ANÁLISIS Y CLASIFICACIÓN DE ERRORES COMETIDOS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE CONVERGENCIA DE SERIE NUMÉRICA

Myriam Codes Valcarce

Facultad de Informática. Universidad Pontificia de Salamanca.

Modesto Sierra Vázquez

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.

Resumen. *En un primer análisis de los datos recogidos para una investigación en torno al aprendizaje del concepto de serie numérica, se ha detectado la manifestación de diversos errores que dificultan el aprendizaje de dicho concepto. Estos errores aportan pistas a cerca de los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes cuando aprenden el concepto de serie numérica y las dificultades a las que han de hacer frente. En esta comunicación, se describen los errores que han manifestado dos grupos de estudiantes cuando resolvían la Actividad Rectángulos.*

Abstract. *In a first analysis of the data gathered for an investigation surroundings to the learning of the numerical concept of series, the manifestation of diverse errors has been detected that make difficult the learning of this concept. These errors contribute tracks of the obstacles which the students face when they learn the numerical concept of series and the difficulties to which there are to do in front. In this communication, the errors are described that two groups of students have showed when they solved the Activity Rectangles.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de las dificultades, obstáculos y errores que aparecen en el aprendizaje de las matemáticas, es un aspecto importante de muchas investigaciones, (Blanco, 2001), (Brousseau, 1983), (Cornu, 1991), (Drijvers, 2002), (Hercovics, 1989), (Llorens y Santonja, 1997), (Sierpinska, 1985), (Socas, 1997), (Tall, 1994), que Socas (1997) refleja afirmando que '*el aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y éstas son de naturalezas distintas. (…) Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores*'.

Los argumentos más sencillos para explicar las dificultades que encuentran los estudiantes cuando aprenden matemáticas, suelen recaer sobre una enseñanza inadecuada o un bajo potencial intelectual de los estudiantes. Sin embargo, es posible encontrar otras explicaciones desde el ámbito histórico, epistemológico o psicológico (Hercovics, 1989). Para Socas (1997), las dificultades del aprendizaje de las matemáticas proceden generalmente del microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Por tanto, las dificultades '*pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza*'. Las dificultades asociadas a la propia disciplina (debidas a la complejidad de los objetos matemáticos y a la complejidad de los procesos de pensamiento matemático), en general, no pueden evitarse, pero es necesario conocerlas para que el profesor implemente estrategias de enseñanza-aprendizaje que las expliciten para facilitar la adquisición de nuevos conocimientos (Palarea, 1998).

El filósofo G. Bachelard introdujo en 1938 la noción de obstáculo epistemológico en el contexto de las ciencias experimentales y casi cincuenta años más tarde, bajo el paradigma de la teoría de las situaciones didácticas, Brousseau introdujo la noción de obstáculo en el contexto de la didáctica de las matemáticas. Para Brousseau (1983), un obstáculo es un conocimiento que en un determinado dominio proporciona resultados correctos, pero que en un dominio nuevo o más extenso, provoca respuestas falsas o inadecuadas.

Desde la distinción entre la imagen del concepto y la definición del concepto de Tall y Vinner (1981), Tall (1991) considera que la causa de muchos obstáculos responde al principio de extensión genérica, el cual justifica sobradamente la necesidad de diseñar cuidadosamente un currículo que evite la aparición de estos obstáculos: '*Si un individuo trabaja en un contexto limitado en el cual todos los ejemplos que aparecen tienen cierta característica, entonces, en ausencia de contraejemplos, la mente asume implícitamente en otros contextos estas mismas características conocidas*' (traducción de los autores).

Otros autores, Blanco (2001) y Llorens y Santonja (1997), identifican errores y deficiencias que atribuyen al tipo de enseñanza recibida.

