica. Los grupos se construyen alrededor de estos centros o semillas.
- **Participación en el grupo.** Indica el grupo al que pertenece cada objeto o caso.
- **Distancias entre los centros de los grupos.** Indican cuán separados están los pares individuales de grupos. Los grupos muy separados son distintos y, por tanto, deseables.

Hay dos grupos de algoritmos de clusters: los **jerárquicos**, que van creando clusters de tamaño pequeño, incluso inicialmente con un solo componente, y los van fusionando hasta obtener clusters de tamaño superior; diferentes versiones de algoritmos se diferencian por las reglas que usan para unir clusters o separarlos; el resultado final es un árbol de clusters denominado dendrograma, que muestra como los clusters se relacionan unos con otros. El cluster jerárquico se ha usado, por ejemplo, para clasificación de documentos, o incluso para clasificación en biocomputación. Por el contrario, el clusters no jerárquico calcula los clusters directamente; los algoritmos más populares, tales como el k-medias y el ISODATA son de este tipo.

	Nombre	Tipo	Anchura	Decimales	Etiqueta	Valores	Perdidos	Columnas	Alineación	Medida	Rol
1	Registro	Cadena	2	0	# DECASO	Ninguna	Ninguna	2	Centrado	Nominal	Entrada
2	Sexo	Cadena	20	0	SEXO	Ninguna	Ninguna	8	Centrado	Nominal	Entrada
3	Edad	Numérico	5	0	EDAD	Ninguna	Ninguna	5	Centrado	Escala	Entrada
4	Institución	Cadena	30	0	INSTITUCIÓN	Ninguna	Ninguna	10	Centrado	Nominal	Entrada
5	Programa	Numérico	30	0	PROGRAMA	{1, 11}...	Ninguna	10	Derecha	Nominal	Entrada
6	R1	Cadena	2	0	R1	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
7	P1	Numérico	11	0	P1	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
8	R2	Cadena	2	0	R2	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
9	P2	Numérico	11	0	P2	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
10	R3	Cadena	2	0	R3	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
11	P3	Numérico	11	0	P3	Ninguna	Ninguna	3	Izquierda	Escala	Entrada
12	R4	Cadena	2	0	R4	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
13	P4	Numérico	11	0	P4	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
14	R5	Cadena	2	0	R5	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
15	P5	Numérico	11	0	P5	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
16	R6	Cadena	2	0	R6	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
17	P6	Numérico	11	0	P6	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
18	R7	Cadena	2	0	R7	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
19	P7	Numérico	11	0	P7	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
20	R8	Cadena	2	0	R8	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
21	P8	Numérico	11	0	P8	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
22	R9	Cadena	2	0	R9	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
23	P9	Numérico	11	0	P9	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
24	R10	Cadena	2	0	R10	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada
25	P10	Numérico	11	0	P10	Ninguna	Ninguna	2	Izquierda	Escala	Entrada
26	R11	Cadena	2	0	R11	Ninguna	Ninguna	2	Derecha	Nominal	Entrada

Tabla 4.4 Ambiente de la vista de variables ofrecida por el SPSS.

El k-medias, también llamado a veces c-medias, funciona de la forma siguiente: se escoge inicialmente un número de clusters (se halla ese número usando alguna técnica de análisis exploratorio, o, la mayor parte de las veces, a criterio del experto). Se escogen aleatoriamente el mismo número de vectores de referencia, usando alguna provisión adicional, por ejemplo, una distancia mínima entre ellos; a continuación, se asigna cada elemento de la muestra de entrada al vector de referencia más cercano. Una vez asignados todos los vectores de la muestra, se actualizan los vectores de referencia como la media de todos los vectores en un cluster. El algoritmo se repite hasta que en dos iteraciones no varíen los vectores de referencia, es decir, la distancia media de los vectores de la muestra a los vectores de referencia más cercanos o ganadores.

El algoritmo de k-medias viene incluido en el programa estadístico SPSS, que fue desarrollado en la Universidad de Chicago y es uno de los más difundidos. La versión 18.0 es la utilizada para el análisis de los datos de esta investigación.

En la Figura anterior se muestra el ambiente que el SPSS ofrece para introducir los datos y ver las variables⁴⁶. Cada variable tiene el nombre en la primera columna y posteriormente se debe especificar el tipo de variable, la anchura, número de decimales, entre otras características.

4.6.2.3 Aplicación del algoritmo k-medias en el presente estudio

El propósito es confirmar que en el conjunto de datos del grupo piloto se pueden distinguir cuatro grupos diferenciados, que están en correspondencia con los primeros cuatro niveles de comprensión de la teoría de PK.

Inicialmente, se permitió que el SPSS clasificará los individuos, de acuerdo a criterios que el mismo programa establece y para lo que está garantizado cierta validez. Sin embargo, siendo coherentes con los cuatro clusters que están en correspondencia con los niveles de comprensión de la teoría de PK, de acuerdo a los descriptores pre-establecidos, no resulta útil realizar un análisis sobre estos resultados; aunque el programa logra clasificar 44 individuos y tan sólo deja por fuera de la clasificación a seis de los individuos.

Posteriormente y después de varios intentos, con el fin de clasificar el 100% de la población estudiada, se decide trabajar con asignación de semillas para las medias de cada pregunta, de acuerdo al bloque al que pertenece. Se consigue así que las preguntas que corresponden al primer bloque les sea asignado una media de 0,5 y a las demás el valor de 0; esto significa que para que un estudiante sea clasificado en el nivel del Primitive Knowing, el 50% debe haber contestado correctamente tales preguntas.

Para que un estudiante sea clasificado en el nivel del Image Making, el 70% de los estudiantes debió haber contestado correctamente las preguntas del bloque 2 y adicionalmente la mayoría de las del bloque 1; por tal razón a dichas preguntas se les asigna una media de 0,7.

Para que un estudiante sea clasificado en el nivel del Image Having, el 80% de los estudiantes debió haber contestado correctamente las preguntas del bloque 3 y adicionalmente la mayoría de las del bloque 1 y 2; por tal razón a dichas preguntas se les asigna una media de 0,8.

Para que un estudiante sea clasificado en el nivel del Property Noticing, el 100% de los estudiantes debió haber contestado correctamente las preguntas del bloque 4 y adicionalmente la mayoría de las del bloque 1, 2 y

⁴⁶ Sólo es mostrado una parte de todas las variables, dado que son 20 preguntas y 20 respuestas.

3, a excepción de la pregunta 18 la cual se le asignó una media de 0,8; por tal razón a las demás preguntas se les asigna una media de 1.

Es importante hacer notar que estos valores dados a las medias de cada pregunta son tomados a criterio del experto, de acuerdo al diseño y aplicación de la entrevista; de esta forma se logra clasificar al 100% de la población estudiada. Es justificable la necesidad de tener en cuenta las preguntas de bloques anteriores para la clasificación de los estudiantes, dada la existencia de preguntas que entorpecen al entrevistado momentáneamente y preguntas confirmatorias (preguntas que están directamente relacionadas con los descriptores de nivel) que, en la entrevista socrática, discriminan la asignación de los estudiantes en un nivel de razonamiento. La particularidad de las preguntas confirmatorias radica en el hecho de que se hacen después de haber propiciado un avance en la comprensión del concepto.

CLUSTER	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27	P28	P29	P30	P31	P32	P33	P34	var	v		
1	1,0	,5	,0	,0	,0	,5	,5	,0	,0	,5	,0	,5	,0	,5	,0	,5	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,2		
2	2,0	,7	,7	,7	,7	,7	,7	,0	,7	,7	,7	,7	,7	,7	,7	,7	,7	,7	,7	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,7	,0	,0	,0	,0	,0	,0			
3	3,0	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8	,8		
4	4,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0		
5																																						

Tabla 4.5 Asignación de medias para cada pregunta por bloque en el SPSS.

Resultados de la clasificación^a

Número inicial de casos		Grupo de pertenencia pronosticado				Total	
		1	2	3	4		
Original	Recuento	1	24	0	0	0	24
		2	0	9	0	0	9
		3	0	0	12	0	12
		4	0	0	0	5	5
%		1	100,0	,0	,0	,0	100,0
		2	,0	100,0	,0	,0	100,0
		3	,0	,0	100,0	,0	100,0
		4	,0	,0	,0	100,0	100,0

a. Clasificados correctamente el 100,0% de los casos agrupados originales.

Tabla 4.6 Clasificación del 100% de los estudiantes por cluster, dado por el SPSS.

Con la ayuda del algoritmo k-medias, se logra clasificar a 24 estudiantes de nivel Primitive Knowing, 9 de nivel Image Making, 12 de nivel Image Having y 5 de nivel Property Noticing; éstos últimos que son confirmados en el nivel después de aplicárseles la entrevista (como casos adicionales a los descritos en el análisis cualitativo).

4.6.2.4 Comparación de los distintos programas del grupo piloto

En la siguiente tabla se señalan los estudiantes diferenciados por programa, que de acuerdo al criterio elegido por el experto ha permitido clasificar en los diferentes niveles de comprensión de la teoría de PK para la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes.

			PROGRAMA
Número inicial de casos	1	1	11°
		2	11°
		3	11°
		4	11°
		5	11°
		6	11°
		7	11°
		8	11°
		9	11°
		10	11°
		11	11°
		12	11°
		13	11°
		14	11°
		15	11°
		16	11°
		17	11°
		18	Ingeniería

			19	Ingeniería
			20	Ingeniería
			21	Ingeniería
			22	Ingeniería
			23	Lic. Ed. Matemáticas
			24	Lic. Ed. Matemáticas
		Total	N	24
2		1		11°
		2		11°
		3		11°
		4		11°
		5		11°
		6		11°
		7		Ingeniería
		8		Ingeniería
		9		Lic. Ed. Matemáticas
		Total	N	9
3		1		11°
		2		11°
		3		11°
		4		11°
		5		11°
		6		11°
		7		11°
		8		11°
		9		Ingeniería
		10		Ingeniería
		11		Lic. Ed. Matemáticas
		12		Lic. Ed. Matemáticas
		Total	N	12

	4	1		11°
		2		11°
		3	Lic.	Ed.
			Matemáticas	
		4	Lic.	Ed.
			Matemáticas	
		5	Lic.	Ed.
			Matemáticas	
	Total	N		5
Total	N			50

Tabla 4.7 Clasificación de los estudiantes por cluster en el SPSS, discriminando el programa.

Se pueden identificar en el nivel del Primitive knowing, 17 estudiantes de grado 11° del CGV, 5 de Ingeniería y 2 de Licenciatura en Educación matemáticas y Física; en el nivel del image Making, 6 del CGV, 2 de Ingeniería y 1 de la Licenciatura; en el nivel del Image having, 8 estudiantes del CGV, 2 de ingeniería y 2 de Licenciatura y finalmente; en el nivel del Property Noticing, 2 estudiantes del CGV, 3 de Licenciatura y 0 de Ingeniería.

La Tabla 4.2 caracterizó los diferentes grupos y subgrupos de acuerdo a las instituciones y programas de procedencia de los estudiantes que conforman el grupo piloto. Dichas instituciones son la U. de A. de carácter público y el CGV, de carácter privado; la primera ofrece programas de educación superior y la segunda, ofrece bachillerato académico bilingüe con un currículo internacional.

Para acceder al programa de Licenciatura en Educación Matemáticas y Física y a los programas de Ingenierías, es necesario superar el examen de admisión, que consta de dos pruebas, una de aptitud verbal que equivale a un 50% y la otra de razonamiento lógico que equivale al otro 50%. La Facultad de ingeniería de la U. de A. es una de las más grandes del país y ofrece los programas con mayor demanda. Los estudiantes de ingeniería tienen en su plan de estudios, el ciclo de ciencia básicas, que hasta el primer año, consta de los siguientes cursos: Cálculo Diferencial e integral, Geometría Euclidiana, Geometría Vectorial y Analítica y Matemáticas Operativas. Por su parte, los estudiantes del segundo año del programa de Licenciatura en Educación Matemáticas y Física tienen en su plan de estudios, en la línea de Matemáticas, los siguientes cursos: Lógica y Teoría

de Conjuntos, Introducción al Cálculo, Cálculo en una Variable, Cálculo en Varias variable, Ecuaciones Diferenciales, Análisis Matemático, estadística, Geometría Euclidiana, Geometría Vectorial, Álgebra Lineal, Sistemas Numéricos y Estructuras Algebraicas.

El CGV ha ocupado en los últimos dos años⁴⁷ los primeros lugares, en la categoría de colegios de carácter privado a nivel departamental y nacional, al igual que en las pruebas ICFES, en las que ha obtenido un desempeño de valoración Muy Superior. Los estudiantes de grado 11 ° tienen en su línea de Matemáticas cinco horas de Cálculo, dos de Estadística y una de Geometría Analítica.

Teniendo en cuenta las características de las instituciones y programas que conforman el grupo piloto del estudio estadístico, analicemos la pertenencia de los estudiantes de cada programa a los diferentes cluster correspondientes a los cuatro primeros niveles de la teoría de PK, según la clasificación hecha por el programa SPSS.

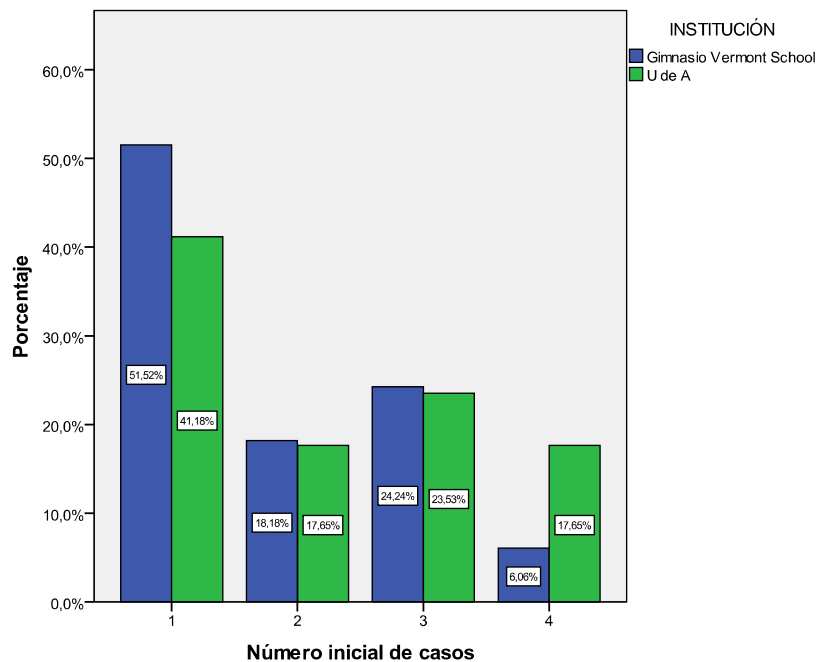


Figura 4.23 Barras de porcentajes de estudiantes clasificados en los niveles de comprensión, por cada institución.

⁴⁷ Dado que es un colegio que hasta ahora sólo ha graduado dos promociones de estudiantes de último año de bachillerato.

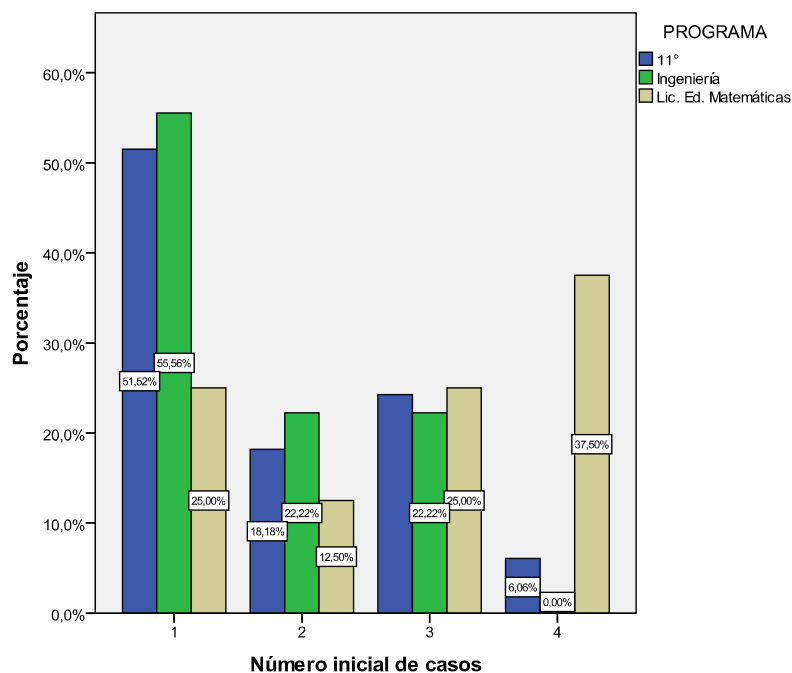


Figura 4.24 Barras de porcentajes de estudiantes clasificados en los niveles de comprensión, por cada programa.

Aunque no es nuestro objetivo deducir conclusiones de este breve análisis estadístico, sí podemos conjeturar la validez de que el test funciona para una población heterogénea, en la que un considerable porcentaje no ha pasado por los cursos regulares de Cálculo y, tan sólo, manejan las ideas intuitivas de área, tangente, pendiente y función; sin embargo, los resultados muestran una proporción bastante uniforme, de acuerdo al número de estudiantes por programa.

Lo anterior es corroborado con los porcentajes mostrados en los diagramas de barras de la Figura anterior: en ellos se evidencia que cerca de un 50% de los estudiantes de Ingeniería y del CGV están ubicados en el nivel del Primitive Knowing, y tan sólo el 25% de la Licenciatura. Continúan los resultados muy homogéneos para los dos primeros programas en el nivel del Image Making con el 20%, y el 12% para los de Licenciatura; alrededor del 20% para los dos primeros programas y del 25% para los de Licenciatura, ubicados en el nivel del Image Having y, por último, se destaca que el 37,5% de los de Licenciatura se alcanza a ubicar en el nivel del Property Noticing.

Se destaca así que el carácter socrático de las preguntas del test, permiten ubicar estudiantes de casi todos los programas del grupo piloto en los diferentes niveles de comprensión de la teoría de PK, sin necesariamente haber pasado por una enseñanza sistemática a nivel superior de los conceptos del Cálculo y haciendo que el estudiante contraste sus ideas

preconcebidas con las nuevas. El test constituye en sí una experiencia de aprendizaje para el estudiante.

4.6.2.5 Las preguntas discriminantes según el criterio del experto y su correspondencia con los descriptores

Se puede observar en el análisis estadístico, que para la clasificación de un estudiante en un nivel de comprensión, las semillas de las medias para las preguntas de bloques anteriores al mismo nivel son necesarias, pues permiten identificar sutilmente las preguntas discriminantes que están en correspondencia con los descriptores de separación, como ya se había anotado en la Sección 3.3.

A continuación, se especifica por niveles las preguntas discriminantes y sus correspondientes descriptores:

Nivel	Descriptor	Preguntas discriminantes
Primitive Knowing	1.7	2, 3
	1.8	17, 19
Image Making	2.5	20, 21, 22, 23
Image Having	3.9	33, 34

Tabla 4.8 Las preguntas discriminantes, en correspondencia con los descriptores de separación.

En la Tabla 4.8, se muestra cómo las preguntas 2 y 3 son claves para estar en el nivel siguiente del Image Making, dado el descriptor 1.7 como descriptor de separación entre el primero y segundo nivel. De la misma manera se interpretan las demás preguntas discriminantes.

4.6.2.6 Análisis discriminante

El análisis discriminante es una técnica estadística que permite estudiar las diferencias entre varios grupos de objetos, con respecto a varias variables

simultáneamente. Es una forma de clasificar y asignar individuos a grupos, conocidas sus características.

El análisis parte de una tabla de datos de n individuos en los que se ha medido p variables cuantitativas independientes o “explicativas” como perfil de cada uno de ellos. Una variable cualitativa adicional (dependiente o “clasificativa”), con dos o más categorías, ha definido por otros medios el grupo al que pertenece cada individuo. La tabla de datos será pues, una matriz de n filas y $(p+1)$ columnas en las que cada caso figura con un perfil y una asignación de grupo.

El problema que resuelve el Análisis Discriminante puede formularse de la siguiente manera: entre todas las combinaciones lineales de variables, busca aquellas que tienen una varianza externa máxima – con el fin de resaltar las diferencias entre grupos -, y una varianza interna mínima – con el fin de que la dispersión entre las clases esté bien delimitada -. Estas combinaciones lineales serán las funciones discriminantes. Esta técnica reduce el número inicial de variables, que determinan las diferencias entre los grupos, a una, dos o más nuevas variables. Las funciones lineales discriminantes son combinaciones lineales de las anteriores, de tal manera que ellas solas son capaces de identificar o discriminar adecuadamente los grupos previamente contruidos como las variables originales.

En este estudio se usó el análisis discriminante para explicar la pertenencia de cada estudiante del grupo piloto a uno u otro cluster. Por otro lado, el Análisis Discriminante nos permite cuantificar el peso que cada variable (P_j) tiene a la hora de distinguir entre los grupos.

Dado que se dispone de un gran número de variables, y se quiere saber cuáles de ellas son las que mejor contribuyen a discriminar entre los grupos (que serían las preguntas discriminantes), se ha elegido el “Método de inclusión por pasos”. Este procedimiento comienza seleccionando una única variable que es la que produce una mayor discriminación, a continuación se empareja esa variable con todas las demás para comprobar cuál es el par que produce mejor discriminación. El par obtenido se combina con las restantes variables hasta obtener la mejor tripleta y así sucesivamente hasta que las variables que quedan sin seleccionar sean aquellas que no aportan nueva información o lo hagan en cantidad mínima.

Una vez seleccionadas las variables, a partir de ellas se determinan las funciones discriminantes canónicas, en el caso de que haya más de dos grupos que permitan al analista establecer las distancias entre los grupos que se están investigando.

Para realizar el análisis discriminante mediante el método de inclusión por pasos, se dio como variable de agrupación la clasificación obtenida por el algoritmo de las k-medias con el criterio del experto.

