UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ENFÁSIS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

GEOMETRÍA Y ANÁLISIS EN LA HISTORIA TEMPRANA DE LAS INTEGRALES ELÍPTICAS

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Ana Celi Tamayo Acevedo

Requisito parcial para optar al título de Magister en
Educación con Énfasis en la Enseñanza de la Matemática

Director: **Dr. Leonardo Solanilla Chavarro**

2005

AGRADECIMIENTOS

Agradezco muy especialmente a mi asesor Leonardo Solanilla, por su sabiduría y paciencia para guiar el buen desarrollo de la investigación. También agradezco a Gabriel Pareja por su aplicada participación en el seminario *Historia de las Integrales Elípticas*, la cual ha sido de gran ayuda para mi trabajo. También debo agradecer al Dr. Daya K. Nagar por su asesoría sobre el manejo del LaTeX.

Finalmente, doy mis cariñosos agradecimientos a los familiares y amigos que me acompañaron durante esta etapa de mi vida.

Resumen

Este trabajo enfrenta el estudio del concepto de integral elíptica a partir de los detalles de su surgimiento y devenir en la Historia de las Matemáticas durante los siglos XVII y XVIII. Lo que aquí se presenta es una manera o forma de enseñar este concepto, que parece haberse olvidado en los nuevos textos de Cálculo Integral. Se trata pues de un trabajo interdisciplinario en el cual se intervienen la teorías de la Educación, la Historia y las Matemáticas mismas.

Desde la Educación, el trabajo se sustenta en Teoría de la Transposición Didáctica, tal como se explica más abajo en el Capítulo 1. En lo histórico se apoya en un método hermenéutico basado en la lectura, análisis e interpretación de algunos escritos originales de finales del siglo XVII y del siglo XVIII, así como en algunas reinterpretaciones posteriores. Para lo matemático, se usa la formalización contemporánea del Análisis en términos del Álgebra Lineal y la Topología. Con el fin de dar unidad a la presentación, se usa la simbología moderna estándar y se da una organización axiomática y demostrativa a los resultados de la investigación.

El concepto de integral elíptica surge de manera natural al intentar calcular la longitud de arco de algunas curvas elementales tales como las secciones cónicas, la espiral parabólica o la lemniscata, entre otras. En los albores del Cálculo Infinitesimal se utilizaron procedimientos geométricos y analítico-algebraicos para estudiar las propiedades más evidentes de dichas integrales, dada la imposibilidad de un cómputo exacto de su valor numérico. Tales procedimientos son el objeto de este trabajo.

Abstract

This Master's thesis focuses on the concept of elliptic integral from the particulars of its emergence and development in the History of Mathematics during the seventeenth and eighteenth centuries. The purpose of this research is to present a way of teaching this concept which, by the way, seems to have been forgotten in the modern textbooks of Calculus. Therefore, the work is an interdisciplinary task which combines theories of Education, History of Mathematics and Math itself.

The educational component is based upon the Theory of Didactic Transposition, just as it is explained in Chapter 1. The historical component relies on an interpretative method consisting of reading and analyzing some original papers as well as some later reformulations of the subject. In the mathematical part, the contemporary formalism of Calculus and Analysis is used. With the aim of providing unity to the presentation, the standard modern symbolism together with a friendly definition-proof organization is used.

The concept of elliptic integral arises naturally when one attempts to calculate the arc length of some "elementary" curves such as the conic sections and the lemniscate, among others. At the dawn of Infinitesimal Calculus, it was already clear that such integrals were not algebraic and so, geometric and analytic-algebraic procedures were tried to elucidate the most relevant features of these arc length integrals. The study and interpretation of some of these procedures constitute the purpose of this work.

Índice general

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de cuadros

Introducción

Este trabajo de Maestría versa sobre algunos episodios de la Geometría y el Análisis en la Historia Temprana de las Integrales Elípticas y está concebido y organizado bajo una visión renovada de la investigación en Educación Matemática que se sustenta en el pensamiento didáctico de la escuela francesa de la posguerra. Dentro de esta concepción, la Historia de las Matemáticas desempeña un rol fundamental para la hermenéutica de los conceptos y las nociones matemáticas.

El documento está organizado en cuatro capítulos. En el primero se discuten algunas posiciones sobre el papel que ha jugado y que puede jugar la Historia de las Matemáticas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los conceptos. La pertinencia de la Historia es defendible a luz de las teorías de la Transposición Didáctica de Chevallard y de las Situaciones Didácticas de Brousseau. Otro punto de apoyo importante se extrae de la obra de don Miguel de Guzmán. El tema específico de las Integrales Elípticas se presta perfectamente para ilustrar estas ideas. El capítulo concluye con una reflexión sobre la importancia del tema y la forma como se ha ido diluyendo (o excluyendo) en los programas de Cálculo con el correr de los siglos.

El segundo Capítulo inicia con una rápida reseña histórica de los dos primeros siglos (historia temprana) de las Integrales Elípticas, lo que constituye el objeto de estudio de este trabajo. La presentación se basa principalmente en el libro de Bellachi [2] y se ha completado con la ayuda de algunos originales disponibles de los siglos XVII y XVIII. También se han consultado algunos artículos que han visto la luz durante los últimos años. Fruto de esta labor de lectura, se emprende luego la construcción de una taxonomía de las integrales consideradas. La clasificación taxonómica permite encontrar puntos comunes al interior del barullo de tantas referencias bibliográficas. Esto conduce a organizar el resto del trabajo en dos grandes capítulos : división de curvas y cuasirectificación. En seguida, se mencionan los conceptos básicos que se requieren para comprender los teoremas de los capítulos siguientes. El capítulo termina con la exposición de algunas propiedades interesantes de la circunferencia que sirven de preámbulo a desarrollos posteriores y más generales.

El problema de dividir una curva dada en partes proporcionales (o iguales) con regla y compás es el objeto del Capítulo tres. En primera instancia se resuelve este problema para la parábola usual y para la espiral parabólica, que es una versión polar o angular de la parábola. En el primer ejemplo, el método de solución involucra la construcción de una hipérbola auxiliar para encontrar segmentos de arco proporcionales; en el segundo se usa la simetría de la función longitud de arco para dividir la espiral en dos partes iguales. Sin embargo, el corazón del Capítulo es el método de Fagnano para dividir la lemniscata. Este método reduce el problema geométrico de la división a un problema de ecuaciones diferenciales, cuyas soluciones arrojan directamente la longitud del radio vector que divide la curva en dos, tres, cinco o 2^n partes iguales. Se trata de uno de los logros más grandes del Análisis del siglo XVIII que augura ya los hermosos resultados de Gauss y Abel.

El último Capítulo pretende organizar los muchos e intrincados teoremas de cuasirectificación de las curvas estudiadas. Se ha seguido un orden cronológico. En primer lugar, se demuestra el Teorema Universal de Bernoullli (siglo XVII), que permite cuasirectificar una gran clase de curvas (llamadas aquí curvas de Bernoulli). Luego se discuten algunos resultados del Conde de Fagnano relacionados con este Teorema. Después de esto, se aborda el estudio de las cónicas. Para ello, se ha preferido emplear el método de Euler (antes que el del Fagnano) porque permite ver con claridad la cuasirectificación como un problema de ecuaciones diferenciales. Es decir, se pone de manifiesto la unidad teórica existente con el método de división de Fagnano del Capítulo tres. A continuación, se prueba el Teorema de Landen (siglo XVIII). Este teorema tuvo gran influencia en las investigaciones de Jacobi durante el XIX y, aún hoy, es un referente ineludible en la teoría de las transformaciones de Landen. El Capítulo finaliza con la cuasirectificación de la lemniscata.

En los tres últimos capítulos, la Historia ha sido el ingrediente indispensable para elucidar los conceptos y para sugerir (aunque no para determinar completamente) la forma como deberían presentarse y organizarse. En esto se resume la ardua labor didáctica emprendida y realizada.

Al final, se esbozan las conclusiones de la investigación.

Capítulo 1

Génesis de Conceptos y Transposición Didáctica

En este capítulo se discute el papel que el enfoque tradicional o moderno de la Educación Matemática ha dado a la Historia de las Matemáticas. A tal enfoque se contraponen las nuevas ideas que emergen de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y del concepto de Transposición Didáctica de Chevallard, lo mismo que del pensamiento de Miguel de Guzmán. Estas ideas rebasan los límites de lo moderno. Dentro de este marco conceptual, se propone un estudio histórico del concepto de integral elíptica y se defiende la pertinencia e importancia de su enseñanza.

1.1 El papel de la historia de las Matemáticas en la Educación tradicional

En los últimos años los investigadores en Educación Matemática se han preguntado a menudo sobre el papel que debe jugar la Historia de las Matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Hoy por hoy, tales preguntas tienen respuestas generales sustentadas en teorías sicológicas, pedagógicas, didácticas y, fundamentalmente, en el estatuto epistemológico de la disciplina. Es allí donde se organiza el saber específico que se quiere dar a conocer. Es natural pues recurrir a la Historia para intentar comprender la construcción y formación de los conceptos.

En relación con la Educación Matemática y a partir de la década de los cincuenta, nace un movimiento encaminado a propender por la enseñanza de las Matemáticas desde las estructuras, la lógica y la axiomática. Dicho enfoque axiomático proclama tácitamente que la

Historia no tiene por qué desempeñar ningún rol protagónico en la enseñanza. Esta posición no es ingenua. Por el contrario, es fácilmente defendible ya que descansa sobre uno de los logros más grandes del pensamiento humano: la filosofía kantiana. En verdad, los axiomas son, ni más ni menos, juicios sintéticos *a priori* que recubren las teorías matemáticas de una apariencia lógica impecable.

El enfoque didáctico resultante de esta posición moderna domina aún hoy el quehacer de los profesores de Matemáticas en las universidades de nuestro país. Es importante insistir en que tal enfoque posee sus méritos propios, que provienen del saber matemático en sí mismo, de sus logros y del éxito que lo ha convertido en ejemplo para otros saberes.

Con estas premisas en mente, a continuación se formulan afirmaciones y sugerencias en torno a la pertinencia de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas. La defensa se emprende desde las teorías actuales de la Educación Matemática, tales como las teorías de la Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica, propuestas por Guy Brousseau y Yves Chevallard, respectivamente.

1.2 Nuevas posiciones sobre la Historia de las Matemáticas en la Educación

La segunda mitad del siglo XX ha sido también testigo de una reivindicación de la Historia de las Matemáticas en la Educación. Tal posición proviene de la filosofía francesa de la postmodernidad (aquí entendida simplemente como ruptura con el pensamiento moderno, kantiano si se quiere). Como representantes de esta nueva escuela podemos citar a Guy Brousseau y a Yves Chevallard. Ellos, entre otros, han propuesto teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos que tienen en cuenta las condiciones sociales, históricas, culturales y sicológicas propias del hombre.

En su Teoría de las Situaciones Didácticas, cf. [4], Guy Brousseau señala que el profesor no debe eliminar el componente histórico de un concepto en el momento de preparar su enseñanza. Según él, el estudio desde la Historia muestra la sucesión de dificultades, controversias y preguntas que han moldeado la versión actual del concepto estudiado. En consecuencia, un estudio histórico clarifica el verdadero proceso que sufren los conocimientos matemáticos. Esto sirve para que el profesor dimensione el concepto que va a transmitir y, por lo tanto, evite las presentaciones improductivas, artificiales y desvirtuadas. En concordancia, defiende que el conocimiento histórico, crítico y analítico de un concepto conduce al profesor a diseñar situaciones didácticas que facilitan al estudiante la comprensión y elaboración del concepto en cuestión.

De otro lado, Yves Chevallard es el autor de la Teoría de la Transposición Didáctica, cf. [5]. Este nombre se refiere al proceso de traslación (o traducción) de un conocimiento desde "objeto de saber" (saber sabio, propio de una comunidad científica) hasta "objeto a enseñar" (saber a enseñar, del cual se debe apropiar el alumno). En su teoría, Chevallard pone de manifiesto que el paso del "saber sabio" al "saber a enseñar" no puede ser visto como una simplificación del primero. La transposición en sí hace referencia a las adaptaciones didácticas que sobre el "saber sabio"se pueden realizar para que sea posible su integración a la enseñanza. Consecuentemente, en la transposición didáctica la Historia de las Matemáticas juega un papel importante, pues ella brinda (por lo menos) herramientas para comprender la forma como se va construyendo el "saber sabio" en la comunidad científica. Se aspira a que dicha comprensión permita realizar una mejor traslación del dicho "saber sabio" a cierto "saber a enseñar".

En la obra del investigador español Miguel de Guzmán, cf. [10, 11], se encuentran frecuentes referencia al asunto que nos ocupa. Por ejemplo, se afirma que "... el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas, para : –comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos –entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática –utilizar este saber como una sana guía para su propia pedagogía..." De Guzmán señala también los objetivos que debe cumplir la Historia de las Matemáticas durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje. La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como :

- hacer patente la forma peculiar como aparecen las ideas en matemáticas,
- enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación y precedentes,
- señalar los problemas abiertos de cada época y su evolución al igual que la situación en la que se encuentran actualmente,
- apuntar las conexiones históricas de las Matemáticas con otras ciencias, en cuya interacción han surgido muchas ideas importantes.