La incorporación de las herramientas de cálculo simbólico en el aula de matemáticas, fomenta la aparición de obstáculos cognitivos que se manifiestan abiertamente en estos entornos. Drijvers (2002) enumera una totalidad de doce obstáculos, entre los que distingue aquellos que son propios de un tópico matemático, y los que son propios de la idiosincrasia de la herramienta.

Es muy habitual que los profesores dediquen muchos esfuerzos intentando corregir los errores que cometen sus estudiantes. Sin una reflexión profunda, podría parecer que estos errores son sólo fruto de una falta de conocimiento o un despiste. Sin embargo, son muchos los investigadores, (Brousseau, 1983), (Cornu, 1991), (Socas, 1997), entre otros, que consideran el error como la manifestación en los estudiantes de un obstáculo, no sólo como el resultado de un esquema cognitivo inadecuado.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio que versa sobre el aprendizaje de estudiantes de primero de Universidad del concepto de convergencia de serie numérica (Codes y Sierra, 2004, 2005, 2006) y (Codes, Sierra y Raboso, 2007b).

En un primer análisis de los datos recogidos para la investigación, se ha detectado la manifestación de diversos errores que dificultan el aprendizaje. El objetivo de este trabajo es el de constatar y clasificar dichos errores.

La clasificación de los errores se llevará a cabo de acuerdo con Socas (1997), atendiendo al origen de los mismos. Distinguimos así los que tienen su origen en un obstáculo, bien sean didáctico, epistemológico o cognitivo, y los que tienen su origen en una ausencia de sentido, debida a la complejidad de los objetos matemáticos. Esta clasificación no es excluyente. Puesto que en nuestro trabajo no contemplamos el aspecto emocional y afectivo, no tendremos en cuenta el error cuyo origen se deba a una ausencia de sentido por las actitudes afectivas y emocionales, que para Socas es la tercera dimensión desde la que abordar el origen de los errores.

En primer lugar se expondrán los datos, posteriormente se procederá a la discusión de los mismos y finalmente se sacarán las conclusiones pertinentes.

DATOS

Durante el curso académico 2005-2006 se llevó a cabo la recogida de datos para reunir información acerca de las relaciones que establecían los participantes entre los elementos del modelo teórico (Codes y Sierra, 2006).

A partir de la transcripción y la revisión de todas las grabaciones, se realizó un primer análisis en el que se detectaron diversos errores que comenten los estudiantes. En esta comunicación, se describen los que han manifestado dos grupos de estudiantes, S1 y S3, cuando resolvían en el aula de ordenadores la Actividad Rectángulos.

Con esta actividad se propone introducir el concepto de serie numérica, contextualizando una serie geométrica de razón ½ en un problema geométrico de cálculo de áreas de rectángulos. En los distintos apartados de la actividad se recrean las etapas de la evolución histórica del concepto a través de tareas en las que el alumno ha de realizar cálculos de áreas, representaciones gráficas, sumar series geométricas de razones positivas y negativas, y aproximar alguna suma. En Codes y Sierra (2007a), se encuentra una descripción más detallada de la misma.

La actividad se realiza en un entorno computacional, con el software de cálculo simbólico Maple como herramienta de apoyo. Este, proporciona un entorno de trabajo sencillo que permite al estudiante compaginar la expresión analítico-algebraica, más formal, con la gráfica y geométrica, más cercana y perceptible.

La transcripción del episodio en el que se manifiestan los errores dará cuenta de los mismos, y en algunos casos, se utilizará una copia de la información que se recogió por pantalla (Codes, Sierra y Raboso, 2007b) en la que se pueden contemplar las instrucciones que los estudiantes ejecutaban con el software Maple.

Errores del grupo S1

Al comienzo de la actividad, en el Enfoque Geométrico, se muestran al estudiante sucesivos dibujos en los que, a partir de un cuadrado de lado la unidad, se generan nuevos rectángulos de área la mitad del rectángulo anterior. El estudiante sólo ha de observar los dibujos que cada vez se asemejan más a un rectángulo de 2×1. Tras la observación, el grupo S1 manifiesta su concepción de infinito potencial (ES1_OE`ip`).