Por otra parte, las funciones discriminantes utilizadas permiten establecer un sistema de coordenadas sobre el que se sitúan las posiciones de los vectores de medias de los grupos y la posición relativa de las unidades experimentales. Esto proporciona representaciones gráficas, que indican la manera en que se distribuyen los individuos en los grupos, alrededor de sus respectivos centroides. La siguiente Figura muestra grupos diferenciados de estudiantes representados por anillos que están muy cerca a sus centroides, de acuerdo al análisis discriminante, lo que hace pensar en una elección adecuada de las preguntas discriminantes. Estos grupos se han asociado con los cuatro primeros niveles de comprensión en la teoría de PK

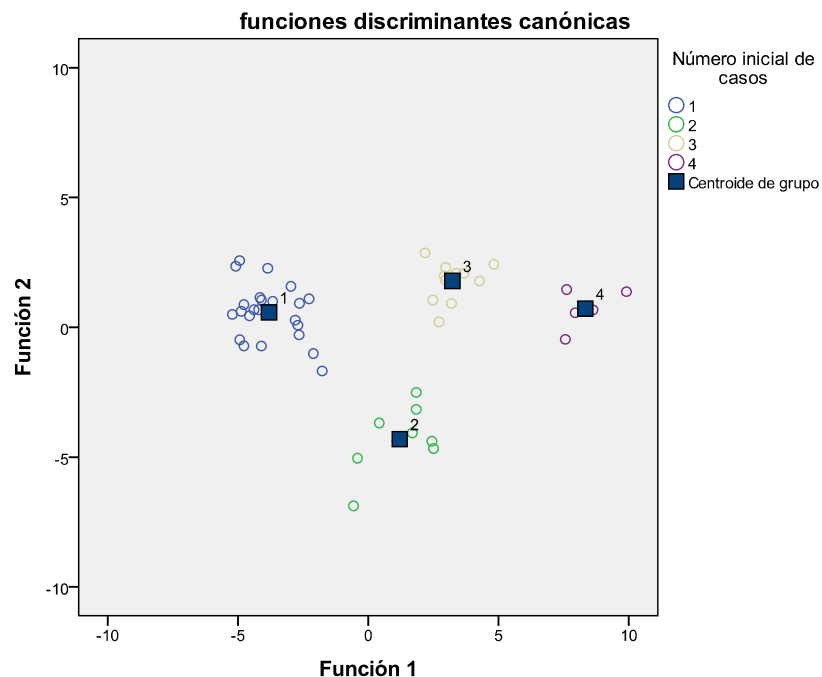


Figura 4.25 Gráfica del análisis discriminante y la correspondencia de los individuos a sus respectivos centroides.

Finalmente, se observa cómo el análisis discriminante realizado con las medias mostradas en la Tabla 4.5, establecen claramente la diferencia de los individuos, permitiendo visualizar sus distancias a los centroides y corroborando una vez más la correspondencia de los descriptores con los niveles de comprensión en la teoría de PK.

5 CONCLUSIONES

En el contexto del aprendizaje de conceptos del Análisis Matemático, ha sido evidente a través de los años, la preocupación que la Educación Matemática ha manifestado por las complejidades que se presentan en el acto mismo de su enseñanza, y han sido muchos los intentos para que las dificultades sean superadas, a través de investigaciones que originan estrategias de intervención didáctica y metodológica al interior de las aulas de clase, provistas por investigadores en el mismo campo de la Educación Matemática y de las mismas Matemáticas. En este sentido, las conclusiones del presente estudio se desarrollan a partir de: la consecución de los objetivos, el diseño de la entrevista socrática, la dirección de un trabajo de investigación a nivel de maestría, las proyecciones hacia el futuro y el desarrollo de nuevas líneas de investigación en el grupo de Educación Matemática e Historia (U. de A. - EAFIT).

5.1 Consecución de los objetivos

El presente estudio se propuso como objetivo general, plantear la entrevista socrática para la comprensión del TFC en el marco de la teoría de PK, como estrategia metodológica para abordar los procesos de razonamiento infinito involucrados en los conceptos de tangente y área, que subyacen en el TFC, y de esta manera avanzar en su comprensión.

Para lograr el objetivo, se hizo necesario plantear la consecución de los siguientes objetivos específicos:

1. *Rastrear conceptos como los de área, pendiente, tangente, derivada e integral definida, y su relación con el desarrollo histórico del TFC, lo que*

permitirá reconocer en detalle algunas dificultades en el proceso de comprensión, en el contexto de la teoría de PK.

En el Capítulo 2 se logra rastrear la manera en que los conceptos relativos al TFC son abordados por diferentes matemáticos, en diferentes momentos históricos, y la forma natural en que las concepciones intuitivas previas al concepto-definición propio del momento, son modificadas y evolucionan en cada período, de acuerdo al concepto-imagen proporcionado inicialmente, en la mayoría de los casos, por la Geometría.

Sin lugar a dudas, el alcance de este referente histórico en la evolución del TFC, hace reflexionar en el contexto de la Educación Matemática, a los investigadores y docentes que a diario se enfrentan a las dificultades que presentan los estudiantes cuando los conceptos de tangente, pendiente, área, derivada e integral son abordados, y es así como la entrevista socrática en el modelo de la teoría de PK, se convierte en una estrategia metodológica adecuada para indagar acerca de la comprensión del TFC y, entra a formar parte de las herramientas para buscar y analizar información relevante a un concepto, en el mismo marco teórico.

2. *Identificar las características propias de los cuatro primeros niveles de comprensión que propone la teoría de PK y articularlas con el estudio del TFC.*

Uno de los principales aportes de este estudio tiene que ver con la adecuación original de las características de los primeros cuatro niveles de la teoría de PK con la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. En este orden de ideas, el diseño de la entrevista de carácter socrático para la comprensión del TFC, permite dilucidar cómo las ideas intuitivas geométricas de recta, pendiente y secante corresponden al *Primitive Knowing*; el paso por los procesos de razonamiento infinito en los conceptos de recta tangente y área, propician la construcción de imágenes mentales en conjunto con la actividad de aproximar, y corresponden al *Image making*; el análisis del comportamiento de las tangentes de una función favorece la identificación de propiedades globales fácilmente identificables en la construcción de la gráfica de su derivada y corresponde al nivel de *Image Having* y, finalmente, el reconocimiento de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes corresponde al nivel de *Property Noticing*.

La consecución de este segundo objetivo específico, se relaciona estrechamente con el planteamiento de descriptores que son obtenidos, de acuerdo al tercer objetivo específico.

3. *Plantear los descriptores preliminares de cada uno de los cuatro primeros niveles de comprensión para el TFC, los cuales direccionarán y refinarán el guión de entrevista de carácter socrático.*

Como aporte fundamental de la presente investigación, la concepción de los descriptores logra construir una caracterización para las *complementariedades de la acción y la expresión* en la comprensión del TFC para el segundo (*Image doing, Image reviewing*), tercero (*Image seeing, Image saying*) y cuarto nivel (*Property predicting, Property recording*), en coherencia con el análisis cualitativo del diseño metodológico, ya explicitado en el Capítulo 4 para los casos de Valentín, Sabina y Luciana. También se logra establecer un mapa del recorrido en el modelo de la teoría de PK para cada caso, direccionado por los descriptores y el reconocimiento de los *Folding Back* detectados, en función de las preguntas del investigador y de las respuestas dadas por los estudiantes.

Este estudio también permite establecer cómo, además de los *Folding Back* dados durante la comprensión del TFC, son dados también en modelos de comprensión de otros conceptos, al interior de la teoría de PK, lo que hace pensar que es natural realizar pausas dentro del proceso de comprensión de un concepto A, para recurrir a otro concepto B de forma momentánea, fuera del modelo en el que se avanza, para luego retomar el modelo actual y así poder continuar comprendiendo.

Modelo alternativo en el que se acude momentáneamente a otro Concepto B, para realizar un *Folding Back* y continuar con la comprensión del Concepto A

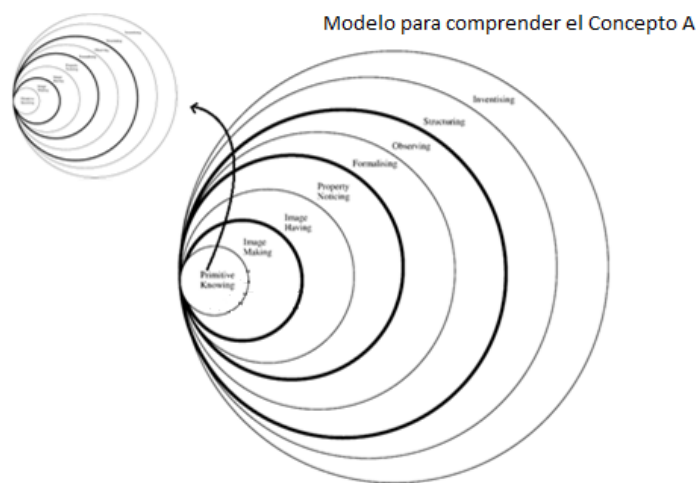


Figura 5.1 Se muestra la posibilidad de un *Folding Back* fuera del modelo en el que se está comprendiendo.

Vale la pena precisar que el planteamiento de descriptores para la comprensión de un concepto matemático en el marco de la teoría de PK, resulta como aporte novedoso en el presente estudio, dado que hasta el momento no se conocen investigaciones en este marco teórico que utilicen la técnica de la detección de niveles de comprensión a partir de descriptores, obtenidos durante la aplicación de las entrevistas socráticas.

4. *Diseñar un test basado en el guión de entrevista de carácter socrático, con el fin de comprobar que es posible la detección de los niveles de razonamiento propuestos en la teoría de PK; al mismo tiempo que se automatiza la adscripción de los estudiantes en su correspondiente nivel.*

Con base en el análisis del guión entrevista y los resultados obtenidos durante su aplicación, se diseñó un test semi-estructurado con respuestas de opción múltiple, denominado LA RELACIÓN INVERSA ENTRE CUADRATURAS Y TANGENTES, que facilitó consolidar y analizar una experiencia educativa de mayor alcance poblacional y obtener datos estadísticos suficientes para corroborar los resultados obtenidos en las entrevistas, con respecto a la clasificación de los estudiantes en los niveles de comprensión. El test está diseñado en cuatro bloques de preguntas en correspondencia con el nivel de comprensión en el que se encuentra un estudiante, lo que posibilita automatizar la entrevista.

El tratamiento estadístico anterior, se logró mediante un Análisis de Cluster con el SPSS, que permitió contemplar un mayor número de variables que intervienen en la experiencia educativa, lo que hace más confiable, completo y suficiente el estudio.

Tras lo dicho anteriormente, se puede evidenciar la importancia de generar en el estudiante un pensamiento crítico, creativo y discursivo durante el proceso de comprensión de conceptos matemáticos, lo que es propio del diálogo socrático, en el cual interviene la pregunta como elemento detonante para desencadenar momentos de *Folding Back* que, en términos de la entrevista socrática, entorpezcan al aprendiz ante un posible error o confusión, pero a la vez desencadene momentos de *complementariedades de acción y expresión* que lo saquen de la confusión y así avanzar en su proceso de comprensión.

Otro aspecto importante radica en el hecho de que la teoría de PK se ha podido extender a la comprensión de conceptos específicos del Análisis Matemático, que ha involucrado procesos de razonamiento infinito como el de aproximación, en la ideas de tangente, pendiente y área; aunque Meel lo

ha hecho de manera general (Meel, 1998), en conceptos amplios del Análisis, como lo son los de Límite, Derivada e Integral.

Hasta ahora, se conocen investigaciones en Educación Matemática realizadas en el contexto de la teoría de PK, mientras que otras han sido realizadas en el contexto de la entrevista de carácter socrática; el presente estudio logra vincular de manera acertada ambos referentes, uno como marco teórico, y el otro, como estrategia metodológica, logrando alcanzar óptimos resultados en el análisis y avance de la comprensión del TFC, lo que puede sugerir su aplicación para otros conceptos. En la misma dirección, el decálogo tenido en cuenta a partir del estudio realizado por (Londoño & Jurado, 2005) asegura un buen diseño de entrevista, ya que las características que lo componen giran en torno al desarrollo de comprensión, lo que facilita que el estudiante construya su propio conocimiento.

5.2 Sobre el diseño y el discurrir de la entrevista

Los aportes fundamentales de la presente investigación para el diseño de una entrevista de carácter socrático, en el contexto de la teoría de PK, radican en los siguientes aspectos que se deben tener en cuenta:

- Es necesario garantizar que los entrevistados tengan un mínimo de información inicial e ideas intuitivas, que indiquen el razonamiento en el *Primitive Knowing*.
- El investigador debe concebir cada una de las preguntas que se diseñan, con una intencionalidad clara y en contexto con el nivel de comprensión de acuerdo a la teoría de PK, lo que posteriormente hace más coherente al análisis cualitativo, producto del trabajo de campo.
- Dados los procesos de razonamiento infinito que son inherentes a los conceptos del Análisis matemático, y al auge con que las TICs han venido permeando la Educación en la actualidad, resulta indispensable involucrar *software* adecuados, de acuerdo al concepto a trabajar, que ayuden a los estudiantes participantes de la entrevista socrática a corroborar resultados y construir imágenes mentales que agilicen su avance en la comprensión del concepto. Para nuestro caso particular, el uso de la herramienta Geogebra® fue un elemento clave, que ratificó o refutó algunas conjeturas y, permitió superar momentos de *Folding Back* presentados durante la entrevista.

- Otro elemento esencial para el diseño de la entrevista socrática, tiene que ver con la implementación adecuada de la visualización matemática, la cual está en correspondencia con los primeros niveles de la teoría de PK.
- Debe tenerse en cuenta que el lenguaje utilizado durante la entrevista, debe estar en función de las preguntas hechas por el investigador y de las respuestas dadas por el entrevistado, y debe ser refinado en la medida en que avance el desarrollo de la entrevista.
- El análisis cualitativo permite establecer la relación entre la teoría de PK, la entrevista socrática y el aprendizaje de un concepto matemático, lo que refleja en términos actuales propiciar un ambiente adecuado para que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas que estimulen otros aprendizajes de otros conceptos, desde el punto de vista de los argumentos, la comunicación y la capacidad para proponer.
- En esta investigación, se implementó un sencillo dispositivo que consiste de segmentos verticales (para ser asociados con ordendas posteriormente) y permite conectar las ideas intuitivas con ideas más elaboradas para abordar la comprensión del TFC.

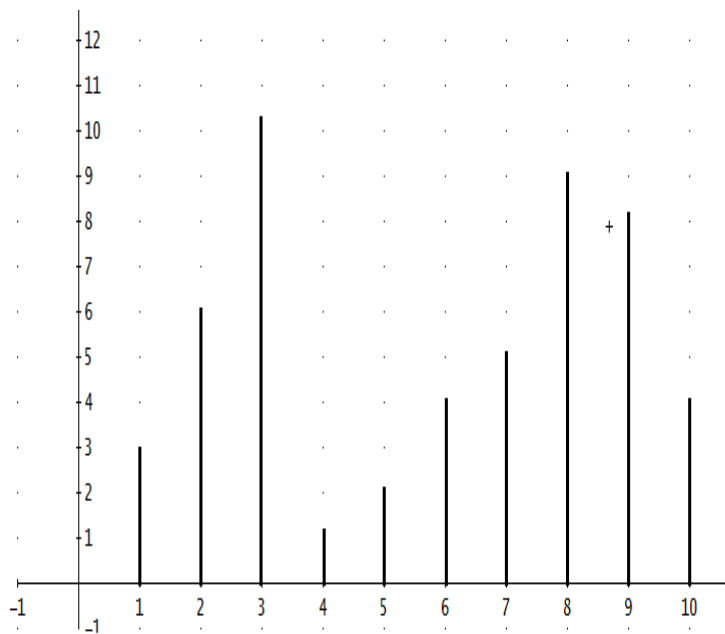


Figura 5.2 Dispositivo empleado en la entrevista de carácter socrático para el presente estudio.

En otros estudios como los de (Londoño & Jurado, 2005), (Esteban, 2003), (Jaramillo C. , 2001), entre otros, el diseño de la entrevista socrática para la comprensión de diversos concepto del Análisis Matemático, involucran un dispositivo para conseguir el objetivo. A partir de los anteriores resultados y del obtenido en el presente estudio, se puede conjeturar que la implementación de un dispositivo elemental permite acceder fácilmente a la comprensión de un concepto matemático, y es necesario en el diseño de una entrevista socrática, en el contexto de un modelo o teoría educativa, pues contribuye a que el desarrollo del trabajo de campo se lleve a cabo con más naturalidad y efectividad en el proceso de comprensión.

En cuanto a los aportes fundamentales de la presente investigación para el discurrir de una entrevista de carácter socrático, en el contexto de la teoría de PK, radican en los siguientes aspectos que se deben tener en cuenta:

- Se corrobora una vez más la necesidad de procurar iniciarla en un ambiente relajado, lo que es especialmente importante cuando se entrevista a estudiantes más jóvenes (de bachillerato) y, por tanto, se debe dedicar el tiempo suficiente para crear ese clima, enfatizando que *no se trata de un examen*. Se explica que con las contestaciones de la prueba no se *queda ni bien ni mal*, sino que se pretende saber lo que piensan acerca de algunas situaciones sencillas. Tras esto, y con la intención de motivarlo a realizar la entrevista con interés, se le hace la observación sobre nuestra intención de apreciar su razonamiento.
- Con las primeras preguntas se le debe dar confianza sobre la sencillez de la prueba aunque, a medida que va evolucionando, las preguntas solicitan un mayor nivel de atención y concentración. Todos los estudiantes que se entrevistan deben colaborar voluntariamente y, en todos los casos, se pide una cierta discreción sobre el contenido de la prueba para evitar, dentro de lo posible, que se entreviste a alguien que de alguna forma ya tenga familiaridad con su contenido (se cree que, sin ser algo decisivo, que es conveniente la improvisación en el entrevistado). También es importante informarles que sus datos personales van a ser confidenciales, pero que sus respuestas se usarán para un trabajo de investigación. Para diferenciar la prueba de un examen, se toma solamente el número de la entrevista para asegurar una identificación del caso. Se intenta que todas las entrevistas se hagan en condiciones bastante semejantes, aunque cada entrevista produce un diálogo peculiar entre entrevistado y entrevistador.
- Un dato que puede resultar significativo sobre el desarrollo de la entrevista es el cansancio que manifiestan la mayoría de los

estudiantes al finalizarla. El detalle es relevante si se pone de manifiesto que se encuentran ante una prueba relacionada con el razonamiento, cuyo socratismo provoca el entorpecimiento y los obliga a la evolución en el razonamiento y la readaptación de imágenes conceptuales. En este sentido se puede señalar también que, a pesar de las advertencias iniciales, algunos estudiantes preguntan, al finalizar la prueba, sobre el resultado, pues están interesados en saber si lo han hecho bien. Una vez terminada, se les da una explicación detallada de la motivación de cada pregunta, de la interpretación que se hace de sus respuestas, cómo se considera que va evolucionando su progreso hacia el entendimiento y cómo se puede detectar. Todo parece indicar que la experiencia consigue captar su interés y no les deja indiferentes.

- La experiencia alerta sobre la relativa facilidad que puede darse en confundir socratismo con dirigismo, de modo que se hace necesario tener buen cuidado en no influir en las respuestas (sobre todo, cuando éstas son manifiestamente incorrectas) atendiendo hasta detalles aparentemente menores. Es aquí donde la experiencia del entrevistador es importante, ya que le brinda fluidez a la entrevista sin obstaculizar el razonamiento del entrevistado con gestos de aceptación o negación, entre otros. La actitud general debe ser siempre tranquilizadora, coherente con lo expuesto al principio, dando predominio al diálogo frente a la búsqueda de resultados. En algunos casos, hay que redirigir las preguntas para evitar afirmaciones que no tienen que ver con el razonamiento estudiado y que impiden el progreso del mismo.

5.3 Dirección de un trabajo de investigación en el marco del programa de Maestría en Educación: Docencia de las Matemáticas (U. de A.)

Como otro de los productos de este estudio se logra consolidar bajo mi dirección un trabajo de investigación en el programa de Maestría en Educación, en la Línea de Docencia de las Matemáticas, titulado *La comprensión del concepto de continuidad, en el marco del modelo de Pirie y Kieren*, que se contextualiza, como su nombre lo indica, en el mismo marco teórico de la presente investigación.

El trabajo respondió a una pregunta crucial: ¿Cómo evoluciona el proceso de comprensión del concepto de Continuidad, en un estudiante de Cálculo Diferencial?

Investigadores en varios países, están de acuerdo en que el concepto de continuidad es particularmente difícil para los estudiantes, ya que involucra la comprensión previa de otros conceptos fundamentales como el de Límite, además de ser abordado por los docentes desde una componente visual-geométrica asociada con las gráficas de las funciones, lo cual genera la percepción errónea de la continuidad como una característica global de las curvas y no como un concepto local asociado al control de errores, tal como lo presentaron algunos de los rigorizadores del cálculo como Cauchy y Lacroix.

Se reconoce así, la necesidad de valorar los elementos constructivos y de interacción social en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; lo cual convierte a las interacciones en el aula, en agentes fundamentales en la construcción y comprensión de conceptos en esta área.

La investigación está basada en un enfoque cualitativo y usa el estudio de casos, en el cual son tomados cuatro estudiantes elegidos voluntariamente: dos de una Institución Educativa oficial de Medellín, matriculados en el grado undécimo de la educación Media y, otros dos de una Universidad Pública, adscritos al programa académico de Licenciatura en Matemáticas y Física, matriculados en el curso de Cálculo Diferencial.

La recolección de la información se hizo mediante tres instrumentos diferentes:

- La aplicación de una entrevista semi-estructurada de carácter Socrático a cada uno de los estudiantes.
- La observación colectiva de los cuatro estudiantes en un espacio abierto donde se discuten ideas con respecto a la continuidad y se asumen diversos roles, de acuerdo con el nivel de comprensión.
- Las producciones escritas de cada uno observadas en las respuestas dadas en un taller; en él expresan y evidencian su conocimiento sobre el concepto y su habilidad para construirlo e interpretarlo en diversos gráficos.
- Al finalizar la recolección de la información, se analizaron los resultados arrojados por el instrumento frente a la solución de la pregunta de investigación y posteriormente, se trianguló la información para darle peso y validez a las conclusiones.

Terminado el proceso de análisis y la triangulación de la información, se generaron conclusiones que buscaron dar respuesta a la pregunta de

Investigación y se propusieron algunas alternativas para mejorar el desempeño de los estudiantes participantes en el estudio. Se pudo constatar cómo el lenguaje, la comprensión de conceptos previos, las interacciones entre los estudiantes y la forma de abordar la continuidad en el aula durante el proceso de enseñanza, influyen radicalmente en la consecución de la comprensión del concepto de Continuidad; objetivo deseable y prioritario, junto con los demás conceptos que se abordan en el currículo, para todos los que participan en Educación Matemática.

Toda vez que el trabajo descrito anteriormente comparte el mismo marco teórico del presente estudio, al igual que es utilizada la entrevista socrática como estrategia metodológica, la tarea de haber participado como Director del trabajo de investigación en la Maestría, contribuyó en forma directa a profundizar y analizar con mayor objetividad y detalle, los casos observados en Valentín, Sabina y Luciana, constatando algunas regularidades y conclusiones, observadas en el proceso de comprensión durante el paso por los niveles postulados por la teoría.

5.4 Proyección hacia el futuro

El presente estudio debe actuar como factor motivante en investigadores y docentes-investigadores en el campo de la Educación Matemática, para desarrollar estrategias metodológicas y de carácter didáctico, que:

- Permitan desarrollar la implementación de las TICs, para que en conjunto con la entrevista de carácter socrático y la teoría de PK, se puedan consolidar experiencias educativas al interior del aula de clase y, mediante guías o módulos de trabajo para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos, el docente pueda conocer de manera más profunda cómo es que se da el proceso de comprensión matemática de los estudiantes, convirtiendo el aula en laboratorios de investigación en Educación Matemática.
- Promuevan cursos de capacitación en una plataforma MOODLE®, con el fin de que se pueda diseñar una automatización de pruebas masivas virtuales, en el contexto de la teoría de PK.
- Propicien cambios de paradigmas en la enseñanza de las Matemáticas.

