TRATAMIENTO DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA EN TEXTOS UNIVERSITARIOS

YINETH PAOLA SÁENZ NEIRA

Modalidad: Trabajo asociado a un grupo de Investigación

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2015

TRATAMIENTO DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA EN TEXTOS UNIVERSITARIOS

YINETH PAOLA SÁENZ NEIRA

CC. 1030596051 – CÓD: 2009140064

ASESOR: FELIPE FERNÁNDEZ

Prof. Departamento de Matemáticas.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2015

Dedico este gran logro primeramente a Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso dado, por fortalecer mi corazón en los momentos de debilidad e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de mi estudio.

A mis padres Aicardo y Dora, por haber sido ese gran apoyo y ejemplo como persona, porque sin ustedes no sería la persona que soy hoy en día, gracias por depositar su confianza en mí, los amo mucho.

A mis hermanas, pues son mi mayor motivación para continuar en este camino de vida, porque estuvieron en los momentos difíciles pero también triunfantes, las amo mucho.

Yineth.

Agradecimientos

En primer lugar y muy feliz a Dios, quien me ha permitido levantarme después de mis caídas, me ha iluminado y me ha regalado la sabiduría para saber elegir entre lo bueno y lo malo, porque puso en mi corazón y mente esta linda y satisfactoria profesión. Porque a pesar de los obstáculos me dio la fuerza para salir adelante. Gracias por permitirme llegar hasta esta meta.

A mi familia, padres y hermanas quienes me apoyaron de manera incondicional en este proceso, quienes depositaron su confianza y creyeron en mí. Gracias por la compañía, los consejos y sobre todo las palabras de aliento para recordar que se puede lograr cualquier meta en la vida.

A mi asesor de trabajo de grado, el profesor Felipe Fernández por su contribución en mi formación, sus enseñanzas, orientación y dedicación.

A mis amigos los que han pasado y los que se han quedado, porque todos ustedes han sido tantas veces parte de mi vida, han marcado mi vida de alguna forma y me han motivado en este proceso. Deibi, Viviana, Jonathan, Jhon, Eliana mis grandes compañías, que permanecieron en las buenas y en la malas hasta el final, gracias por su apoyo incondicional, motivación, sin ustedes no hubiera sido lo mismo durante esta etapa tan linda de mi vida.

Al personal administrativo del Departamento de Matemáticas quienes fueron un gran apoyo especialmente durante todo este recorrido.

A todos mis profesores que con sus enseñanzas de vida y de Matemáticas me permitieron culminar esta gran etapa.

A mi querida Universidad Pedagógica Nacional, mi segundo hogar porque a pesar de las dificultades se convirtió en un lugar acogedor, lleno de conocimiento en estos años.

RESÚMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN- RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo asociado a un grupo de Investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Tratamiento de los Intervalos de Confianza en textos Universitarios.
Autor(es)	Sáenz Neira, Yineth Paola.
Director	Fernández, Felipe
Publicación	Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional, 2015, 90 pág.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Enfoque Ontosemiótico, Elementos de significado, Análisis de textos e Intervalos de confianza.

2. Descripción
En el presente trabajo se realiza un estudio de los elementos de significado, con base en el enfoque Ontosemiótico, de los intervalos de confianza, identificados en tres textos universitarios. Primero se presenta un marco conceptual que revisa la contextualización de los temas de intervalos de confianza en áreas como Bioestadística, Ciencias Sociales y Medicina. Luego, desde una perspectiva Ontosemiótica, se caracterizan las categorías o elementos constituyentes de los intervalos de confianza que se pueden tener en cuenta para el análisis de los textos. Así, con base en este marco de trabajo se procede a identificar los elementos de significado o del primer nivel del Enfoque ontosemiótico en los textos considerados.

3. Fuentes

Para este trabajo se consultaron libros, tesis de pregrado, doctorado y fuentes de internet. Las principales fuentes que nutren este documento se encuentran listadas a continuación:

Behar, R. (2007). *¿Estamos buscando el ahogado aguas arriba? El caso de la estimación con intervalos de confianza*. Primer Encuentro Nacional de Educación Estadística (ENAES), Bogotá.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007).*Un Enfoque ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción Matemática*. The International Journal on Mathematics Education. [Versión electrónica], 39(1-2), 127-135.

Olivo, E. (2008). Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México. Tesis doctoral.

Yánez, G., Behar, R. (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.). Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. [Versión electrónica]. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

4. Contenidos

En este documento se encontrará un marco conceptual construido en torno al Enfoque Ontosemiótico (EOS) que constituye los elementos de significado de los Intervalos de Confianza tomando como referentes a Batanero (2000), Godino, Font y Batanero (2007). Los capítulos que conforman este documento son:

1. Presentación del trabajo: Introducción, objetivos y metodología desarrollada.

2. Marco conceptual: Enfoque Ontosemiótico: Primer nivel, Segundo Nivel y Tercer Nivel y asociación con los elementos de significado que propone Batanero (2000).

3. Metodología: Categorías de análisis

4. Análisis de textos con base a los elementos de significación del Enfoque Ontosemiótico.

5. Conclusiones

5. Metodología

Para el desarrollo de trabajo de grado se siguieron los siguientes pasos: elaboración de un marco conceptual que asume una contextualización de expertos respecto a una postura Ontosemiótica para abordar el análisis de tres textos universitarios. Con base en este marco se explicitan los elementos que se tienen en cuenta para los análisis. Luego de consolidar y poner a prueba los elementos con base en unos análisis preliminares de expertos como Olivo (2008) y Behar (2007) para justificar y relacionar los elementos de los análisis, los pasos siguientes fueron: 1) selección de los libros a revisar, 2) análisis de los tres textos, (confrontación de lo visto en los textos con lo presentado en el marco conceptual), 3) sistematización de los resultados y 4) formulación de conclusiones.

6. Conclusiones

Con el trabajo realizado se pudo establecer que el significado de los Intervalos de confianza encontrado en el análisis de textos presenta algunas variaciones de un texto a otro. En efecto, en la exposición y tratamiento de los diferentes elementos de significado se puede identificar variaciones en cuanto a la densidad y profundidad con la que se abordan aspectos como las propiedades, definiciones, términos, gráficos y tipos de problemas propuestos, entre otros.

El marco conceptual adoptado, se muestra como relevante y pertinente para dar cuenta de los elementos que intervienen en la constitución del significado de los Intervalos de confianza. Desde la perspectiva Ontosemiótica, los elementos planteados realmente se constituyeron en herramientas que recrean las características del objeto matemático estudiado desde lo expresado en el lenguaje y representaciones utilizadas. Además, posibilitaron la comparación de significado entre los distintos textos, que en cualquiera de los tres casos analizados dan evidencia del cuidado que se debe prestar a la exposición de esta temática en textos

universitarios.

Por otra parte, en los resultados de dos de los textos se entrevé, una tendencia a menguar la importancia de los Intervalos de confianza, ante temas como el de pruebas de hipótesis. En otras palabras, las exposiciones relativas a Intervalos de confianza eran el preludio al tratamiento de las pruebas de hipótesis, que usualmente se desarrollaban en una mayor extensión de páginas. En consecuencia, ya que los textos se constituyen en modelos de referencia para la enseñanza, es pertinente motivar en los docentes una reflexión acerca de la manera como se tratan los temas de Intervalos de Confianza en estos textos y así generar cuestionamientos sobre el conocimiento de dicho objeto.

Elaborado por:	Sáenz Neira, Yineth Paola
Revisado por:	Fernández, Felipe

Fecha de elaboración del Resumen:	03	03	2015

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS

Pág

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En el estudio de la Estadística con estudiantes universitarios es importante abordar el tratamiento de objetos matemáticos asociados a la inferencia estadística que sean de utilidad y aplicación en la solución de problemas sujetos a incertidumbre, que involucren la toma de decisiones o la comprobación de hipótesis. Es bien conocido que los dos procedimientos generales en la inferencia estadística son los Intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis. Sin embargo, el detalle con el que se tratan estos métodos varía en la profundidad con que se abordan de un texto a otro. En particular, la presentación que hacen los textos de estadística inferencial aplicada a ramas como la ingeniería, acerca de los Intervalos de confianza, ha sido objeto de revisión por autores como Olivo (2008), quienes encuentran una gran variedad de lenguaje (verbal, simbólico y gráfico), de argumentos y propiedades asociadas al intervalo u objetos relacionados como las distribuciones de muestreo. Además concluyen que "la enseñanza de este tema debiera ser organizada de tal manera que el estudiante aprenda a reconocer los diferentes campos de problemas y relacione cada uno de ellos a las distribuciones de muestreo y procedimientos computacionales apropiados, así como también adquiera la lógica general subyacente detrás de la construcción e interpretación de todos esos intervalos. (p. 269)"

Por otra parte, la línea de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional ha venido trabajando en sus últimos proyectos en la formulación de propuestas que consideren la enseñanza de los Intervalos de confianza y de temas afines a su comprensión (Fernández, Andrade y Álvarez, 2014). En tales trabajos se evidencia la necesidad e importancia de abordar con más detalle la forma como se presentan los Intervalos de confianza en textos de estadística de áreas diferentes a la ingeniería como biología, ciencias sociales y ciencias de la salud. Con esta propuesta de trabajo de grado se quiere estudiar el enfoque que se le da al tema Intervalos de confianza, sopesando no tanto su utilidad y aplicación en otras áreas, sino cómo varía la presentación y la interpretación que se le da a dicho tema. Así pues, este trabajo tiene como propósito establecer un panorama de tres textos universitarios de las áreas mencionadas, la interpretación y el nivel con el que se enfatizan las relaciones subyacentes a la comprensión de los Intervalos de confianza.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Olivo (2008) señala que los resultados acerca del significado que se presenta sobre el intervalo de confianza en su estudio recaen en instituciones educativas del ámbito de la ingeniería. Por ello una extensión de su investigación podría ser dirigida a analizar el significado de los Intervalos de confianza en otras áreas de enseñanza como ciencias sociales o ciencias de la salud.