En un orden de ideas más general, las nuevas visiones de la Educación Matemática han dado origen a diversas investigaciones sobre las relaciones entre los componentes de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (alumno, objeto de conocimiento, profesor) y su puesta en práctica, bajo la idea de saber matemático. Cualquiera de estas relaciones entre los componentes básicos constituye una fuente para la investigación en Educación. En este trabajo se enfrenta, en particular, la relación entre el profesor y el objeto del conocimiento. En medio de las opiniones encontradas en torno al papel de la Historia de las Matemáticas en las nuevas teorías de la Educación, aquí no sólo se emprende un trabajo de carácter histórico y matemático, sino también se presenta un modo (distinto del tradicional) de elaborar un concepto para la enseñanza de un tema específico de Cálculo : las integrales elípticas. Si se acepta con Brousseau y Chevallard un sistema de tres elementos (saber sabio, saber a enseñar y aprendiz), el presente trabajo apunta a la relación entre los dos primeros, llamada con acierto *Transposición Didáctica*.

1.3 EL CONCEPTO DE INTEGRAL ELÍPTICA EN LA HISTORIA Y EN LA ENSEÑANZA

En concreto, esta investigación se motiva en el estudio de algunos artículos originales sobre las primeras integrales elípticas conocidas. En su mayoría, fueron escritos durante la segunda mitad del siglo XVII y la primera del XVIII y presentan resultados de punta (o de la frontera del conocimiento, si se quiere) para su época. Se considera en detalle, sobre todo, lo contenido en el primer capítulo de la *"Introduzione storica alla teoria delle funzione ellittiche"*, conocido libro de Bellachi [2]. El propósito final de esta revisión histórica es la transposición de un “saber sabio” (véase [5]) referente a ciertas integrales elípticas en un “saber a enseñar”. Esto se realiza a partir de la epistemología y la historia de dicho concepto.

De manera sorprendente, el concepto de Integral elíptica es nombrado vagamente en los cursos de Cálculo, dejando en el estudiante una visión artificial y muy deficiente sobre el cómputo de la longitud de arco de ciertas curvas “sencillas” [1]. Lo propio se puede decir sobre la determinación de la elasticidad de una barra o del periodo de oscilación de un péndulo simple, por ejemplo. Hoy en día, en el capítulo sobre las aplicaciones de la derivada y la integral (que se enseña en los primeros semestres de universidad) se incluye

[1]las secciones cónicas, la lemniscata y las curvas de Bernoulli que se definen más adelante, entre otras.

usualmente el concepto de longitud de arco de curvas regulares. La inmensa mayoría de los textos y de los profesores se limitan a tratar el caso en que la integral considerada se deja resolver por los métodos cubiertos en el curso (partes, sustitución, fracciones parciales, a lo sumo). Pero esta situación no es normal en el Cálculo Integral. Por el contrario, la gran mayoría de las integrales de longitud de arco son difíciles de determinar. De hecho, a lo largo de la historia, se han usado distintos métodos para aproximarlas, por ejemplo, se han elaborado tablas basadas en métodos numéricos. Aún hoy, es frecuente apelar a las computadoras para aproximar tales integrales de alguna manera. Por todo lo anterior, no sorprende que el estudiante (al finalizar el estudio de la longitud de arco) quede con una idea equivocada (vacío) sobre la aplicación del concepto de integral. Entre las muchas integrales que ilustran lo dicho antes, este trabajo se dedica únicamente a las longitudes de arco de algunas secciones cónicas y de otras curvas "sencillas" (a menudo construibles con regla y compás). Ellas han sido bautizadas con el nombre de *integrales elípticas*.

En el ámbito de la Historia de las Matemáticas, la teoría contemporánea de las funciones elípticas debe mucho a la de estas integrales. En verdad, dada la imposibilidad de hallar el valor exacto de estas últimas, los matemáticos se dieron desde un comienzo a la tarea de estudiar sus propiedades. Las primeras de dichas propiedades datan de los albores del Cálculo Infinitesimal en la Europa de los siglos XVII y XVIII. De especial relevancia para este trabajo han sido los descubrimientos de J. Bernoulli [3], Fagnano [8], Landen [14] y Euler [7]. Antes que constituir una teoría general sobre las longitudes de arco bajo consideración, estos primeros hallazgos comprenden un verdadero mosaico de curvas particulares, propiedades específicas y técnicas de solución a diversas preguntas. Durante los siglos XIX y XX, los logros de los pioneros fueron estudiados en gran detalle y superados en gran medida. Se remite al lector a Bellachi [2], Enneper [6] y a Mckean-Moll [16] para una visión detallada de los desarrollos posteriores. Baste citar aquí que, en los años recientes, el creciente interés por las Transformaciones de Landen han llevado a algunos investigadores de las Matemáticas a remitirse a las fuentes históricas de las integrales elípticas.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES AL DEVENIR HISTÓRICO DE INTEGRALES ELÍPTICAS

Este segundo capítulo comienza con un recuento histórico de los trabajos realizados por algunos matemáticos de los siglos XVII y XVIII en torno al problema de determinar la longitud de arco de ciertas curvas como la espiral parabólica, las secciones cónicas y la lemniscata, entre otras. Después se enuncian los conceptos básicos sobre los cuales se fundamentará la teoría de los capítulos posteriores. Para terminar, se hace una breve discusión sobre la circunferencia, ya que esta curva se puede considerar como el caso ideal dentro del problema de determinar propiedades para la longitud de arco de las curvas mencionadas.

2.1 DESARROLLOS EN TORNO A LAS INTEGRALES ELÍPTICAS DURANTE LOS SIGLOS XVII Y XVIII

Ya Newton y los Bernoulli conocían el método de descomposición para encontrar una función primitiva o antiderivada de una función racional, cf. Bellachi [2], Kline [13]. Este método de fracciones parciales arroja ya, de por sí, funciones trascendentes (cf. Stewart [23], Kline [13]) como la logarítmica y las trigonométricas inversas. Se debe resaltar que el cálculo de los valores de estas funciones equivale al cómputo de una serie o de un producto infinito. La dificultad es, pues, insalvable. Por esta razón se ha preferido presentar a menudo estos valores en tablas de aproximaciones o proponer métodos numéricos que aproximen la cifra exacta con cierto margen de error.

El mismo problema se presentó cuando se intentó calcular la longitud de arco de ciertas curvas suaves, es decir, suficientemente diferenciables. Por ejemplo, en las *Acta Erudito-*

rum de 1679, Jacob Bernoulli consideró la integral trascendente

$$\int_{r}^{r-\rho} \sqrt{x^4 - 2rx^3 + r^2x^2 + p^2r^2}\, dx,$$

r, ρ y p constantes. Ella expresa la longitud de arco de la espiral parabólica, cf. Bellachi [2].

También se puede incluir aquí a la curva elástica. Ella describe "el perfil que adopta una barra delgada cuando se ejercen fuerzas sobre ella", cf. Kline [13]. Fue estudiada por el mismo Jacob Bernoulli en 1694. La curva está definida por la relación funcional, cf. [7] y [19],

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}}\, dt.$$

En 1698, Johan Bernoulli emprendió el estudio de la parábola apoloniana o usual, es decir, la curva que tiene por ecuación cartesiana a $x^2 = 2py$, para cierto parámetro constante $p \neq 0$. Al calcular el arco parabólico s, se encuentra la ecuación

$$s = \frac{1}{p}\int \sqrt{x^2+p^2}\, dx = x\frac{\sqrt{x^2+p^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right),$$

cf. [2], que consta de una parte algebraica y una parte logarítmica. El mismo año, el mismo Bernoulli publica sin demostración explícita su Teorema Universal, cf. [3] y [20], que sirve para "rectificar" [1] curvas por la suma o la diferencia de ciertos arcos de la curva generatriz y de una curva generada. Este método se aplica en particular a las parábolas de la forma $ny = ax^n$, que generan curvas con coordenadas $X = a^3x^{3n-2}$ y $Y = \frac{3n-2}{2n-1}a^2x^{2n-1}$.

Un momento de ruptura decisivo ocurrió en 1714, cuando el Conde Giulio Carlo de Fagnano (italiano, 1682-1766) prueba (en el tomo XIX del *Giornale de'letterati d'Italia*) que dada una porción de la parábola bicuadrática $x^4 = y$, existe una porción de la misma tal que la diferencia entre estas porciones es rectificable. Esto se logra mediante sustituciones integrales de la forma

$$G\int x^{cm}(1+x^m)^{\lambda-1}\, dx = X + H\int (1+x^m)^{\lambda-1}\, dx,$$

donde X es una función algebraica, G y H constantes y m, λ números racionales. Más tarde, en 1716, Fagnano (tomo XXVI del *Giornale de'letterati d'Italia*) demuestra que una cónica central (cicloide, elipse, etc.) posee infinitos arcos que tienen diferencia rectificable, véase [2].

[1] La definición de curva rectificable se presenta más adelante.

Durante los años 1716, 1717 y 1720, Fagnano (*Giornale di Venezia*, tomos XXII, XXIV) desarrolla un interesantísimo trabajo tendiente a dividir la lemniscata (un caso particular de la casinoide) en arcos de igual longitud, cf. [8]. Este trabajo es uno de los elementos esenciales del Capítulo 4 de esta investigación. En relación con este logro, Euler (1750) establece la fórmula de recurrencia [2]

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{(n+1)dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

para la longitud de arco de la lemniscata, cf. [2]. El método de Euler también se puede aplicar para demostrar el teorema de Fagnano sobre las cónicas centrales, tal como se explica en Bellachi [2].

Si bien de menor importancia para este trabajo, vale la pena resaltar que en su "*A Treatise of Fluxions*" (1742), el geómetra inglés Maclaurin había encontrado varias expresiones para las longitudes de arco de la hipérbola y de la elipse. Dichas expresiones se obtienen al realizar diversos tratamientos algebraicos (sustituciones) a las longitudes de arco de dichas curvas[3].

De gran importancia para la teoría de las funciones elípticas del siglo siguiente (XIX), es el trabajo del matemático inglés John Landen(1719-1790). En una memoria aparecida en las *Philosophical Transactions of the Royal Society* (1771-1775), prueba que todo arco hiperbólico se puede escribir como una suma de dos arcos elípticos más una expresión algebraica, cf. Landen [14], Bellachi [2] y Solanilla [21].

2.2 Taxonomía de las integrales elípticas consideradas

Lejos de constituir una teoría coherente de las integrales elípticas, los desarrollos de la sección anterior constituyen todo un mosaico de ejemplos, técnicas y tipos de problemas. Con el fin de arrojar algo de luz sobre el asunto, a continuación se presentan estos aportes bajo la forma de una taxonomía de las curvas mencionadas. Para cada una de ellas se especifica definición, ecuación, construcción y propiedades principales.

---

[2] En el Capítulo 3 de este texto se presenta el trabajo realizado por Euler al respecto.

[3] Ver [2], [24]

Curva	Definición, construcción	Propiedades principales
Espiral parabólica	En una circunferencia de radio R y parámetro angular θ, la espiral parabólica es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia r al centro O satisface la relación $$(R-r)^2 = 2pR\theta,$$ donde p es una constante.	La longitud de arco s (desde el origen) posee simetra reflexiva con respecto a cierto eje y, por lo tanto, puede dividirse en dos arcos de igual longitud.
Parábola cónica	Es el lugar geométrico de los puntos en el plano que yacen a una misma distancia de una recta (directriz) que de un punto fijo (foco). Su ecuación cartesiana es $$x^2 = 2py.$$	Dado un arco de ella, existe un (otro) arco parabólico que guarda con el dado una razón $n : 1$. Esta construcción se puede hacer con regla y compás.
Curvas de Bernoulli	Satisfacen cierta condición de regularidad que se explica en el Capítulo 4.	Dada una de ellas (generatriz) en la forma (x, y), es posible construir otra curva (generada) mediante $X = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ y $Y = \frac{3x}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$ de tal suerte que la suma o diferencia de las longitudes de arco de las dos curvas es rectificable.

Cuadro 2.1: Análisis comparativo de la espiral parabólica, la parábola usual y las curvas de Bernoulli.

Curva	Definición, construcción	Propiedades principales
Lemniscata	Curva inversa de una hipérbola equilátera, caso particular de la casinoide. Es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuyo producto de las distancias a dos puntos fijos (focos) es constante. Su ecuación en coordenadas rectangulares es $$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$ para cierto valor constante a. En coordenadas polares está dada por $$r^2 = a^2\cos(2\theta).$$	La longitud de un arco en su primer cuadrante (tomado desde el centro) es igual a la suma de un arco elptico más uno hiperbólico, menos un segmento notable. La longitud de tal arco también es igual a la longitud de un arco del polinomio cúbico $\frac{1}{3}x^3$ menos un segmento notable. Un cuadrante de la lemniscata se puede dividir en dos, tres, cinco o 2^n arcos iguales. Dicha división se puede hacer solamente con regla y comps, tal como en el caso de la circunferencia.
Elipse	Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es constante y mayor que la distancia entre los puntos dados. Su ecuación en coordenadas cartesianas es $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$ donde a y b son sus semiejes, sin pérdida de generalidad $a > b$. Su excentricidad está dada por la expresión $e = c/a$, donde $$c^2 = a^2 - b^2.$$	A un arco sobre un cuadrante de la elipse (desde un semieje) le corresponde un arco inverso tal que su diferencia es rectificable. Los puntos que determinan estos arcos se pueden hacer colapsar. A un arco dado de ella, le corresponde un (otro) arco tal que la diferencia entre ellos es rectificable. Estas construcciones se pueden realizar también con regla y compás e involucran de forma decisiva a los segmentos notables.