Por otro lado, los futuros trabajos de investigación que se abren partiendo de este estudio, giran en torno a las siguientes ideas:

- La posibilidad de analizar el proceso de comprensión del TFC, en estudiantes y profesores de Matemáticas que logren razonar en los últimos cuatro niveles de la teoría de PK y, de igual manera como se logra en el presente estudio, consolidar una entrevista socrática, una serie de descriptores y una caracterización para las complementariedades de la acción y la expresión que identifiquen casos de estudio particulares para la interpretación de un análisis cualitativo.
- Un estudio similar al presente, que permita diseñar una entrevista de carácter socrático en el contexto de la teoría de PK, para la otra parte del TFC en el que se usa la *función de acumulación*⁴⁸ (Purcell & Varberg, 2007, pág. 233), la cual corresponde a la igualdad $\frac{d}{dx} \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right) = f[g(x)] \cdot g'(x)$, donde f es continua en un intervalo abierto que contiene a a .
- Extender la entrevista socrática como estrategia metodológica para acceder a otros conceptos específicos del Análisis Matemático, en el contexto de la teoría de PK.
- Desarrollar un estudio comparativo en el diseño y aplicaciones de entrevistas socráticas para la comprensión de conceptos matemáticos, una sin el uso de herramientas computacionales y otra, sólo con el uso de ellas; observando las implicaciones didácticas y fenomenológicas que al interior del proceso de aprendizaje se logran apreciar.
- Consolidar técnicas estadísticas que correspondan de manera adecuada a resultados que se obtienen en los estudios desarrollados en el marco de la teoría de PK. Es conveniente mencionar la investigación de (Jaramillo & Ceballos, 2005) en el que se utiliza el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (A.F.C.M) para corroborar una vez más la importancia del análisis multivariado en la validación de investigaciones en los que se desea detectar el nivel de comprensión de un estudiante en un modelo o teoría de la Educación Matemática.

⁴⁸ Por función de acumulación, los autores se refieren particularmente a la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, dado que acumula el área bajo una curva desde un valor fijo $x = a$ hasta un valor variable x .

5.5 Acerca de cómo se enmarca la presente propuesta en el grupo de investigación: Educación Matemática e Historia (U. de A-Eafit).

El grupo de investigación Educación Matemática e Historia (U. de A-Eafit) en la línea de Pensamiento Matemático Avanzado ha centrado sus esfuerzos en la formación de alto nivel de investigadores en didáctica de las matemáticas y en la cualificación matemática de los participantes de la misma, en tanto que docentes de matemáticas, e investigadores en didáctica de las matemáticas, deben tener un profundo conocimiento de la disciplina que enseñan. Se han desarrollado varios trabajos de investigación, algunos de ellos auspiciados por Colciencias, para contribuir al desarrollo de estrategias metodológicas que han permitido a estudiantes de último año de bachillerato y primero de universidad comprender conceptos como los de recta tangente, derivada y convergencia de una serie infinita, las cuales han sido contextualizadas bajo el enfoque de seis núcleos problemáticos, sobre los cuales el grupo ha centrado su trabajo.

Teniendo en cuenta el problema identificado y de acuerdo a los objetivos alcanzados en este estudio, se enmarca en el grupo de investigación focalizando su trabajo en dos de los seis núcleos problemáticos que el grupo propone, ellos son:

Núcleo problemático 2. identificación de los obstáculos de tipo visual y geométrico que impiden la adecuada integración entre el concepto-imagen y el concepto-definición del concepto objeto de estudio. Para ello, se aprovechan las TICs y en general, las ventajas que ofrece el ordenador en el diseño de pruebas que pongan en evidencia dichos obstáculos.

Núcleo problemático 3. Identificación de los momentos históricos relevantes en la evolución del concepto objeto de estudio.

Finalmente, este trabajo de investigación, presenta la teoría de PK como un marco teórico pertinente para facilitar la comprensión de conceptos del Análisis Matemático, usando como estrategia metodológica la entrevista de carácter socrático y, posibilita una metodología alternativa y apropiada para el estudio de la comprensión de otros conceptos matemáticos.

BIBLIORAFÍA

Alarcón, S., & C, S. (2011). El método de Descartes para determinar la tangente a una curva. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* , XIX (1), 103-114.

Apostol, T. (1996). *Análisis Matemático* (2 ed.). (J. Carrera, Trad.) Barcelona, España: Reverté, S.A.

Bachelard, G. (1938). *la formation de l'esprit scientifique*. Paris: Editions J.

Bartle, R., & Sherbert, D. (1996). *Introducción al Análisis Matemático de una Variable* (2 ed.). México: LIMUSA, Noriega Editores.

Bishop, A. (1991). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*. Netherlands: Mathematics Education Library.

Bobadilla, M. (2008). El teorema Fundamental del Cálculo: Una perspectiva histórica. *Unicauca CIENCIA* , 12, 63-79.

Brown, J., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher* , 18 (1), 32-42.

Brownell, W., & Sims, V. (1946). The nature of understanding. *Studies in mathematics* , 21, 161-179.

Byres, V., & Erlwanger, S. (1985). Memory in mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics* , 16, 259-281.

Cabañas, M., & Cantoral, R. (2004). Una aproximación socioepistemológica al estudio de la integral definida.

Campillo, P., & Pérez, P. (1998). La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van-Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 6 (1), 69-80.

Capace, L. (2007). Algunas configuraciones epistémicas de la integral en una variable, desde su origen hasta su consolidación. *Enseñanza de la Matemática*, 12-16, 35-52.

Collette, J. (2002). *Historia de las Matemáticas* (Vols. I, II). México: siglo veintinuno editores, s.a. de c.v.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 153-166). Dordrecht.

Davis, R., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5, 281-303.

De Guzmán, M. (2001). *El Rincón de la Pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático, elementos básicos del análisis*. Madrid: Pirámide.

De La Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de van-Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 24, 99-121.

Edwards, H., & D, P. (2008). *Cálculo con trascendentes tempranas* (7 ed.). México: Pearson, Prentice Hall.

Edwards, J. T. (1982). *The Historical Development of the Calculus*. New York.

Engler, A. (2008). La integral definida y el cálculo de áreas de regiones planas: un recurso en la web. *Pensamiento Matemático Avanzado*.

Esteban, P. (2003). Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele. Valencia. 2003. *Tesis doctoral publicada*. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 133-150.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler. (1985). An investigation of the van-Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Brooklyn College*.

Gago, A. (2010). ¿Qué es un modelo educativo? *Catholic.net*.

Glaserfeld, E. (1987). *The Construction of Knowledge*. Seaside: Intersystems Publications.

Gutiérrez, A. (1991). *La investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van-Hiele. En Linares, & Sánchez, *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

Hoffer, A. (1983). van-Hiele-Based Research. En R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of mathematical concepts and processes*. Academic Press.

Jaramillo, C. (2001). La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van-Hiele.

Jaramillo, C., & Campillo, P. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van-Hiele. *Divulgaciones matemáticas*, 9 (1), 65-84.

Jaramillo, C., & Ceballos, L. (2005). Los niveles de razonamiento de van-Hiele en la enseñanza de la noción de convergencia de una serie, y el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples. *Educación y Pedagogía*, XVII (43), 141-147.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En C. Kieran, & S. Wagner, *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (págs. 167-194). NJ.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. En C. Janvier, *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (págs. 19-26). NJ.

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. En E. Silver, *Teaching and learning mathematical problem solving* (págs. 381-398). NJ.

Kieren, T. (1990). Understanding for teaching for understanding. *The Alberta Journal of educational Research*, 36 (3), 191-201.

Land, J. (1991). *Appropialeness of the van-Hiele Model for Describing Student's Cognitive Processes on Algebra Tasks as Typified by College Student's Learning of Functions*. Boston: University of Boston.

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2006). *Cálculo I* (Vol. I). México: Mc Graw-Hill Interamericana.

Leibniz, G. (1684). *Análisis infinitesimal*. (J. Lucas, Ed., & T. Martín, Trad.) Madrid, España: Tecnos.

Ley General de Educación. (1991). *MEN*. Bogotá.

Llorens, J. (Octubre de 1994). Aplicación del modelo de van-Hiele al concepto de aproximación local. Valencia.

Llorens, J., & Pérez, P. (1997). An Extension of van-Hiele's model to the Study of Local Approximation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28 (5), 713-726.

Londoño, R., & Jurado, F. (2005). Diseño de entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie, vía áreas de figuras planas. Medellín.

Martin, L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, 64-85.

Meel, D. (1998). Honors student's Calculus Understandings: Comparing Calculus & Mathematica and Traditional Calculus Students. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7.

Meel, D. (2003). Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 12, 132-181.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas.

Navarro, A. (2002). Un estudio de la convergencia, encuadrada en el modelo de van-Hiele, y su correspondiente propuesta metodológica. Sevilla.

Navarro, A., & P, P. (2010). Local rate of change: a socratic experience in van Hiele's model's framework. Valencia, España.

Pirie, S., & Kieren, T. (1991a). A dynamic theory of mathematical understanding: Some features and implications. (E. D. Service, Ed.) (ED 347 067).

Pirie, S., & Kieren, T. (1990). A recursive theory for mathematical understanding: some elements and implications. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Boston.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9 (3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992a). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 505-528.

Pirie, S., & Kieren, T. (1991b). folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. *Fifteenth Meeting of the Psychology of Mathematics Education Conference*. Assisi, Italy.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994b). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26 (2-3), 165-190.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992b). Watching Sandy's understanding grow. *Journal of mathematical Behavior*, 11, 243-257.

Pirie, S., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 159-181.

Pirie, S., & Schwarzenberger, R. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 459-470.

Pirie, S., & Thom, J. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of Mathematical Behavior*, v25 n3 p185-195 2006, 25 (3), 185-195.

Platón. (1996). Menón. En Platón, *Diálogos*. México: Porrúa.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*.

Purcell, E., & Varberg, R. (2007). *Cálculo*. México: Pearson Education.

Recalde, L. (2000).

Salkind, N. (1999). *Métodos de investigación*. México: Prentice Hall.

Salkind, N. (1999). *Métodos de Investigación*. México: Prentice Hall.

Santa, Z. (2011). La elipse como lugar geométrico, a través de la Geometría del doblado de papel, en el contexto de van.Hiele. Medellín: Universidad de Antioquia.

Sarmiento, B. (2005). Presentación dinámica de teoremas del cálculo: El caso del Teorema Fundamental del Cálculo Integral. *Memorias XVI encuentro de Geometría y IV de Aritmética*, (págs. 507-512). Bogotá, D.C.

Saxe, G. (1988). Studying working intelligence. En B. Rogoff, & J. Lave, *Everyday cognition* (págs. 9-40). Cambridge.

Schroeder, T. (1987). Student's understanding of mathematics: A review and synthesis of some recent research. *Psychology of Mathematics Education XI*, 3, 332-338.

Sestier, A. (2000). *Historia de las Matemáticas* (2 ed.). Ciudad: LIMUSA, Noriega Editores.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* , 22, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandry of reification: Tha case of function. En G. Harel, & E. Dubinsky, *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (págs. 59-84). Washington.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics* , 14 (1), 44-55.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. En *For the learning of Mathematics* (Vol. 10, págs. 24-41). Vancouver.

Simon, M. (1993). Prospective elementary teacher's knowledge of division. *Journal for research in Mathematics Education* , 24 (3), 233-254.

Steffe, L., & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *journal for Research in Mathematics Education* , 25 (6), 711-733.

Stein, S. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica* (5 ed., Vol. 1). Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill Interamericana S.A.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (Vol. 1). México: Thomson Learning.

Stewart, J. (2006). *Cálculo: Conceptos y contextos*. México: Thompson.

Sucerquia, E., & Zapata, S. (Junio de 2009). Módulo de onstrucción para la comprensión del concepto de serie de términos positivos. Medellín.

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics* , 9 (3), 37-42.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (págs. 3-21). Dordrecht.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* , 12, 151-169.

Thomas, G. (2006). *Cálculo: Una Variable* (11 ed.). Máxico: Pearson Educación.

Usiskin, Z. (1982). *van-Hiele levels and Achievements in Secondary School Geometry*. Chicago: University of Chicago.

van-Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (págs. 65-81). Dordrecht.

Warner, L. (2008). How do student's behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematica behavior*, 27, 20-227.

Yin, R. (2009). *Case study research, Design and methods*. California: Sage Publications, Inc.

ANEXO 1: Consecución del Artículo

TANGENT LINES TO A CURVE AND AREAS BELOW IT: A SOCRATIC EXPERIENCE AIMED AT AN INTUITIVE APPROACH TO THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

René Alejandro Londoño and Pedro Pérez Carreras

Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia) and Universidad Politécnica de
Valencia (España)

“You cannot understand a theory unless you know how it was discovered”
Ernst Mach

Abstract. Our aim is to construct a suitable concept-image which hopefully facilitates the understanding of the intuitive content of the Fundamental Theorem of Calculus for High School students which have not been trained yet in integration. By considering tangent lines and areas instead of derivatives and integrals and basing our considerations in the idea of local straightness of a continuous curve, we perform a Socratic interview supported by the use of a computer generated tool to arrive to our desired conclusion.

Key Words: local straightness, area, tangent line
MSC 97C30, 97U50

1. Introduction

The Fundamental Theorem of Calculus (FTC) specifies the relationship between the two central operations of Calculus: differentiation (as a limit of Newton quotients) and integration (as a limit of Riemann sums) stating roughly that the definite integral of the rate of change of a quantity over an interval of time (or over some other quantity) is the total amount of that quantity accumulated in that interval or, more precisely: The Evaluation Part of the FTC says that if we have an anti-derivative for a continuous function f , then the limit of the Riemann sums of f over the interval $[a,b]$ can be evaluated in terms of the anti-derivative of f . The Anti-derivative Part of the FTC says that for any continuous function f , the function defined as the limit of the Riemann sums of f with variable upper limit x gives us an anti-derivative. In other words, so long as the function to be integrated is continuous, anti-differentiation and limits of Riemann sums give us the same answers.

On the one hand, FTC provides us with a method for finding the actual value of a definite integral rather than using approximation techniques, providing an alternate and usually much easier route to the evaluation of the integral and works for that class of functions that have an elementary anti-derivative. It is easy to treat the FTC as a procedure for symbolic manipulation, in effect as a definition and not a theorem: the difficult process of limited Riemann sums is changed into a simple difference of values of an anti-derivative. However, such an approach generally leaves students vulnerable to the misconceptions: (i) FTC is reduced to a computation without any meaning attached to the thing being computed. The two sides of the equality have a priori quite different meanings, and it is a surprising fact that they are equal: it allows for the computation of the integral, but often the surprise is lost on students because the integral does not have meaning for them independently of the computation and (2) it obscures the fact a problem that naturally gives rise to a limit of Riemann sums can be evaluated using anti-derivatives, but also that anti-derivatives can always be generated from limits of Riemann sums.

2. Purpose

Intuitively, the theorem simply states that the sum of tiny changes in a quantity over time (or over some other quantity) adds up to the net change in the quantity, which is the continuum version of the discrete one: for a function F defined discretely in $[1, n+1]$, if f stands for the differences $f(k) := F(k+1) - F(k)$, the sum of $f(k)$ from 1 to n $F(n+1) - F(n) + F(n) - F(n-1) + \dots + F(2) - F(1)$ amounts to $F(n+1) - F(1)$. Since $f(k)$ equals $(F(k+1) - F(k))/(k+1 - k)$, f is the discrete analog of the derivative of F .

Our purpose is to conduct a Socratic educative experience aimed at High School students which are trained in elementary differentiation and approximation techniques to calculate areas below a curve but have not developed yet a mathematical theory of integration. We shall rely in the importance of indirect learning and meaning making to find a blend of cognitive, emotional, and motivational processes by constructing an appropriate cognitive structure for the intuitive content of TFC via the idea of local straightness of a continuous curve, including all mental images, visual representations, experiences and impressions as well as associated properties and processes necessary to prepare them for an easy transition to its conventional mathematical treatment once the idea of limit is understood, which is particularly important due to the fact that most students never internalize the limit definition, perhaps because they can survive calculus with no definition for the integral other than anti-differentiation. Their relative lack of mathematical sophistication at this stage might be a bonus if we are able to make them suitably awed by the emergence of the FTC.

Once embarked in the route of the mathematical theory, it is also important that students realize that the Fundamental Theorem of Calculus is a theorem and not a definition of a method for evaluation of definite integrals. Whether they see the proof or not, it is important that they know that one exists and that it is critically important to the development of calculus.

3. Our approach

By means of a semi-structured clinical interview, we shall provide the means for the construction of such a cognitive structure which incorporates visual, numerical and algebraic connotations with the help of a computer generated tool covering all those aspects. Around twenty interviews were carried out. The participants agreed to the audio recording of the interviews and also to the use of their corresponding transcriptions in our analysis. Their previous formation in Mathematics was the habitual one of students sailing through the Baccalaureate in Colombia. Of course not all interviewees were capable of completing the interview; as a matter of fact, only one third of them finished it satisfactorily. To show how the experience went for those students, we have assembled a single interview with a fictitious student, whose answers come from a variety of students who were able to reach the interview's conclusion and were heavily edited to make it readable, avoiding false starts, silences, clumsiness and hesitations, although what is given below is a fair representation of their clarity of thought and adaptability. Overcoming difficulties contribute to conceptual learning but in order to keep this article within reasonable bounds, dysfunctions do not show in the following transcription of our interview, since the responses belong to the more gifted students. However, in a forthcoming study, we shall study them, point out the causes of failure and propose remedial or tutorial actions for those students which were not able to reach the interview's conclusion as well as validating our study in the frame of van Hiele's model.

4. The Tool

Our tool, based on GeoGebra, shows a window with five components (see Figure 1): tool bar, symbolic bar, plotting facility, sliders and table of values. The tool bar is located in the upper side of the window and allows zoom manipulation and allows to choose objects to interact with the graph: line drawing, location of cursor and points,

etc...; the symbolic bar is located below and allows to write algebraic expressions of the functions; the plotting facility allows the plotting of the function selected below; the sliders are used to select the extremes of the numerical interval of abscissas, the number of subintervals defined by the chosen grid and the algebraic visualization of the function and, finally, the table has four columns showing the interval, the number of subintervals and the accumulation of areas of the rectangles determined by the grid with heights chosen at midpoints.

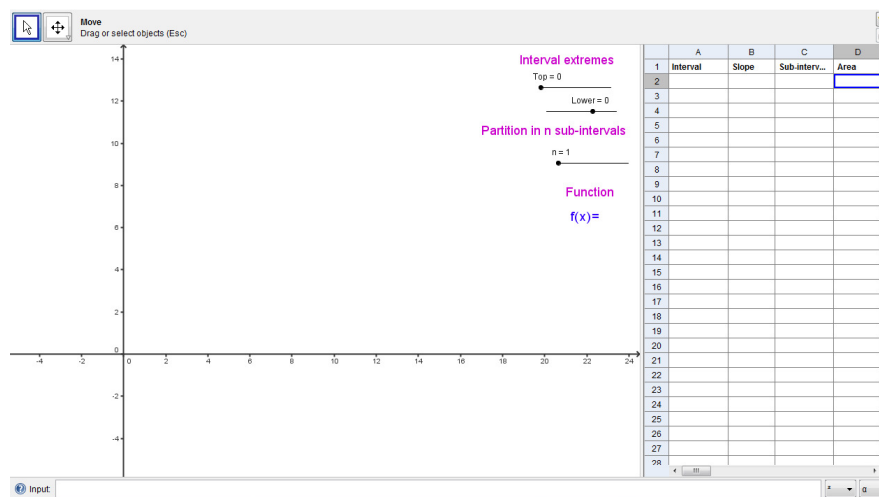


Figure 1.

5. The interview and students' responses

Phase 0 (prerequisites)

Functions: We remind him of what a function is. He has been already introduced to this notion and hence is expected to manipulate it with confidence although we are conscious of the variety of traps hidden in this notion due to competing meanings (a graph, a formula, an action, a process or an object) as well as existing misconceptions and the little connection existing between formal and informal and diffuse views of a function. We do so as a fine tuning on what he already knows in an abstract setting. Verbally, as a rule which assigns to each of certain numbers, some other number;

algebraically, we follow the usual drill with no apparent opposition: following the sometimes referred to as the Bourbaki approach, we point out that the word rule is itself vague and not necessary; what is essential to a function is the idea of pair of numbers, one y associated with the other x . We might write them as a pair in order (x,y) which suggests the possibility of visualizing changing numbers by curves in the Cartesian plane. When this is the case, we write $y = f(x)$, read “ f of x ” (Euler’s notation). We point out that there is no symmetry in the treatment of both variables. It is always the second variable that is uniquely determined by the first and not always vice-versa, x is called the independent variable and y the dependent one. We insist in the idea of co-variation of variables, that is, how one variable’s change affects the change of another variable, since not thinking about co-variation results in an impoverished understanding of rate of change and, hence, of the derivative (see [3] for a Socratic treatment of co-variation).

He will always object to the absence of a well-defined rule; for him, a function f need that a variation in x has to be systematically reflected in the y and that manipulation carried out on x produces y . Our tool will deal with the computational and visual aspect of the notion identifying functions with computer programs, although we are not clear if the analogy is properly understood. We check that, algebraically and visually, understands the meaning of continuous (in the intuitive sense which includes the fact of having a tangent line at every point) monotonic increasing and decreasing functions and we point out that the graphs we are going to deal with consist of juxtapositions of continuous monotonic paths.

Tangent lines to a graph: He understands it as a line which touches the curve without cutting it and expected to have only one point in common with the curve, as the ancient Greeks understood the concept. Its slope stands for a visual understanding of what the derivative of the function whose graph is the curve in question is (see [2] for a Socratic treatment of the notion of tangent line).

Area: It is understood in some naive sense as a quantity representing amount or extent of a surface. He recognizes that he is not aware of a definition of ‘area’ but some formulae are at his disposal to calculate it in an exact way for polygons. Accepts that ‘area under a curve’ has to be defined, but that it is possible to obtain an approximate estimation of it by using the technique of exhausting the surface using more and more figures of known areas (see [1] for a Socratic treatment of the concept of area).

Phase 1 1 (how to go local visually)

We question him on his visual understanding of tangent lines and areas.

Pr: (introducing a function, explains how to choose points on the graph using sliders and produces the corresponding secant line, see Figure 2) Let us choose two points on the curve. The curve between those two points may look very different from the portion of secant joining them.

St.: Sure, but not so much if the points stay close together.

Pr.: The closer they are, the better the coincidence?

St.: Yes obviously.

Pr.: In other words, every continuous curve can be viewed as **locally straight**.

St.: What do you mean?

Pr.: (pointing to the screen) Imagine that you direct your attention to a point in the curve and perform a zooming process several times. What do you see?

St.: Zooming process means?

Pr.: Going local by applying an equal reduction of scale on both axes around a chosen point. The more you zoom, the smaller the scale used, like using a microscope with different magnifying lenses.