1	D	¿Cuándo llega a dos? Cuando ene es infinito, como no llega a infinito, porque no hay infinito, pues…

También en este episodio, el grupo S1 manifiesta su concepción de límite inalcanzable (ES1_OE`l`) que Cornu (1991) describe como '*¿se alcanza el límite o no?*':

1	D	Que nunca llega a llenarse, vamos. Se acerca pero nunca llega.
		(…)
2	JM	No llega nunca a dos. ¿…? Nunca va a llegar a dos.
		(…)
3	JM	Sí, pero aquí,… es que sería dos. ¿Sería dos o no?
4	D	No
5	JM	No, nunca llega a dos.
6	D	Nunca llega a dos, o sea que tiende a dos pero nunca es dos.

En la Conjetura 2 se les pregunta '*¿Cuántos rectángulos se necesitan generar para que la suma de sus áreas sea al menos 1.999 u^2?*', a lo que el estudiante JM contesta (ES1_OE`i-l`):

1	JM	Pues ahí tiene la cosa de que si esto es periódico, serían infinitos rectángulos. Como no es periódico son unos rectángulos determinados.

En la sección Experimenta se les plantean cuatro experiencias: en las tres primeras han de calcular sumas de series geométricas en las que la razón toma diversos valores. Cuando la razón toma el valor -1 , JM aplica la propiedad asociativa de la suma finita de números reales a una suma infinita que no converge (ES1_OEi).

1	JM	No puede tender a infinito y a menos infinito a la vez.
2	D	Es uno, uno (señala en el aire)…
3	JM	Va a tender a cero. Claro, porque lo que tiende por un lado menos lo que tiende por el otro… Va a tender a cero. A cero.
4	D	¿Cómo va a tender a cero?
5	JM	Sí, porque va siendo… va sumándolo.

En la Conjetura 1 se les pide que indiquen los valores de r para los cuales la suma $\sum_{n} r^n$ es finita y en ese caso dar el valor de la suma; el grupo S1 consigue obtener un criterio para los casos en los que la razón es positiva y en esa situación, una fórmula para la suma de la serie: '*la inversa de lo que le falta para llegar a la unidad*'. Pero cuando tratan de comprobar si la fórmula también es válida para valores negativos de la razón, cometen un error en los cálculos que les lleva a afirmar que no se cumple la misma fórmula (ES1_ODn).

1	JM	Y para los números negativos. Venga, vamos.
2	D	Supongo que será lo mismo.
3	JM	A lo mejor es lo mismo, pero claro, uno menos algo negativo, al elevarlo a menos uno. Uno menos algo negativo…
4	D	Vamos a hacerlo con el cinco. Nos tendría que salir… Que no sale.
5	JM	Pues no nos sale.
6	D	Sale cero con seis período.

Errores del grupo S3

En el Enfoque Gráfico, han de representar en el plano cartesiano la gráfica de los dos elementos del modelo, a_n y $\sum_{k=0}^{n} a_k$. A partir de los ocho primeros valores de las dos sucesiones, y con lo que han experimentado en el Enfoque Geométrico, deben obtener una expresión algebraica que defina el término general de la sucesión de sumas parciales, para introducirla en un conjunto de instrucciones de Maple que realiza la representación de la gráfica. La consecución de diferentes errores (ES3_ASa), les lleva a invertir más de veinte minutos en realizar esta parte de la actividad. Se presentan tres de ellos.

(ES3_ASa1) En un primer momento, el grupo S3 no utiliza un sumatorio para obtener la expresión general de la sucesión de sumas parciales, sino que utiliza una fracción algebraica. La expresión correcta es $S_k = \frac{2 \cdot 2^k - 1}{2^k}$, pero ellos implementan la fórmula incorrecta $S_k = 2^k + \frac{1}{2^k}$, como se puede apreciar en el siguiente código que ejecutan con Maple:

```
Éste es el área coloreada
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=((2*k)+1/(2^k)) end do; #comienza en k=0.
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n];
  plot(A, style=point);
```

(ES3_ASa2) El estudiante M del grupo S3 conoce la expresión correcta, pero sus compañeros C y R tienen dificultades para expresar algebraicamente '*el doble del de abajo menos uno*'.