Atendiendo a este autor, en este trabajo de grado se realiza una revisión de textos universitarios de estadística que son diferentes a los de ingeniería. Con el análisis de dicha selección se pretende identificar aspectos o asuntos que no necesariamente se reflejan en los contextos de la estadística aplicada a la ingeniería. En otras palabras, se espera proporcionar información valiosa sobre cómo se presentan los Intervalos de confianza en estos textos y qué interpretación se da a su significado.

Por otro lado, con la revisión de los tres textos de estadística elegidos, se espera esclarecer la relación de este objeto matemático con asuntos propios de la disciplina, enfatizando en aspectos como su pertinencia y utilidad en las áreas contempladas. En este sentido, autores como (Clark, 2004 citado en Olivo, 2008), (Olivo, Albert, y Ruiz, 2006 citados en Olivo, 2008), señalan las ventajas y desventajas de los Intervalos de confianza como una forma de resaltar su aplicación para evaluar situaciones relacionadas con la incertidumbre; así, una vez abordada la revisión de los textos, se describirá el significado con que se trabajan en cada uno, con el fin de corroborar si la interpretación que realizan en su contenido, es similar o no a la de la ingeniería.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Analizar el significado dado a los Intervalos de confianza a través de la revisión de textos universitarios pertenecientes a diferentes disciplinas.

1.3.2 Objetivos específicos

- Reconocer el marco conceptual, basado en el enfoque ontosemiótico, que perfile los elementos constituyentes al significado de los Intervalos de confianza.
- Dar cuenta de los diferentes aspectos que configuran la comprensión de Intervalos de confianza a través de un conjunto de categorías.
- Caracterizar el tratamiento dado a los Intervalos de confianza en textos universitarios de diferentes disciplinas.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En el estudio de objetos matemáticos-estadísticos asociados a la inferencia estadística, tales como pruebas de hipótesis e Intervalos de confianza aplicados a la solución de problemas para comprobar hipótesis o en la toma de decisiones, es necesario establecer aspectos conceptuales ligados a los procesos de interpretación y de asignación de significado asociados a éstos.

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el campo de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Este enfoque adopta una perspectiva global teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas: las prácticas matemáticas[1] y las interacciones entre las mismas, partiendo de un modelo epistemológico, cognitivo y sistémico. De esta manera, el EOS propone tres dimensiones en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas bajo los modelos mencionados. Cada una de ellas se aborda con herramientas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994,1996 y 1998, citados en Godino, J., Batanero, C. y Font, V., 2007); teoría de las funciones semióticas (Godino 2002, citado en Godino, J., Batanero, C. y Font, V., 2007); (Godino, Batanero y Roa 2005, citados en Godino, J., Batanero, C. y Font, V., 2007) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font 2006, citados en Godino, J., Batanero, C. y Font, V., 2007). Así

[1] Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución.

mismo se ha dicho, que en el EOS se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas, dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar tres niveles de objetos que emergen de la actividad matemática.

En efecto, en un primer nivel se tienen aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (tipos de problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel se tiene una tipología de objetos que emergen de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; estos se refieren a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc. Por último, en tercer lugar se ubica el nivel de procesos, las dualidades a partir de las configuraciones de objetos primarios que se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual lleva a los procesos que se refieren a la importancia de problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos que tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, entre otros).

Con este uso ampliado de la interpretación y significado se requiere en cada faceta, especificar el tipo de objeto, interpretación o significado referido para que la comunicación pueda ser totalmente comprensiva. De este modo, se enumeran y describen someramente los tres niveles de análisis de cognición e instrucción de los objetos matemáticos según mencionan Godino, Batanero y Font (2007):

2.1.1 Primer Nivel. Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Para éste nivel se consideran los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (por ejemplo, plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas); en el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En estos componentes se evidencian el uso del lenguaje verbal y simbólico. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos, proposiciones y procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica son satisfactorias. Una manera de organizar o clasificar la referencia a estos objetos matemáticos es por medio de la distinción de los mismos en la siguientes categorías: **Elementos lingüísticos**, *Situaciones problemas, Conceptos, Definiciones, Proposiciones, Procedimientos y Argumentos.*

Los seis tipos de entidades primarias mencionadas, amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones – problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente:

Situaciones – problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

2.1.2 Segundo Nivel. Atributos contextuales

Se consideran en este nivel los elementos contextuales que contribuyen a los significados de los objetos matemáticos y a su vez atribuyen una opinión frente a lo que se trabaja. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y que son importantes de las mismas. Con base en el lenguaje se pueden considerar desde las siguientes facetas o dimensiones duales mencionadas por Godino (2002 citado en Godino, J., Batanero, C. y Font, V., 2007):

Personal – Institucional. Lo personal se refiere al conocimiento particular de un individuo, es decir el conocimiento propio que nace del pensamiento, acción y apropiación del sujeto. Por otro lado, lo institucional, es el resultado del diálogo y regulación de una comunidad especialista en el tema u objeto matemático tratado, donde la opinión está sujeta al fundamento y consenso institucional.

Ostensivo – No ostensivo. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos). (Por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

Expresión – Contenido: Esta dualidad la concreta la relación que se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida ya sea como personal o institucional.

Extensivo – Intensivo: La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y Cols, 2005 citados en Godino, J., Batanero, C. y Font, V., 2007). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, o entre los ejemplos y la caracterización tipológica de los mismos. (Un ejemplo específico, la función $y = 2x + 1$), (La familia de funciones $y = mx + n$).

Unitario – Sistémico: En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras ocasiones intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. Como en el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales).

2.1.3 Tercer nivel. Procesos

Tanto las dualidades mencionadas antes como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos representados de manera esquemática en la Figura 1. La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización) y argumentación. En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio, procesos sociales, etc. En consecuencia, tanto el segundo como el tercer nivel son conjunto de los elementos lingüísticos mencionados en el primer nivel, lo que permiten relacionar el análisis sistémico, epistemológico y cognitivo de los Intervalos de confianza. Estos elementos son relacionados en de la Figura 1, evidenciando los objetos primarios.

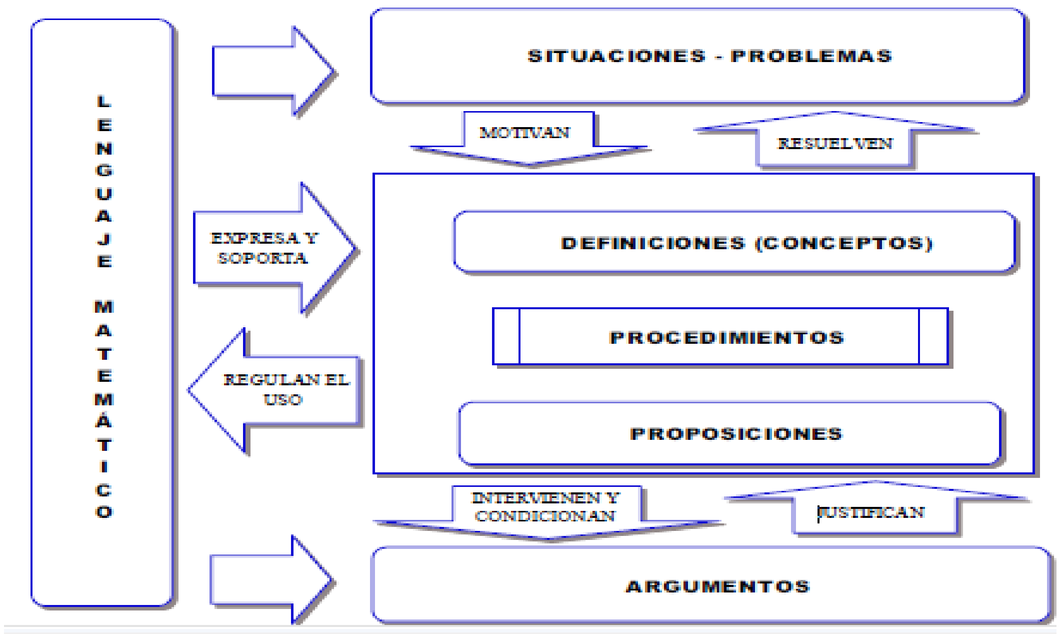


Figura 1. Configuración de objetos Primarios Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta la revisión bibliográfica del enfoque Ontosemiótico y la construcción de un marco conceptual, se seleccionan los tres textos universitarios para abordar el análisis de los mismos, contemplando las categorías propuestas por el marco conceptual como parte fundamental del estudio de estos. Con base en los elementos que constituyen el EOS, referentes de expertos como Olivo, Batanero y Behar jugarán un papel importante en la relación y comparación del estudio del significado de los Intervalos de confianza. Teniendo claro los elementos de significado del EOS, se establece una relación entre la teoría del enfoque con los elementos de significado que propone Batanero (2000), siendo estos la postura final para analizar los textos universitarios para luego generar la codificación de dichas categorías. Una vez se consignen estas herramientas, se toman los textos, con el fin de comparar, relacionar y describir todas las características, diferencias y categorías nuevas que surjan y se puedan establecer. Esto con la intención de generar un tratamiento adecuado en la revisión y análisis de los textos en las otras disciplinas en comparación a la ingeniería.