St.: After several zooms, the curve becomes, not quite, but almost straight (manipulates the tool producing zooms using the tool bar, see Figures 3 a to d)

Pr.: It deviates little from a segment. Imagine you enlarge the segment to produce a straight line. Which line?

St.: The secant from the point to a close point of the curve?

Pr.: Indeed, globally the secant line and the curve may look very different, but locally they are very close one to another. The more zooms you perform or, speaking in terms of secants, the closer both points are the corresponding secant lines deviate less and less from the portion of curve. What happens if you proceed further performing zooms?

St.: After several zooms I see a straight line, well ... a segment.

Pr.: Imagine you maintain the segment and proceed to undo the zooming process recuperating the curve. What is the relation between the curve and the segment?

St.: The segment stays tangent to the curve at this point. Enlarging the segment we have the tangent line to the curve.

Pr.: Thus, every zoom operation produces a secant line and the graph over very short intervals deviates little from the tangent line, which can be considered as the final

product of performing more and more zoom operations. That is what ‘locally straight’ means

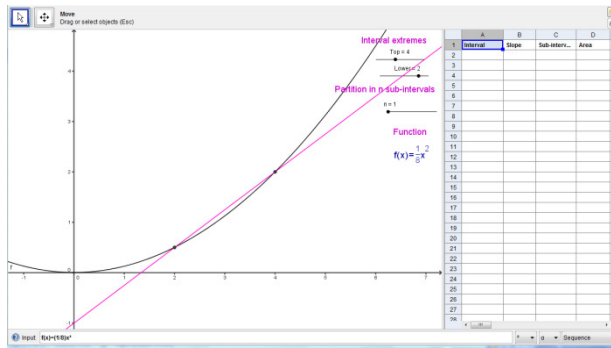


Figure 2.

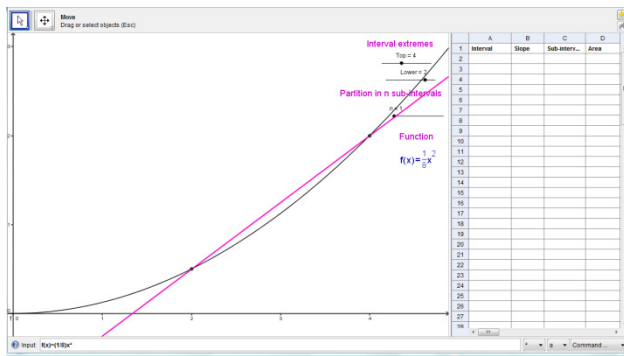


Figure 3a)

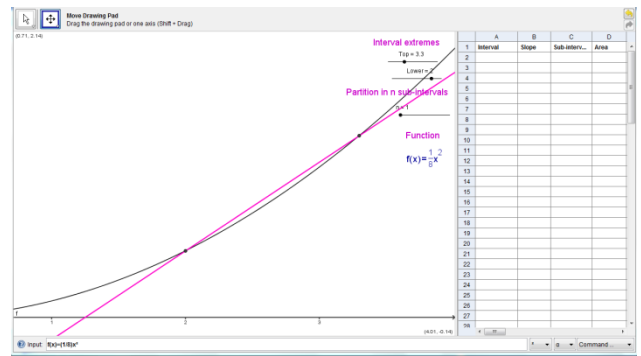


Figure 3b)

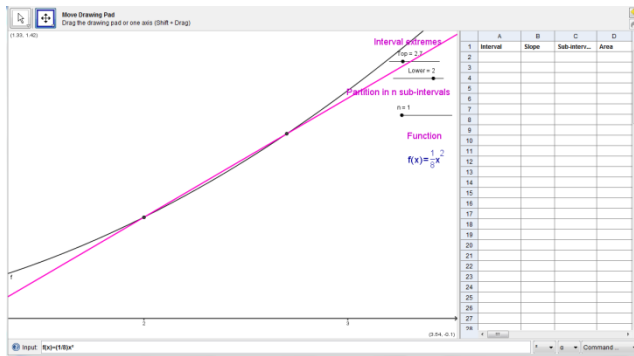


Figure 3c)

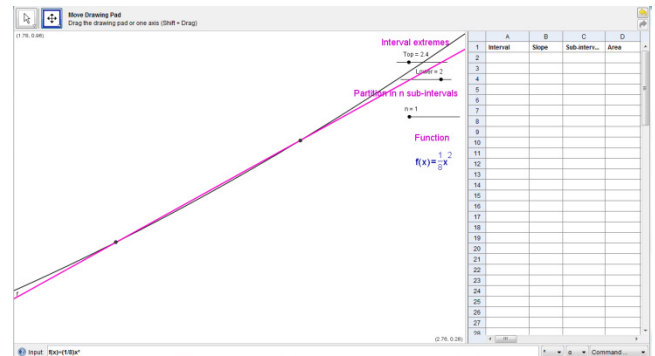


Figure 3d)

Now we explain why local straightness is the key which enables to obtain the tangent line and allows the approximate estimation of areas, but first we insist in the local straightness property of the curve, this time without the zooming facility.

Pr.: Choose a point on the curve and let us try to find the tangent line to this curve at this point. Could you somehow reformulate the zooming procedure above in terms of taking secant lines without zooming?

St.: (pensive and using pencil) Zooming around a point means seeing the curve with a magnifying glass, that is, looking at a small portion of the curve. Each time I see points of the curve that are closer to the point. The portion of curve seen behaves more and more like a secant segment.

Pr.: Right, but since you are not allowed to zoom ...

St.: Since I cannot reduce scale, it amounts to take points on the curve which stay closer and closer to our selected point and draw the corresponding secants. (Manipulates the tool sliding the right point)

That is the secant beam.

Pr.: (producing the tangent line, see Figure 4) Which seems to glue to this line.

St.: And which is the desired tangent line.

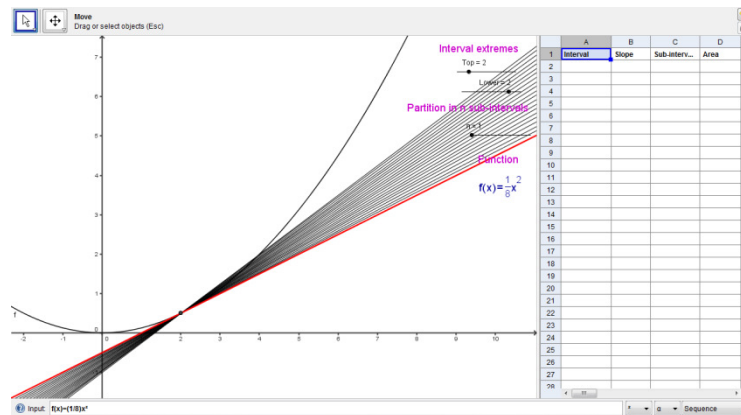


Figure 4

Erasing our previous figures, we turn our attention to the area problem

Pr.: (setting $f(x)=x$ and considering the interval $[2,4]$) For our graph, how do you proceed to obtain an estimation of the area enclosed?

St: I select a grid on the interval and I can see myself drawing rectangles.

Pr.: (selecting a grid with $n= 1$) Once the grid is selected you have to choose what height you should consider. Let us chose midpoint height (activating sliders, see Figure 5). The area of the rectangle can be thought of as the width of the strip weighted by (i.e., multiplied by) the height of the strip. How good is that?

St.: (pointing at the screen) There are two triangles here, which are congruent and hence have the same area. Since one cancels the other, the midpoint choice is in fact exact for measuring areas. No need for a larger grid.

Pr.: If, instead of using the bisectrix, we take any other straight line (producing $f(x)=2x$ in the interval $[2,4]$, see Figure 6)

St.: (pensive) No change in the conclusion.

Pr.: (drawing a monotonic increasing path concave upwards in $[2,4]$, see Figure 7)

Could you extend this method to other non-linear graphs?

St.: (hesitating) Not with this grid. A larger grid is necessary.

Pr.: How large?

St.: (manipulating the tool) As large as we get a curve portion which deviates little from a straight line.

Pr.: But the size of the portion needed may vary from place to place. How do we choose the grid so that our argument is valid in the whole interval, that is, for all portions of the curve?

St.: (pensive) Well, experimenting (doing so, see Figures 8 a to b) I settle for the smallest needed. And I use this size to determine the number n of rectangles needed, which in this case $n=4$, seems a good choice.

Pr.: Hence, the local straightness idea again, which in order to be effective, translates into taking more points in the grid.

St.: Yes, once the grid is settled, the midpoint choice draws a rectangle whose area coincides with the one of the trapezoid limited by the tangent line which in turn is very close to the actual area since the curve is almost a line.

Pr.: (producing such a curve) What if the curve is concave downwards? Does it work also for monotonic decreasing paths?

St.: (see figures 9a to c where several choices $n=1,2,4$ are seen) The same idea works fine; the midpoint choice seems to provide a good approximation.

Pr.: Let us summarize our findings: the rectangle midpoint choice provides a good approximation for monotonic continuous curves because, selecting an appropriate uniform grid, (i) the curve can be well approximated by linear functions and (ii) the choices are exact for linear functions. The point is to choose an appropriate grid for each of them.

St.: Agreed. Although, when we do this, we will not be able to succeed completely because there will always be pieces with curved sides.

Pr.: But then the key idea is that the sum of the areas of the strips will be a very close approximation of the actual area, and the more strips we cut, the closer our approximation will be.

St.: The same idea of the secants going for the tangent line. Now the accumulation of strips goes to the actual area, by taking rectangles with increasingly smaller bases and adding area contributions.

Pr.: (producing a non monotonic graph in the plotting facility, see Figures 10a to b) What can we do with this graph?

St.: Hmm ..., decompose it in monotonic paths and apply midpoint choice rectangles to each path and add areas or, simply, perform our choice simultaneously.

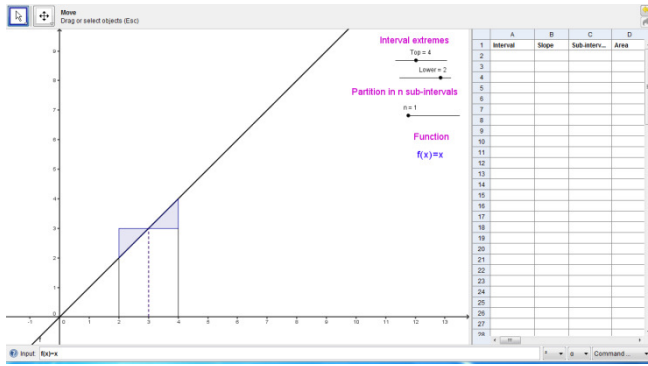


Figure 5

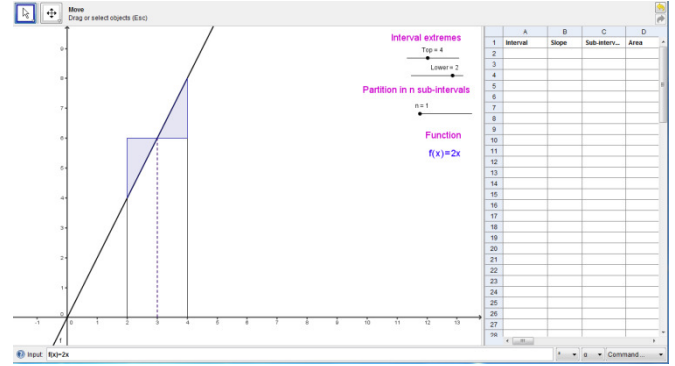


Figure 6

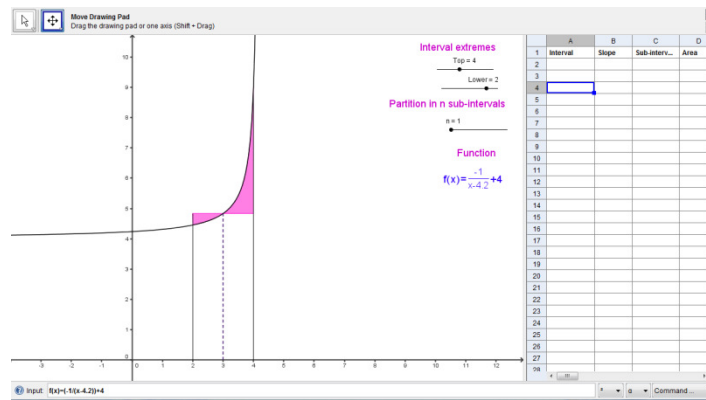


Figure 7

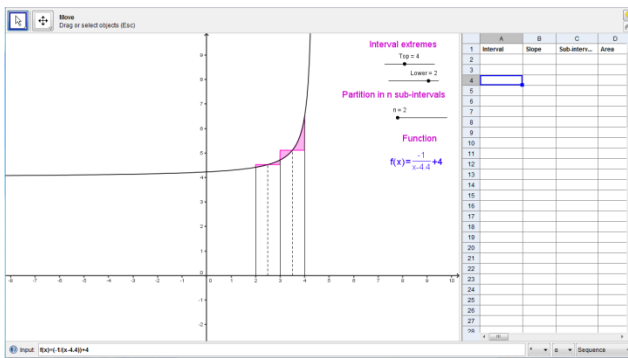


Figure 8a)

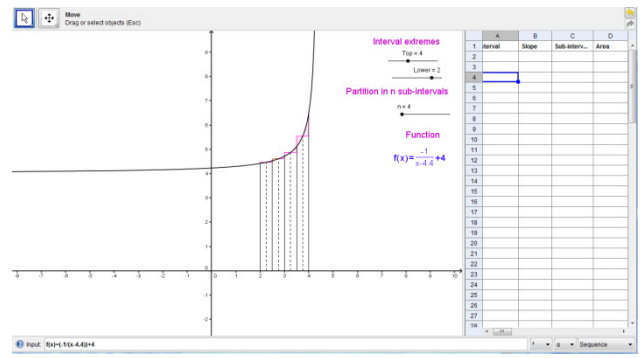


Figure 8b)

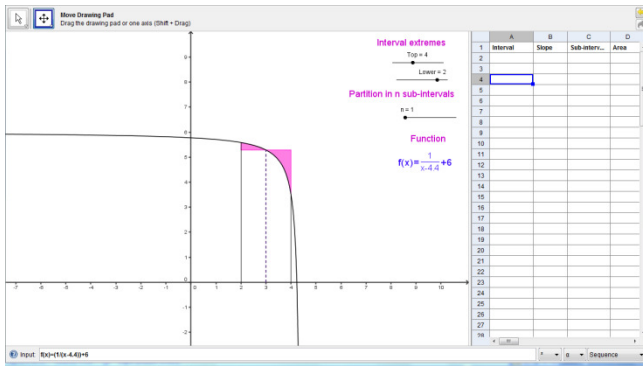


Figure 9a)

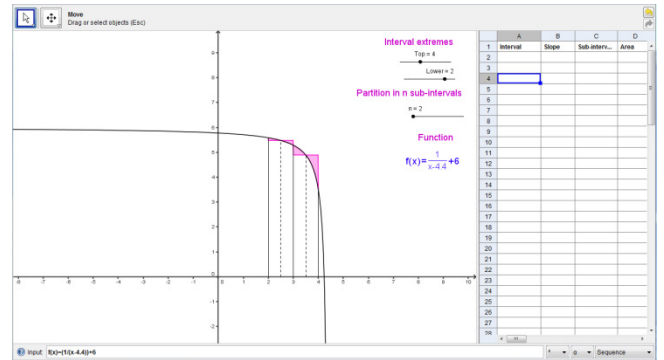


Figure 9b)

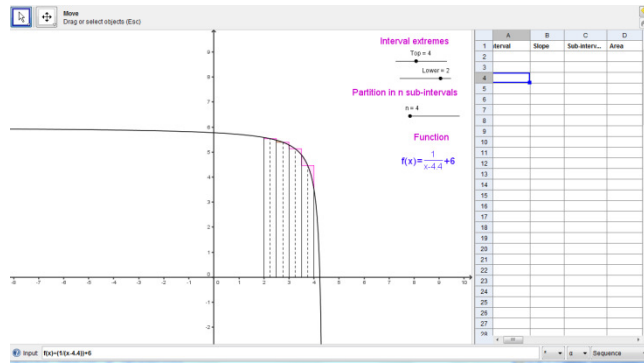


Figure 9c)

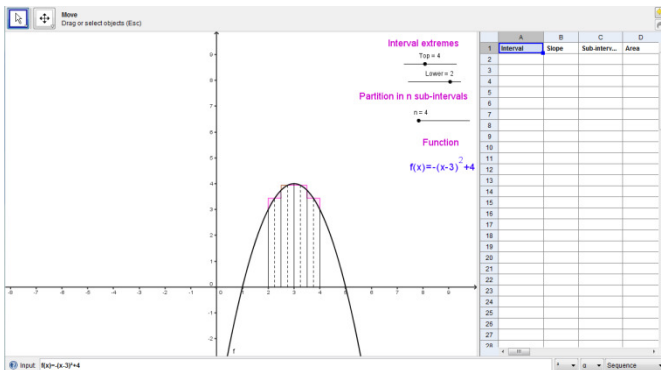


Figure 10a)

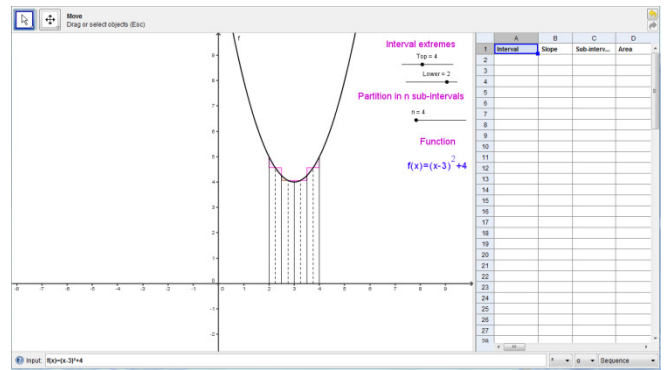


Figure 10b)

Phase 2 (how to go local numerically: calculation of slopes of tangent lines and areas)

We introduce numbers to our considerations above. We activate the plotting facility and use the interval sliders to show the evolution of the slopes of the secants of the beam (Figure 11a) and estimates of the areas of rectangles (Figures 11 b,c,d), respectively where a progressive increase in the number of rectangles is seen to produce an estimation.

Pr.: Can you explain what you see?

St.: I can guess the numerical values of slopes. Considering, let us say the interval [2,4], fixing the slider for 2 and sliding the right one I can see more and more secants approaching the tangent line.

Pr.: What about their respective slopes?

St.: The tables show their slopes and their values seem to approach the number 5 from above. Thus, 5 would be my guess for the slope of the tangent line to the curve at abscissa 2.

Pr.: Why 5 and not 5.0001?

St.: (manipulating the tool) Hmm..., if I continue stretching the interval [2,2.001] the shown slopes repeat progressively all decimal digits and we can get as close to 5 as desired. Is it possible to show more digits at the table?

Pr.: (doing so) Indeed.

St.: (repeating procedure) You can see that the number of ceros behind the decimal point increase. I stand by my guess.

Pr.: (erasing previous figures except the function) Concerning area estimations?

St.: (using the slider for the interval [2,4]) By considering more and more covering rectangles, it is clear that the method is effective to approach the actual area, but I need to consider the tables to make a numerical guess. For n between 1 and 10, from n=6 on two decimal digits stay stable. For n=100, four digits repeat themselves and for n=300, five are stable.

Pr.: What is your guess for the actual area?

St.: Supposing I could proceed indefinitely, 2.3333... should stabilize to $2 + \frac{1}{3}$, that is, $\frac{7}{3}$.

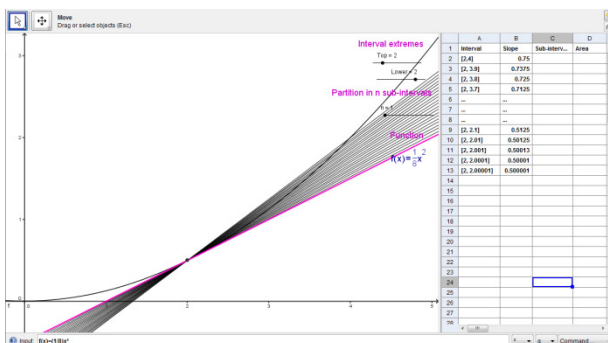


Figure 11 a)

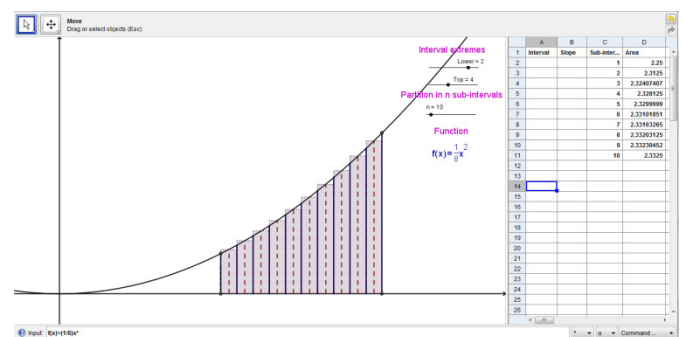


Figure 11b)

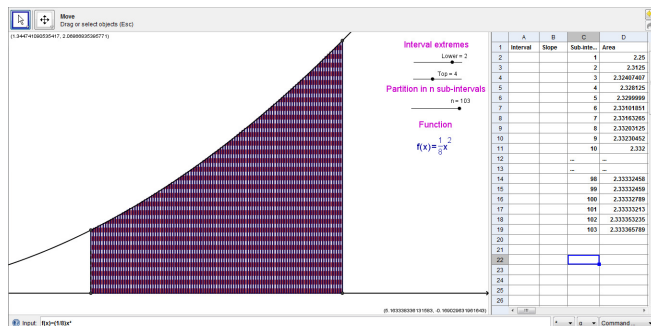


Figure 11 c)

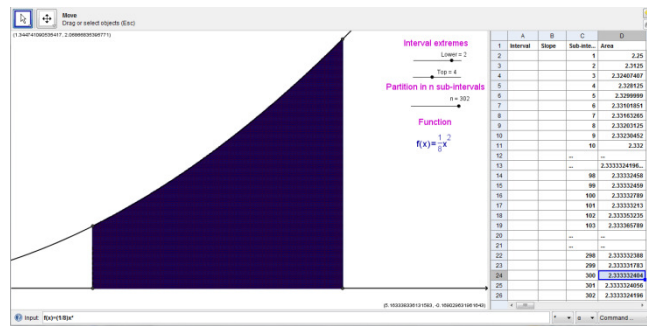


Figure 11 d)

Now we have a computational method to evaluate slopes (derivatives) and areas approximately. Now we deal in how our two problems give rise to two new functions.

Pr.: (showing a graph with several tangent lines drawn in el plotting facility and their respective slopes, see Figure 12) Is there any relation between monotonicity and the sign of the derivative?

St.: Increasing paths have positive derivative, decreasing paths have negative derivative.

Pr.: If the derivative is positive at every point, the curve depicts an increasing function. If the derivative is negative, we are talking of a decreasing one.

St: Hence it goes both ways ...

Pr.: As the independent variable x changes, so does the dependent variable f(x), but also the derivative f'(x).