Cuadro 2.2: Análisis comparativo de la lemniscata y la elipse.

Curva	Definición, construcción	Propiedades principales
Hipérbola	Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante. Su ecuación en coordenadas cartesianas es $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$ donde a y b son sus semiejes. En su estudio aparece con frecuencia la cantidad $c^2 = a^2 + b^2$. Si $a = b$ la hipérbola es equilátera. En este caso, su ecuación en coordenadas polares es $$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta},$$ donde θ es el ángulo que forma el radio vector r con el eje horizontal de referencia.	Sus arcos son rectificables por sumas o diferencias tal como en el caso de la elipse (Teorema de Fagnano). El segmento de la curva pedal, tomado desde el centro a una recta tangente a la hipérbola, coincide con la cuerda de la lemniscata Un arco hiperbólico es rectificable por una suma de dos arcos elípticos más una expresión algebraica (Teorema de Landen).

Cuadro 2.3: Análisis comparativo de la hipérbola.

La observación detenida y cuidadosa de los cuadros anteriores (en especial de la columna de propiedades) junto con el estudio de los originales y sus reinterpretaciones (Bernoulli [3], Fagnano [8], Landen [14], Euler [7], Bellachi [2]) conduce a agrupar los tipos de problemas considerados en las dos clases siguientes :

1. Dada una de estas curvas, se busca dividir su arco en partes proporcionales o en partes iguales;

2. Se persigue rectificar una curva por sumas y diferencias de arcos de otras curvas (o de la misma curva) más expresiones algebraicas. Este procedimiento se llamará cuasirectificación en la sección siguiente.

En todo momento es crucial preguntarse si estos problemas se pueden resolver con la única ayuda de una regla y un compás.

Los capítulos siguientes están organizados según esta clasificación y contienen una descripción sistemática y formal de las propiedades de las longitudes de arco de las curvas incluidas en la taxonomía de arriba. Sin embargo, antes de emprender este programa, presentaremos algunos conceptos básicos indispensables para la comprensión de lo que sigue.

2.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE PARTIDA

Las definiciones que se presentan en este trabajo son definiciones contemporáneas, o sea, de hoy. Así, una *curva* es una aplicación diferenciable $C : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ que va de un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$. A menudo se supondrá que la *velocidad* $C'(t)$ o primera derivada de esta aplicación es siempre distinta de cero con el fin de garantizar la existencia de una recta tangente (regularidad). Esta definición de curva es compatible con la definición de curva como lugar geométrico de puntos en el plano que satisfacen cierta relación algebraica en coordenadas cartesianas, polares o de otro tipo.

Por ser de utilidad para el estudio de los artículos de los siglos XVII y XVIII, consideraremos frecuentemente los *segmentos notables tangente, subtangente, normal y subnormal*, relacionados con las rectas tangente y normal en un punto de una curva parametrizada en coordenadas cartesianas rectangulares, cf. Pareja [17].

La *longitud de arco* de una curva parametrizada por medio de un parámetro t es tal como se presenta en los textos utilizados para la enseñanza del Cálculo, a saber

$$s(t) = \int_a^t \|C'(t)\|\, dt.$$

Es decir, se define a partir de la división de la curva en un número n de partes (pequeñas), luego se calculan las longitudes aproximadas (lineales) de las partes, se suman y, por último, se toma el límite $n \to \infty$ de tal suma, cf. Stewart [23].

Decimos que una curva es *rectificable* si su función longitud de arco se puede calcular como un número finito de operaciones algebraicas de campo (racionales). Así, una curva *no es rectificable* si su longitud de arco es trascendente. Diremos también que la curva es *cuasirectificable* si su longitud de arco se puede expresar como una suma o diferencia de longitudes de arco de otras curvas (rectificables o no) y expresiones algebraicas.

Para concluir estos conceptos básicos, definimos las *integrales elípticas* como las integrales de longitud de arco de la elipse, parábola, hipérbola, lemniscata y otras curvas no elementales que se estudiarán luego. Estas integrales no se pueden evaluar en términos de las funciones algebraicas, circulares (incluidas sus inversas), logarítmica o exponencial. Tales integrales se pueden siempre reescribir en la forma

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} dx,$$

donde $P(x)$ es una función racional de x y $R(x)$ es un polinomio de grado tercero o cuarto, cf.Kline [13].

2.4 Breve discusión sobre la circunferencia

La circunferencia unitaria es la curva $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$C(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) = (x, y),$$

que satisface claramente la relación cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ (identidad pitagórica). La longitud de arco de la circunferencia es ya una integral elíptica (trascendente) :

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Desde la antigedad griega se ha planteado el problema de dividir la circunferencia en partes iguales o, lo que es lo mismo, construir los polígonos regulares. En particular, es bien sabido que siempre es posible bisecar un ángulo pero que no siempre es posible trisecarlo con regla y compás griego.

La solución completa del problema fue dada por Gauss [4], quien estableció el siguiente, cf. Hadlock [12].

TEOREMA 2.4.1 *Si $n \geq 3$ es de la forma $2^k p_1 p_2 \cdots p_m$, donde los p_i son primos distintos de Fermat, entonces el polgono regular de n lados se puede construir con regla y compás.*

Por lo tanto, de una manera fácil se nota que dado un arco circular cualquiera en el primer cuadrante siempre es posible sumarle el arco complementario con lo cual se obtiene el arco de longitud igual a $\frac{\pi}{2}$, el cual se puede construir con regla y compás. El mismo razonamiento se puede repetir para cualquier otro arco construible. Esta maravillosa y sorprendente propiedad de la circunferencia es muy útil para comprender lo que sigue.

[4] *Disquisitiones Arithmeticae*, Art. 366 (1801).

Capítulo 3

División de curvas en partes proporcionales

De conformidad con lo dicho en el Capítulo 2, en este capítulo se tratarán algunos métodos para dividir los arcos de ciertas curvas elípticas en partes proporcionales o iguales. Estos métodos se deben a los hermanos Bernoulli (Jacob y Johan) y al Conde Giulio Carlo de Fagnano y se remontan a finales del siglo XVII y a principios del XVIII, respectivamente. Las curvas consideradas son la espiral parabólica, la parábola apoloniana o usual y la lemniscata. En el primer caso, Jacob Bernoulli[1] dividió la curva por la mitad usando la simetría de la longitud de arco de la curva. En el segundo caso, Johan Bernoulli[2] apeló a una ingeniosa construcción geométrica sobre una hipérbola para encontrar segmentos proporcionales en la parábola. En el tercer caso, Fagnano[3] utilizó un método más elaborado que precisa de la determinación de soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias que involucran el elemento de longitud de la lemniscata. Para la presentación, seguimos a menudo la reelaboración de Bellachi, [2].

3.1 La espiral parabólica

Es posible usar la simetría de la función longitud de arco de la espiral parabólica para dividir uno de sus arcos en dos partes iguales. La espiral parabólica se construye de forma

[1] *Acta Eruditorum* de 1679.
[2] *Actas de Lipzia* de 1698.
[3] *Giornale de'letterali d'Italia*, tomos XXII-XXXIV, 1716.

Figura 3.1: Construcción de la espiral parabólica.

similar a la parábola usual, cambiando una de las cantidades rectilíneas involucradas por un arco de circunferencia. En una circunferencia de radio R, denotando el parámetro angular por θ, la espiral parabólica es el lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia r al centro O (Figura 3.1) satisface la relación $(R-r)^2 = 2pR\theta$, para cierto parámetro constante p.

Para calcular la longitud del arco $\widehat{OA}$ en coordenadas polares usamos

$$l = \int \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr, \quad \theta(r) = \frac{(R-r)^2}{2pR}.$$

Así pues,

$$l(R) = \frac{1}{pR}\int_0^R \sqrt{p^2R^2 + r^2(R-r)^2}\, dr.$$

Para ver la simetría de esta integral hacemos el cambio de variable $\rho = r - \frac{R}{2}$. De este modo,

$$l(R) = \frac{1}{pR}\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \sqrt{p^2R^2 + \left(\rho + \frac{R}{2}\right)^2\left(\rho - \frac{R}{2}\right)^2}\, d\rho.$$

Es decir, el integrando es una función par cuando trasladamos el origen a $\frac{R}{2}$ (Figura 3.2).

Por lo tanto, al punto medio M de la espiral parabólica (para el cual $\widehat{OM} = \widehat{MA}$), le corresponde el radio $R/2$. En consecuencia, hemos obtenido el siguiente teorema (Figura 3.3).

Figura 3.2: Simetría de la longitud de arco de la espiral parabólica.

TEOREMA 3.1.1 *El punto medio de la espiral parabólica de Bernoulli*

$$\theta(r) = \frac{(R-r)^2}{2pR},\ r \in [0, R],$$

se puede determinar con regla y compás. Para ello basta encontrar el punto de intersección de la espiral parabólica con la circunferencia de radio $\frac{R}{2}$, concéntrica a la circunferencia generatriz de la misma espiral.

3.2 LA PARÁBOLA CÓNICA (USUAL)

En la referencia citada más arriba, Johan Bernoulli resolvió con éxito el problema de encontrar geométricamente dos arcos de parábola (apoloniana) que guarden entre sí la razón $n : 1$. En otras palabras, dado un arco parabólico $\widehat{BC}$, es posible encontrar otro $\widehat{MN}$ tal que $\widehat{BC} = n\widehat{MN}$. [4]

El razonamiento corre como sigue. Primero que todo, se traza un trapecio "mixtilíneo" $B'B''C'C''$ sobre una hipérbola equilátera, el eje de sus abscisas y las dos ordenadas (Figura 3.4). No es difícil comprobar que el área α de dicho trapecio, multiplicada por el parámetro

[4]Bellachi [2], pp. 2-4.

Figura 3.3: Bisección de la espiral parabólica.

p de la parábola es igual a la longitud del arco dado $\widehat{BC}$ de la misma parábola. En verdad,

$$\alpha \times p = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int \sqrt{x^2 + p^2}\, dx$$
$$= \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2} + \frac{p^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2+p^2}}{p} \right).$$

Si se toma como variable la proyección z del radio central OM' (Figura 3.4), las coordenadas del punto M' son $x = (z - \frac{a^2}{2})\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $y = (z + \frac{a^2}{2})\sqrt{\frac{1}{2}}$, donde $a = \frac{p}{\sqrt{2}}$. De este modo,

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(z^2 - \frac{a^2}{z^2}\right) + a^2 \ln\left(\frac{z}{a}\right).$$

Asimismo, si denotamos por b, c a los valores de z en los puntos B' y C' respectivamente, la diferencia entre las áreas formadas por los trapecios mixtilneos $C'OAC''$ y $B''OAB'$ arroja

$$\alpha = \frac{1}{4}(c^2 - b^2) + \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + a^2 \ln\left(\frac{c}{b}\right) = \widehat{BC} \times p.$$

Figura 3.4: División proporcional de la parábola cónica.

De manera similar, si u y v son las proyecciones de los radios OM',ON', se obtiene

$$\widehat{MN} \times p = \frac{v^2 - u^2}{4} + \frac{a}{4}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2}\right) + a^2 \ln\left(\frac{v}{u}\right).$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\widehat{BC} \pm \widehat{MN} = \frac{1}{p}&\left[\frac{1}{4}(c^2 - b^2) + \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right] \\ &\pm \left[\frac{1}{4}(v^2 - u^2)\right] + \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2}\right) + \frac{a^2}{p}\left[\ln\left(\frac{c}{b}\right) \pm \ln\left(\frac{u}{v}\right)\right].\end{aligned}$$

Con el fin de eliminar la parte logarítmica (o sea, $\ln(\frac{c}{b}) \pm \ln(\frac{v}{u}) = 0$), se pone $\frac{c}{b} = \frac{u}{v}$. Para lograr $\widehat{BC} = n\widehat{MN}$, se debe tener

$$\begin{aligned}&\frac{n}{4}(c^2 - b^2) + na^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + a^2\left(\frac{c}{b}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}(v^2 - u^2) + \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2}\right) + a^2 \ln\left(\frac{u}{v}\right).\end{aligned}$$

De nuevo, para anular la parte logarítmica o trascendente de la última expresión, se hace

$\frac{v}{u} = \frac{c^n}{b^n}$. Entonces,

$$u^4 c^{2n}(c^{2n} - b^{2n}) - n(c^2 - b^2)(b^{2n}c^{2n} + a^2 b^{2n-2})u^2 + a^2 b^{2n}(c^{2n} - b^{2n}) = 0.$$

Se llega así a una ecuación cuadrática, la cual se puede resolver para obtener los valores de u y, a la vez, los valores de v.