3.1 Categorías de análisis

En este trabajo los textos universitarios, que se van a estudiar y precisar más adelante, se analizarán desde el primer nivel del enfoque Ontosemiótico referido en el capítulo anterior, es decir, desde las configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, pues el análisis de los mismos estará sujeto propiamente a la consideración de los elementos de significación que constituyen dicho nivel. En efecto, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos, a través de situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, tal como se sugiere en la Figura 1 ya presentada.

De igual manera, Batanero (2000, p. 04) concreta las relaciones subyacentes a los tres niveles referidos sobre el enfoque Ontosemiótico descrito en el marco conceptual a través de lo que llama elementos de significación. En este sentido se refiere a *Elementos intensivos* como las definiciones, proposiciones, propiedades características y sus relaciones con otros conceptos, a *Elementos extensivos* como los campos de problemas de donde surge el objeto; a *Elementos ostensivos:* como las notaciones, gráficos, palabras y en general todas las representaciones del objeto matemático; a *Elementos actuativos* como los procesos empleados en la solución de problemas; y a *Elementos validativos* como las justificaciones y argumentos empleados para validar propiedades del concepto y que llegan a formar parte de su significado y los razonamientos dados para mostrar a otras personas la solución de los problemas. Así, teniendo en cuenta lo anterior, se propone entonces, relacionar y hacer referencia a la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios del primer nivel, junto con los elementos de significado que consolida Batanero (2000) de la siguiente manera:

3.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO

- Conceptos y proposiciones: Corresponden a las definiciones y/o afirmaciones introducidas mediante definiciones, descripciones o enunciados, que son elementos de carácter **intensivo**.
- Elementos lingüísticos: Son términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.), que son elementos de carácter **ostensivo**.
- Procedimientos: Son los algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo, que son elementos de carácter **actuativo.**

- Situaciones problemas: Son las aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, etc., que son elementos de carácter **extensivo.**
- Argumentos: Son los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo que están relacionados con elementos **validativos.**

La tipología descrita anteriormente será en definitiva la postura conceptual que se asumirá para este trabajo y en consecuencia servirá como referente para la organización de las categorías que se constituirán en lineamientos para organizar y describir el análisis de los textos. Así mismo, se toman como referentes de comparación que fundamente los análisis con expertos en el tema, tales como Olivo (2008), Behar (2007) y Yañez y Behar (2009).

Agregado a lo anterior, para facilitar la organzación de los elementos de significado y el desarrollo de análisis en cada texto, se realiza la categorización o codificación de dichos elementos tomando como referencias principales a Olivo (2008), Behar (2007) y Behar y Yañez (2009) estos son:

DIO: Definición de Intervalo de Olivo (2008).
DIB: Definición de Intervalo de Behar (2007).
DNO: Defición de Nivel de confianza de Olivo (2008).
DNB: Defición de Nivel de confianza de Behar (2007).
DP: Definicón de precisión emergente.
PIO: Propiedades de Intervalo de confianza Olivo (2008).
PNIO: Propiedades numéricas de Intervalo de confianza Olivo (2008).
PNIB: Propiedades numéricas de Intervalo de confianza Behar (2007).
PIB: Propiedades de Intervalo de confianza Behar (2007).
PnvO: Propiedades de Nivel de confianza Olivo (2008).
*PnvB:*Propiedades de Intervalo de confianza Behar (2007).
A0: Algoritmos de Olivo (2008).

AB: Algoritmos de Behar (2007).

TO1: Términos de primera categoría de Olivo (2008).

TO2: Términos de segunda categoría de Olivo (2008).

TO3: Términos de segunda categoría de Olivo (2008).

NBY: Notaciones de Behar y Yañez.

NO: Notaciones de Olivo.

NB: Notaciones de Behar.

AO: Algoritmos de Olivo.

AB: Algoritmos de Behar.

GO: Gráfico de Olivo.

GB: Gráfico de Behar.

Ge: Gráfico emergente[2]

CPO: Campo de problema de Olivo.

CPB: Campo de problema de Behar.

V1: Elementos validativos primera categoría.

V2: Elementos validativos segunda categoría.

V3: Elementos validativos tercera categoría.

V4: Elementos validativos cuarta categoría.

L1: Libro uno.

L2: Libro dos.

L3: Libro tres.

3.2.1 Elementos Intensivos

Dentro de los elementos intensivos se presentan en lo que sigue definiciones y propiedades relacionadas con los Intervalos de confianza.

3.2.1.1 Definiciones

[2] El gráfico emergente, es un gráfico que no clasifica ni pertenece a algunas de las categorías propuestas por Olivo o Behar, pues tiene características diferentes para analizar.

Las definiciones relativas a Intervalos de confianza versan sobre diferentes aspectos que configuran su conceptualización. Entre ellas se reporta la definición misma de **intervalo** de confianza, nivel de confianza, precisión, margen de error, entre otros aspectos. Algunas de dichas definiciones son más generales que otras.

3.2.1.1.1 Definiciones de Intervalo de Confianza

Olivo (2008): Significado de los Intervalos de confianza para los Estudiantes de Ingeniería en México.

Teniendo como referente esta tesis, Olivo (2008) reconoce diferencias en la forma como se enuncia la definición de un intervalo de confianza, al mencionar tres connotaciones distintas que pueden haber.

En primer lugar, un intervalo de confianza, *desde el contexto de estimación (DIO1)* es un rango de valores (calculado a partir de los datos de una muestra) en el cual podría encontrarse el verdadero valor del parámetro, junto con un coeficiente de confianza que indica el porcentaje de muestras tomadas en las mismas condiciones, en las cuales el intervalo cubriría el verdadero valor del parámetro. (Olivo, 2008, p. 11).

En segundo lugar, como *procedimiento general (DIO2)*, un intervalo de confianza describe una regla general de construcción de dicho rango de valores a partir de un estadístico calculado para los datos de la muestra, para el parámetro correspondiente. (Olivo, 2008, p.11).

Finalmente, en tercer lugar, un intervalo de confianza visto *como estimación por Intervalos* se enuncia en formas como las siguientes:

DIO3: Llamamos intervalo de confianza al intervalo que con un cierto nivel de confianza, contiene al parámetro que se está estimando. (Olivo, 2008, p. 12).

DIO4: Una estimación por intervalo de un parámetro poblacional θ es un intervalo de la forma $\theta_L < \theta < \theta_U$, donde θ_L y θ_U dependen del valor del estadístico Θ para una muestra particular y también de la distribución de muestreo de Θ.

DIO5: El intervalo $\theta_L < \theta < \theta_U$ que se calcula a partir de la muestra seleccionada, se llama entonces intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$, la fracción $1-\alpha$ se denomina coeficiente de confianza o grado de confianza, y los puntos extremos θ_L y θ_U, sellaman límites de confianza inferior y superior respectivamente.

DIO6: Si x es la media de una muestra aleatoria de tamaño n de una población con σ conocida, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)\ 100\%$, para μ es,

$$x - Z_{\propto_2} \frac{\sigma}{\overline{n}} < \mu < x + Z_{\propto_2} \frac{\sigma}{\overline{n}}$$

donde $Z_{\propto_2}$ es el valor de Z a la derecha del cual se tiene un área de $\propto/2$. Miller, Freund y Johnson (1992 citados en Olivo 2008, p.13).

DIO7: Intervalo de confianza: intervalo aleatorio que con un cierto nivel de confianza, contiene al parámetro que se está estimando.

<u>Behar (2007): ¿Estamos buscando el ahogado aguas arriba? El caso de la estimación con Intervalos de confianza.</u>

En su artículo Behar (2007) describe la importancia de poner en contexto la valoración crítica de la idea de estimación por medio de Intervalos de confianza, ilustrándolo con el caso más simple de la estimación de la media μ, de una población normal con variabilidad σ conocida. Para definir la estimación por Intervalos de confianza se tiene en cuenta la referencia para estudiar a fondo la teoría sobre este tema es semióticas (Mood, Graybill y Boes, 1974 citado en Behar, 2007) y (Casella y Berger, 1990 citado en Behar, 2007).

DB1: Un intervalo de confianza (IC) es un rango de valores en el que, con cierto nivel de confianza, podría encontrarse el valor de cierto parámetro que se desea estimar. (Yánez y Behar, 2009, p.02).

3.1.1.1.2 Definiciones de Nivel de Confianza

Se presentan dos versiones de cómo se define el nivel de confianza a saber:

DNO1: El nivel de confianza es la probabilidad de que un intervalo calculado a partir de una muestra aleatoria contenga al verdadero valor del parámetro. Se suele representar por $1 - \alpha$ y habitualmente se da en porcentaje. (Olivo, 2008, P.12).