St.: Hmm, if its slope keeps changing from point to point, there should be an x in the expression for the slope accounting for this change.

Pr.: Do you mean that, if the derivative has a value at all points, then it's clear that it's also a function?

St.: (unsure) Well ..., yes

Pr.: So, for our function f, we can talk about the function f', which is its derivative, where f'(x) stands for the derivative of f at the given abscissa x ...

St.: Thus, f' has a graph also.

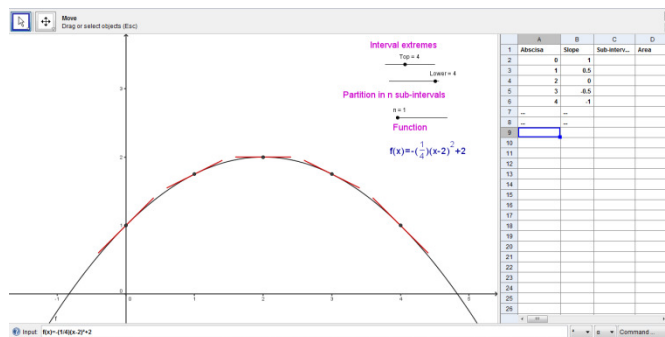


Figure 12

Now we consider the graph of a function f delimited by lines $x=a$ and $x=b$ and the x -axis. . By hand, we draw the graph of the constant function $f(x)=2$ over the interval $[1,2]$ and we proceed to estimate the area enclosed from 1 to a certain x . If $A(x)$ stands for this area, clearly $A(x)$ equals $2x$. We activate the plotting facility showing $f(x)$ and $A(x)$ (see Figures 13 a and b.

Pr.: Can you consider A as a function?

St.: If x changes, so does $A(x)$ and hence it is a function.

Pr.: Call it the accumulation function for f (producing the graph of a function lying above and below the x -axis, see Figure 14)

St.: Why not the 'area' function?

Pr.: Is not exactly the same. Let us see how it works.

St.: (pointing at the screen) When the graph is above the axis, $A(x)$ is increasing.

Pr.: If you continue moving x beyond the point where f vanishes

St.: $A(x)$ starts to decrease, since the heights of the rectangles there are negative.

Pr.: (producing a graph of the accumulation function, see Figure 15) Hence $A(x)$ does not stand for the area accumulated so far.

St.: Right, only if the graph of f stands above the axis.

Pr.: The point x where $f(x)$ equals 0 produces ...

St: The largest value for the function A .

Pr.: A maximum for $A(x)$. Then we have three relationships between A and f (f positive, A increasing; f negative A decreasing and maximum A where f vanishes) are precisely those enjoyed by a function and

St.: And its derivative.

Pr.: (producing the simultaneous graphs of f and A , see Figure 16) Which leads us to speculate that f is the derivative of A .

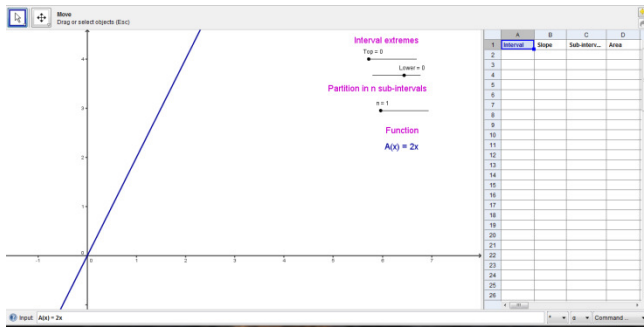


Figure 13 a)

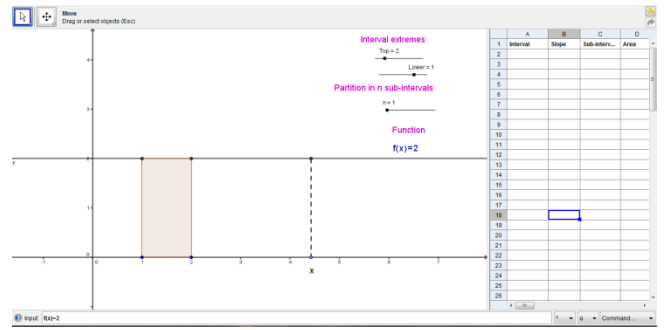


Figure 13 b)

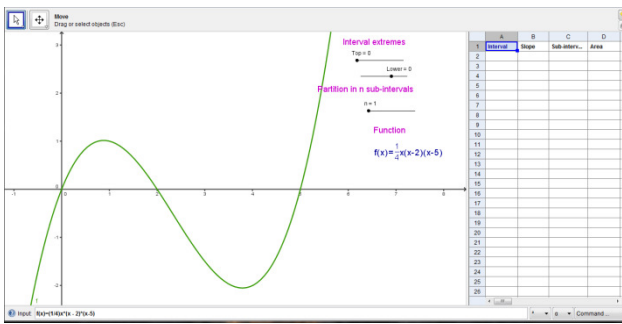


Figure 14

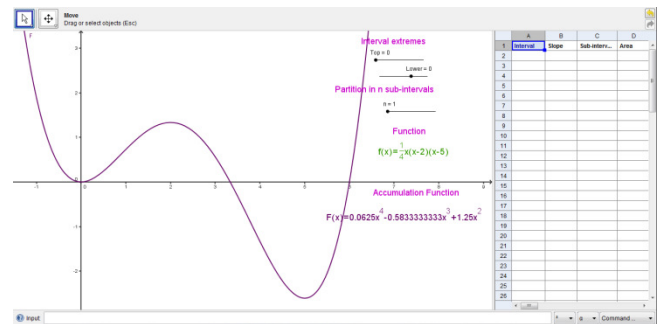


Figure 15

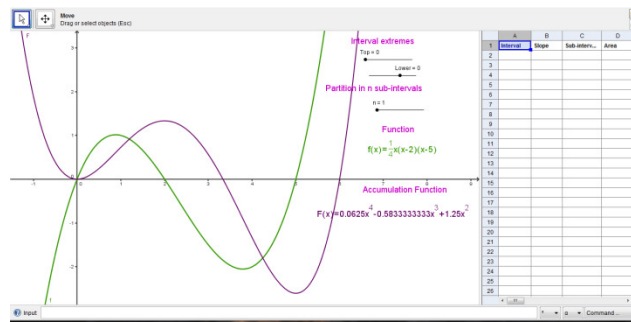


Figure 16

Phase 3 (the connection: from local to global)

Pr.: If two different problems -calculating slopes of tangent lines and areas under a curve- are solved by different considerations but ending somehow in the same idea of approximation which is made possible by the local straightness of the curve, what do you suspect?

St.: That it might be a connection between both problems.

Pr.: (activating the plotting facility with a linear function $f(x)=mx$) It is possible. Let us start by placing ourselves in the context of a function whose graph is a straight line.

St.: The derivative being the same everywhere also, since all tangent lines coincide at every point. The derivative is the slope of this common tangent line.

Pr.: Yes. Take any abscissas a and b , and look at table of values for the slope m you mentioned, draw the right triangle with sides $b-a$ and $f(b)-f(a)$, this last number being the displacement experienced in the interval from abscissas a and b (see Figure 17). Make also a drawing of the derivative.

St.: (doing so) It is a horizontal line of height m .

Pr.: The area below this graph limited by a and b ...

St.: It is the area of a rectangle, that is, $m(b-a)$ (see Figure 18)

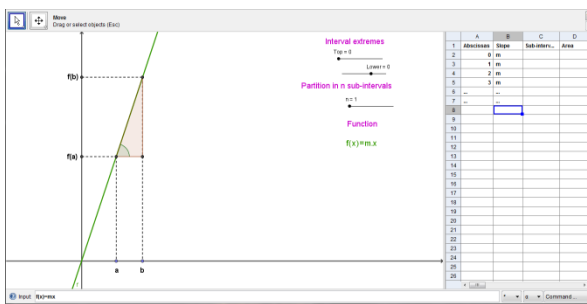


Figure 17

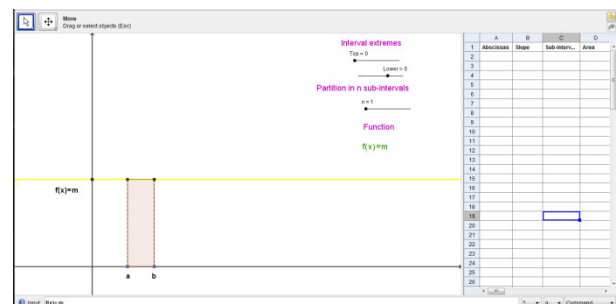


Figure 18

Pr.: Which looking at your first picture coincides with ...

St.: The slope m being the tangent of the angle shown in the figure, our area estimation is the difference $f(b)-f(a)$

Pr.: That is, how much f has changed from a to b . In other words, that area below the derivative function shows how much the function has changed when moving from a to b .

St.: Sure. And what is the relevance of all that?

Pr.: Should our conclusion be true, not only for the linear function but also for any other function, we would be able to reconstruct the function if we had information on the derivative, just by calculating areas, as we speculated before.

St.: How so?

Pr.: (uses paper and pencil and after activates the plotting facility) Suppose a small portion of f' could be plotted as a decreasing graph at decreasing rate in the first quadrant (see Figure 19) and suppose two abscissas a and b lying close together. How do you think the corresponding graph of f may look like?

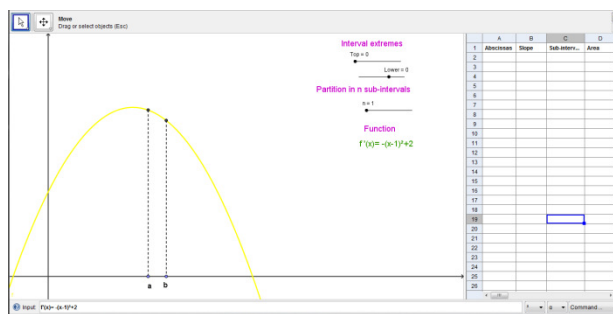


Figure 19

St.: (puzzled) I don't know at which altitude $f(a)$ I may start graphing f .

Pr.: Right, choose any altitude $f(a)$.

St.: f' being positive and evolving downwards... I draw the curve as an increasing path at increasing rate, but I don't know where $f(b)$ stands.

Pr.: Right again. Let us see if we can estimate where $f(b)$ lies. Supposing a and b are close enough to consider the graph of f' locally straight, the area lying between a and b and the curve f' can be estimated as the area of a rectangle, that is, the area is $f'(a)(b-a)$, where $f'(a)$ is measuring the slope of f at abscissa a .

St.: (draws) We are reproducing in a small portion what we did for a linear function, since we are dealing again with the local straightness idea.

Pr.: Yes.

St.: (referring to his drawing of the graph of f) Going to the graph of f , this area coincides with $f(b)-f(a)$. Thus, knowing this area and $f(a)$, I may be more precise in estimating where $f(b)$ lies and how to graph f starting from altitude $f(a)$. Now I understand, but what happens if a and b are not that close together?

Pr.: Remember our considerations on how to estimate areas approximately? Let us say that for narrow strips its area is indeed measured by the stated difference. For broad strips, we consider them as taken to be built up from a large number of tiny ones and ...

St.: (we activate the plotting facility with a decreasing graph at decreasing rate in the first quadrant for f') We get the total área below the curve in the interval $[a,b]$ (draws a partition of the interval) ... which corresponds to adding all stated differences

Pr.: That sum is called telescopic since there are cancellations ..

St.: (calculates by hand the telescopic sum) Yes, adding $f(b-1)-f(a)+f(b-2)-f(b-1)+\dots+f(b)-f(\dots)$... and I get again $f(b)-f(a)$

Pr.: Which measures..

St.: How much the graph of f rises over the entire interval. I see ... (Figures 20 a to d)

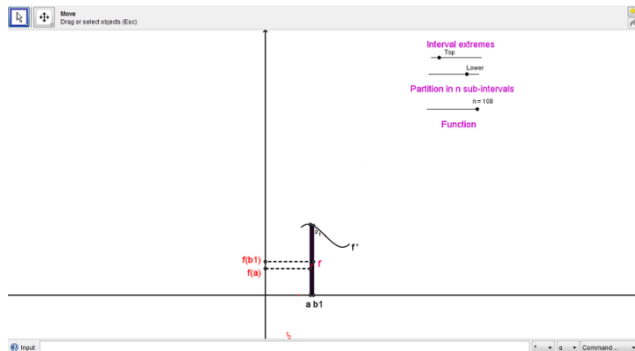


Figure 20 a)

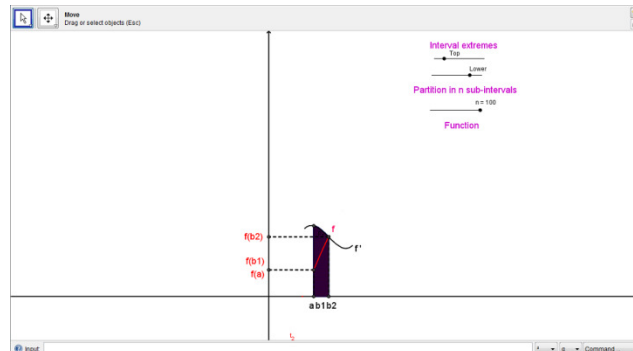


Figure 20 b)

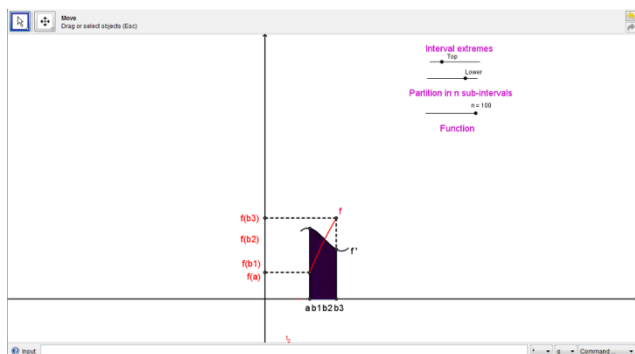


Figure 20 c)

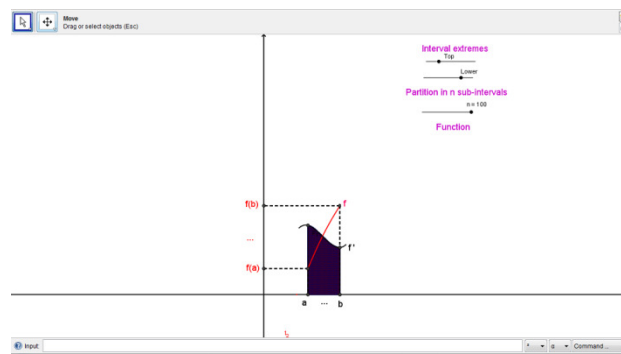


Figure 20 d)

Pr.: And the same argument can be made to work for other path configurations and, juxtaposing configurations, for any graph.

St.: (long silence) If what you say works and if I understand correctly, we have the following situation: if I know a function f but not its derivative f' , I can calculate f' by taking slopes. If I know f' but not f , I can calculate f by taking areas. Is that what you mean?

Pr.: Precisely and that is called, not without reason, the Fundamental Theorem of Calculus. Calculating areas is very important for geometry, as you can guess, and profoundly important for the physical sciences where the definitions of many physical entities can be cast in a mathematical form like the area under a curve.

St.: Just one more question: since I was free in selecting $f(a)$, are there many f available for a known f' ?

Pr.: Yes, but their graphs are closely related: obtain one and slide it up or down vertically. Those are the f you want and nothing else.

References

- [1] Jiménez, A. and Pérez Carreras, P. (2011), *The notion of area: a Socratic educational experience anchored in van Hiele's model* (submitted)
- [2] Llorens, J. L. and Pérez Carreras, P. (1997), *An extension of van Hiele's model to the study of local approximation*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **28**, 713–726.
- [3] Navarro, M.A. and Pérez Carreras, P. (2011) *Local rate of change: a Socratic experience in van Hiele's model framework* (submitted)

ANEXO 2: Hoja de respuestas para el test

IDENTIFICACIÓN

Institución: _____

Grado o semestre: _____

Programa: _____

Edad: _____

Sexo: _____

CUADRO DE RESPUESTAS N° _____

Para cada pregunta rellene el círculo que corresponde a su elección.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a
<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b
<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c
<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d
<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a
<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b
<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c
<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d
<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> a
<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> b
<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> c
<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d	<input type="radio"/> d
<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> e

ANEXO 3: Test semi-estructurado

LA RELACIÓN INVERSA ENTRE CUADRATURAS Y TANGENTES

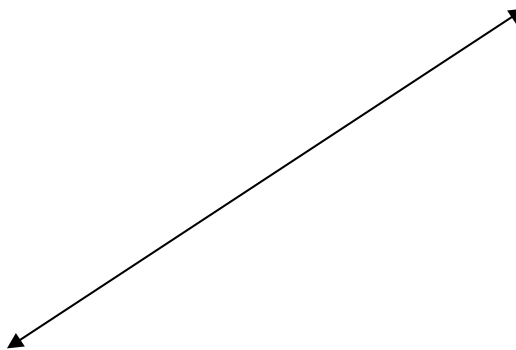
INSRUCCIONES

Cada pregunta te ofrece **cinco** opciones de respuesta (a, b, c, d y e), de las cuales deberás escoger **sólo una**. No dejes ninguna pregunta en blanco y no respondas al azar.

En todas las preguntas, la quinta opción (marcada con la letra e) es: *ninguna de las anteriores*. Debes seleccionar esta opción cuando no entiendas el enunciado de la pregunta o cuando te parezca que las otras opciones de respuesta (a, b, c y d) no se ajustan a lo que crees que sería correcto. En este caso debes escribir la respuesta que consideres conveniente en el cuadernillo adicional, además de marcar la opción “e” en la hoja de respuestas.

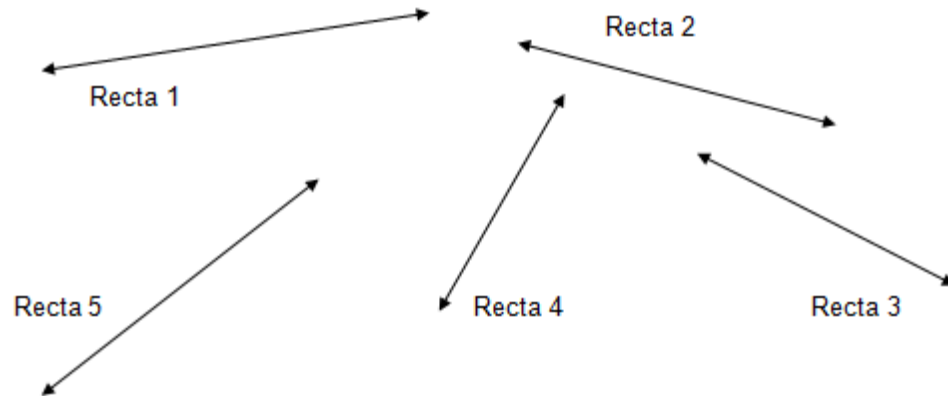
Es posible que en algunas preguntas te parezca que hay varias opciones de respuesta correctas. Escoge aquella opción de respuesta que te parezca más precisa desde el punto de vista matemático, de acuerdo con lo que piensas acerca del tema.

1. Considera la recta que se muestra a continuación. ¿Crees que tiene longitud?, ¿crees que tiene pendiente?



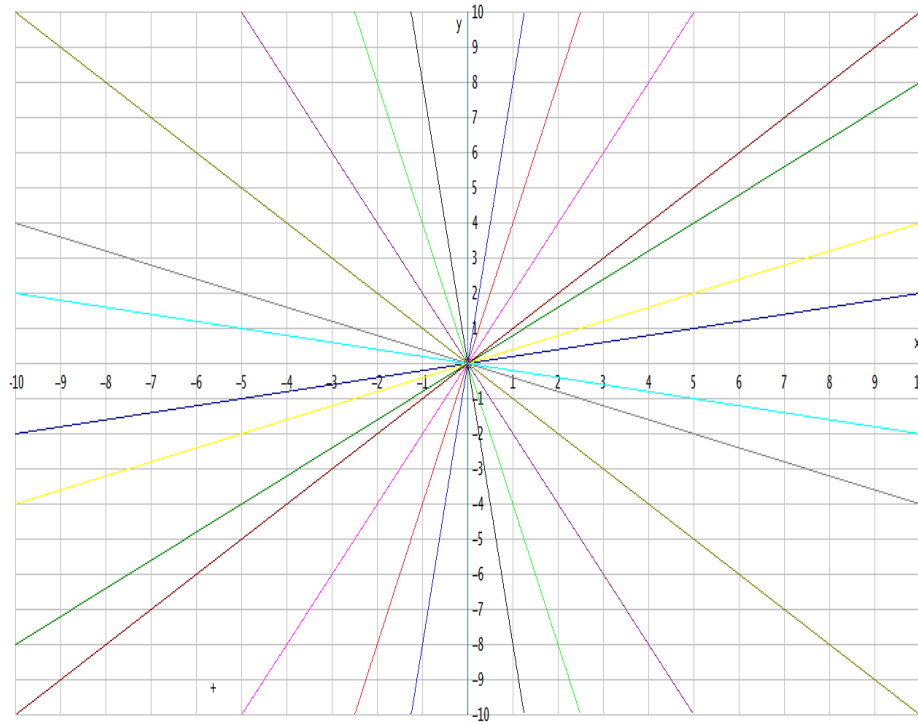
- a. Tiene longitud, pero no tiene pendiente.
- b. Tiene pendiente, pero no tiene longitud.
- c. Tiene longitud y tiene pendiente.
- d. No tiene longitud ni pendiente.
- e. Ninguna de las anteriores.

2. En la siguiente ilustración se muestra una secuencia de rectas. ¿Cuál de ellas crees que tiene la mayor pendiente y cuál la menor pendiente?



- a. La de mayor pendiente es la recta 4 y la de menor la recta 1.
- b. La de mayor pendiente es la recta 3 y la de menor la recta 3.
- c. La de mayor pendiente es la recta 3 y la de menor la recta 1.
- d. La de mayor pendiente es la recta 4 y la de menor la recta 3.
- e. Ninguna de las anteriores.