1	M	El de abajo, o sea el de arriba es el doble del de abajo menos uno. Más uno. Menos uno, menos uno. El doble del de abajo más uno.
2	R	Ya, pero esa expresión no la puedes poner así tampoco. ¿Cómo pones que es el doble del de abajo?
3	M	Simplemente poniendo el mismo de abajo pero multiplicado por dos.
4	R	¿Y cómo llamas a lo de abajo?
5	C	Claro.
6	M	Dos a la ene. ¿Cómo lo voy a llamar? Dos a la ene por dos menos uno.
7	R	Es decir, cuatro elevado a la ene menos uno. Que no es.
8	C	Ni de palo.

(ES3_ASa3) El estudiante R del grupo S3 confunde $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ con $(2 \cdot 2)^k = 4^k$. Su compañero M le corrige y finalmente R acepta la solución de M.

1	R	Tú al de abajo le llamas dos a la ene, ¿no?
2	M	(asiente)
3	R	Vale. Y el de arriba es el doble de dos a la ene menos uno.
4	M	(asiente)
5	R	Es decir…
6	M	Dos por dos a la ene…
7	R	Espera.
8	M	…menos uno. No cuatro a la ene, sino dos por dos a la ene.
9	R	No es cuatro a la ene. Claro.

Además, cuando utilizan el ordenador para que Maple dibuje la gráfica de alguna sucesión o calcule un límite, se ponen de manifiesto los problemas que encuentran en la manipulación algebraica. Uno de los errores en los que más incurren es el de confundir el significado de una letra en una expresión algebraica. En varias ocasiones escriben algo como esto:

```
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=(1/2^n) end do; #comienza en k=0.
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n];
  plot(A, style=point);
```

Es decir, asignan a "n" el valor 10 y luego lo utilizan como variable. Además, nombran a la variable contador con la letra "k" y luego en la expresión algebraica utilizan la letra "n". A lo largo de la instrucción, no sólo en esta actividad, se repite mucho este error, lo que nos induce a pensar que su causa no es sólo un despiste, sino que alberga una concepción confusa del significado y la relevancia de las letras en las expresiones algebraicas (ES3_ASaHCS).

DISCUSIÓN

(ES1_OEip), (ES1_OEl), (ES1_OEi-l)

El grupo S1 comete varios errores, (ES1_OEip), (ES1_OEl) y (ES1_OEi-l), que comparten un origen común, el obstáculo que provoca una concepción dinámica de infinito y de límite. Monaghan (2001) asegura que la primera idea que desarrollan los estudiantes sobre el concepto de infinito está asociada al infinito como proceso, y el lenguaje que utilizan refleja esta concepción: 'this goes on and on', 'Infinity means going on and on'.

Desde la perspectiva de la teoría APOS (Dubinsky y otros, 2005a), con los conceptos que involucran procesos iterativos infinitos, una acción consiste en la ejecución de un número pequeño de iteraciones; la repetición de esta acción se interioriza en un proceso que un individuo puede encapsular en un objeto ejecutando acciones sobre él. Cuando un individuo concibe el límite como inalcanzable y tiene una concepción de infinito potencial, posee una concepción proceso de estos conceptos matemáticos. Hasta que no sea capaz de encapsularlos, no poseerá una concepción objeto.

Esta concepción proceso de los conceptos de límite y de infinito, que en otros contextos pueden derivar respuestas correctas, suponen un obstáculo de tipo epistemológico para la correcta adquisición del concepto de serie numérica; esto es así, porque la construcción del concepto de serie numérica requiere de una concepción objeto de límite y de infinito.