DNO2: Nivel de confianza: valor de probabilidad que fijamos para construir el intervalo. Indica la frecuencia de muestras que darán un intervalo conteniendo el valor del parámetro. (Olivo, 2008, p.14).

DNO3: Por ejemplo la expresión “nivel de confianza” remite a un valor de probabilidad, pero interpretado como un porcentaje de intervalos construidos a partir de una misma muestra que cubren el verdadero valor del parámetro. (Olivo, 2008, p.41).

DNB1: El nivel de confianza nos dice la probabilidad de que el método de producir Intervalos de confianza, genere uno que contenga la media poblacional μ. La probabilidad hace relación al método (datos, intervalo) y no al parámetro. (Behar, 2007, p.41).

DNBY2: El nivel de confianza, es la probabilidad a priori de que el intervalo de confianza a calcular contenga al verdadero valor del parámetro. Yánez y Behar, (2009).

3.2.1.2 Propiedades

Se describirán las propiedades en tres ámbitos: el numérico, el algebraico y el estadístico. Esta descripción obedece en parte, a que en los Intervalos de confianza se identifica una relación respecto al nivel de confianza que se puede considerar desde tres miradas: como un valor o resultado de un cálculo, como un algoritmo u operación y como un resumen o parámetro de una distribución. Así, la mirada a dichos aspectos es posible establecerla a través de propiedades de tipo numérico, algebraico y estadístico, respectivamente.

Las propiedades numéricas son todas aquellas que se pueden relacionar con la posición de los valores que resultan al calcular los extremos de los Intervalos de confianza, el nivel de confianza asumido y el tamaño de la muestra, en tanto que estos últimos son determinadores del coeficiente de confianza y el error estándar del estimador para definir la longitud del intervalo.

Las propiedades algebraicas son el resultado de establecer o considerar el intervalo de confianza como un conjunto de valores sobre los que se puede operar en un sentido conjuntista. Es decir, operaciones como la unión e intersección de Intervalos y el complemento de un intervalo sería relevante de revisar en los textos respecto a la conservación de invariantes asociados. En este sentido se observa que ni la unión ni la intersección de dos Intervalos de confianza preserva el nivel de confianza establecido, mientras que el complemento traslada la confianza, expresada a través del valor ' $1-\alpha$' a la idea de nivel de significación, es decir, del valor de α. Tampoco tiene sentido asociar un elemento neutro a operaciones algebraicas de conjuntos relativas a Intervalos de confianza.

Por otra parte, las propiedades estadísticas son aquellas que se deducen cuando se considera el intervalo como un estimador del parámetro de los datos, es decir, respecto a la información que nos proporciona del conjunto de datos muestreado.

3.1.2.2.1 Propiedades Numéricas del Intervalo de Confianza

PNIO1: Si consideramos todas las muestras distintas de tamaño n que puedan ser extraídas de la población X, y con las observaciones de cada una construimos los correspondientes Intervalos, según la estructura anterior, el $1\text{-}\alpha$ de estos intervalos contendrán el parámetro μ. (Olivo, 2008, p.16).

PNIO2: Si extraemos una muestra de tamaño n y con los datos μ observaciones $x_1, x_2, \dots \dots . x_n$, calculamos los extremos del intervalo, dispondremos del concreto intervalo de confianza para el parámetro μ, contendrá dicho parámetro con una confianza $1 - \alpha.$ (Olivo, 2008, p.17).

PNIO3: La amplitud del intervalo de confianza depende del valor de:

$$E = Z_{\propto/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Con un nivel de confianza del *1-α %* admitimos que la diferencia entre la estimación para la media μa partir de la muestra y su valor real es menor que E, que llamaremos error máximo admisible. (Olivo, 2008, p.17).

De acuerdo con el experto Behar (2007) se presentan algunas propiedades numéricas como lo son:

PNIB1: Que entre mayor confianza se exija al mecanismo generador de intervalos, en promedio más anchos serás los mismos. (Behar, 2007, p. 04).

PNIB2: Aumentando el tamaño de la muestra se logran intervalos más cortos, lo cual es deseable. (Behar, 2007, p. 05).

3.1.2.2.2 Propiedades Numéricas del Nivel de Confianza

PNnvO1: El nivel de confianza establece en alguna medida la longitud del correspondiente intervalo de confianza. Aumentando el nivel de confianza (mayor certeza), aumenta la longitud (menor precisión). (Olivo, 2008, p.17).

PNnvO2: El tamaño de la muestra depende del nivel de confianza que se desee para los resultados y de la amplitud del intervalo de confianza, es decir del error máximo que se esté dispuesto a admitir. Fijados estos, *1-α* y E, podemos calcular el tamaño mínimo de la muestra que emplearemos. (Olivo, 2008, p.17).

$$n = \left(z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{E} \right)^2$$

De acuerdo con el experto Behar (2007) se presentan algunas propiedades numéricas como lo son:

PNnvB1: Intervalos más cortos con niveles de confianza más altos son deseables, sin embargo, teniendo constante el tamaño de muestra, acortar la longitud del intervalo se hace a costa de disminuir la confianza del intervalo. (Behar, 2007, pp. 13).

PNnvB2: Niveles de confianza más elevados conducen a intervalos más anchos que niveles bajos de confianza. (Behar, 2007, pp. 13).

3.2.2 Elementos Ostensivos

En esta parte se muestran las representaciones más utilizadas por los textos universitarios para presentar los Intervalos de confianza. Sabiendo que los elementos ostensivos son todo tipo de representación de un objeto matemático, como los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.). Algunos de estos son:

3.2.2.1 Términos y expresiones verbales

De acuerdo a las definiciones y procedimientos, los siguientes objetos matemáticos intervienen en la definición y conceptualización para los Intervalos de confianza:

TO1: Son aquellas palabras específicas de las matemáticas que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano.

Para este apartado se encuentran los siguientes términos dados por (Olivo, 2008):

a) *Parámetro*: Propiedad numérica de una población, constante, pero desconocido, que determina la distribución de la variable en la población.
b) *Tamaño de la muestra*: número de sujetos de que está compuesta la muestra que estamos analizando. Se representa por (n).
c) *Variable estadística*: conjunto de valores de la variable aleatoria en la muestra; le corresponde una distribución de frecuencias.

d) *Estadístico*: Propiedad numérica de la distribución de frecuencias en la muestra. Valor conocido, pero varía de una muestra a otra, es decir, es una variable aleatoria. El estadístico es un estimador del parámetro.

e) *Distribución muestral*: distribución de los valores que tomará el estadístico al seleccionar todas las posibles distintas muestras de la población. Es decir, distribución de probabilidad del estadístico, considerado como variable aleatoria. Depende también del parámetro desconocido.

f) *Valor esperado*: es el promedio de todos los valores de una variable aleatoria. Se puede referir a la población (media de la población) o a la distribución muestral (media del estadístico).

TO2: Son aquellas palabras que aparecen en las matemáticas y el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos.

a) *Disper*sión: Medida que indica en promedio la variabilidad de los datos, respecto a la media.

b) *Nivel de confianza:* valor de probabilidad que fijamos para construir el intervalo. Indica la frecuencia de muestras que darán un intervalo conteniendo el valor del parámetro.

c) *Intervalo de confianza*: intervalo aleatorio que con un cierto nivel de confianza, contiene al parámetro que se está estimando.

d) *Límites de variación*: determinan el error en la estimación.

TO3: Son las palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

a) *Población:* Conjunto de personas, mediciones u objetos con características bien definidas, que serán el grupo de interés de la investigación.

b) *Variable aleatoria*: Variable que estudiamos en la población y que tiene una distribución de probabilidad, que depende de uno o varios parámetros.

c) *Muestra*: Subconjunto de la población.

3.2.2.2 Notaciones y símbolos

Se sabe que las notaciones no solamente son empleadas para representar los conceptos de Intervalos de confianza sino para realizar operaciones con los mismos y constituir una forma abreviada y precisa para representar conceptos o proposiciones.

NBY1: $\mu \pm \rho$ evidencia el significado del margen de error ρ, ya que al afirmar que x_n pertenece a ese intervalo se está afirmando que el error máximo, cuando se usa este valor como estimador de μ, es ρ. (Behar y Yañez, 2009).

NBY2: $\mathrm{x_n} \pm \rho$ es el intervalo que con confianza, $100(1-\alpha)\%$ contiene al parámetro μ es el intervalo de confianza asociado a la muestra considerada. (Behar y Yañez, 2009).

NB1: $\langle \mu \rangle_{1-\alpha} = \left(\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ Intervalo de Confianza para μ. (Behar, 2007, p.04).

3.2.2.3 Tablas y Gráficos Estadísticos

En el caso de la inferencia estadística, es importante el orden de los elementos característicos y representación de los datos, los gráficos es uno de esos elementos que siempre están presentes en la Estadística. Se reconoce en los gráficos un medio elocuente de comunicar ideas, para refutar teorías, de representar relaciones entre varias variables, de usarlos para distinguir con ellos el foco de atención, en cómo se cuestionan los datos, en sus propósitos, en la precisión de la información cualitativa extraída de ellos y la realización ocasional de funciones instrumentales. En estas se encuentran tablas y los gráficos que se identifican para los Intervalos de confianza son como se ven a continuación.

GO1: Este tipo de gráfica mostrando cierta cantidad de Intervalos de confianza construidos a partir de una cantidad de muestras de un mismo tamaño de una población. (Olivo, 2008, p.12).