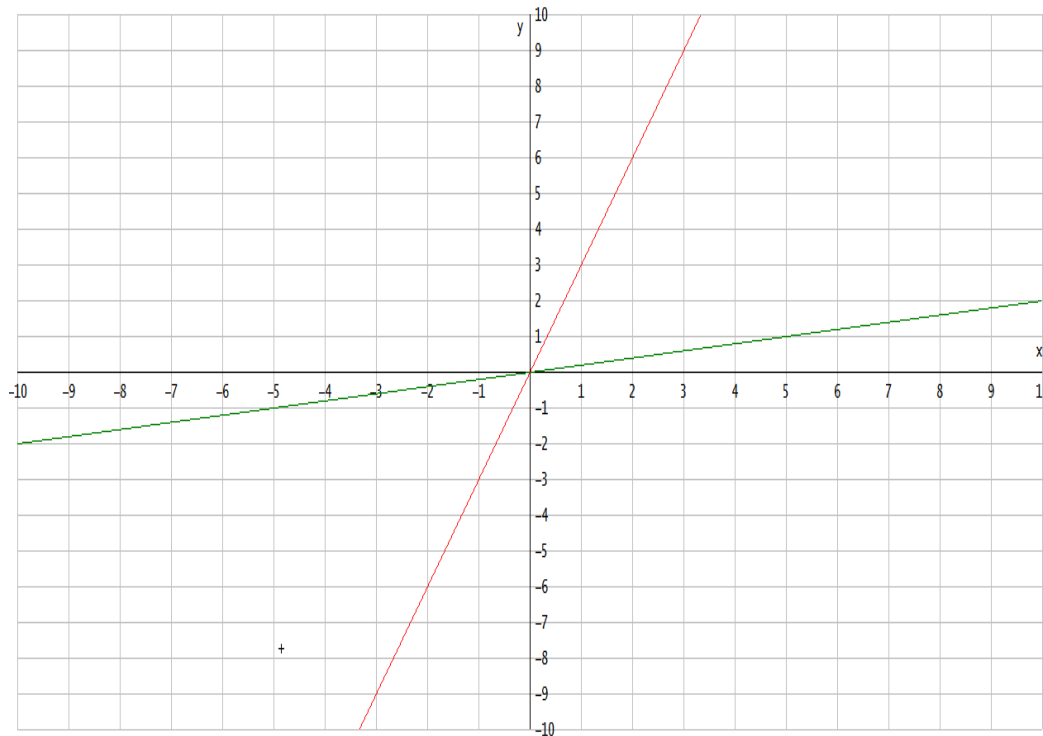
3. ¿Podrías describir las pendientes de las rectas que se presentan en el siguiente plano cartesiano?



- a. Las pendientes de las rectas que están entre $y=0$ y $y=x$ varían entre 0 y 1, mientras las pendientes de las que están entre $y=x$ y $x=0$ varían entre 1 y 2.
- b. Las pendientes de las rectas que están entre $y=0$ y $y=x$ varían entre 0 y 1, mientras las pendientes de las que están entre $y=x$ y $x=0$ varían entre 1 e ∞ .
- c. Las pendientes de las rectas que están entre $y=-x$ y $y=0$ varían entre -1 y 0, mientras las pendientes de las que están entre $x=0$ y $y=-x$ varían entre $-\infty$ y -1 .
- d. Las opciones b y d son correctas
- e. Ninguna de las anteriores.

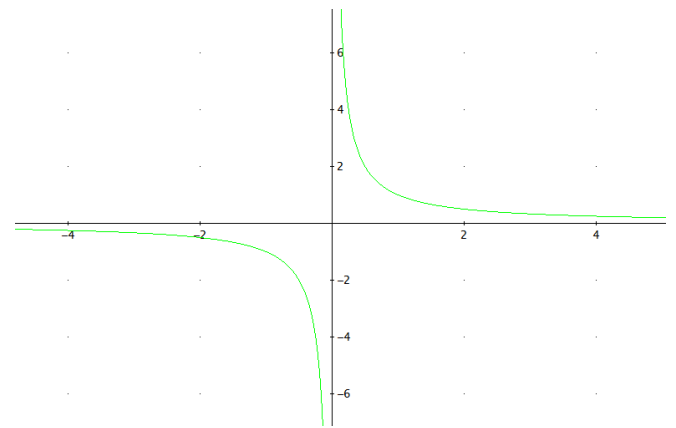
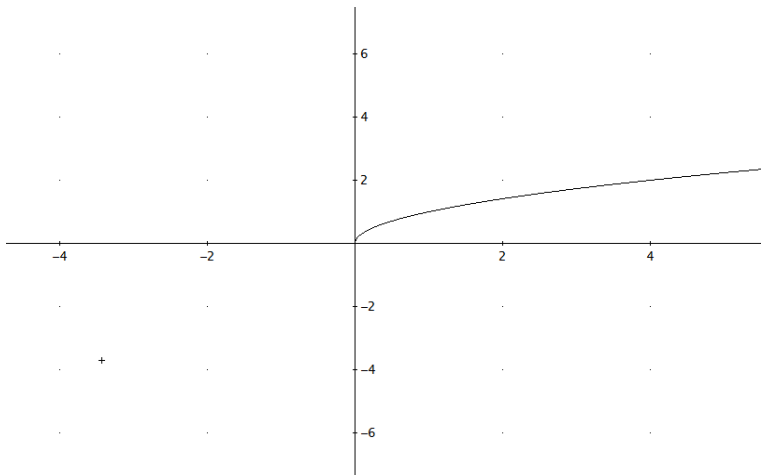
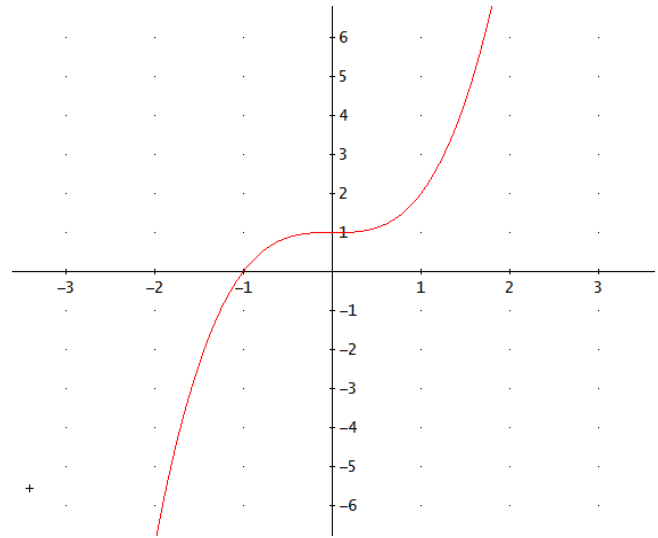
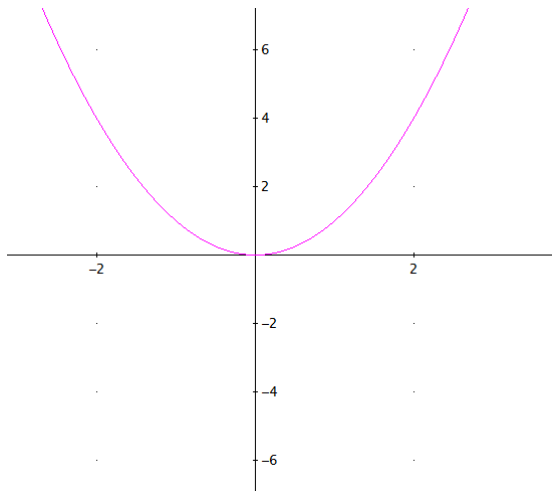
Aporte de información: Observa que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=0$ y $y=x$ varían entre 0 y 1, mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=x$ y $x=0$ varían entre 1 e ∞ . De la misma manera, los valores de las pendientes de las rectas que están entre $y=-x$ y $y=0$ varían entre -1 y 0, mientras que los valores de las pendientes de las rectas que están entre $x=0$ y $y=-x$ varían entre $-\infty$ y -1 .

4. Dadas las dos rectas de diferente pendiente en el plano cartesiano, ¿cuántas rectas de pendientes distintas existen entre ellas?



- Sólo dos, ya que no es posible trazar más.
- Ninguna, ya que no es posible trazar más.
- Infinitas, ya que hay infinitos números reales entre otros dos dados.
- Unas cuántas más, pero hasta cierto número.
- Ninguna de las anteriores.

5. A continuación, se presentan las gráficas de algunas funciones en el plano cartesiano, que te pueden ser muy familiares. En el orden de izquierda a derecha y de arriba abajo, ¿podrías identificar sus respectivas expresiones algebraicas?



a. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$ b. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x^3 + 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

c. $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ d. $y = x^2$, $y = x^3 + 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$

e. Ninguna de las anteriores

6. Observa las siguientes regiones sombreadas. Sólo una de las siguientes afirmaciones es la correcta:

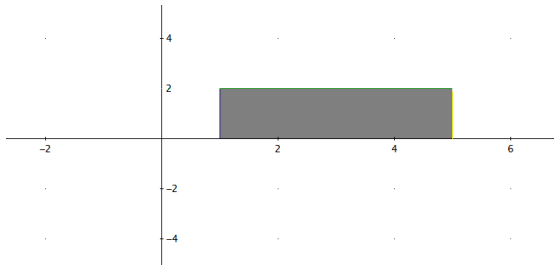


Figura 1

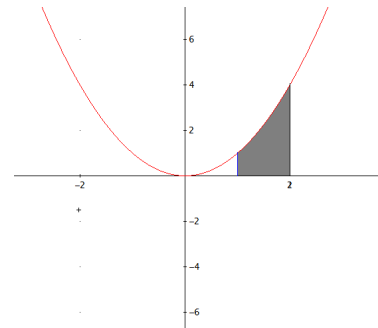


Figura 2

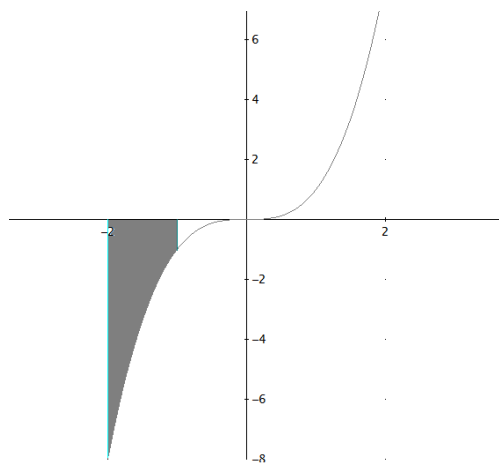


Figura 3

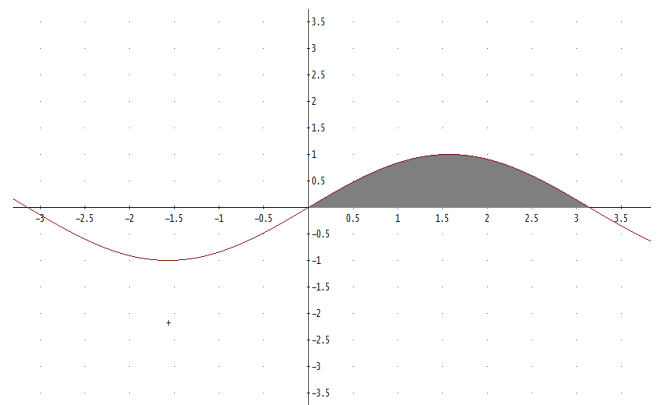


Figura 4

- a. La región sombreada de la figura 1, está limitada por la función $y = 2$ y el eje x .
- b. La región sombreada de la figura 2, está limitada por la función $y = x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 5$.
- c. La región sombreada de la figura 3, está limitada por la función $y = -x^3$, el eje x y las rectas verticales $x = -2$ y $x = -1$.
- d. La región sombreada de la figura 4, está limitada por la función $y = \cos x$ y el eje x .
- e. Ninguna de las anteriores

7. Observa cada una de las funciones que se muestran a continuación. En cuanto al crecimiento o decrecimiento de las funciones que se muestran a continuación, se puede afirmar que:

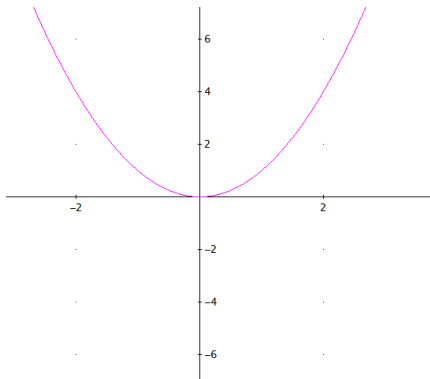


Figura 1

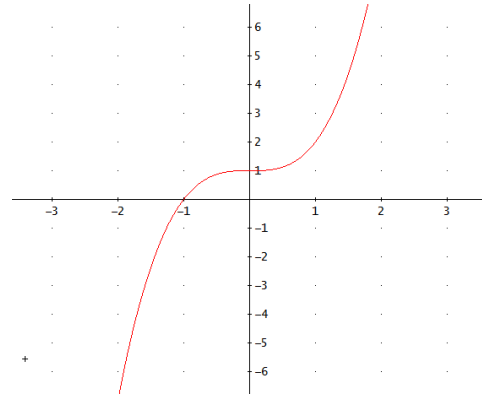


Figura 2

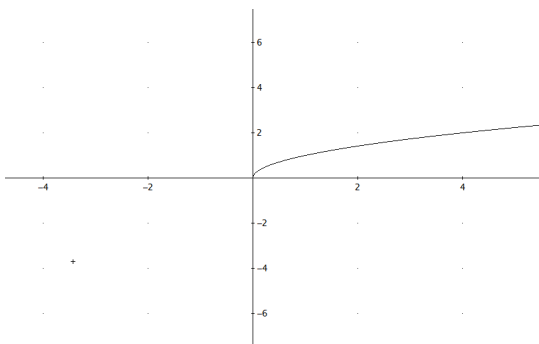


Figura 3

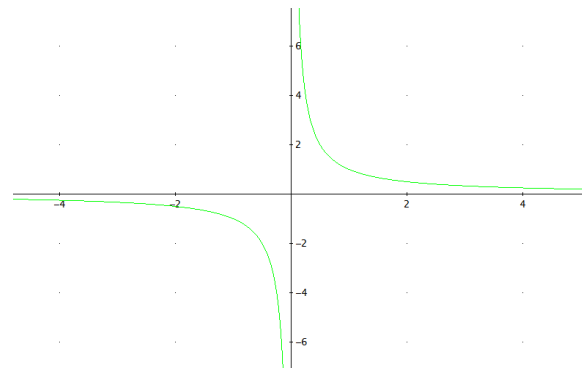


Figura 4

- La función $y = x^2$ de la figura 1, decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en el intervalo $(0, +\infty)$.
- La función $y = x^3 + 1$ de la figura 2, decrece en todos los reales.
- La función $y = \sqrt{x}$ de la figura 3, crece en todos los reales.
- La función $y = \frac{1}{x}$ crece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, \infty)$.
- Ninguna de las anteriores.

8. A continuación se presentan las mismas funciones de la pregunta anterior. ¿Qué podría afirmarse en cuanto al signo de la función?

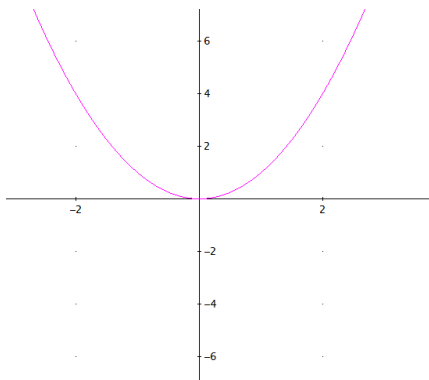


Figura 1

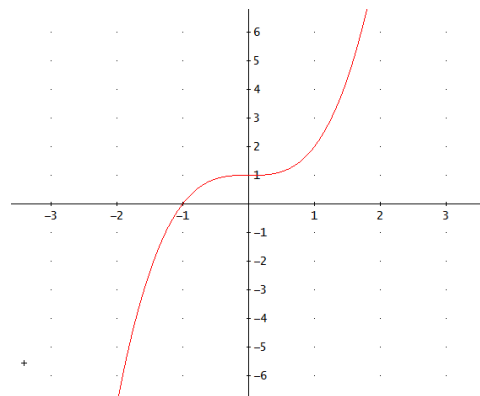


Figura 2

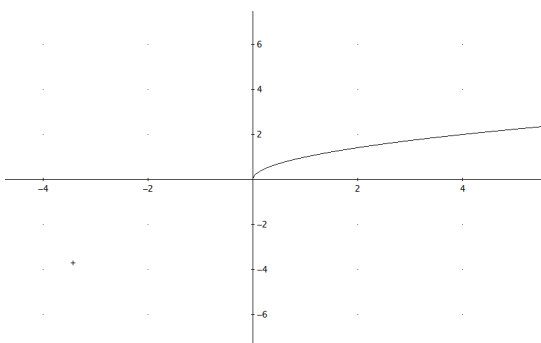


Figura 3

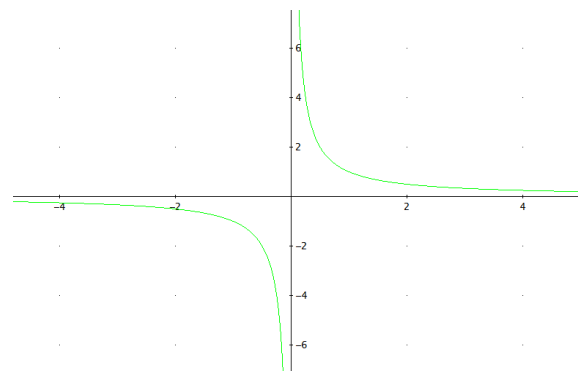
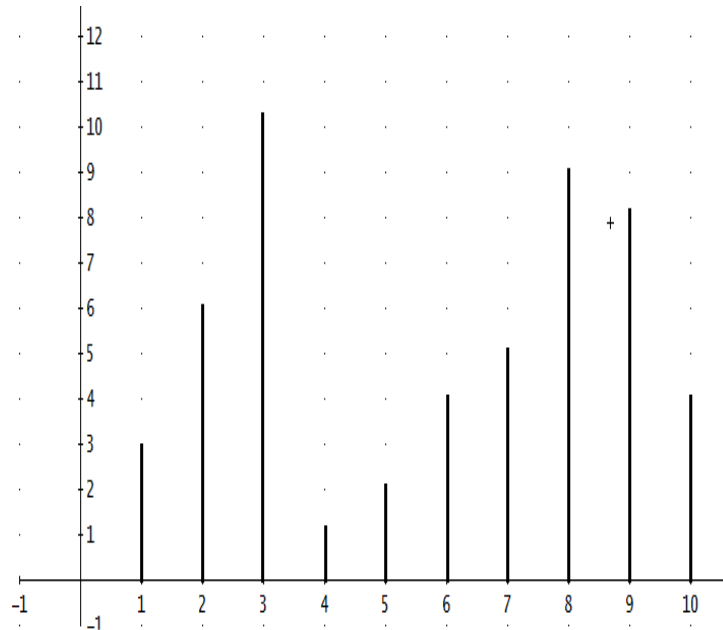


Figura 4

- La función $y = x^2$ de la figura 1, es positiva en el intervalo $(-\infty, 0)$ y negativa en el intervalo $(0, +\infty)$.
- La función $y = x^3 + 1$ de la figura 2, es positiva en todos los reales.
- La función $y = \sqrt{x}$ de la figura 3, es positiva en todos los reales.
- La función $y = \frac{1}{x}$ es negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y positiva en el intervalo $(0, \infty)$.
- Ninguna de las anteriores.

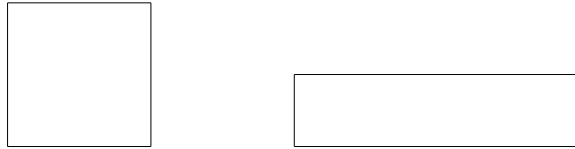
Aporte de información: Dado el punto (x, y) en el plano cartesiano, al valor de x se le llama **abscisa** y al valor de y **ordenada**.

9. En el plano se muestran algunos segmentos verticales sobre el eje x . ¿Podrías identificar algunos pares de segmentos, cuya diferencia de las ordenadas en los puntos superiores sea 4?



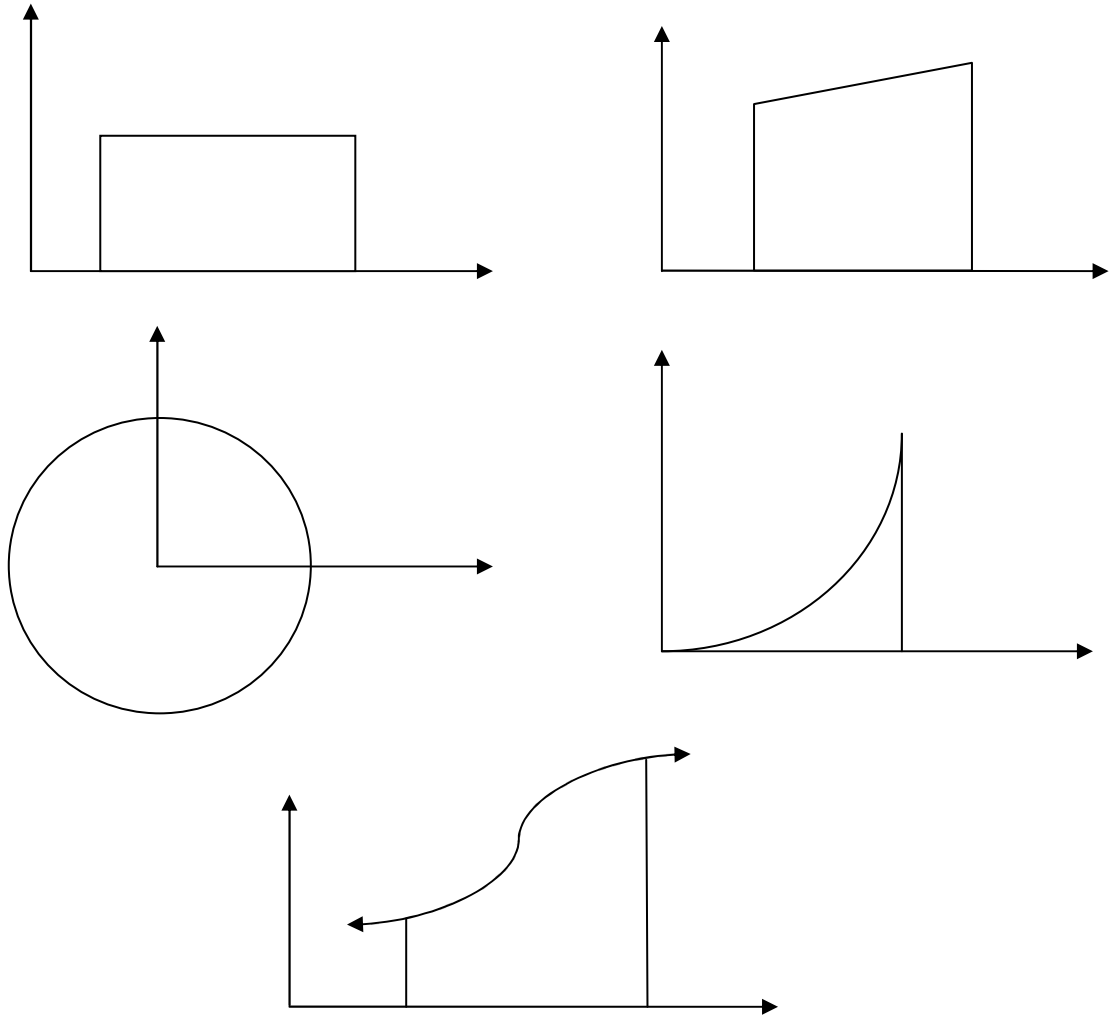
- a. Los segmentos sobre las abscisas: 2 y 3, 4 y 7, 2 y 5, 9 y 10, 6 y 9.
- b. Los segmentos sobre las abscisas: 1 y 2, 4 y 6.
- c. Los segmentos sobre las abscisas: 1 y 2, 7 y 9 .
- d. Los segmentos sobre las abscisas: 1 y 5, 4 y 8, 5 y 9, 6 y 10.
- e. Ninguna de las anteriores.