Con todo lo anterior, se ha establecido el siguiente resultado.

TEOREMA 3.2.1 *Dado un arco de la parábola apoloniana o cónica, se puede encontrar otro arco tal que ambos estén en razón* $1 : n$. *Esto se puede hacer mediante una construcción geométrica clásica, es decir, con regla y compás.*

3.3 LA LEMNISCATA

Los métodos de división de una curva presentados en las secciones anteriores dependen mucho de la curva misma. Todo parece indicar que es muy difícil usar razonamientos de simetría o inventar construcciones geométricas para dividir alguna porción de una curva dada en partes de igual longitud (o en partes proporcionales). Sin embargo, es posible intentar el método analítico de Fagnano [5] que se explica a continuación para abordar la solución del problema. El método se emprende siempre pero el éxito de su aplicación depende en la posibilidad de encontrar soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales. En el original de Fagnano [8], se habla de sustituciones integrales, lo cual es equivalente a plantear ecuaciones diferenciales, tal como el lector lo comprobará muy pronto. A continuación, se explica la manera como Fagnano pudo dividir la lemniscata en 2, 3, 5 y 2^k partes iguales. Las consecuencias de este trabajo para las Matemáticas han sido enormes. Fueron inspiración para la síntesis de Gauss [9] y Abel [1] y siguen suscitando nuevas indagaciones, cf. [18].

La lemniscata se puede construir de varias formas. Es, al mismo tiempo, la curva inversa de una hipérbola equilátera, un caso particular de la casinoide, cf. [2], y también el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Para los fines de este trabajo, se define la lemniscata como el conjunto de puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

[5] Véase el original [8] y las interpretaciones [2] y [22].

Figura 3.5: Gráfica de la lemniscata.

para cierta constante $a > 0$ (Figura 3.5). En coordenadas polares r, θ la lemniscata está dada por

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Para la división de la lemniscata conviene trabajar en coordenadas polares. De esta manera, su longitud de arco viene dada por

$$l(\rho) = \int_0^\rho \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - r^4}}\, dr.$$

Como nos ubicaremos siempre en el primer cuadrante, $\rho \in [0, a]$.

3.3.1 DIVISIÓN POR LA MITAD

Con miras a dividir tal cuadrante en dos partes iguales, salta a la vista (después de mirar el asunto con calma) que se debe considerar la relación diferencial

$$\frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = \frac{-a^2 ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

La forma diferencial de la izquierda (que depende de r) corresponde al arco directo $\widehat{OP}$, mientras que la de la derecha corresponde al arco inverso $\widehat{AP}$ (Figura 3.6). Desde una perspectiva más contemporánea conviene darse cuenta que la relación anterior no es sino

Figura 3.6: Arcos directo e inverso de la lemniscata.

la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{\sqrt{a^4 - s^4}},$$

cuya solución en forma de sustitución integral se presenta a continuación.

TEOREMA 3.3.1 *La sustitucin integral definida mediante la biyección*

$$s = a\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}}, r \in [0, a],$$

arroja

$$\int_0^\rho \frac{a^2\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = \int_a^\sigma \frac{a^2 ds}{\sqrt{a^4 - s^4}},$$

donde $\sigma = a\sqrt{\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2}}$. *Se sigue que el primer cuadrante de la lemniscata se puede dividir en dos partes iguales con regla y compás. En el punto medio el radio vector vale*

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1 + a^4} - 1}{a}}.$$

Prueba: Si se deriva a s con respecto a r se obtiene

$$ds = \frac{-2a^3 r dr}{(a^2 + r^2)\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Además,

$$\sqrt{a^4 - s^4} = \frac{2a^2 r}{a^2 + r^2}.$$

Luego,

$$ds = \frac{-\sqrt{a^4 - s^4}}{a^2} \frac{a^2\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Por consiguiente

$$\frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = \frac{-a^2\, ds}{\sqrt{a^4 - s^4}},$$

lo cual prueba que la función biyectiva propuesta satisface la ecuación diferencial requerida. Cuando se hace $r = s = a(\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2})$, se encuentra la cuerda o radio vector $r,\ r \leq a$, que divide el cuadrante en dos partes iguales, a saber :

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^4} - 1}{a}}.$$

Para el caso $a = 1$ se tiene $r = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. En otras palabras, el arco $\widehat{OP}$ tiene igual longitud que el arco $\widehat{AP}$ (Figura 3.6). Por lo tanto, el arco total $\widehat{OA}$ del primer cuadrante de la lemniscata queda dividido en dos arcos iguales. ■

3.3.2 División en tres partes iguales

La longitud de arco de un cuadrante de la lemniscata también se puede dividir en tres partes iguales[6] por un método parecido al de la división en dos partes. Partimos de las siguientes sustituciones.

LEMA 3.3.1 *Sea $g : (0, a) \mapsto (0, a)$ la biyección definida implícitamente por la relación*

$$s = g(r) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^4 - s^4}}{\sqrt{2}s} = a\frac{\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - r^4}}}{r}.$$

Entonces,

$$\int_0^R \frac{a^2\, dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = -2\int_S^a \frac{a^2\, ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

Prueba: De un lado, se pone

$$x = a\frac{\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - r^4}}}{r}$$

para obtener

$$r = \frac{a^2 x\sqrt{2}}{\sqrt{x^4 + a^4}}.$$

[6]Bellachi [2], p. 17.

Tras derivar la primera expresión se encuentra

$$\frac{rdx}{a^2x} = \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}$$

y sustituyendo el valor de r en la expresión última, resulta

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^4 + a^4}}\, dx = \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

De otro lado, haciendo

$$x = \frac{\sqrt{a^4 - s^4}}{\sqrt{2}s}$$

y derivando se logra

$$dx = \frac{-\sqrt{2}(a^4 + s^4)\, ds}{2s^2\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{\sqrt{a^4 + x^4}} = \frac{2s^2}{a^4 + s^4}$$

y de este modo

$$\frac{\sqrt{2}\, dx}{\sqrt{x^4 + a^4}} = \frac{-2(s^4 + a^4)2s^2\, ds}{2s^2\sqrt{a^4 - s^4}(s^4 + a^4)} = \frac{-2\, ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

Entonces,

$$\frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = \frac{-2ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}$$

e integrando se obtiene

$$\int_0^R \frac{a^2\, dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = 2\int_a^S \frac{a^2\, ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

■

En el caso en que $a = 1$, la relación integral se reduce a

$$\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} = -2\int_S^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}}.$$

LEMA 3.3.2 *La transformación biyectiva* $h : (0, a) \mapsto (0, a)$ *definida implícitamente por la relación*

$$s = h(r) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{a^4 - s^4}} = \frac{\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - r^4}}}{ar}$$

produce

$$\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = 2\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

Prueba: Tal como en la prueba anterior se hace

$$x = \frac{\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - s^4}}}{ar}$$

para obtener

$$\frac{r\,dx}{a^2 x} = \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Se toma ahora

$$x = \frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{a^4 - s^4}}$$

cuya diferencial es

$$dx = \frac{\sqrt{2}(a^4 + s^4)ds}{\sqrt{(a^4 - s^4)^3}}.$$

Además,

$$\frac{1}{\sqrt{a^4 + x^4}} = \frac{a^4 - s^4}{a^4 + s^4}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{x^4 + a^4}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}(a^4 + s^4)(a^4 - s^4)\,ds}{\sqrt{(a^4 - s^4)^3}\,(a^4 + s^4)} = \frac{2\,ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

Luego

$$\frac{1}{\sqrt{a^4 + x^4}} = \frac{2\,ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

Finalmente se integra para obtener

$$\int_0^R \frac{a^2\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = 2\int_0^S \frac{a^2\,ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

■

En particular, si $a = 1$ se tiene

$$\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} = 2\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}}.$$

Con ayuda de los lemas anteriores se puede encontrar un arco directo de la lemniscata que tiene una longitud igual a la mitad de la de su arco inverso.

TEOREMA 3.3.2 *La cuerda que corta el cuadrante de la lemniscata en una tercera parte del total de su longitud (comenzando desde el origen O hasta el extremo A) es construible con regla y compás y es la solución en $(0, a)$ de la ecuación*

$$\frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{a\sqrt{2}r} = \frac{\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - r^4}}}{r}.$$

Prueba: Despejando r de la ecuación de arriba se llega a

$$r^8 + 6a^4r^4 - 3a^8 = 0.$$

Ella se reduce a una ecuación cuadrática al hacer $r^4 = x$:

$$x^2 + 6a^4x - 3a^8 = 0.$$

La solución para x en el intervalo estipulado es $x = a^4(2\sqrt{3} - 3)$ y cambiando nuevamente x por r, se consigue

$$r = a\sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}.$$

Ya que r se obtiene como solución de una ecuación cuadrática, es construible con regla y compás. En el caso particular de $a = 1$, $r = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}$. ■

Para obtener la cuerda que divide Q en dos tercios de su longitud total se usa la fórmula de duplicación del arco dada por el Lema 3.3.2.

3.3.3 DIVISIÓN EN CINCO PARTES

La división del cuadrante Q de la lemniscata en cinco partes iguales [7] mediante el método de Fagnano se explica en el resultado siguiente.

TEOREMA 3.3.3 *La cuerda w que corta al cuadrante Q de la lemniscata en un quinto de su longitud total (tomado de O hacia A) se puede obtener usando solamente operaciones racionales y raíces cuadradas, esto es, mediante regla y compás.*

Prueba: Sea $R \in (0, a)$ la cuerda en el cuadrante Q de la lemniscata a la que corresponde al arco $\widehat{OP}$. Aplicamos una vez el cambio de variables del Lema 3.3.2, con el fin de obtener la cuerda S. Entonces se cumple que

$$\int_0^R \frac{a^2\, dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = 2\int_0^S \frac{a^2 ds}{\sqrt{a^4 - s^4}}.$$

[7] Bellachi [2], p. 18.

Figura 3.7: División de la lemniscata en cinco partes.

Ahora, a S se le aplica una vez la transformación del Lema 3.3.1, con lo que se obtiene la cuerda w del arco inverso $\widehat{TA}$ (Figura 3.7), es decir

$$2\int_0^S \frac{a^2 ds}{\sqrt{a^4 - s^4}} = 4\int_a^W \frac{a^2\, dw}{\sqrt{a^4 - w^4}} = 4 \times \mathrm{arco}(\widehat{\mathrm{AT}}).$$

Por lo tanto, el $\mathrm{arco}(\widehat{OP}) = 4 \times \mathrm{arco}(\widehat{AT})$. Haciendo que P y T colapsen en el punto V se tendrá

$$\mathrm{arco}(\widehat{AV}) = \frac{1}{5}\mathrm{arco}(\widehat{OA}),$$

donde el arco $\widehat{OA}$ es el cuadrante total Q de la lemniscata. El arco inverso de $\widehat{VA}$ se puede calcular mediante el Teorema 3.3.1.

En términos algebraicos, la longitud de la cuerda w se obtiene al solucionar la ecuación

$$\frac{\sqrt{a^4 - s^4}}{\sqrt{2}s} = a\frac{\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - w^4}}}{w},$$

donde $s = h(w)$. Luego se usa el Teorema 3.3.1 para invertir a w. ∎

Las cuerdas que dividen el cuadrante en dos quintos y cuatro quintos se obtienen con la fórmula de duplicación dada en el Lema 3.3.2. La cuerda correspondiente a tres quintos se puede obtener con la fórmula de adición de Euler que se explica más abajo.

3.3.4 División en potencias de dos

Para lograr esto, se aplica reiteradamente el Lema 3.3.2 a un arco dado r. Se obtienen así las cuerdas $w_1, w_2, \ldots$ de los arcos $r/2, r/4, r/8, \ldots$. Así pues, podemos dividir el cuadrante Q de la lemniscata en 2^k partes iguales para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Para los puntos intermedios $3r/4, 3r/8, \ldots$ se usa el resultado siguiente. Si r es la longitud total de Q, se logra la división deseada del cuadrante.

Figura 3.8: Método de adición de Euler.

3.3.5 FÓRMULA DE ADICIÓN DE EULER

El siguiente resultado es uno de los grandes logros de Euler (cf. Bellachi[2] y Kline[13]) sobre la longitud de arco de la lemniscata. Se trata de una fórmula de recurrencia (de inducción, si se quiere) que permite calcular el arco de longitud $(n+1)s$ dados los arcos de longitudes s y ns (Figura 3.8).

TEOREMA 3.3.4 *Si z y u son las cuerdas correspondientes a los arcos de longitud s y ns $(n = 1, 2, \ldots)$ respectivamente en el cuadrante Q. Entonces, la cuerda v que corresponde al arco de longitud del arco $(n+1)s$ es*

$$v = \frac{p+q}{1-pq},$$

donde $p = z\sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}}$, $q = u\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}$. Además, la cuerda w correspondiente al arco complementario a $(n+1)s$ es

$$w = \frac{p-q}{1+pq},$$

en donde $p = \sqrt{\frac{(1-z^2)(1-u^2)}{(1+z^2)(1+u^2)}}$, $q = uz$.