Respecto al error (ES1_OEl), otras investigaciones bajo un paradigma constructivista destacan la prevalencia de una imagen dinámica del concepto de límite, que se manifiesta en una concepción de límite como proceso y consideran que provoca obstáculos para la correcta adquisición del concepto de límite de una sucesión numérica. (Williams, 2001), (Mamona-Downs, 2001), (Earles, 2000), (Monaghan, Sun y Tall, 1994).

Además, consideramos que el error (ES1_OEi-l) cometido por JM cuando mezcla el carácter periódico de un decimal con la posibilidad de que sea el resultado de una suma infinita o finita, está también originado por una ausencia de sentido debida a la complejidad de los conceptos de infinito, límite y número real periódico. La idea equivocada de que un decimal finito no puede ser el resultado de una suma infinita, nos lleva a pensar que el estudiante posee un esquema cognitivo inadecuado del concepto de número real. Esto, nos hace reflexionar sobre la importancia de los esquemas conceptuales que posee un individuo sobre los cuales se construye el nuevo conocimiento.

(ES1_OEi)

La suma infinita $\sum(-1)^n$ ha protagonizado algunos episodios a lo largo de la historia de la matemática en los que se refleja la dificultad de los procesos infinitos. En este caso, JM repite uno de estos episodios al generalizar la propiedad asociativa de los números reales en una suma infinita.

(ES1_ODn)

Los errores de cálculo siempre pueden justificarse por un despiste, pero cuando en esos cálculos aparecen números negativos, se ha de considerar además la posibilidad de que se deba a la manifestación de un obstáculo didáctico. En este caso, es un obstáculo causado por la tendencia de los profesores a trabajar más ejemplos en los que aparecen números positivos que negativos, lo cual provoca que se produzcan más errores de cálculo al operar números acompañados del signo.

Desde la perspectiva de Tall (1991), el abuso de ejemplos con números sin signo puede producir el principio de extensión genérica que mencionamos anteriormente. Las causas de las dificultades que conlleva este principio hay que buscarlas en la práctica docente.

(ES3-ASa)

En la Actividad Rectángulos, el grupo S3 comete muchos errores de tipo algebraico, (ES3_ASa1), (ES3_ASa2) y (ES3_ASa3). Esto, provoca una barrera en la correcta adquisición del concepto de serie numérica porque les dificulta la manipulación de los elementos del modelo teórico, y en consecuencia impide que establezcan relaciones entre ellos (Codes y Sierra, 2006). Así, la complejidad del algebra les impide avanzar en el desarrollo del concepto de serie numérica. Desde el punto de vista de los niveles de desarrollo del concepto de serie numérica (Codes y Sierra, 2006), consideramos que estos errores del grupo S3 ponen de manifiesto un menor nivel de desarrollo del grupo S3 respecto del grupo S1.

Por otro lado, hay ocasiones en las que algunas dificultades se manifiestan más intensamente en entornos informáticos, como en el caso de los errores del grupo S3 originados por una ausencia de sentido debida a la complejidad del álgebra que se manifiestan cuando utilizan el ordenador (ES3_ASaHCS).

El caso de algunos errores (ES3_ASaHCS) recuerda a uno de los obstáculos locales debidos al uso de HCS relacionado con el álgebra que Drijvers (2002) describe como 'la concepción flexible de variables y parámetros que requiere el uso de HCS'.

CONCLUSIONES

En esta investigación se han detectado algunos obstáculos y errores que se manifiestan cuando los estudiantes aprenden el concepto de serie numérica. Aunque en esta comunicación sólo se han analizado los que aparecen cuando realizan la Actividad Rectángulos, en un primer análisis de todas las grabaciones que se realizaron para aportar datos a la investigación, se comprobó que algunos de ellos se repetían a lo largo de toda la instrucción.