10. ¿Crees que estas dos figuras que se muestran a continuación podrían tener la misma área?, ¿por qué?



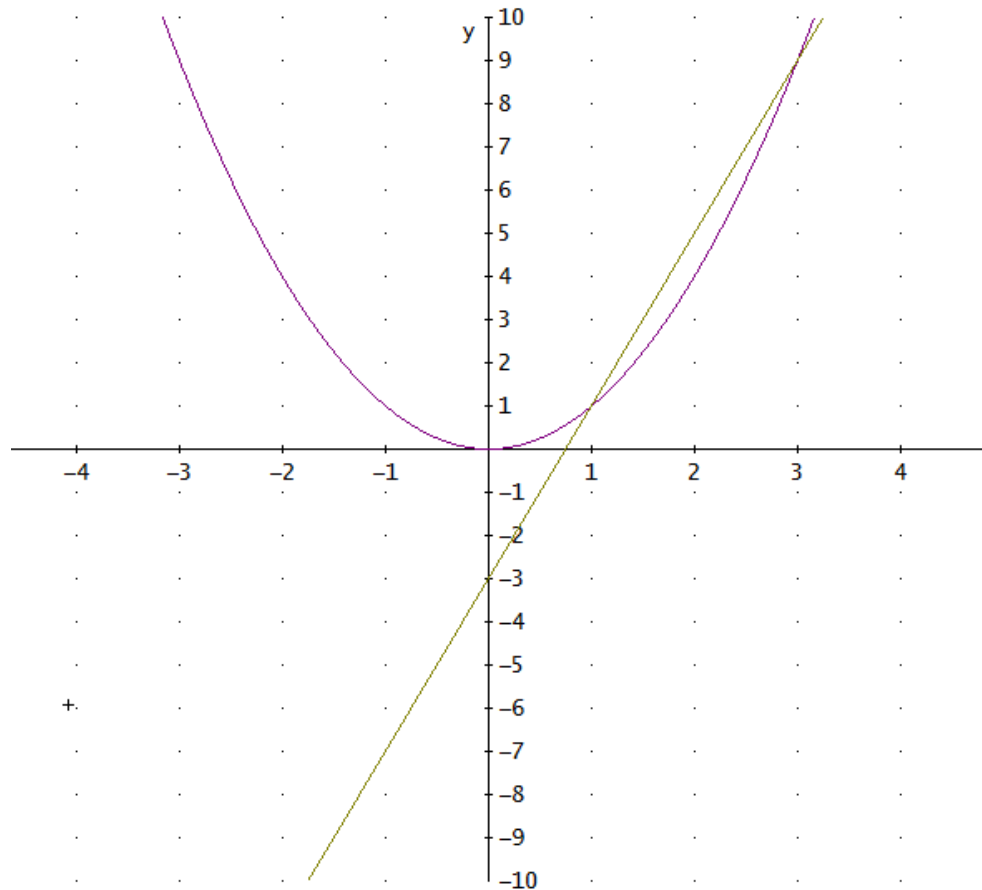
- a. No, porque no tienen la misma forma.
- b. No, el cuadrado tiene más área que el rectángulo.
- c. Sí, porque se podría dividir el cuadrado y disponerlo para formar el rectángulo.
- d. Sí, siempre un rectángulo y un cuadrado tienen la misma área.
- e. Ninguna de las anteriores.

11. Considera las siguientes regiones limitadas en el primer cuadrante del plano cartesiano, tal como lo muestra la figura. ¿Crees que se puede calcular el área de cada una de ellas?. En caso afirmativo, ¿cómo?



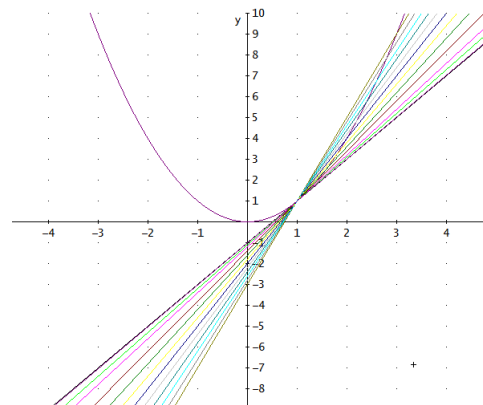
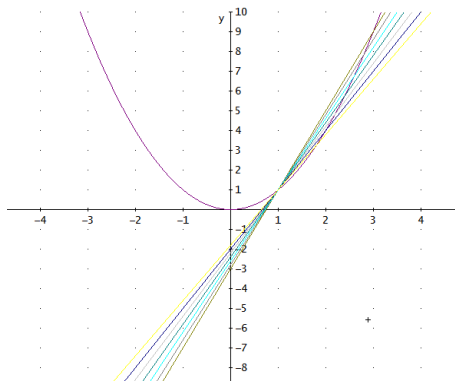
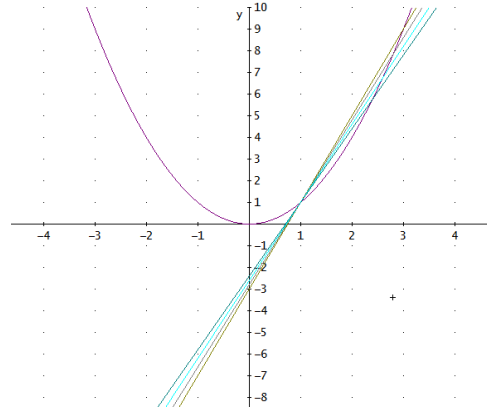
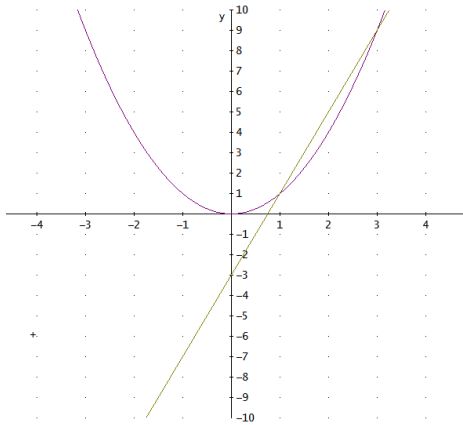
- a. Sí, usando las fórmulas de la Geometría
- b. Sí, usando una regla.
- c. De las primeras cuatro sí, pero para la última región, habría que dividirla en pequeños rectángulos y aproximar su área.
- d. No, ya que no hay medidas.
- e. Ninguna de las anteriores.

12. Considera la parábola $y = x^2$ y una recta que la corta en los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$. ¿Cuál es la pendiente de esta recta?



- a. 4, ya que la recta sube 4 unidades por cada unidad que avanza horizontalmente.
- b. $\frac{1}{4}$, ya que la recta sube 4 unidades por cada unidad que avanza horizontalmente.
- c. No tiene pendiente.
- d. 1
- e. Ninguna de las anteriores.

13. En la siguiente sucesión de imágenes se observa cada vez, un mayor número de rectas secantes que cortan a la curva $y = x^2$ en el punto $(1,1)$ y otro punto cada vez más cercano a él. ¿Podrías describir el conjunto de secantes que se estabilizan en la recta que sólo corta a la curva en el punto $(1,1)$?, podrías describir esta última recta?



- Las secantes así trazadas son infinitas y la última en la que se estabilizan, es la recta tangente en el punto $(1,1)$.
- Las secantes así trazadas son finitas y la última en la que se estabilizan, es la recta tangente en el punto $(1,1)$.
- Todas esas rectas secantes también son tangentes en el punto $(1,1)$.
- En el punto $(1,1)$ no existe la recta tangente.
- Ninguna de las anteriores.

14. ¿En cuál de las siguientes figuras se podría afirmar que la recta es tangente a la circunferencia?, ¿podrías decir con tus palabras lo que consideras una recta tangente a una circunferencia en un punto?

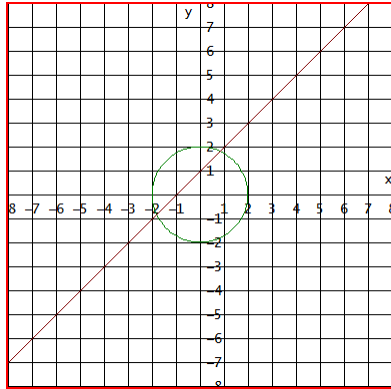


Figura 1

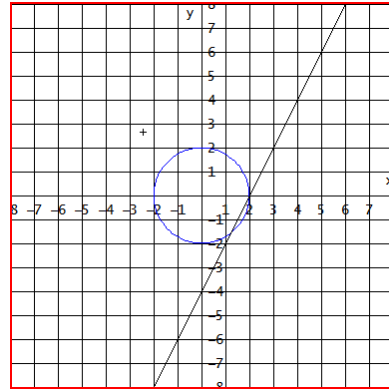


Figura 2

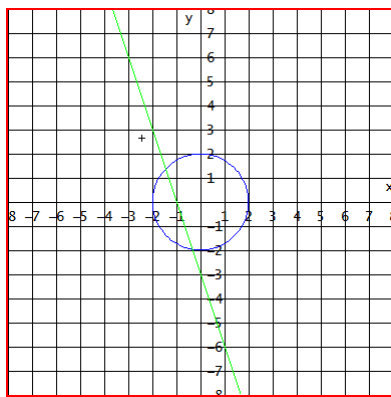


Figura 3

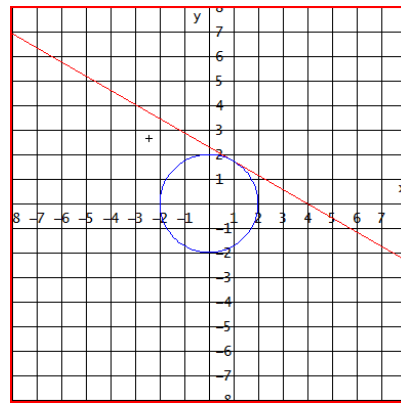
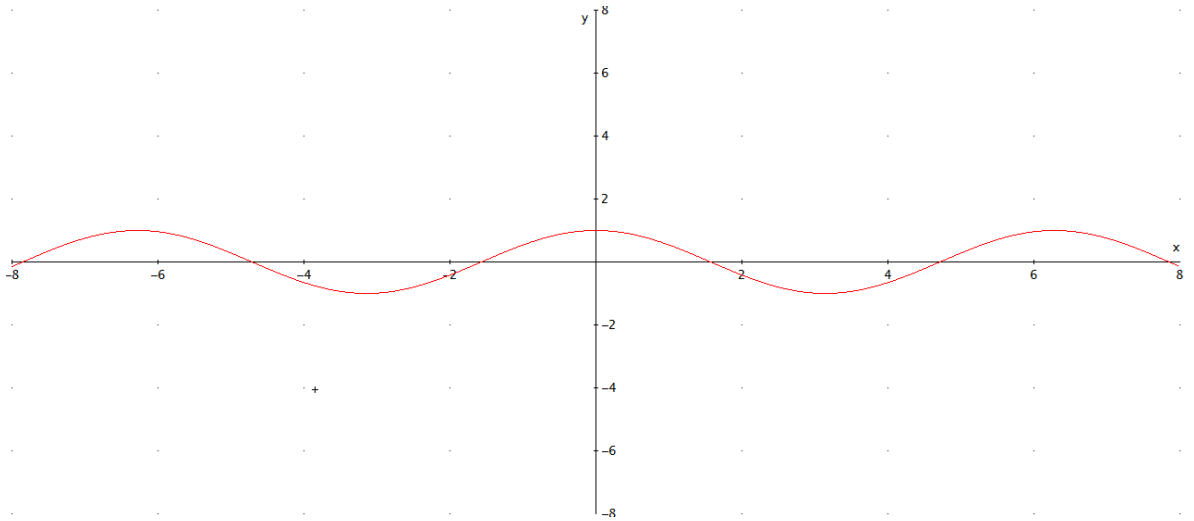


Figura 4

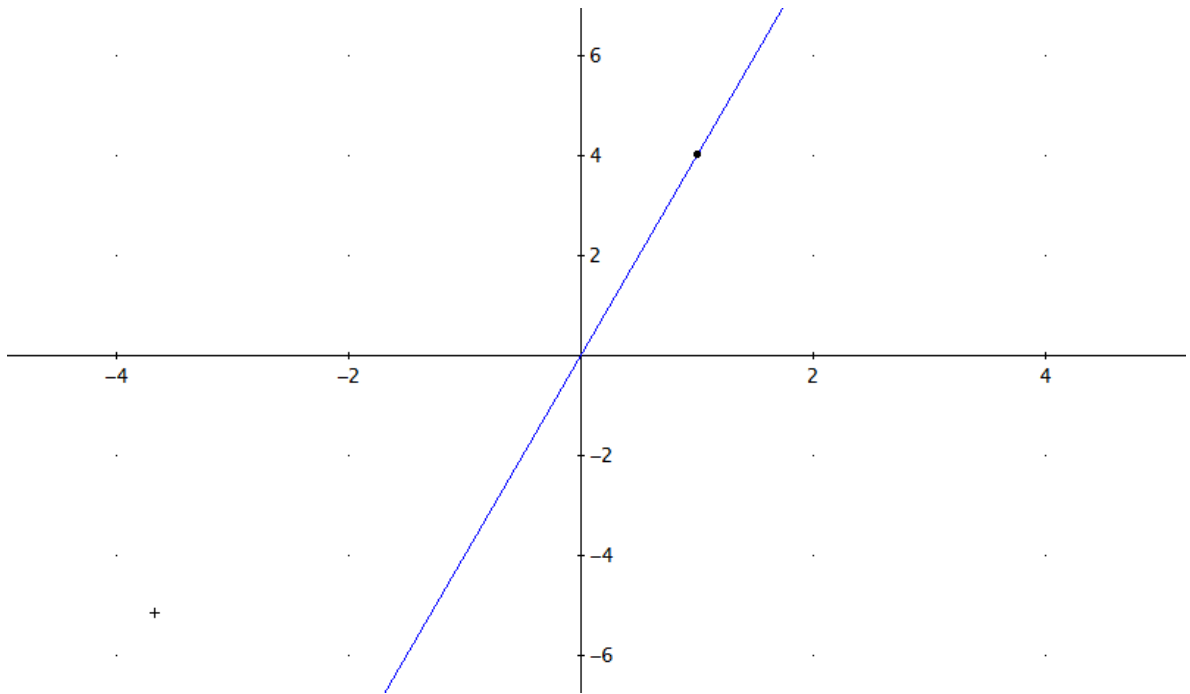
- a. En la figura 1, ya que la recta corta en dos puntos a la circunferencia.
- b. En las figuras 2 y 3, ya que la recta corta a la circunferencia en dos puntos muy cercanos.
- c. En la figura 4, ya que una recta tangente corta a una gráfica cualquiera en un solo punto.
- d. En la figura 4, ya que la recta tangente a una circunferencia la corta sólo en un punto.
- e. Ninguna de las anteriores.

15. Ahora, considera la función $y = \cos x$. ¿Podrías describir las características de la recta tangente a la curva en el punto $(0,1)$? ¿qué diferencia tiene esta recta tangente con la de la circunferencia?



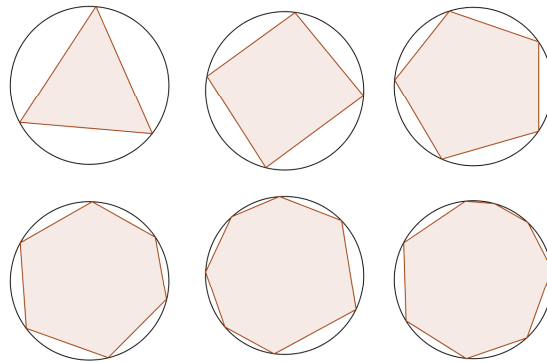
- a. Tiene pendiente 1 y no tiene ninguna diferencia con la tangente a la circunferencia.
- b. Tiene pendiente 0 y no tiene ninguna diferencia con la tangente a la circunferencia.
- c. Tiene pendiente 0 y corta a la función en infinitos puntos, en cambio la tangente corta en un sólo punto a la circunferencia .
- d. Es horizontal, pero sólo corta en $(0,1)$ a la curva y por lo tanto no tiene ninguna diferencia con la tangente a la circunferencia.
- e. Ninguna de las anteriores.

16. ¿Considera el punto que se encuentra marcado en la siguiente función lineal. ¿Podrías describir la recta tangente a la función en dicho punto?, ¿cuántos puntos tienen en común una función lineal y la recta tangente a ella en un punto?



- a. No existe tangente a una recta en un punto.
- b. Es otra recta cualquiera que pasa sólo por ese punto.
- c. Es la recta horizontal que la corta en ese punto
- d. Es ella misma y por lo tanto la corta en todos sus puntos.
- e. Ninguna de las anteriores.

17. Considera ahora los polígonos inscritos que se presentan en las circunferencias iguales de la figura. Si el número de lados de los polígonos crece en forma infinita, ¿podrías afirmar a qué valor se acerca el área de los polígonos así construidos?



- a. Al área de un polígono de 20 lados.
- b. Al área de la circunferencia
- c. No se acerca a ningún valor, ya que el polígono se saldría de la circunferencia.
- d. Al área de un polígono de infinitos lados.
- e. Ninguna de las anteriores.

18. El siguiente rectángulo se ha dividido a la mitad; luego, la parte superior a la mitad; de nuevo, la parte superior a la mitad, y así sucesivamente como muestra la figura:



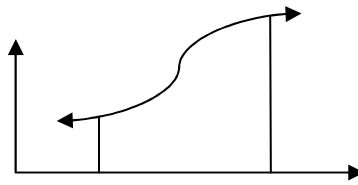
¿Crees que es posible disponer las superficies rectangulares en las que ha quedado dividido el anterior rectángulo como una escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior, como muestra la figura?, ¿Podría la escalera tener área?



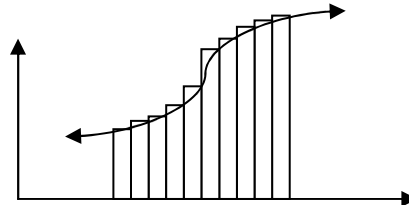
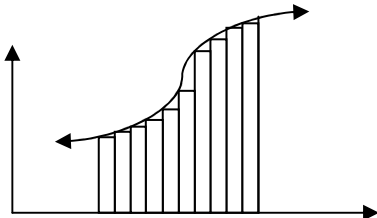
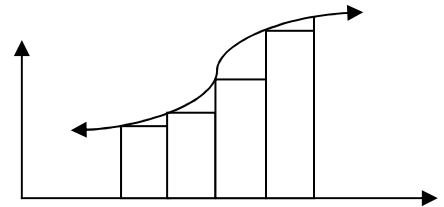
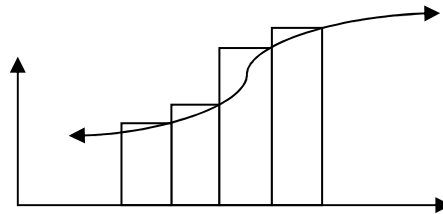
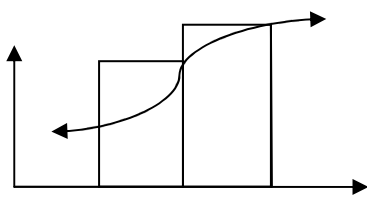
- a. No, porque el área del rectángulo es finita y la de la escalera infinita
- b. No, porque las disposiciones no tienen la misma forma
- c. Sí, porque aunque hay infinitas superficies, el área de ambas disposiciones es finita
- d. Sí, porque el área de la escalera es aproximadamente igual al área del rectángulo
- e. Ninguna de las anteriores:

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

19. Considera de nuevo la siguiente región:



¿Las siguientes particiones realizadas, te dan alguna idea de cómo calcular su área?, ¿podrías explicarlo?



- No, porque por más particiones que se hagan, nunca se podrá calcular su área exacta.
- Sí, utilizando la última partición se puede calcular su área exacta.
- No, no me da ninguna idea.
- Sí, entre más rectángulos tenga la partición mejor aproximación se puede obtener al calcular el área.
- Ninguna de las anteriores.

20. En cada una de las siguientes curvas se encuentran graficados algunos trozos de tangentes en el intervalo (a,b) . ¿Podrías describir sus comportamientos de acuerdo al valor y signo de sus pendientes?

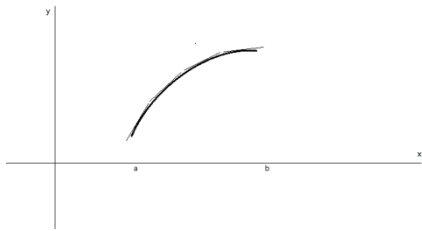


Figura 1

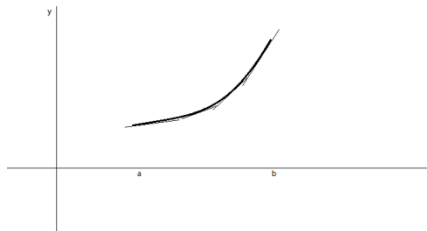


Figura 2

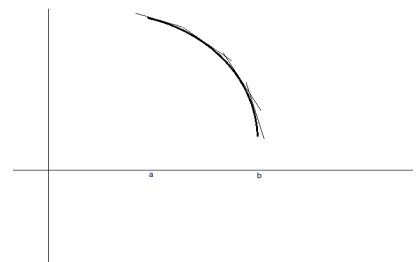


Figura 3

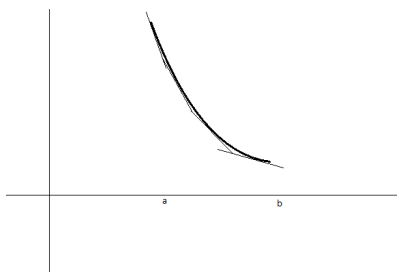


Figura 4

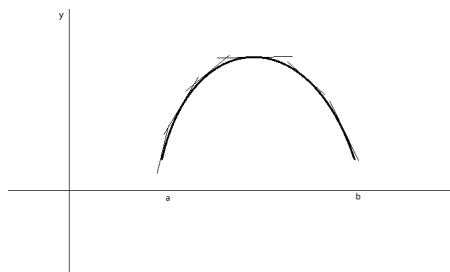


Figura 5

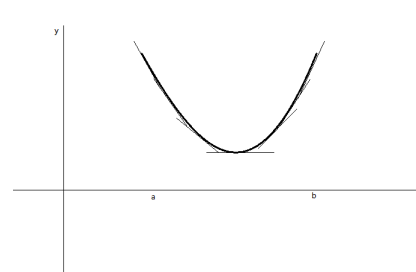


Figura 6

- En las figuras 1 y 2 el valor de las pendientes de las tangentes es positivo, sin embargo en la primera los valores disminuyen y en la segunda aumentan.
- En las figuras 3 y 4 el valor de las pendientes de las tangentes es negativo, sin embargo en la primera de éstas, los valores disminuyen y en la segunda, aumentan.
- En las figuras 5 y 6 el valor de la pendiente en cierto punto del intervalo es 0.
- Todas las anteriores.
- Ninguna de las anteriores.