Prueba: Para la demostración del teorema se hace necesario verificar que

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = (n+1)\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Además, se debe usar la fórmula para el arco complementario dada por $z_1 = \sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}$, donde z_1 denota la cuerda del arco complementario $(q-s)$.

Seguidamente presentamos los pasos más importantes que se deben tener en cuenta para probar este hecho. Al derivar a v se obtiene por la regla del cociente

$$dv = \frac{(1+q^2)dp + (1+p^2)\,dq}{(1-pq)^2}.$$

También se verifica que

$$\sqrt{1-v^4} = \frac{\sqrt{[1-p^2-q^2+p^2q^2-4pq](1+p^2)(1+q^2)}}{(1-pq)^2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{\sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}}\,dp + \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}\,dq}{\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)-4pq}}.$$

Con el fin de expresar la última igualdad en términos de u y de z, se hacen las sustituciones respectivas de p, dp, q, dq. Realizando cuidadosamente todas las operaciones algebraicas necesarias y teniendo en cuenta que

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{ndz}{\sqrt{1-z^4}},$$

(hipótesis de inducción) se llega al resultado buscado

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \int \frac{(n+1)dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

■

CAPÍTULO 4

CUASIRECTIFICACIÓN

Con base en el plan trazado en el Capítulo 2, en esta última parte se estudian algunas formas de representar ciertos arcos de curvas elípticas en términos de otras curvas (acaso de ellas mismas) y de expresiones algebraicas, entendidas aquí como opuestas a las transcendentes. Los resultados geométricos y analíticos se organizan según la especie de la curva en tres grupos : curvas de Bernoulli, cónicas y lemniscata. Tal como en el Capítulo anterior, se ha seguido el orden cronológico de Bellachi [2], ajustándolo cuando ha sido necesario al ritmo de los originales disponibles de Bernoulli, Fagnano, Euler y J. Landen.

4.1 CURVAS DE BERNOULLI

En primer lugar definiremos la clase de curvas para las cuales se cumplen los resultados de esta sección. Una curva dada mediante un conjunto de pares ordenados (x, y), $x \in [a, b]$ y $y = y(x)$ dos veces diferenciable con respecto a x, se llama *curva de Bernoulli* [1] si satisface

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Notamos que esto se puede lograr si exigimos, por ejemplo, (entre otras posibles) las condiciones siguientes, cf. [3], [2] y [20],

1. El parámetro x es positivo;

2. La curva es cóncava (hacia abajo), es decir, $\frac{d^2y}{dx^2} \leq 0$;

[1] Esta nomenclatura es una propuesta original de esta investigación surgida del afán de entender el original de Bernoulli [3] y las interpretaciones [2] y [20].

3. La curva es creciente, o sea, $\frac{dy}{dx} \geq 0$;

4. $|3x\frac{d^2y}{dx^2}| \geq \frac{dy}{dx}$.

A partir de una curva de Bernoulli, se puede generar una nueva curva de coordenadas (X, Y) mediante las siguientes operaciones integro-diferenciales :

$$X = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

e

$$Y = \frac{3x}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{1}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

A la curva de Bernoulli original se le llama *generatriz* y a la otra, *generada*. El siguiente resultado ([3]) ha sido quizá el primero conocido sobre cuasirectificación y sorprende por su generalidad, elegancia y poder. Afirma y demuestra que siempre es posible rectificar una curva de Bernoulli por medio de la suma o resta de otra longitud de arco.

4.1.1 THEOREMA UNIVERSALE

TEOREMA 4.1.1 ***(Universal de Bernoulli)***[2] *Sea (x, y) una curva de Bernoulli y (X, Y) la curva generada por ella. Entonces,*

$$D \pm G = x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3,$$

donde D y ds son, respectivamente, la longitud y el elemento diferencial de la curva generatriz y G es la longitud de la curva generada. El signo $+$ ocurre en el caso en que $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \geq 0$, el signo menos corresponde al caso restante.

Prueba: Se parte de las siguientes expresiones :

$$\int\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\,dx + \int\sqrt{1 + \left[\frac{dY}{dX}\right]^2}\,dX = 2\phi(x), \tag{4.1.1}$$

[2] Bernoulli presenta el teorema sin demostración ya que ella se reduce a la verificación de la igualdad por las reglas usuales de la diferenciación junto con la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo. En este trabajo, se ha preferido adaptar la demostración más constructiva de Bellachi, [2] p. 4, que permite elucidar la noción de curva de Bernoulli.

$$\int \sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}dx - \int \sqrt{1+\left[\frac{dY}{dX}\right]^2}dX = 2\psi(x). \tag{4.1.2}$$

De las cuales se obtienen las siguientes tras derivación usual

$$\phi^{'}(x) + \psi^{'}(x) = \frac{ds}{dx},$$

$$\phi^{'}(x) - \psi^{'}(x) = \sqrt{\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dx}\right)^2}.$$

Al eliminar $\psi^{'}(x)$,

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = \left(2\phi^{'}(x) - \frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Con el fin de que la suma o la diferencia de longitudes de arco de las curvas generada y generatriz sea una cantidad algebraica, intentamos introducir una nueva función u de tal suerte que $\phi^{'}(x) = [\frac{ds}{dx}]u$ tenga una primitiva algebraica. Esto se puede lograr si definimos

$$u = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + 3x\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}\right].$$

En efecto,

$$2\varphi(x) = \int \left(\frac{d^2s}{dx^2} + 3x\frac{d^2s}{dx^2}\frac{d^2s}{dx^2}\,dx\right) = x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3,$$

lo que se puede comprobar fácilmente usando la regla para la derivada de un producto.

A continuación justificamos la construcción de la curva generada. De las ecuaciones anteriores se sigue claramente la siguiente ecuación diferencial con dos incognitas

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = (2u-1)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(2u-1)^2.$$

Para hallar (al menos) una de sus soluciones se hace

$$\frac{dY}{dx} = 2u - 1 = \frac{ds^2}{dx^2} - 1 + 3x\frac{ds}{dx}$$

y

$$\frac{dX}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)(2u-1).$$

La integración de este sistema de ecuaciones produce inmediatamente las coordenadas X, Y de la curva generada.

Para concluir, notamos que $\frac{dX}{dx}$ es no negativa cuando

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \geq 0$$

y no positiva en caso contrario. De aquí que en el primer caso se obtenga

$$D + G = x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3.$$

En el otro caso, se tiene $D - G$ en el lado izquierdo de esta igualdad. ■

A continuación se presenta un ejemplo de la aplicación de este teorema a las parábolas de la forma $ny = ax^n$ para $n \in \mathbf{Q}$ ($a = \frac{1}{p}$, donde $p > 0$ es la constante de la parábola). Primero se nota que estas curvas satisfacen de varias formas la condición de Bernoulli. Esto se verifica a partir de $\frac{dy}{dx} = ax^{n-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = a(n-1)x^{n-2}$. Las coordenadas de la curva generada son

$$X = a^3x^{3n-2} \quad \text{y} \quad Y = \frac{3n-2}{2n-1}a^{\frac{1}{2-3n}}X^{\frac{2n-1}{3n-2}}.$$

En particular, con $n = 2$ se tiene la parábola cónica $y = \frac{1}{2p}x^2$ que genera la parábola cúbica bicuadrada $Y = \frac{4}{3}p^{\frac{1}{4}}X^{\frac{3}{4}}$. Si se toma $n = \frac{1}{3}$ se tiene la parábola cúbica $y = 3(p^2x)^{\frac{1}{3}}$, que es al mismo tiempo generatriz y generada.

Las longitudes de arco D y G están dadas por

$$D = \int \sqrt{1 + a^2x^{2n-2}}\, dx \quad \text{y} \quad G = \int a^3(3n-2)\sqrt{1 + Ax^2}\, x^{3n-3}\, dx,$$

donde $A = \frac{1-3n}{3n-2}a^{\frac{2}{3n-2}}$. Al aplicar el Teorema Universal de Bernoulli para rectificar (digamos) la diferencia de las longitudes de dichas curvas, se encuentra que la diferencia de dichas integrales es fácilmente calculable como sigue

$$\int \sqrt{1 + a^2x^{2n-2}}\, dx - \int a^3(3n-2)\sqrt{1 + Ax^2}\, x^{3n-3}\, dx = a^3x^{3n-2} + C,$$

donde C es una constante de integración.

El Teorema de Bernoulli admite una hermosa interpretación geométrica en términos de los segmentos notables, cf. [17]. En verdad, la suma (o diferencia) de las longitudes de las curvas generada y generatriz es equivalente a la longitud de un segmento que yace sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas, cuya pendiente es igual al cubo del cociente entre la longitud del segmento tangente y el subtangente en el punto final del arco de la curva (Figura 4.1).

Figura 4.1: Geometría del Teorema Universal de Bernoulli.

4.2 ALGUNOS APORTES DE FAGNANO

Fagnano estudió detenidamente el artículo de Bernoulli, cf. [2] y [13], y se aplicó a la investigación del caso de las parábolas de la forma $y = \frac{2}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}$, con $m \in \mathbf{N}$. Notó que éstas son curvas de Bernoulli que se pueden rectificar por suma o diferencia de arcos de ellas mismas. El fundamento analítico del método de Fagnano, cf. Bellachi [2], yace en los dos lemas integrales siguientes.

LEMA 4.2.1 *La integral*

$$G \int x^{cm}(1 + x^m)^{\lambda-1}\, dx,$$

(donde G *es una constante real y* m, c, λ *son números racionales) se puede reescribir en la forma*

$$X + H \int (1 + x^m)^{\lambda-1}\, dx,$$

donde H *es otra constante real y* X *es una función algebraica de la forma*

$$X = (1 + x^m)(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \cdots).$$

Prueba: Se utiliza el método de los coeficientes indeterminados. Para ello, se parte de

$$X = (1 + x^m)(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \cdots),$$

donde a $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se les atribuye los valores de $1-m$,1, $1+m$, ..., términos de una progresión aritmética que se forma sumando m al término anterior. Así pues, se debe tener

$$X = G\int x^{cm}(1+x^m)^{\lambda-1}dx - H\int (1+x^m)^{\lambda-1}\,dx.$$

Al derivar, resulta por el Teorema Fundamental del Cálculo que

$$X' = Gx^{cm}(1+x^m)^{\lambda-1} - H(1+x^m)^{\lambda-1}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} X' &= (1+x^m)^{\lambda-1}[m\lambda x^{m-1}(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\cdots) \\ &\quad +(A\alpha x^{\alpha-1}+B\beta x^{\beta-1}+C\gamma x^{\gamma-1}+\cdots)(1+x^m)^{\lambda}]. \end{aligned}$$

Al igualar las X' y dividir por $(1+x^m)^{\lambda-1}$ se consigue que

$$\begin{aligned} Gx^{cm} - H &= Ax\alpha x^{\alpha-1}(1+x^m) + (Am\lambda x^{\alpha+m-1} + B\beta x^{\beta-1}(1+x^m) \\ &\quad +B\lambda m x^{\beta+m-1} + \cdots\ . \end{aligned}$$

Para finalizar, se ordena el segundo miembro de la última igualdad con respecto a x y se identifican los términos de las potencias iguales. En este proceso, se encuentran las cantidades G y H, así como los valores de $A, B, C, \ldots$. ■

El otro aporte de Fagnano en este tema es más interesante y se resume en el siguiente resultado.

LEMA 4.2.2 *Supongamos que x y z satisfacen cierta relación algebraica (sustitución), solución de la ecuación diferencial*

$$\frac{x^{cm}\,dx}{\sqrt{(1+x^m)^{\varepsilon}}} + \frac{z^{cm}\,dz}{\sqrt{(1+z^m)^{\varepsilon}}} = 0,$$

en la cual c y m son como en el Lema 4.2.1 y $\varepsilon = \pm 1$. Entonces, se verifica la siguiente relación integral

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^m)^{\varepsilon}}} + \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^m)^{\varepsilon}}} - (X+Z) = C,$$

para cierta constante real C; X y Z son funciones algebraicas de la forma dada en el Lema 4.2.1 y x_0, z_0 están relacionadas por la relación algebraica supuesta.

Prueba: Al integrar la ecuación diferencial de la hipótesis se llega a

$$\int_0^{x_0} \frac{x^{cm}\, dx}{\sqrt{(1+x^m)^{\varepsilon}}} + \int_0^{z_0} \frac{z^{cm}\, dz}{\sqrt{(1+z^m)^{\varepsilon}}} = C.$$

A cada una de las integrales de esta igualdad le aplicamos el Lema 4.2.1. De esta forma, se obtiene el resultado deseado. ■

Con la ayuda de estos lemas ya se puede enfrentar la demostración del Teorema de cuasirectificación de las "parábolas" de Fagnano, cf. [2].