Con el grupo S3, se ha comprobado cómo los errores originados por el álgebra repercuten negativamente en el desarrollo del concepto de convergencia de serie numérica. El avance en el desarrollo más formal del concepto se frena considerablemente porque los estudiantes han de centrar su atención en las manipulaciones algebraicas más que en el propio concepto.

Con el grupo S1 ha quedado patente la relevancia de los conceptos como límite, infinito, función o los números negativos, y la repercusión de las concepciones erróneas de los mismos para la correcta adquisición del concepto de serie numérica. La relación entre el concepto de serie numérica con estos otros conceptos (una serie infinita es el límite de una sucesión de sumas parciales; una sucesión es una función con dominio discreto $\mathbb{N}$), hace que las dificultades y los obstáculos asociados a ellos se trasmitan al aprendizaje del concepto de serie numérica.

Con este trabajo contribuimos a ampliar el campo de conocimiento sobre las dificultades a las que han de hacer frente nuestros estudiantes cuando aprenden conceptos de Análisis Matemático. Desde el punto de vista docente, esta información es necesaria para diseñar un currículo que favorezca la superación de los obstáculos que son causa de algunos errores (Blanco, 2001), (Cornu, 1991), (Herscovics, 1989), (Llorens y Santonja, 1997), (Socas, 1997), (Tall, 1991), (Tall, 1994).

Referencias

Blanco, L.J. (2001). Errors in the Teaching/Learning of the Basic Concepts of Geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Revista electrónica editada por Centre for Innovation in Mathematics Teaching at Exeter University, UK, and the Mathematics Department at Bessenyei College, Nyiregyháza , Hungary. Disponible en: http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), pp.165-198

Codes, M.; Sierra, M. (2004). Enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos de primer curso de la diplomatura de informática: un estudio piloto. En E. de la Torre (ed.). *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones en los grupos de investigación. VIII Simposio de la SEIEM*. Universidade da Coruña (edición en CD).

Codes, M.; Sierra, M. (2005). Entorno computacional y educación matemática: una revisión del estado actual. En B. Gómez y otros (eds.). *Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la SEIEM*. Santander: Servicio de Publicaciones. Universidad de Cantabria (edición en CD).

Codes, M.; Sierra, M. (2006). Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. *X Simposio de la SEIEM* (edición en CD).

Codes, M.; Sierra M. (2007a). Actividad Rectángulos: Un ejemplo de aplicación de metodologías activas en el aula universitaria de matemáticas. *Actas de las IV Jornadas internacionales de Innovación Universitaria (2007)*. Madrid: Universidad Europea de Madrid (edición en CD).

Codes, M.; Sierra M.; Raboso, M. (2007b). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (eds.). *Investigación en Educación Matemática XI*. San Cristóbal de La Laguna, Tenerife: Caja Canarias, pp. 261-271.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 153-166.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), pp. 221-228

Dubinsky, E.; Weller, K.; McDonald, M. A.; Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part I. *Educational Studies in Mathematics*, 58, pp. 335-359.

Earles, J. S. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), pp. 258-276.

Hercovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 60-86

Llorens, J. L., Santonja, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), pp. 61-76.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear of the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 259-288.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 239-257.

Monaghan, J.; Sun, S.; Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds.), *Proceedings of the 18th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisboa, Portugal, 3, pp. 279-286.

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. *Tesis doctoral*. Universidad de La Laguna. Departamento de Análisis Matemático.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, L. Puig, M. Sierra, y M. Socas (eds.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE Universitat de Barcelona- Horsori, pp. 125-154.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-21.

Tall, D. (1994). Cognitive difficulties in learning analysis. En A. Barnard (ed.). *Report on the Teaching of Analysis*, para el TaLUM committee.

Tall, D. ; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.

Williams, S. R. (2001). Predications of the limit concept: an application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(4), pp. 341-367.

Esta investigación ha sido financiada dentro del programa de apoyo a proyectos de investigación de la Junta de Castilla y León (Ref.: SA080A07).