Aporte de información: A las funciones que tienen como ordenada, la pendiente de la recta tangente a otra función dada, en cada punto de igual abscisa, se les llama funciones-pendiente.

21. ¿Podrías identificar cuáles de las siguientes funciones-pendiente corresponden a cada una de las funciones anteriores?, ¿por qué?

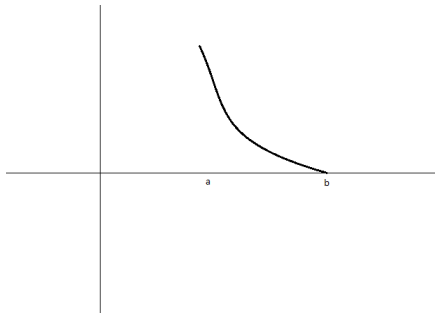


Figura I

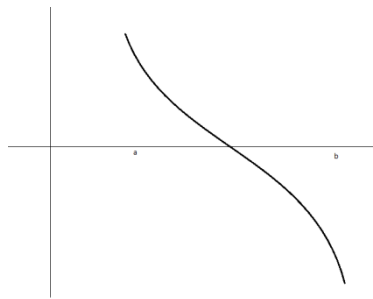


Figura II

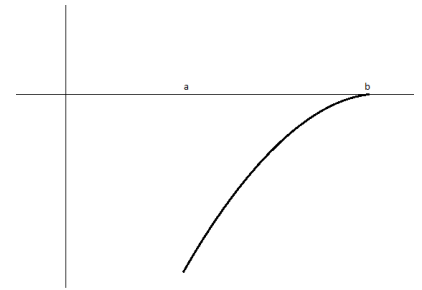


Figura III

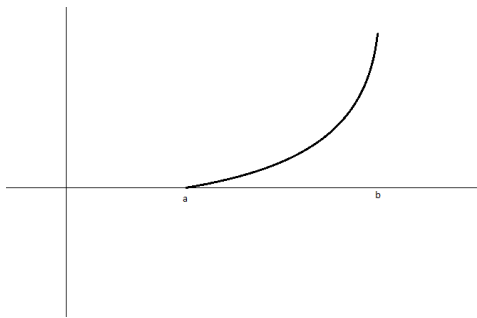


Figura IV

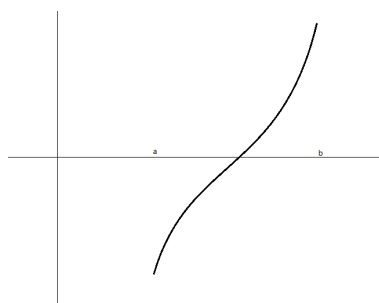


Figura V

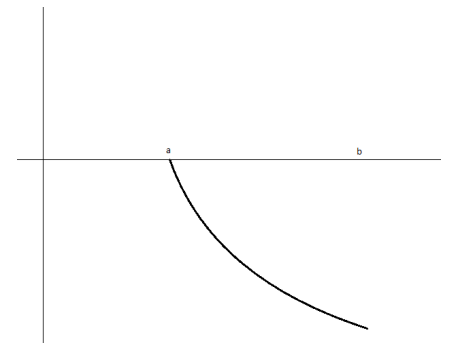
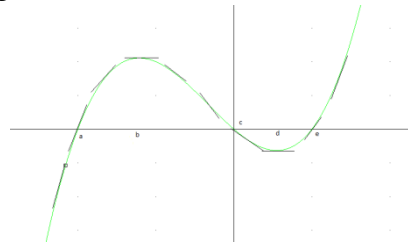


Figura VI

- a. I-1, IV-2, VI-3, III-4, II-5, V-6.
- b. II-1, I-2, VI-3, III-4, IV-5, V-6.
- c. I-1, V-2, VI-3, II-4, III-5, IV-6.
- d. VI-1, V-2, IV-3, III-4, II-5, I-6.
- e. Ninguna de las anteriores.

22. Dada la siguiente función,



¿podrías identificar cuál de las siguientes curvas corresponde a la función-pendiente?, ¿por qué?

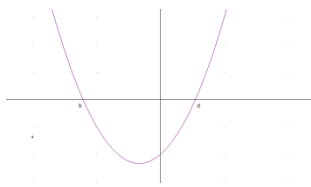


Figura 1

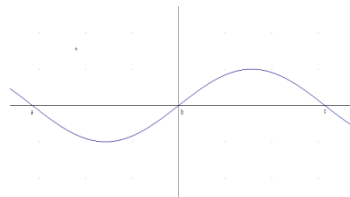


Figura 2

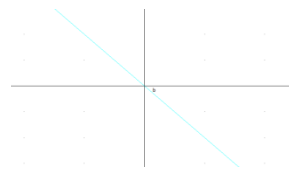


Figura 3

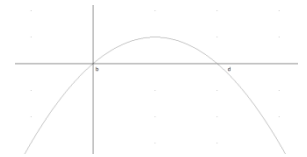
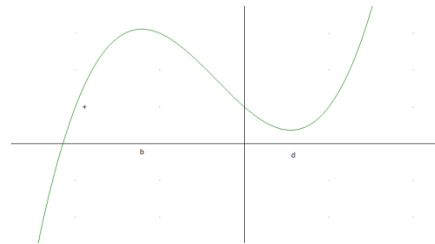
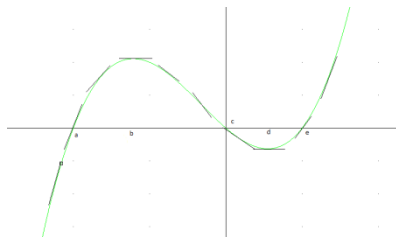


Figura 4

- La figura 2, porque corta en los mismos puntos al eje x .
- La figura 1, porque en $(-\infty, b)$ y (d, ∞) la función-pendiente es positiva y las tangentes de la función original son positivas y en (b, d) la función-pendiente es negativa y las tangentes de la función original también son negativas.
- La figura 4, porque en $(-\infty, b)$ y (d, ∞) la función-pendiente es negativa y las tangentes de la función original son negativas y en (b, d) la función-pendiente es positiva y las tangentes de la función original también son positivas.
- La figura 3, por que los valores de las pendientes de la función original varían en forma constante.
- Ninguna de las anteriores.

23. A continuación se presentan dos funciones. La función de la derecha representa una traslación vertical de la primera.



¿podrías identificar cuál de las siguientes funciones corresponden a las funciones-pendiente de cada una de las anteriores?, ¿por qué?

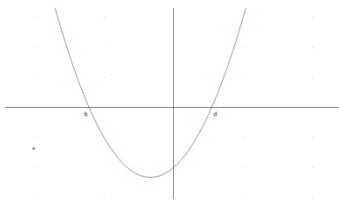


Figura 1

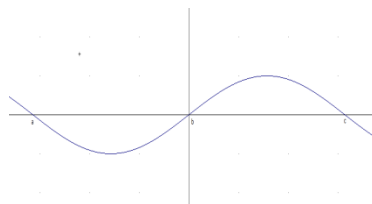


Figura 2

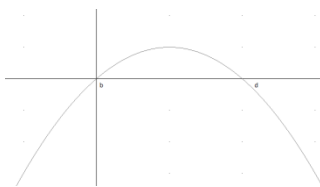


Figura 3

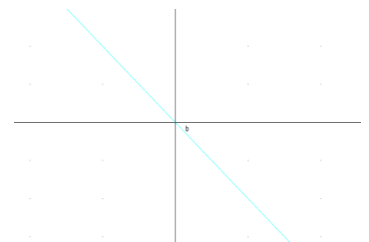
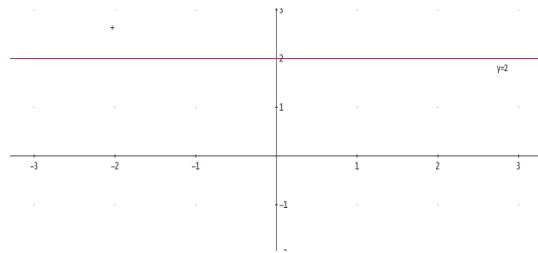


Figura 4

- La figura 2 para ambas, porque tiene la misma que las originales.
- La figura 1 para ambas, porque el comportamiento de las tangentes en las funciones originales es idéntico.
- La figura 3 para ambas, porque es positiva en el intervalo (b, d) .
- La figura 4 para ambas, porque los valores de las pendientes de la función original varían en forma constante.
- Ninguna de las anteriores.

Aporte de información: La traslación vertical de una función de la forma $y = f(x) + C$, se obtiene variando el valor de la constante. Sin embargo, todas ellas coinciden si se sobreponen

24. Considera la función constante $y = 2$, como lo muestra la figura.

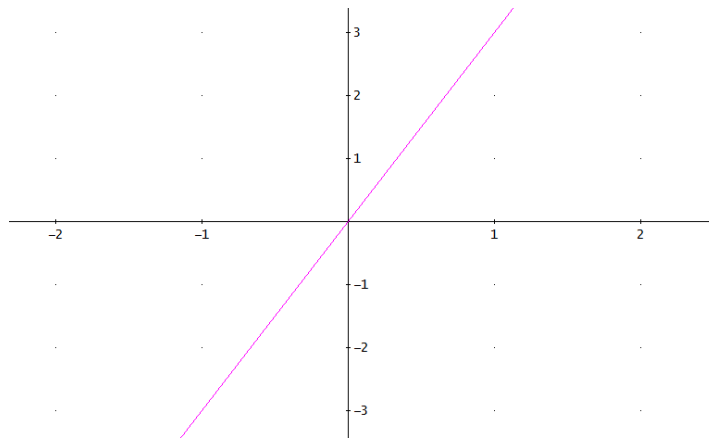


Identifica la respectiva función-pendiente. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

- La función-pendiente es $y = 0$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- La función-pendiente es $y = 2$, pero no observo nada.
- La función-pendiente es $y = 2$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- La función-pendiente es $y = 0$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- Ninguna de las anteriores.

25. Considera otras funciones constantes y sus respectivas funciones-
pendiente. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el
eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en
los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?
- a. La función-pendiente de una función constante es ella misma y el área
limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido,
coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo
intervalo en la función original.
 - b. No concluyo nada.
 - c. La función-pendiente de una función constante es la función $y = 0$ y el
área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo
escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del
mismo intervalo en la función original.
 - d. La función-pendiente de una función constante es la función $y = 0$ y el
área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo
escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos
del mismo intervalo en la función original.
 - e. Ninguna de las anteriores.

26. Considera la función lineal $y = 3x$, como lo muestra la figura.



Identifica la respectiva función-pendiente. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

- a. La función-pendiente es $y = 3x$, pero no observo nada.
- b. La función-pendiente es $y = 3x$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- c. La función-pendiente es $y = 3$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- d. La función-pendiente es $y = 3$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- e. Ninguna de las anteriores.

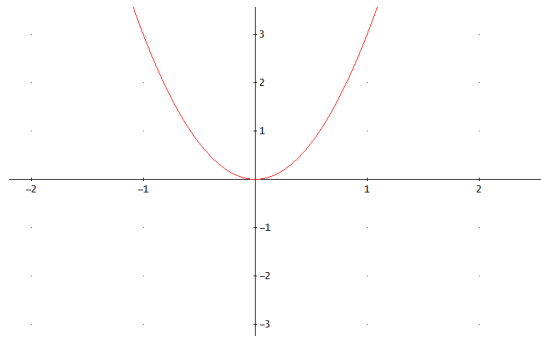
27. Considera otras funciones lineales de la forma $y=3x+C$ y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué observas?

- a. La función-pendiente es $y=3x$, pero no observo nada.
- b. La función-pendiente es $y=3x$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- c. La función-pendiente es $y=3$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- d. La función-pendiente es $y=3$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- e. Ninguna de las anteriores.

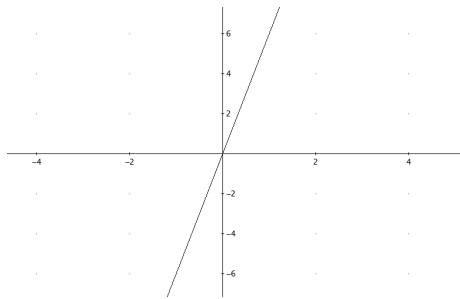
28. Considera otras funciones lineales de la forma $y = mx + b$ y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?

- a. La función-pendiente es $y = mx$, pero no observo nada.
- b. La función-pendiente es $y = mx$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- c. La función-pendiente es $y = m$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- d. La función-pendiente es $y = m$ y el área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- e. Ninguna de las anteriores.

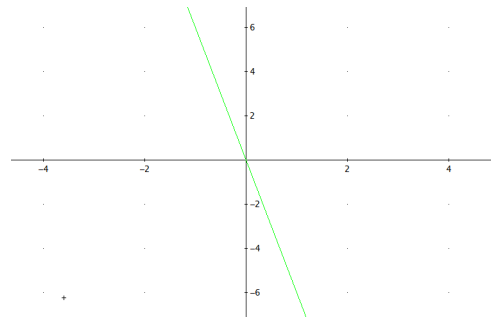
29. Considera la función cuadrática $y = 3x^2$, como lo muestra la figura.



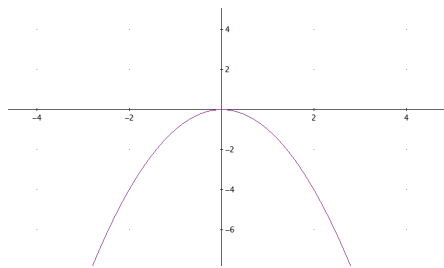
¿Cuál de las siguientes curvas crees que sea la correspondiente función-pendiente?



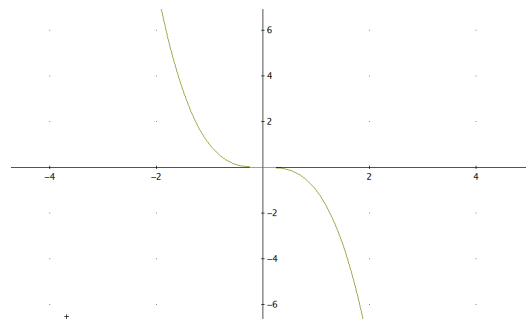
$$y = 6x$$



$$y = -6x$$



$$y = -x^2$$



$$y = -x^3$$

- a. La recta $y = 6x$ b. La recta $y = -6x$ c. La curva $y = -x^2$
d. La curva $y = -x^3$ e. Ninguna de las anteriores.

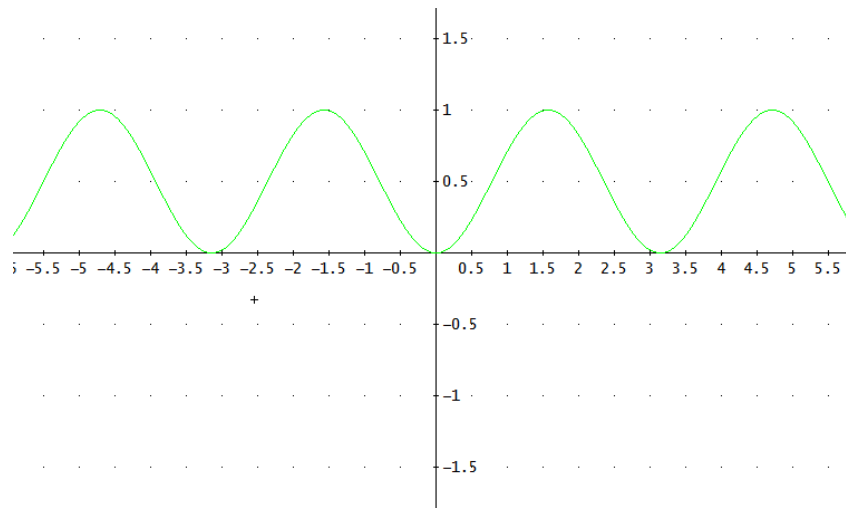
30. Ahora, compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?
- a. No puedo concluir nada.
 - b. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
 - c. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en dos valores cualesquiera del mismo intervalo en la función original.
 - d. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
 - e. Ninguna de las anteriores.

31. Considera otras funciones cuadráticas de la forma $y = 3x^2 + C$ y sus respectivas funciones-pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?

- a. No puedo concluir nada.
- b. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- c. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del mismo intervalo en la función original.
- d. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en dos valores cualesquiera del mismo intervalo en la función original.
- e. Ninguna de las anteriores.

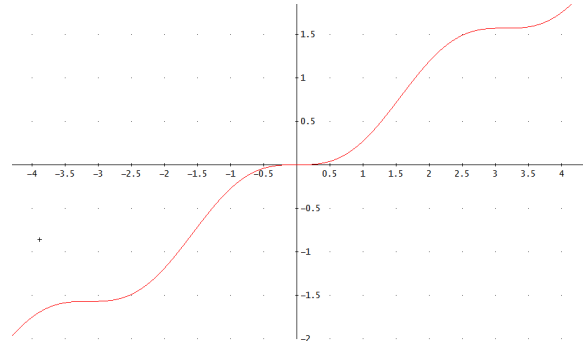
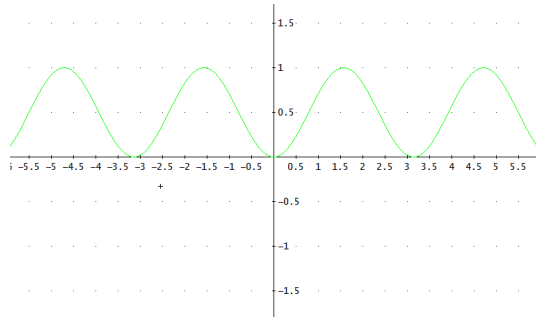
32. Considera otras funciones cuadráticas y sus respectivas funciones-
pendiente. Compara el área limitada por la función-pendiente y el eje x
en un intervalo cualquiera, con la diferencia de las ordenadas en los
extremos del mismo intervalo en la función. ¿Qué puedes concluir?
- a. No puedo concluir nada.
 - b. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo
escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos del
mismo intervalo en la función original.
 - c. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo
escogido, no coincide con la diferencia de ordenadas en los extremos
del mismo intervalo en la función original.
 - d. El área limitada por la función-pendiente y el eje x en el intervalo
escogido, coincide con la diferencia de ordenadas en dos valores
cualquiera del mismo intervalo en la función original.
 - e. Ninguna de las anteriores.

33. La función que se muestra a continuación, corta al eje x en los valores múltiplos de π . ¿Podrías explicar cómo calcular el área limitada por la función y el eje x , en el intervalo $[0, \pi]$?



- No podría explicarlo.
- En esta función hallaría la diferencia de ordenadas en $[0, \pi]$ y este valor sería el área.
- Considerando esta gráfica como la función-pendiente de otra que llamaría función original, calcularía en esta última la diferencia de ordenadas en los extremos del intervalo.
- Hallaría la función original correspondiente y hallaría el área en el intervalo.
- Ninguna de las anteriores.

34. A continuación se muestran dos gráficas, la primera corresponde a la función-pendiente $f(x) = \text{sen}^2 x$ de la función original $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\text{sen}2x}{4}$. ¿Podrías calcular el área limitada por la función $f(x) = \text{sen}^2 x$ y el eje x en el intervalo $[0, \pi]$? ¿cómo explicarías el procedimiento?



- No, no sabría como calcularla.
- El área es $\frac{\pi}{2}$, ya que el área limitada por una función-pendiente y el eje x en un intervalo dado, corresponde a la diferencia de ordenadas en la respectiva función original.
- El área es $\frac{\pi}{2}$, ya que el área limitada por una función y el eje x en un intervalo dado, corresponde a la diferencia de ordenadas en la respectiva función-pendiente.
- El área es π , ya que el área limitada por una función-pendiente y el eje x en un intervalo dado, corresponde a la diferencia de ordenadas en la respectiva función original.
- Ninguna de las anteriores.

ANEXO 5: Divulgaciones del estudio

Participación en calidad de ponente, conferencista o tallerista:

- **Seminario Institucional.** *La entrevista socrática con estrategia metodológica para la comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, en el marco del modelo de Pirie y Kieren.* **Conferencista:** Londoño Cano René Alejandro. Universidad de Antioquia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemáticas. Medellín. Noviembre de 2010.
- **The Sixth International Congress of Qualitative Inquiry.** **Conferencista.** *La comprensión del TFC en el marco del modelo de Pirie y Kieren.* Universidad de Illinois (Urbana-Champaign, Chicago). Mayo 26 al 29 de 2010.
- **The Sixth International Congress of Qualitative Inquiry.** **Conferencistas:** Londoño Cano René Alejandro y Rendón Ramírez Rodrigo Antonio. *La comprensión del concepto de Continuidad en el marco del modelo de Pirie y Kieren.* Universidad de Illinois (Urbana-Champaign, Chicago). Mayo 26 al 29 de 2010.
- **11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa-ASOCOLME.** **Ponente:** Londoño Cano René Alejandro, Jaramillo López Carlos Mario, Esteban Duarte Pedro Vicente. *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco del modelo de Pirie y Kieren.* Colegio Champagnat. Bogotá D.C. Octubre 7 al 9 de 2010.
- **II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas.** **Ponente:** Londoño Cano René Alejandro. *La relación*

inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco del modelo de Pirie y Kieren. Universidad de Medellín. Medellín. Mayo 4 al 7 de 2010.

- **II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Cursillista:** Londoño Cano René Alejandro. *Comprensión de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, a partir de la entrevista socrática.* Universidad de Medellín. Medellín. Mayo 4 al 7 de 2010.
- **International Congress of Science Education: 1^o years of the Journal of Science education. Ponente:** Londoño Cano René Alejandro. *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco del modelo de Pirie y Kieren.* Universidad Antonio Nariño. Cartagena. Julio al 18 de 2009.
- **Sexto Encuentro Colombiano y primero Iberoamericano de la Enseñanza del Cálculo. Ponente:** Londoño Cano René Alejandro. *Las fases de aprendizaje del modelo educativo de van-Hiele, como estrategia metodológica para mejorar la comprensión del TFC, desde una perspectiva epistemológica.* Universidad Javeriana. Bogotá D.C. Diciembre 3 al 5 de 2007.

Participación próximamente en ponencia aceptada:

- **Conferencia Interamericana de Educación matemática. Conferencista:** Londoño Cano René Alejandro, Jaramillo, López Carlos Mario, Esteban Duarte Pedro Vicente. *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco del modelo de Pirie y Kieren.* Comité Interamericano de Educación Matemática. Recife-Brasil. Junio 26 al 30 de 2011.

Artículo aceptado y en proceso de publicación:

- Londoño Cano R. A.; Jaramillo López C. y Esteban Duarte, P. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco del modelo de Pirie y Kieren.* Memorias de la XIII Conferencia interamericana de Educación de Educación Matemática CIAEM. Recife-Brasil.

Artículo en proceso de Evaluación para publicar:

- Londoño Cano R. A. y Pérez Carreras, P. (2011). *Tangent Lines to curve and Areas below it: A socratic experience aimed at an intuitive approach to the Fundamental Theorem of Calculus*. Zetetiké. Campinas-Sao Paulo.