TEOREMA 4.2.1 *Dado un arco $\widehat{AB}$ de una parábola de Fagnano (es decir, de una parábola de la forma $y = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}$, con $m \in N$), es siempre posible encontrar otro arco $\widehat{A'B'}$ de la misma curva tal que la diferencia entre las longitudes de dichos arcos es una cantidad algebraica. En otras palabras, las parábolas de Fagnano son rectificables mediante diferencias de arco de ellas mismas.*

Prueba: Mediante derivaciones elementales es fácil comprobar la validez de la siguiente identidad

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}} = \frac{m+2}{2}\int_0^{x_0} \sqrt{1+x^m}\, dx - \frac{2}{m} x\sqrt{1+x^m}\Big|_0^{x_0}.$$

Sea $OP = x_0$ la abscisa de un punto A en la parábola en cuestión, entonces $\int_0^{x_0} \sqrt{1+x^m}\, dx$ es la longitud del arco parabólico $\widehat{OA}$ y $x\sqrt{1+x^m}$ es la longitud del segmento de la tangente entre A (contacto) y el eje y (Figura 4.2). Es decir,

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}} = \frac{m+2}{m}\text{arco}(\widehat{OA}) - \frac{2}{m}\overline{TA}. \tag{4.2.3}$$

Si se toma otra abscisa $z_0 = OP'$ relacionada con x_0 mediante la relación algebraica del Lema 4.2.2 y A' es su punto correspondiente en la parábola, se tiene que

$$\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{1+z^m}} = \frac{m+2}{m}\text{arco}(\widehat{OA'}) - \frac{2}{m}\overline{T'A'}. \tag{4.2.4}$$

Sumando (4.2.3) y (4.2.4) resulta

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^m)}} + \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^m)}}$$
$$= \frac{m+2}{2}(\text{arco}(\widehat{OA}) + \text{arco}(\widehat{OA'})) - \frac{2}{m}(\overline{TA} + \overline{T'A'}).$$

Figura 4.2: Cuasirectificación de las parábolas de Fagnano 1.

El lado derecho es una constante C debido al Lema 4.2.2, o sea,

$$\frac{m+2}{2}(\mathrm{arco}(\widehat{OA}) + \mathrm{arco}(\widehat{OA'})) - \frac{2}{m}(\overline{TA} + \overline{T'A'}) = C.$$

Repitiendo el procedimiento en B, $B^{'}$ con abscisas $x_0^{'}, z_0^{'}$ y denotando los segmentos tangentes por BS y $B^{'}S^{'}$ (Figura 4.3), se llega a

$$\frac{m+2}{m}(\mathrm{arco}(\widehat{OB}) + \mathrm{arco}(\widehat{OB'}) - \frac{2}{m}(\overline{SB} + \overline{S'B'}) = C.$$

Finalmente, en vista de que la constante es única, se concluye

$$\mathrm{arco}(\widehat{AB}) - \mathrm{arco}(\widehat{A'B'}) = \frac{2}{m+2}(\overline{SB} + \overline{S'B'} - \overline{TA} - \overline{T'A'}).$$

Por consiguiente, la diferencia de dos arcos cualquiera de la parábola queda rectificada por medio de sumas y restas de segmentos algebraicos. ∎

En particular, si en $y = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}$ se hace $m = 6$, se obtiene la parábola bicuadrática $y = \frac{1}{4}x^4$ y si $m = 4$ se tiene la parábola cúbica $y = \frac{1}{3}x^3$. Ambas pueden ser rectificadas aplicando el Teorema 4.2.1.

Figura 4.3: Cuasirectificación de las parábolas de Fagnano 2.

4.3 SECCIONES CÓNICAS

4.3.1 ELIPSE E HIPÉRBOLA À LA EULER

No hay aquí lugar para hablar de los innumerables aportes de Euler al Cálculo Infinitesimal. Baste señalar que los resultados que se van a presentar a continuación eran ya conocidos por el Conde de Fagnano, cf. [2] p. 22 y siguientes, pero que por claridad y consistencia con el resto de este trabajo se ha preferido seguir a Euler. La verdad es que el tratamiento de las integrales elípticas en términos de ecuaciones diferenciales es más de la época de Euler, quien propone estudiar el tema ”por sus propios méritos”, sin relación con sus aplicaciones, cf. Kline [13].

Se parte de la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas rectangulares $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a y b denotan los semiejes mayor y menor respectivamente. Es un ejercicio fácil comprobar que su longitud de arco desde el punto $B(0, b)$ hasta un punto cualquiera $M(x_1, y_1)$ está dada por

$$\text{arco}(\widehat{BM}) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx,$$

donde $e = c/a$ es la excentricidad con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si se hace el cambio de variable $x = \sin\phi$, donde la amplitud ϕ de la integral es el ángulo que hace el segmento trazado

Figura 4.4: Amplitud de la longitud de arco de la elipse.

perpendicularmente desde el origen O hasta la recta tangente en el punto M (Figura 4.4) con el eje de las X, entonces

$$\operatorname{arco}(\widehat{BM}) = a \int_0^{\phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}\; d\phi.$$

Cuando $\phi = \frac{\pi}{2}$ se obtiene el cuadrante elíptico completo.

La noción siguiente es crucial para lo que sigue. Los puntos $M(x_1, y_1)$ y $M^{'}(x_2, y_2)$ de la elipse son *asociados o correspondientes* si sus abscisas son soluciones de la relación algebraica $e^2 x_1^2 x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = 0$.

TEOREMA 4.3.1 *Dados los puntos asociados M y $M^{'}$ de la elipse, se cumple que*

$$\operatorname{arco}(\widehat{BM}) + \operatorname{arco}(\widehat{BM'}) = ae^2 x_1 x_2 + C,$$

donde C es la constante de integración, igual a la longitud total del cuadrante elíptico.

Prueba: Como M y $M^{'}$ son puntos asociados, entonces se cumple que

$$e^2 x_1^2 x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = 0.$$

Al derivar, se obtiene

$$2e^2[x_1 dx_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 dx_2] = 2[x_1 dx_1 + x_2 dx_2].$$

Dividiendo ahora por el producto x_1x_2, resulta

$$e^2(x_2dx_1 + x_1dx_2) = \frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_1}.$$

La parte izquierda de la igualdad precedente es equivalente a $d(x_1x_2)$. Entonces,

$$e^2d(x_1x_2) = \frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_1}.$$

Por hipótesis $\frac{1}{x_2^2} = \frac{1-e^2x_1^2}{1-x_1^2}$ y como $e = \frac{c}{a}$, se llega a

$$d(\text{arco}(\widehat{BM}) + \text{arco}(\widehat{BM'})) = ae^2d(x_1x_2).$$

Finalmente, al integrar,

$$\text{arco}(\widehat{BM}) + \text{arco}(\widehat{BM'}) = ae^2x_1x_2 + C.$$

La constante de integración C es igual a la longitud del primer cuadrante de la elipse. En efecto, cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y por consiguiente, $\text{arco}(\widehat{BM}) = 0$ y $\text{arco}(\widehat{BM'}) = \text{arco}(\widehat{BMM'A})$. En breve, $\text{arco}(BMM'A) = C$. ■

COROLARIO 4.3.1.1 *A un arco directo $\widehat{BM}$ de la elipse le corresponde un arco inverso $\widehat{AM'}$ tal que la diferencia entre ellos es una expresión algebraica. Es decir, es rectificable y dada por*

$$\text{arco}(\widehat{BM}) - \text{arco}(\widehat{M'A}) = ae^2x_1x_2.$$

Prueba: Se sigue inmediatamente por Teorema 4.3.1. ■

COROLARIO 4.3.1.2 *Si los puntos M y M' se hacen coincidir (o colapsar), entonces el punto V donde colapsan yace en la elipse y tiene coordenadas*

$$\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}},\ b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

Además, V es construible con regla y compás y es tal que

$$\text{arco}(\widehat{BV}) - \text{arco}(\widehat{VA}) = a - b.$$

Prueba: Si M y $M^{'}$ coinciden en V, entonces por el Corolario 4.3.1.1 se tiene que

$$\text{arco}(\widehat{BV}) - \text{arco}(\widehat{VA}) = ae^2x_1^2.$$

Denotando con x_1 la raíz más pequeña real positiva de la ecuación

$$e^2x_1^4 - 2x_1^2 + 1 = 0,$$

se tiene que la abscisa y la ordenada del punto V son respectivamente

$$OV = a(x_1) = a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \quad \text{y} \quad VP = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Por lo tanto,

$$\text{arco}(\widehat{BV}) - \text{arco}(\widehat{VA}) = a - b.$$

Para construir el punto V, se considera el cuadrado de su distancia al origen, a saber :

$$\overline{OA}^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3}.$$

Nos damos entonces cuenta que basta describir un triángulo equilátero OAE sobre el semieje OA de la elipse (Figura 4.5), a la vez que sobre el lado AE se traza un segmento $AF = OB$ (OB es el semieje menor) y con el radio OF y centro O construir una circunferencia que cortará el cuadrante de la elipse en el punto V buscado, cf. Bellachi [2]. ■

En general, la rectificación de la diferencia de dos arcos elípticos se puede realizar de la siguiente forma.

TEOREMA 4.3.2 *A un arco $\widehat{MN}$ de la elipse con origen en un punto cualquiera M, le corresponde un segundo arco $\widehat{M'N'}$ tal que la diferencia entre ellos es algebraica, es decir, es rectificable y viene dada por la fórmula*

$$\text{arco}(\widehat{MN}) - \text{arco}(\widehat{M'N'}) = ae^2(x_1x_2 - x_0x_0^{'}).$$

Aquí x_1, x_2, x_0 y $x_0^{'}$ son las abscisas de los puntos $M, M^{'}, N$ y $N^{'}$ respectivamente.

Prueba: Sean las parejas de puntos asociados, $M, M^{'}$ con abscisas x_1, x_2 respectivamente, y $N, N^{'}$ con abscisas $ax_0, ax_0^{'}$. Por el Teorema 4.3.1 se tiene

$$\text{arco}(\widehat{BM}) + \text{arco}(\widehat{BM'}) = ae^2x_1x_2 + C \text{ y } \text{arco}(\widehat{BN}) + \text{arco}(\widehat{BN'}) = ae^2x_0x_0^{'} + C.$$

Figura 4.5: Construcción del punto V.

Ahora, restando ambas expresiones miembro a miembro, se obtiene

$$\text{arco}(\widehat{MN}) - \text{arco}(\widehat{M'N'}) = ae^2(x_1x_2 - x_0x_0^{'}).$$

■

Hay otro resultado importante de Euler sobre la rectificación por diferencias de arcos, cuya demostración descansa en el lema siguiente.

LEMA 4.3.1 *La longitud del segmento normal $P^{'}$ trazado desde el origen a la recta tangente a la elipse en el punto $M(x^{'}, y^{'})$ vale*

$$P^{'} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}.$$

Prueba: Sea $M(x^{'}, y^{'})$ un punto sobre la elipse con $x^{'} = a \sin \phi$, $y^{'} = b \cos \phi$. Al derivar implcitamente la ecuación de la elipse se halla que la pendiente de la tangente es $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{a^2 y}$. La ecuación de dicha recta tangente es, pues,

$$\frac{xx^{'}}{a^2} + \frac{yy^{'}}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{es decir,} \quad bx \sin \phi + ay \cos \phi = ab.$$

Ahora bien, la ecuación de la recta normal que contiene al segmento $P^{'}$ es $y = \frac{a}{b}(\cot \phi)(x)$ y el punto de intersección entre la recta normal y la tangente tiene coordenadas

$$x = \frac{ab^2 \sin^2 \phi}{b^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi}, \quad y = \frac{a^2 b \cos^2 \phi}{b^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi}.$$

Por el Teorema de Pitágoras,

$$P^{'} = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}.$$

■

El resultado de cuasirectificación que finalmente nos interesa es el siguiente.

TEOREMA 4.3.3 *Es posible encontrar dos puntos M y $M^{'}$ sobre la elipse que satisfacen la relación*

$$\text{arco}(\widehat{BM}) - \text{arco}(\widehat{AM'}) = \mu,$$

donde μ es la longitud de la proyección ortogonal del semidiámetro OM sobre la recta tangente a M.

Prueba: Sean $M(x_1, y_1)$ y $M'(x_2, y_2)$ puntos asociados de la elipse. Entonces, por el Corolario 4.3.1.1, se tiene

$$\operatorname{arco}(\widehat{BM}) - \operatorname{arco}(\widehat{M'A}) = ae^2x_1x_2.$$

Es fácil comprobar (Figura 4.6) que

$$\mu = \sqrt{\overline{OM}^2 - P'^2} = \frac{ec\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}} = ae^2x_1x_2.$$

En verdad, $\overline{OM} = \sqrt{b^2 + c^2\sin^2\phi}$ produce la igualdad buscada.

De otro lado, por ser M y M' asociados, se cumple que

$$\frac{1 - e^2x_1^2}{1 - x_1^2} = \frac{1}{x_2^2} \quad \text{y} \quad x_2 = \sqrt{\frac{1 - x_1^2}{1 - e^2x_1^2}}.$$

Haciendo $x_1 = \sin\phi$ y teniendo en cuenta que $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$, se obtiene que

$$x_2 = \sqrt{\frac{1 - \sin^2\phi}{1 - e^2\sin^2\phi}} = \frac{\cos\phi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}}.$$

Finalmente,

$$ae^2x_1x_2 = cex_1x_2 = \frac{ec\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}} = \mu.$$

A la misma conclusión se llega mediante la proyección del semidimetro OM' sobre la recta tangente en el punto M'. Los puntos M y M' se hallan al revolver la ecuación

$$\frac{c^2e^2\sin^2\phi\cos^2\phi}{1 - e^2\sin^2\phi} = \mu^2$$

con respecto a ϕ. ■

Con un procedimiento análogo al desarrollado para cuasirectificar la elipse, se pueden rectificar sumas de arcos en la hipérbola descrita por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. La diferencial de arco s, tomada desde el vértice A del eje transverso hasta el punto $M(x, y)$ (Figura 4.7) está dada por la expresión

$$ds = \sqrt{\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx,$$

Figura 4.6: Segmento normal del origen a la tangente.