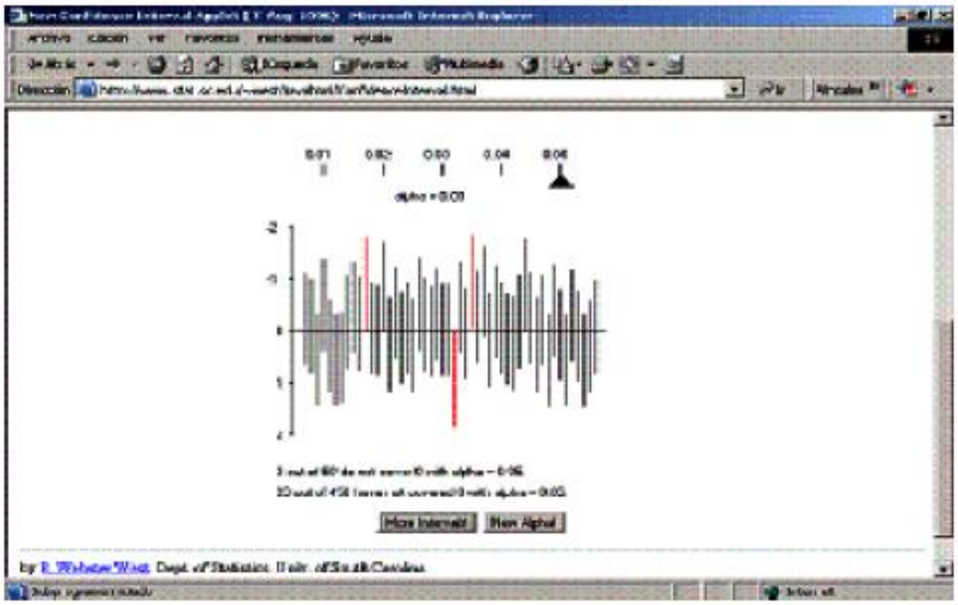
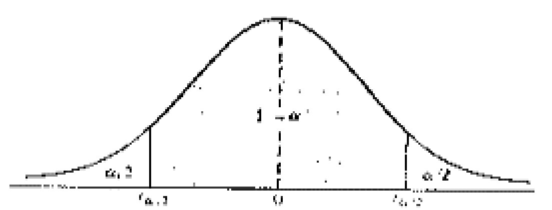


Figura 2. Simulación de intervalos de confianza

GO2: Diagramas de caja para comparar las medias provenientes de muestras de dos poblaciones diferentes. (Olivo, 2008, p. 102).

GO3: Gráfica de dispersión con intervalos de confianza, esta gráfica se obtiene al ajustarse el modelo de regresión lineal simple y calcular los intervalos de confianza para un valor medio. (Olivo, 2008, p. 102).



$$P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Figura 3. Distribución t de Student mostrando el coeficiente de confianza $1 - \alpha$

GO4: Se presenta un ejemplo de la simulación de muestreo realizada por el ordenador y obtención del intervalo de confianza usando el paquete MINITAB que aparece en (Johnson y Kuby, 2004 citado en Olivo, 2008). (Olivo, 2008, p. 103).

8.135 La siguiente salida de computadora presenta una muestra simulada de tamaño 25 generada aleatoriamente de una población normal con $\mu = 130$ y $\sigma = 10$. Luego se usó un comando para establecer un intervalo de confianza del 95% para μ.

116.187	119.832	121.782	122.320	141.436	129.197	119.172
120.713	135.765	131.153	122.307	126.155	137.545	141.154
123.405	143.331	121.767	109.742	140.524	150.600	121.655
127.992	136.434	139.768	125.594			

N	MEAN	STDEV	SE MEAN	95.0 PERCENT C.I.
25	129.02	10.18	2.00	(125.10, 132.95)

Figura 4. Simulación de muestreo.

GO5: Figura con diferentes intervalos de estimación del parámetro μ , construida para visualizar la interpretación clásica de los intervalos de confianza, tomada del libro (Walpole y Myers, 1992 citado en Olivo, 2008) se exhibe este tipo de gráfica. (Olivo, 2008, p. 103).

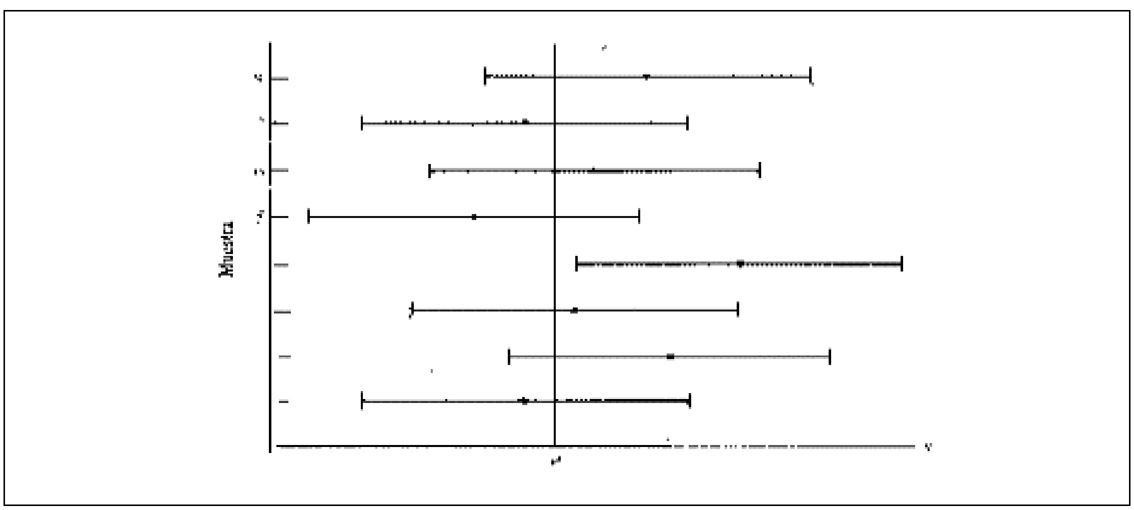


Figura 5. Diferentes estimaciones por intervalos de μ para diferentes muestras del mismo tamaño.

GB1: Puede hacerse la analogía del mecanismo de generación de intervalos, con una pistola cuya munición son los datos y dispara una "grapa" (un intervalo). (Behar, 2007, p. 05).

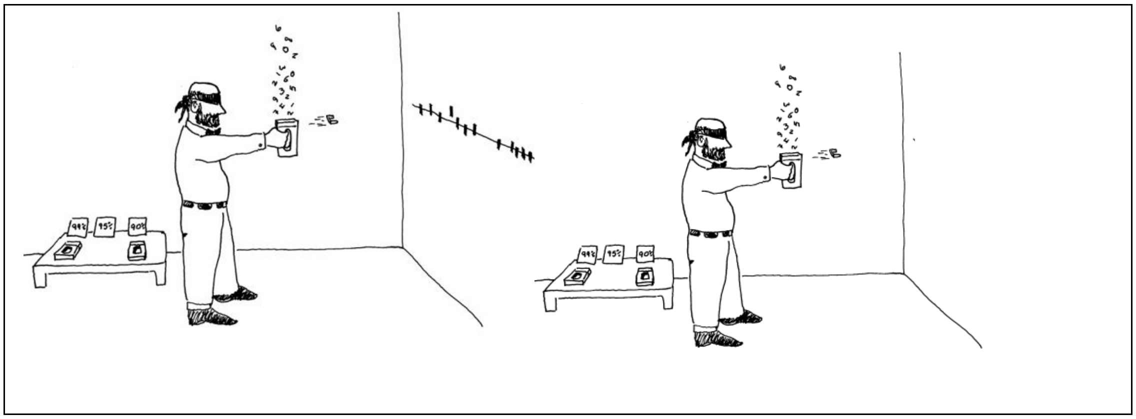


Figura 6. Interpretación del Nivel de confianza en la estimación por Intervalos.

En este gráfico se destacan dos características que evidencian la aplicabilidad de los Intervalos de confianza, estas son:

a) Juicio sobre la calidad (confianza) del generador de intervalos.

b) Aplicación del generador de Intervalos a una situación particular de la realización de una muestra aleatoria.

"…quien dispara tiene los ojos vendados, para indicar que no conoce donde está el "blanco", esto es análogo a la idea de que la verdadera media poblacional es desconocida, sin embargo si se siguen ciertas indicaciones del fabricante, como pararse recto, con las piernas separadas, y los brazos perpendiculares al cuerpo, por ejemplo, se garantiza que si hace muchos disparos, el 95% de las veces atrapará el blanco, que está representado por la línea horizontal en la pared. Es decir, que la confianza está asociada al instrumento generador (constructor) de Intervalos, y esta confianza existe antes de hacer el disparo concreto con mis datos como se ilustra en la parte (b) de la figura, es decir antes de conocer "mi" intervalo de confianza calculado con los datos resultantes de la realización de una muestra aleatoria". (Behar, 2007, p. 05).

3.2.3 Elementos Actuativos

A continuación se muestra una clasificación de los diversos procedimientos necesarios para solucionar problemas de estimación por Intervalos de confianza teniendo en cuenta los dos expertos Olivo y Behar, desde un nivel institucional.