Figura 4.7: Cuasirectificación de la hipérbola.

donde a y b son los semiejes, $e = \frac{c}{a}$ y $c^2 = a^2 + b^2$. Esta vez, diremos que dos puntos (de la hipérbola) son asociados o correspondientes si se cumple la relación

$$e^2 x_1^2 x_2^2 - e^2(x_1^2 + x_2^2) + 1 = 0$$

entre sus abscisas x_1, x_2.

TEOREMA 4.3.4 *Dados los puntos asociados M y $M^{'}$ de la hipérbola, entonces*

$$\mathrm{arco}(\widehat{AM}) + \mathrm{arco}(\widehat{AM'}) = ex_1x_2 + C,$$

donde C es la constante de integración, igual a $C = 2\mathrm{arco}(\widehat{AH})/(c+b)$.

Prueba: Los cambios de variable $x = ax_1, x = ax_2$ conducen a

$$ds = a\sqrt{\frac{e^2x_1^2 - 1}{x_1^2 - 1}}dx_1, \quad \text{y} \quad ds^{'} = a\sqrt{\frac{e^2x_2^2 - 1}{x_2^2 - 1}}\,dx_2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d(s + s^{'}) &= d(\mathrm{arco}(\widehat{AM}) + \mathrm{arco}(\widehat{AM'})) \\ &= a\left(\sqrt{\frac{e^2x_1^2 - 1}{x_1^2 - 1}}\,dx_1 + \sqrt{\frac{e^2x_2^2 - 1}{x_2^2 - 1}}\,dx_2\right). \end{aligned}$$

Como M y $M^{'}$ son puntos asociados,

$$ex_1 = \sqrt{\frac{e^2x_2^2 - 1}{x_2^2 - 1}} \quad \text{y} \quad ex_2 = \sqrt{\frac{e^2x_1^2 - 1}{x_1^2 - 1}}.$$

Así que, $d(\mathrm{arco}(\widehat{AM}) + \mathrm{arco}(\widehat{AM'})) = ae(x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2) = ae\,d(x_1x_2)$. Usando $e = \frac{c}{a}$ e integrando, se tiene

$$\mathrm{arco}(\widehat{AM}) + \mathrm{arco}(\widehat{AM'}) = cx_1x_2 + C,$$

donde C es la constante de integración. Ella se encuentra haciendo colapsar los puntos asociados M y $M^{'}$. En tal caso $x_1 = x_2 = x$ y las soluciones de $e^2x^2 - 2e^2x + 1 = 0$ son

$$x = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 1}}{e} = 1 \pm \frac{b}{c}.$$

Al considerar la raíz $x = 1 + \frac{b}{c}$ se obtiene $x_1 = \sqrt{1 + \frac{b}{c}}$. Por el Teorema 4.3.4 con $x_1 = x_2$ se consigue $2\mathrm{arco}(\widehat{AH}) = cx_1^2 + C$, de donde

$$C = \frac{2\mathrm{arco}(\widehat{AH})}{c + b}.$$

■

4.3.2 TEOREMA DE LANDEN

Hay otro teorema importante de cuasirectificación descubierto por el matemático británico John Landen (1719-1790), cf. Landen [14], Bellachi [2] y [21]. Se trata de un resultado mucho más intrincado. Hoy en día se prueba a la luz de los logros posteriores de Jacobi [3] y Legendre [4]. El esbozo de demostración que se presenta a continuación utiliza la Fórmula de Wallis y un teorema de Euler sobre productos de integrales.

El resultado de Wallis[5] data de los albores del Cálculo y contiene una forma interesante de aproximar el valor de π.

LEMA 4.3.2 ***(Fórmula de Wallis)***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 2\times 4\times 4\times 6\times 6\cdots(2n)(2n)}{1\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

O, en otra notación,

$$\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Prueba: Sólo se presenta un bosquejo general de la demostración. Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Se procede por inducción e interpolación. Primero se computan

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1)(\pi)}{(2n)(2n-2)\cdots(4)(2)(2)} \quad \text{y} \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\cdots(4)(2)}{(2n+1)(2n-1)\cdots(5)(3)}.$$

También se pueden verificar los acotamientos siguientes.

$$\frac{2n}{2n+1}I_{2n} < \frac{2n}{2n+1}(I_{2n-1}) = I_{2n+1} < I_{2n}.$$

Así pues, $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$. Por lo tanto, el producto infinito converge al valor señalado. ∎

El lema de Euler que se presenta ahora descansa en la teoría de productos infinitos desarrollada por el mismo autor, cf. Euler [7]. Para su demostración, se remite el lector a este original o al artículo reciente [19].

---

[3]C. G. J. Jacobi investigó las funciones elípticas a partir de 1826.

[4]Realizó importantes contribuciones a las integrales elípticas. Entre ellas sobresale su clasificación en tres tipos o especies, cf. Kline[13].

[5](1616-1703), en su *Algebra* aceptó los números irracionales como números en el pleno sentido de la palabra.

LEMA 4.3.3 *[Euler]*

$$\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right] \times \left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2}}\right] = \frac{\pi}{4}.$$

El Teorema de Landen establece una relación algebraica no trivial entre las longitudes de arco de una hipérbola, una elipse y una circunferencia. Veamos.

TEOREMA 4.3.5 ***(Teorema de Landen)*** *Sea* $h(t) = \sqrt{t^2-1},\ t \geq 1,$ *la parte superior de la rama derecha de la hipérbola equiltera de semieje unitario y* s_h *su longitud de arco a partir del vértice. Sea* $e(t) = \sqrt{2(1-t^2)}$, $|t| \leq 1$, *la parte superior de la elipse correspondiente y* s_e *la función longitud de arco desde el vértice superior. Escribamos* $s_c(1) = \frac{\pi}{2}$ *para la longitud de un cuadrante de la circunferencia unitaria. Entonces,*

$$s_h\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{(s_e(1))^2 - 4s_c(1)} - s_e(1).$$

Prueba: La longitud de arco de la hipérbola está dada por la función

$$s_h(x) = \int_1^x \sqrt{\frac{2t^2-1}{t^2-1}}dt.$$

Para nuestro propósito conviene sumar a esta función un término algebraico. Este término ya había sido tenido en cuenta por D'Alambert y Maclaurin, antes que Landen[6]. En concreto, se considera

$$f_h(x) = 2x\sqrt{\frac{x^2-1}{2x^2-1}} - s_h(x).$$

La sustitución integral $z = \frac{1}{2x^2-1}$ transforma la anterior función $f_h(x)$ en la siguiente

$$F_h(z) = \frac{1}{2}\int_z^1 \sqrt{\frac{t}{1-t^2}}\,dt,$$

la cual es mucho más simple que la anterior. El principal aporte de Landen consistió en tomar la suma

$$F_h(z) + F_h(y),$$

donde y, z están relacionadas mediante la función racional $z = \frac{1-y}{1+y}$. Ésta es una involución en el intervalo $[-1,1]$ con punto fijo $z^* = \sqrt{2}-1$.

[6]Cf. las referencias hechas en el original de Landen [14].

Con esto, se obtiene que

$$F_h(z) + F_h(y) = g_e(z) - g_e(1) + L, \tag{4.3.5}$$

donde $g_e(z) = \sqrt{\frac{z(1-Z)}{(1+Z)}}$ y L es una constante (que en virtud de la fórmula de Wallis es) igual a

$$L = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})}.$$

El símbolo Γ se reserva para la función gamma. El problema de cuasirectificación está casi resuelto. Para finalizar, hacemos $z = y = z^*$ y nos damos cuenta que $g_e(1) = 0$. Además, L se puede expresar algebraicamente en términos de arcos de elipse. Para ver esto, definimos la integral complementaria

$$M = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}.$$

Un cómputo sencillo demuestra que $L + M = s_e(1)$. Por otro lado, el Lema 4.3.3 garantiza que $L \times M = \frac{\pi}{4}$. Al resolver L de este sistema de ecuaciones se halla que

$$L = \frac{1}{2}(s_e(1) - \sqrt{s_e(1) - \sqrt{(s_e(1))^2 - \pi}}).$$

Por último, se realizan los reemplazos en (4.3.5) para obtener el resultado buscado. ■

4.4 LEMNISCATA

A fin de cuasirectificar la longitud de arco de la lemniscata en términos de la adición o diferencia de las longitudes de arco de otras curvas como la elipse, la hipérbola, el polinomio cúbico y algunos importantes segmentos de recta, se presentan los siguientes resultados obtenidos por el Conde de Fagnano, cf. Bellachi[2], también [22]. Se remite el lector a los Capítulos 2 y 3 para las definiciones y propiedades básicas de esta curva. Los resultados aquí presentados se organizan en un vaivén de Lemas y Teoremas, muy al estilo del noble italiano.

LEMA 4.4.1 *Sea $z \in [0, a)$, entonces la sustitución*

$$t = a\sqrt{\frac{a^2 + z^2}{a^2 - z^2}}$$

produce

$$\int_0^z \frac{a^2dz}{\sqrt{a^4-z^4}} = \int_0^Z \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz + \int_1^T \frac{t^2dt}{\sqrt{t^4-a^4}} - ZT,$$

donde $T = a\frac{\sqrt{a^2+Z^2}}{\sqrt{a^2-Z^2}}$.

Prueba: Derivando a t con respecto a z, resulta

$$dt = \frac{2a^3z\,dz}{(a^2-z^2)(\sqrt{a^4-z^4})}.$$

Además, un simple procedimiento algebraico arroja que

$$\sqrt{t^4-a^4} = \frac{2a^3z}{a^2-z^2} \quad \text{y así,} \quad a^2-z^2 = \frac{2a^3z}{\sqrt{t^4-a^4}}.$$

Entonces,

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^4-a^4}}\,dt = \frac{a^2(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}dz.$$

De otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{a^2\,dz}{\sqrt{a^4-z^4}} - \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}dz + \frac{z}{a}\,dt + \frac{t}{a}\,dz \\ = \frac{a^2dz}{\sqrt{a^4-z^4}} + \frac{2a^2z^2\,dz}{(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = \frac{a^2(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{(a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

De esta manera se concluye la prueba. ■

La expresión obtenida con la sustitución del Lema anterior tiene la siguiente interpretación geométrica. El término de la izquierda equivale a la longitud de arco (en coordenadas polares) de la lemniscata tomada desde el origen O hasta un punto cualquiera P. El lado derecho está formado por tres términos que equivalen, en su orden, a la longitudes de arco de una porción de elipse, de una porción de hipérbola y de un segmento (Figura 4.8). Esta interpretación geométrica se precisa en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4.1 *La longitud de un arco* $\widehat{OP}$ *de la lemniscata*

$$L = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 = a^2\sqrt{x^2-y^2}\}$$

Figura 4.8: Una cuasirectificación de la lemniscata.

se puede representar como la suma de la longitud de un arco $\widehat{AB}$ *de una elipse de semiejes 1,* $\sqrt{2}$ *con un arco* $\widehat{CE}$ *de la hipérbola equilátera de semieje unitario, menos el segmento* DE *de la línea tangente en* D *de la hipérbola hasta el eje* x*. Es decir,*

$$\text{arco}(\widehat{OP}) = \text{arco}(\widehat{AB}) + \text{arco}(\widehat{CE}) - \text{seg}(DE),$$

Prueba: Basta dar al Lema 4.4.1 la interpretación de más arriba (Figura 4.8). En particular, para calcular la longitud de arco de la hipérbola equiltera $x^2 - y^2 = a^2$, se hace $x = t\cos\theta$ e $y = t\sin\theta$. Con esto, se halla el elemento de arco en coordenadas polares mediante la fórmula

$$ds = \sqrt{1 + \left(t\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt.$$

As se logra la expresión en el lema anterior. ∎

Otra forma de cuasirectificar la lemniscata debida a Fagnano, cf. [2] y [22], se explica a continuación.

LEMA 4.4.2 *La sustitución*

$$x = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - z^4}}}{z}$$

produce

$$\int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int_0^X \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\int_0^X \sqrt{1+x^4}\,dx - \frac{\sqrt{2}}{2}x\sqrt{1+x^4}\Big|_0^X,$$

donde $X = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-Z^4}}}{Z}$.

Prueba: Diferenciando a x y realizando simplificaciones se llega a

$$dx = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}}{z^2\sqrt{1-z^4}}\,dz.$$

Además,

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}}{z^2}.$$

Si se dividen las dos últimas expresiones se obtiene

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Para terminar la prueba se debe verificar que

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3}{2}\int_0^X \sqrt{1+x^4}\,dx - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^4}\Big|_0^X$$

Para ello se utiliza la identidad propuesta en la demostración del Teorema 4.2.1,

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}} = \frac{m+2}{2}\int_0^{x_0} \sqrt{1+x^m}\,dx - \frac{2}{m}x\sqrt{1+x^m},$$

y la ecuación del polinomio cúbico $y = \frac{1}{3}x^3$. Entonces, $\frac{2}{m+2} = \frac{1}{3}$ y $m = 4$. ■

El Lema anterior se interpreta geométricamente como sigue. El lado izquierdo es el arco de la lemniscata, tomado desde el origen O hasta un punto P. Los términos correspondientes al lado derecho son, respectivamente, las longitudes de un arco del polinomio cúbico (tomado desde cierto punto E hasta cierto punto F) y la longitud del segmento notable tangente $\overline{FG}$ (Figura 4.9). Esta interpretación geométrica se deja resumir en un teorema.

TEOREMA 4.4.2 *El arco $\widehat{OP}$ de la lemniscata se puede calcular por la fórmula*

$$\text{arco}(\widehat{OP}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{arco}(\widehat{EF}) - \text{seg}(FG)),$$

donde EF es un arco del polinomio cúbico $y = \frac{1}{3}x^3$ y FG es el segmento notable tangente del polinomio cúbico en F, que va hasta el punto G sobre el eje x.

Figura 4.9: Otra cuasirectificación de la lemniscata.

CONCLUSIONES

El concepto de integral elíptica emerge entre las tensiones del problema de calcular la longitud de arco de ciertas curvas en los albores del Cálculo Infinitesimal. No se trataba entonces, ni se trata hoy en día, tanto de delimitar el concepto como de elucidar propiedades de las integrales que ayuden a calcular su valor. Los métodos usados para buscar dichas propiedades han sido variados y dependientes de la “ideología matemática” de cada época. A continuación se describen las metodologías estudiadas en este trabajo en el marco de su contexto histórico.

GEOMETRÍA INFINITESIMAL DE LOS HERMANOS BERNOULLI

Geometría no es dibujar. Desde el periodo helenista de la historia griega es claro para la tradición occidental que los dibujos son una mera ayuda para las demostraciones. Sin embargo, las construcciones geométricas fueron esenciales (y siguen siendo, en buena medida, importantes) para la Geometría. Los matices y el papel que tales construcciones han desempeñado a lo largo de los siglos debe explicarse en el detalle de cada circunstancia histórica particular.

El método axiomático en que Euclides desarrolla sus Elementos no es sino uno de los ingredientes de las Matemáticas de los Bernoulli. Hay que reconocer también la influencia decisiva del *al-jabr* o álgebra del Islam medieval que llegara a ellos muy seguramente a través de la Geometría de Descartes. A esto hay que agregar la invención del Cálculo en el siglo XVII. Estos tres elementos (euclidiano, cartesiano y leibniziano) se ubican en el corazón mismo del trabajo de los hermanos Bernoulli sobre las integrales elípticas.

Esto es patente en Bernoulli [3]. La mayor parte de este artículo está dedicada a una construcción geométrica con regla y compás que muestre la validez del Teorema Universal. Pareciera que el Cálculo es una simple herramienta de la Geometría. Los métodos empleados son, sin duda alguna, los de Newton o Leibnitz. Sin embargo, la intención del artículo está más cerca de la Geometría Analítica de Descartes. Para J. Bernoulli, es imprescindible trazar sobre una gráfica el segmento cuya longitud iguala (léase cuasirectifica) la diferencia de las integrales. Lo mismo se aplica a los trabajos anteriores de su hermano sobre la espiral parabólica y la parábola apoloniana.

Método analítico de Fagnano y Euler

El Conde de Fagnano libera el estudio de las integrales elípticas de la construcción geométrica. Para él, como lo va a ser después para Euler, cada propiedad de una integral elíptica debe ser reformulada como una relación diferencial en términos del elemento de longitud de la curva estudiada. Hoy en día, tal relación se llama ecuación diferencial. La resolución de dicha ecuación lleva consigo la solución al problema de la propiedad estudiada. Solamente al final, la solución de la ecuación diferencial permite decidir si la construcción se puede hacer con regla y compás. Fagnano y Euler están más cerca de Gauss y de nosotros que de Euclides o Apolonio. Ya casi que ellos entienden que "regla" significa operaciones de cuerpo y que "compás" quiere decir extracción de raíces cuadradas, cf. [12].

Como ejemplos de este proceder analítico que prescinde en casi todo del dibujo, podemos citar el *Método per misurare la lemniscata* de Fagnano [8] y la cuasirectificación de las cónicas centrales de Euler, que hemos conocido por Bellachi [2]. No sobra decir que el problema de cuasirectificación (Capítulo 4) es más complejo que el de dividir una curva en partes proporcionales o iguales (Capítulo 3). El asunto crucial es que las ecuaciones diferenciales que se plantean en este último caso son más sencillas, mientras que en las primeras está permitido admitir siempre un término algebraico.

Teoría de Galois

Aún cuando en este trabajo no se estudió el devenir de las integrales elípticas en funciones elípticas durante el siglo XIX, se cree conveniente mencionar algunas palabras al respecto con el fin de completar el panorama histórico. Gracias a las investigaciones de Gauss, Galois y Abel, principalmente, la división de la circunferencia y de la lemniscata en partes iguales hacen hoy parte del Álgebra, en particular, de la Teoría de las Extensiones de los Cuerpos. Esto significa, ni más ni menos, que existe una importante vena de integrales elípticas en el surgimiento de lo que hoy se conoce como Teoría de Galois. Esto constituye uno de los hallazgos más significativos de este trabajo, que podría sin duda ser objeto de investigaciones posteriores. Desde otra perspectiva, lo anterior implica también la existencia de métodos aún más abstractos y menos geométricos para estudiar las integrales elípticas.

Con base en lo anterior, a continuación se esbozan unas últimas reflexiones, que apuntan hacia las ventajas que el estudio de la Historia de las Integrales Elípticas reporta a su Enseñanza.

LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS INTEGRALES ELÍPTICAS

- Sobre la *génesis del concepto y su devenir*, la Historia indica que no hay tal cosa como un concepto absoluto de integral elíptica. Lo que existe es una serie de conceptos relacionados en el tiempo que tienen que ver con problemas similares o parecidos pero que son enfrentados mediante visiones de las Matemáticas y metodologías diferentes. Por ejemplo, los problemas de división de curvas que estudiaron Jacob Bernoulli y Leonhard Euler son parecidos, pero los métodos de solución y su visión del Análisis son muy distintos. Este hecho debe ser tenido en cuenta al planear la enseñanza. La visión histórica abre al profesor la posibilidad de elegir entre distintos conceptos y formas de tratar los temas que pueden acomodarse mejor o peor al nivel de formación de sus estudiantes, a los objetivos del curso, al tiempo de que dispone, entre otras posibles circunstancias.

- Si aceptamos dar el nombre de *obstáculo epistemológico* a un conjunto de creencias y métodos de trabajo matemáticos que nublan la vista e impiden ver nuevos horizontes, entonces lo dicho más arriba puede ayudar a detectar cierto tipo de problemas que, como profesores o estudiantes, enfrentamos al estudiar las integrales elípticas. En concreto, el dominio de la Geometría Analítica puede interferir con el aprendizaje del Cálculo. Si, como sucede con frecuencia, un estudiante de primeros semestres se obstina en apelar a las construcciones geométricas familiares para dar solución a los problemas de longitud de arco, entonces no cabe duda de que va a tener dificultades para resolver problemas cuya respuesta se ha de buscar por métodos puramente analíticos. En el nivel siguiente de abstracción, la familiaridad con las ecuaciones diferenciales podría afectar el aprendizaje de los métodos del Álgebra Abstracta.

- Quizá, la mayor dificultad para precisar la relación de la Historia y la Enseñanza repose del lado de la *transposición didáctica*. Lo más seguro es que no hay leyes exactas que normen la forma como el saber sabio del matemático se deba trasladar o traducir a un saber para enseñar. Por un lado, tal transposición depende de las experiencias y de los conocimientos del profesor. Por el otro (acaso más importante y esencial), las Matemáticas se aprenden siempre a través de un proceso interpretativo, hermenéutico si se quiere. Por esta última razón, la creación de un universo de sentido (que es lo que busca la transposición didáctica) es siempre susceptible de generar sentidos nuevos, que no se corresponden con el sentido que planea el profesor. Esta dificultad, que se deriva del estatuto epistemológico mismo de las Matemáticas, no es un aspecto negativo. Por el contrario, se trata del ímpetu que crea la disciplina.

- Esta tesis de maestría presenta una transposición e interpretación personales de algunos aspectos de la Historia de las Integrales Elípticas durante los siglos XVII y XVIII. Ella refleja a todas luces la visión, la ideología y los conocimientos matemáticos de su autora y, de algún modo, los de su director, de otros profesores y estudiantes que han participado en la investigación y hasta del "espíritu de los tiempos". Si a la autora le fuese concedido enseñar el tema, sin dudarlo siquiera se dejaría guiar por la luz del faro de todo lo que aquí se ha defendido y predicado.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Abel, N. H., Recherches sur les fonctions élliptiques, *Oeuvres Complètes*, Nouvelle Édition, Oslo, 1881.

[2] Bellachi, G., *Introduzione storica alla teoria delle funzione ellittiche*, Barberà, Firenze, 1894.

[3] Bernoulli, J., Theorema universale rectifcationi Linearum Curvarum inserviens. Nova Parabolarum propietas. Cubicalis primaria arcum mensura, $\cdots$ *Opera Omnia I*, p. 249-254, Georg Olms Verlagbuchhandlung, Hildesheim, 1968. Traducción inglesa : Universal theorem useful for the rectifcation of curves, by J. L. Nowalski, N. G. Roa and L. Solanilla, preprint, 1999.

[4] Brousseau, G., Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7** (1986), no. 2, 33–115.

[5] Chevallard, Yves.,*La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Francia, 1991.

[6] Enneper, A., *Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte*, Verlag von Louis Nebert, Halle A. S., 1890.

[7] Euler, L., De miris propietatibus curvae elasticae sub aequatione $\int xx/\sqrt{1-x^4}$ contentae. Comment 605 Enestroemianus Index. *Acta Academia Scientiarum Petrop.*, 1782 : II (1786), 34-61. Reimpreso en *Opera Omnia I*, serie 1, 21, 91-118. Traducción inglesa : The remarkable properties of the elastic curve $\cdots$, L. Solanilla and J. Nowalsky, preprint, 1998.

[8] Fagnano, G. C., Metodo per misurare la lemniscata (1714), *Opere Mathematiche*, Volume Secondo, Società Editrice Dante Alighieri, 1911, pp. 293-313.

[9] Gauss, C. F., Disquisitiones Arithmeticae, *Werke*, Vol. 10, Könige Gesellschaft für Wissenschaften, Götingen, 1917. Traducción inglesa : Clarke, A.C., Yale University Press, New Haven, 1966. Traducción española : Barrantes, H., Josephy, M. y Ruiz, A. Academia Colombiana de de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, 1995.

[10] Guzmán, M. de, Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática, *Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación*, **21** (1989), 19-26.

[11] Guzmán, M. de, *Para Pensar Mejor*, Labor, Barcelona, 1991.

[12] Hadlock, C.R, *Field Theory and its classical problems*, The Mathematical Association of America, Providence, 1978.

[13] Kline, Morris, *El pensamiento matemático y filosófico de la antiguedad a nuestros días*, VII, Editorial Alianza, Madrid, 1994.

[14] Landen, J., A disquisition concerning cetains fluents, which are assignable by arcs of the conic sections; wherein are investigated some new and useful theorems for computing such fluents, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1771, 289-309.

[15] Markushévich, A., *Funciones maravillosas*, Editorial Mir, Moscú, 1984.

[16] McKean, H.; Moll, V., *Elliptic curves : Function Theory, Geometry, Arithmetic*, Cambridge University Press, 1997.

[17] Pareja, G., *Los segmentos notables*. Preprint para ser enviado a publicación, 2003.

[18] Rosen, M., Abel's Theorem on the Lemniscate, *The American Mathematical Monthly*, **88** 6 (1981), 387-395.

[19] Solanilla, L.; Moll, V. et al., A property of Euler's elastic curve, *Elemente der Mathematik*, **55** (2000),156-162.

[20] Solanilla, L.; Moll, V. et al., Bernoulli on Arc Length, *Mathematics Magazine*, **75**, (2002), no. 3, 209-213.

[21] Solanilla, L.; Moll, V. et al., The story of Landen, the hyperbola and the ellipse, *Elemente der Mathematik*, **57** (2002), 19-25.

[22] Solanilla, L.; Pareja, G. et al., Fagnano on the Lemniscate. Preprint enviado para publicación, 2003.

[23] Stewart, James, *Cálculo de una Variable. Trascendentes y Tempranas*, Editorial Thompson Learning, México, 2001.

[24] Tamayo, A., *Maclaurin y la longitud de arco de la hipérbola*. Preprint para ser enviado a publicación, 2005.