3.2.3.1 Algoritmos y Procedimientos

Los procedimientos suelen variar en el cálculo del intervalo de confianza de acuerdo al nivel de confianza ya que están ligadas a la variación de los datos y tamaño que se tome de una muestra en particular, lo que hace referencia a todos los procesos para dar solución a un problema.

Al concretizar el intervalo de confianza para un parámetro particular sedetermina un procedimiento de obtención del mismo. Como ejemplo, vamos a ilustrarel procedimiento de obtención de un intervalo de confianza, considerando unapoblación normal con varianza desconocida, siendo el parámetro a estimar su media μ .

A continuación se muestran los procedimientos existentes para el cálculo de los Intervalos de confianza:

AO1: Un intervalo de confianza para un parámetro, digamos la media poblacional μ se calcula a partir de un estadístico muestral (media) más o menos una medida del error del muestreo (el cual es el error de una muestra aleatoria), multiplicado por un valor crítico que se obtiene de la distribución de muestreo del estadístico. (Olivo, 2008, p. 18).

AO2: Consideramos una muestra aleatoria $x_1, x_2, \dots \dots . x_n$ de tamaño n extraída de la población x. El estadístico que emplearemos, relacionado con el parámetro μ, será:

$$\frac{x-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

siendo x la media de la muestra y s su desviación típica. Este estadístico sigue una distribución muestral T de Student con $(n-1)$ grados de libertad. El nivel de confianza $1-\alpha$, establecido a priori por el experimentador (los usuales son 0.95, 0.90 y 0.99). Dada la distribución del estadístico y el nivel de confianza, se tiene la siguiente igualdad probabilística:

$$p\left(-t_{\alpha/2} < \frac{x-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

siendo $t_{\alpha/2}$ el valor crítico en la T de Student. La expresión anterior es equivalente a:

$$p\left(x - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < x + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

que hace referencia a que con una probabilidad $1-\alpha$ el intervalo aleatorio

$$\left(x - t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}, x + t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

contendrá el valor medio μ. (Olivo, 2008, p.16).

AB1: Estimación de la media μ por medio de un intervalo de confianza.

Sea x una variable aleatoria con distribución μ, estamos interesados en la estimación del parámetro μ, por medio de un intervalo de confianza. Supondremos que σ^2 es conocida. Para ello se toma una muestra aleatoria $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ de dicha población.

Como $X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow$ todas las $X \sim N(\mu, \sigma)$, de esta manera

$$X_n = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Por lo tanto $Z = \frac{X_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$. (Cantidad Pivotal)

Si se quiere construir un intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confianza.

Aprovechando la condición de Z, que depende del parámetro de interés μ, pero su distribución no depende de él (cantidad pivotal), podemos encontrar ahora valores z_1 y z_2 tales que:

$P\{z_1 < Z < z_2\} = 1-\alpha$

Existen muchos valores de z_1 y z_2 que satisfacen la expresión anterior, en particular si $-z_1 = z_2 = z$, es decir, si se toma un intervalo con centro en cero, tendríamos:

$P\{-z < Z < z\} = 1-\alpha \Rightarrow P\{Z < z\} = 1-\frac{\alpha}{2}$, $\rightarrow \quad \varphi \quad Z_{1-\alpha \; 2} \; = 1-\frac{\alpha}{2}$ donde φ representa la función de distribución acumulativa de probabilidad para la distribución normal estándar.

Así que, $P\left\{-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$, de donde:

$$P\left\{\underbrace{\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{ALEATORIO} < \mu < \underbrace{\bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{ALEATORIO}\right\} = 1-\alpha$$. Intervalo de Confianza para μ

(Behar, 2007, p. 04).

AB2: La construcción de un intervalo de confianza se realiza a partir de un estadístico calculado con los datos de una muestra. Calculada la desviación típica del estadístico y obtenido un valor crítico asociado a su distribución correspondiente a la mitad del complemento del valor del coeficiente de confianza elegido $(\alpha/2)$, el producto del valor crítico por el error estándar se constituye en el radio del intervalo que está centrado en el valor del estadístico de la muestra obtenida. Este procedimiento general adopta formas particulares de acuerdo al parámetro que se desee estimar (media, proporción, varianza, etc.) y según el conocimiento que se tenga de la población de la cual se quiere estimar el parámetro. (Behar, 2007, p. 04).

3.2.4 Elementos Extensivos

Son los campos de problemas de donde surge el objeto matemático, es decir todas las situaciones problema con base en los Intervalos de confianza, cuya resolución hace surgir la idea de Intervalos de confianza, y que en su conjunto definen el campo de problemas relativo al concepto. A continuación se muestran los campos de problemas que evidencia Olivo (2008):

CPO1: Estimar un parámetro desconocido para una población

Con frecuencia se desea estudiar un fenómeno aleatorio que viene caracterizado por una distribución de probabilidad, que depende de uno o varios parámetros, por ejemplo, la media. Pero no es posible recolectar los datos de toda la población, sino que hemos de contentarnos con una muestra aleatoria de la misma en donde se calcula un estadístico que sirve para estimar el parámetro. Una estimación por Intervalos tiene la ventaja de dar un margen de error.

De acuerdo a esto, se han encontrado los siguientes subcampos:

CPO1.2: Estimar la media de una población

Debido a que la media muestral X es un estimador insesgado de μ y de mínima varianza, X se considera el mejor estimador de la media μ. En la construcción del intervalo de confianza para la media poblacional, es necesario tomar en cuenta los supuestos que le dan validez a los procedimientos.

CPO1.3: *Estimar la media de una población aproximadamente normal cuando, σ es desconocida.*

Debido a que σ es desconocida en muchas aplicaciones prácticas, el procedimiento para estimar la media de una población es similar al utilizado cuando se conoce la varianza excepto que σ se sustituye por S, la estimación en la muestra y la distribución normal estándar por la distribución T de Student.

CPO1.4: Estimar la media de una población a partir de datos experimentales σ desconocida, muestra grande (n > 30).

Con σ desconocida para muestras grandes se procede a la aproximación de sustituir σ por la desviación estándar de la muestra s y se utiliza nuevamente la distribución normal estándar en la construcción del intervalo de confianza para la media, el Teorema Central del Límite valida estos procedimientos.

3.2.5 Elementos Validativos

La relevancia que tienen los Intervalos de confianza en Estadística, es destacada por el hecho de que están siendo cada vez más apreciados para realizar inferencias estadísticas en comparación a los contrastes de hipótesis. Muchos autores indican que los contrastes de hipótesis deben complementarse con la estimación del efecto, proporcionando Intervalos de confianza para los mismos, especialmente si se llega a un resultado no significativo. (Olivo, 2008, p.19).

En suma, todas las definiciones, propiedades, problemas y algoritmos relacionados entre ellas mediante argumentos o razonamientos son utilizados para verificar o demostrar resultados y propiedades de un objeto matemático. Se han encontrado los siguientes tipos de argumentos en las respectivas categorías:

V1: Comprobación de casos particulares y contraejemplos.

En esta forma de validar un resultado no se encontró un ejemplo específico o argumento en general para realizar en contraste entre los libros y los expertos.

V2: Uso de gráficos cuando la argumentación verbal o simbólica se apoya en las propiedades visuales de un gráfico auxiliar.

Esta gráfica permite ver el uso de gráficos para abarcar la interpretación de la construcción de Intervalos de confianza de varias muestras en una población. (Olivo, 2008, p.12).

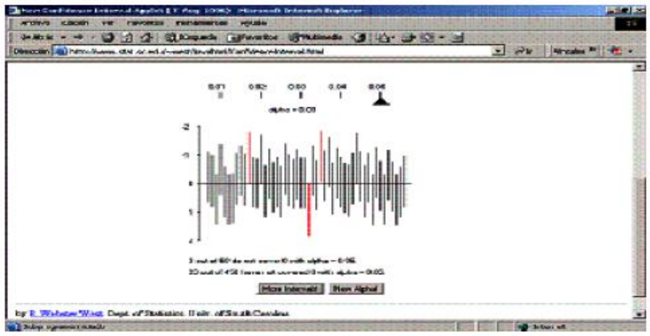


Figura 7. Simulación de Intervalos de confianza.

Esta figura permite evidenciar diferentes intervalos de estimación del parámetroμ, construida para visualizar la interpretación clásica de los intervalos de confianza. (Olivo, 2008, p. 103).

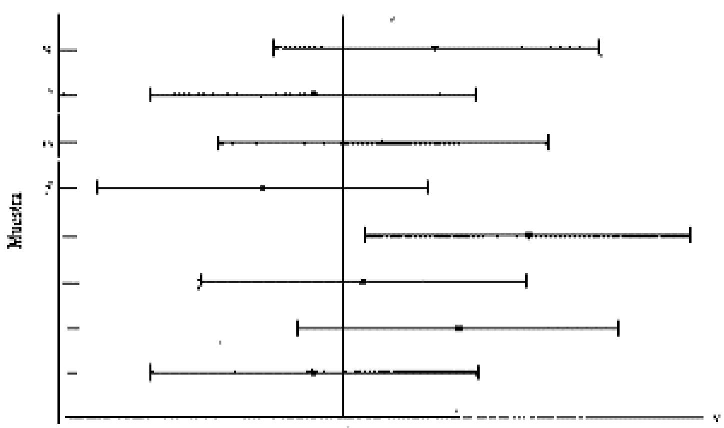


Figura 8. Diferentes estimaciones por intervalos de μ para diferentes muestras.

V3: Razonamientos algebraicos deductivos.

Por ejemplo, un intervalo de confianza del 95% tendrá una banda más ancha que un intervalo de confianza del 90% para los mismos datos, ya que cuanto más seguro se desee estar del punto que captura el valor de la media poblacional, con menos certeza se pueden establecer los límites. En otras palabras, el nivel de confianza y la amplitud del intervalo varían conjuntamente. (Olivo, 2008, p.89).

V4: Razonamientos verbales deductivos, basados en propiedades previas.

Una de las formas de evidenciar esta categoría de validación es tomando el siguiente ejemplo: Si se utiliza varias veces la estimación de Intervalos de confianza del 95%, se espera que en el 95% de las ocasiones, la media de la población se encuentre en el intervalo, o en términos equivalentes, que una vez de cada 20, se encuentre por fuera de él. (Olivo, 2008, p.19).

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

En el presente capítulo se aborda el análisis de tres textos universitarios tomando como referencia el marco conceptual y metodología construido en los capítulos anteriores. Como primera etapa se muestran los resultados de la revisión de los textos desde el marco conceptual, evidenciando y planteando un análisis descriptivo con base en los elementos identificados en cada texto, lo cual corresponde a un análisis cualitativo. Posteriormente se hace una descripción y conclusión para cada texto y elemento constituyente del Enfoque Ontosemiótico (EOS), con el fin de describir los resultados encontrados en cada libro analizado y lograr encontrar los elementos de significado que constituyen el EOS contenido en cada uno de ellos.

4.1 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LOS TEXTOS ESTUDIADOS

En seguida se presentan los elementos de significado que contempla el Enfoque Ontosemiótico con la relación que hace Batanero (2000, p. 04) asociados al análisis de los Intervalos de confianza para cada uno de los textos analizados.

Inicialmente se consideraron cuatro libros para el análisis, debido a la magnitud del trabajo implicado al abordar el primer libro se vio la necesidad de restringir los análisis a tres textos solamente. Los textos que han sido seleccionados para el análisis de los Intervalos de confianza están en las áreas de la salud, la biología y las ciencias sociales; dichos textos están basadas en publicaciones que ejemplifican la aplicación de la estadística en dichas áreas. Además, va dirigida a una población de tipo universitaria en donde la temática que es objeto de este trabajo (Intervalos de confianza), es expuesta y desarrollada.

4.1.1 Primer libro (L1)

Estadística para las Ciencias Sociales. El potencial de la imaginación estadística. McGraw-Hill/Interamericana, S.A. de C.V., (2002) México, D.F. Ritchey Ferris. Este libro consta de 609 páginas, está organizado en 16 capítulos, donde los primeros cinco capítulos aborda la estadística descriptiva, los siguientes capítulos contemplan la estimación de parámetros con la estadística inferencial, correlación y regresión. El tema de estimación del parámetro usando Intervalos de confianza es contemplado en un capítulo completo que consta 23 páginas. Lo que corresponde al 3,78% de la totalidad de páginas que contiene el libro. Este libro está dirigido a estudiantes de especialidades en Ciencias Sociales que por lo común tienden a tener antecedentes limitados de matemáticas y se quejan por tener que tomar algún curso en Estadística. El texto intenta enseñar los conceptos difíciles en la Estadística como los son margen de error, nivel de confianza, pruebas de hipótesis, entre otros, sin sacrificar conceptos matemáticos y sus cálculos. Así mismo convencer a los estudiantes de que las matemáticas son sólo una herramienta, no como esencia si no para aprender estadística.

La estructura de sus contenidos consolida el orden. En primer lugar se encuentra la imaginación[3] Estadística, luego se aborda la estadística descriptiva con algunos conceptos como el análisis estadístico, gráficos, estimación de promedios, entre otros. Luego las Teorías y Distribuciones de la Probabilidad, Estimación de un parámetro por Intervalos de confianza, comprobación de hipótesis, Análisis de varianza, Variables nominales con sus respectivas distribuciones y por último los capítulos que corresponden a Correlación y Regresión.

[3] Una estadística, no significa mucho por sí misma. Un principio importante de la imaginación estadística es que al hacer interpretaciones estadísticas se deben tener en cuenta las circunstancias de un fenómeno, incluso los valores de la sociedad o algún grupo dentro de ella.

4.1.2 Segundo libro (L2)

El libro de Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud de la editorial Limusa, S.A, publicado en el año 2004, en México cuyo autor es Daniel W. Wayne. Este libro consta de 737 páginas, está organizado en 14 capítulos, donde los primeros siete capítulos aborda la estadística descriptiva, siendo el tema de Estimación de Intervalos de confianza contemplado en un capítulo completo que consta 50 páginas. Lo que corresponde al 6,78% de la totalidad de páginas que contiene el libro. Este libro es dirigido a estudiantes, graduados y profesionales de la salud que necesiten un texto de consulta en metodología estadística. Desde la publicación de la primera edición, el uso que ha tenido y logrado ha sido de gran impacto según el autor, para la enseñanza de la Estadística.

En primer lugar se encuentra la Introducción a la Bioestadística, luego se aborda la estadística descriptiva con algunos conceptos básicos de las probabilidades desde un enfoque social, en donde enfatizan que se necesitan de pocos requisitos matemáticos, como el conocimiento básico del álgebra y los que fundamentan el cálculo. Además se abordan conceptos como Distribuciones de probabilidad de muestreo importantes, la estimación, Prueba de hipótesis, Análisis de Variancia, Regresión y Correlación lineal simple, múltiple, Distribución Ji- Cuadrada y análisis de Frecuencias, Estadística no Paramétrica y de libre distribución y por último Estadísticas vitales.

4.1.3 Tercer libro (L3)

Matemáticas, Azar y Sociedad. Conceptos básicos de estadística. Grupo Cuarta Edición de la Editorial Iberoamérica, consta de 317 páginas, el tema de Intervalos de confianza es dedicado en un capítulo completo que consta de 13 páginas. Lo que equivale al 4.01% de la totalidad de páginas que contiene el libro. Como lo sugieren los autores Perry, Mesa, Fernández y Gómez (1996): “Este libro de texto es uno de los resultados de un proceso de innovación curricular desarrollado en el segundo curso del ciclo de matemáticas para estudiantes de ciencia sociales de la Universidad de los Andes" (p.11). Aunque está dirigido a estudiantes universitarios, como una propuesta de enseñanza para la implementación de cursos de Probabilidad y Estadística o de Estadística elemental, también ha sido utilizado en contextos escolares de grado once, en instituciones como el Instituto Pedagógico Nacional (Perry et al., 1997).

El orden de los contenidos consolida un orden en el que primeramente se aborda la estadística descriptiva desde un enfoque social, en donde se contextualizan situaciones ficticias de problemáticas sociales. Además se abordan conceptos como los de Población y muestra, Variables, Gráficos de datos, Medidas de tendencia central, Medidas de dispersión desde lo descriptivo; y Distribución normal, Intervalos de confianza y Pruebas de hipótesis, desde lo inferencial.

4.2 ELEMENTOS INTENSIVOS

Se sabe que los elementos intensivos son referidos a todas las definiciones, propiedades y características de un objeto matemático, para ello los elementos intensivos encontrados en los textos analizados son:

4.2.1 Definiciones

4.2.1.1 Definiciones de intervalo de confianza

Con base en la primera y segunda definición encontrada en este primer libro se refiere la categoría de *DIO1* (*contexto de estimación*).

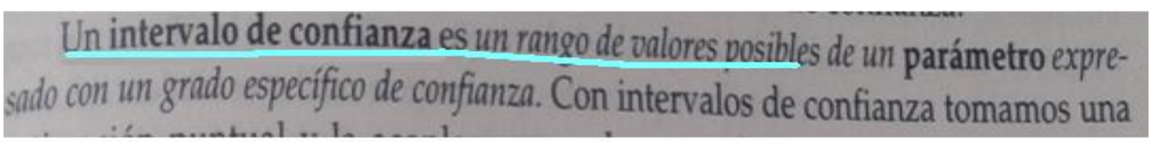

Un **intervalo de confianza** es *un rango de valores posibles de un* **parámetro** *expresado con un grado específico de confianza.* Con intervalos de confianza tomamos una

Figura 9. (L1, p. 227)

Intervalo de confianza

Rango de valores posibles de un parámetro expresado con un grado específico de confianza.

Figura 10. (L1, p. 227)

Esta definición del libro dos, se relaciona con la categoría DIO3, ya que la estimación y nivel de confianza son términos de la definición que estan sujetos a esta categoría.

DEFINICIÓN

Una *estimación por intervalos* consta de dos valores numéricos que definen un intervalo que, con un grado específico de confianza, se considera que incluye al parámetro por estimar.

Figura 11. (L2, p.151).

Para la definición del libro tres, sucede lo mismo que el primer libro, su definición corresponde a *DIO1*, ya que en dicha categoría la definición está sujeta a un parámetro.

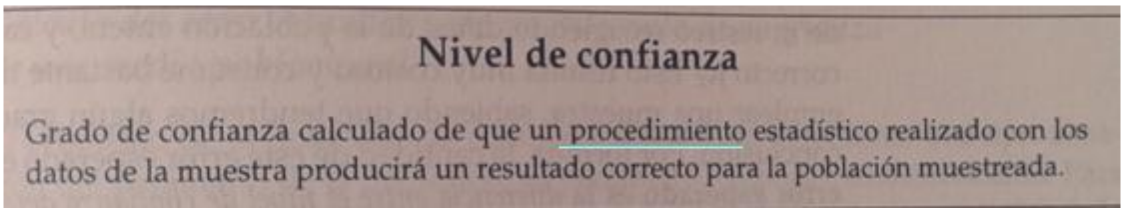
Un *intervalo de confianza* para estimar un parámetro, a partir del correspondiente valor del estadístico de una muestra (estimador), es un intervalo con centro en dicho estimador y un cierto radio. El intervalo, probablemente incluye el parámetro de interés.

Figura 12. (L3, p. 235).

En suma, en el primer y segundo libro establecen un parámetro a estimar con un grado específico de confianza a diferencia del tercero: en el primer y segundo libro se establecen valores posibles de un parámetro, y en cambio en el tercer libro se establece dichos valores denominados como un radio. En los tres libros se menciona la estimación de un parámetro en general.

4.2.1.2 Definiciones de nivel de confianza

Para la definición del primer libro, esta no se relaciona con las definiciones dadas por los expertos, ya que la definición se presenta en términos de procedimiento lo que hace ser distinta de las definiciones dadas por Olivo (2008) y Behar (2007).



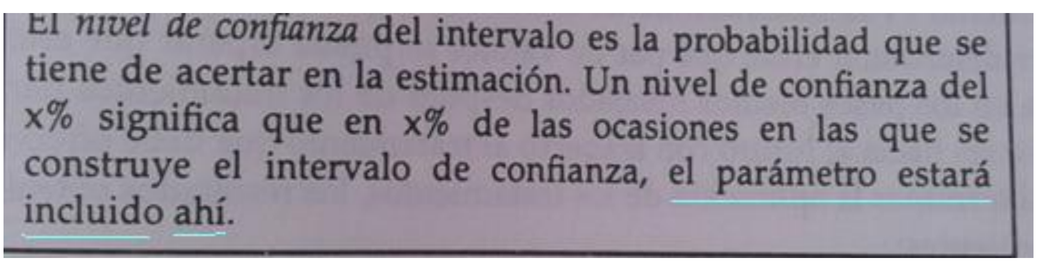
Nivel de confianza

Grado de confianza calculado de que un procedimiento estadístico realizado con los datos de la muestra producirá un resultado correcto para la población muestreada.

Figura 13. (L1, p. 229).

En el segundo libro, no se identifica una definición del nivel de confianza.

Para el tercer libro, la definición está relacionada con la definición *DNO3*, pues indica la probabilidad de contener un parámetro.



El *nivel de confianza* del intervalo es la probabilidad que se tiene de acertar en la estimación. Un nivel de confianza del x% significa que en x% de las ocasiones en las que se construye el intervalo de confianza, el parámetro estará incluido ahí.

Figura 14. (L3, p. 235).

Se concluye que en el primer libro se establece el nivel de confianza como un grado de confianza de un procedimiento para producir un resultado, en tanto que en el tercer libro se establece como una probabilidad de acertar una estimación.

4.2.1.3 Definiciones de Precisión[4]

Sólo aparece la definición de precisión en el segundo libro, esta no es comentada ya que ninguno de los expertos define precisión en algún momento.

> ***Precisión*** A la cantidad que se obtiene al multiplicar el factor de confiabilidad por el error estándar de la media se le llama *precisión* de la estimación. También, se le llama *margen de error*.

Figura 15. (L2, p.157).

Se verifica entonces que sobre la idea de precisión la mayoría de textos no la comentan.

4.2.2 Propiedades

Se presentarán las propiedades mencionadas en la metodología: numéricas, algebraicas y estadísticas. Esta descripción obedece en parte, a que en los Intervalos de confianza hay relación con el nivel de confianza. A continuación se presentan el análisis de los textos con dichas propiedades.

4.2.2.1 Propiedades Numéricas

4.2.2.1.1 Propiedades numéricas del Intervalo de confianza

En el primer libro, se evidencia sólo una propiedad para los Intervalos de confianza, que corresponde a *PNIB2* ya que menciona el tamaño de la muestra con su precisión.

[4] Esta definición no está sujeta a alguna categoría establecida por los referentes Olivo (2008) y Behar (2007), sin embargo es presentada en el libro dos como una de las herramientas que contempla el Intervalo de confianza.

La relación entre el tamaño de la muestra y el grado de precisión

A mayor tamaño de la muestra, más preciso será el intervalo de confianza.

Figura 16. (L1, p. 241).

En el segundo libro, no se evidenciaron propiedades de los Intervalos de confianza.

En el tercer libro, la primera definición no se relaciona con alguna propiedad discutida por los expertos, ya que esta menciona la certidumbre en relación a la precisión de un intervalo, lo cual no es mencionado por ellos.

la estimación son dos conceptos diferentes, pero relacionados entre sí. Entre más precisa sea una estimación, existe menos certidumbre de que sea buena, y recíprocamente, entre menos precisa sea una estimación, existe más certidumbre de que sea buena. En el siguiente esquema se presentan dos estimaciones de μ, hechas a partir del valor $\overline{x_1}$ de una cierta muestra. La primera es menos precisa que la segunda, pero tiene mayor grado de certidumbre.

Figura 17. (L3, p. 227).

Para resumir, en el primero le dan importancia a la precisión del intervalo al estimar el parámetro dependiendo del tamaño de la muestra. Mientras que en el tercer libro se establece una proporción inversa de certidumbre con la de precisión.

4.2.2.1.2 Propiedades numéricas del Nivel de confianza

En cuanto a la primera y segunda definición dadas en el primer libro, las propiedades se relacionan con la *PNnvO1*, pues menciona, la relación entre el nivel de confianza con la amplitud y precisión del intervalo.

Cuanto mayor sea el nivel de confianza escogido, mayor será t_α. Por consiguiente en el cálculo de los límites de confianza, un valor t_α grande produce un término del error grande y un intervalo de confianza menos preciso (o más amplio).

Figura 18. (L1, p. 238).

La relación entre el nivel de confianza y el grado de precisión

Mientras mayor sea el nivel de confianza establecido, menos preciso será el intervalo de confianza.

Figura 19. (L1, p. 239).

Para el segundo libro, aunque Olivo (2008) no menciona de forma explícita la relación de la distribución normal con la distribución $t_\propto$ específicamente, se relaciona con *PNnvO1*, ya que toma el coeficiente de confiabilidad, siendo que uno de sus elementos es el nivel de confianza para comparar con la amplitud del intervalo.

o margen de error. Para un error estándar dado, incrementar la confiabilidad significa un coeficiente con mayor confiabilidad. Y un coeficiente con mayor confiabilidad produce un intervalo más amplio.

Figura 20. (L2, p.181).

Para el tercer libro no se identifican propiedades del nivel de confianza propuestas. Se concluye entonces que en el primer libro se mencionan propiedades de forma general asumiendo una distribución normal, lo que no sucede con el segundo libro en el cual se menciona la distribución T. Además que las propiedades encontradas están sujetas al nivel de confianza con la amplitud y precisión del intervalo, es decir a mayor nivel de confianza más amplio el intervalo y menos preciso será.

4.2.2.1.3 Propiedades Estadísticas de Intervalo de Confianza

En la presentación y análisis de los libros, no fueron evidentes las propiedades estadísticas como tal, sólo se presenta de forma general en el primer libro, como se muestra a continuación:

> Proporcionar una estimación intervalar del valor de un parámetro desconocido de la población y expresar con precisión la confianza que tenemos de que el parámetro caiga dentro de ese intervalo.

Figura 21. (L1, p. 228).

De acuerdo a las propiedades estadísticas, la información dada en el libro, no se deduce alguna característica de la población, ni del estimador del parámetro de los datos, no proporciona ni comenta sobre el conjunto de datos, sino de forma general.

4.3 ELEMENTOS OSTENSIVOS

En esta parte se muestran las representaciones más utilizadas por los textos universitarios para presentar los Intervalos de confianza.

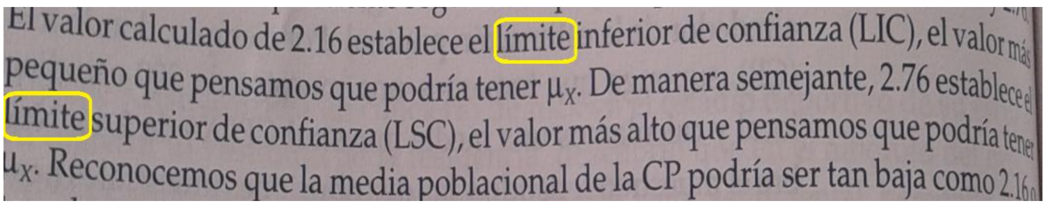
4.3.1 Términos y expresiones verbales

Para esta parte los términos y expresiones verbales que constituyen los Intervalos de confianza, están ligados a términos en sus diversos registros tanto escrito como oral y gestual. Esto se refiere a todas las palabras y frases que se usan para describir los conceptos cercanos a Intervalos de confianza, sus operaciones respectivas y transformaciones determinadas del análisis al calcular un parámetro específico. Están clasificadas en tres aspectos distintos, sin dar importancia del orden en el que se prensentan:

T1: Son aquellas palabras específicas de las matemáticas que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano.

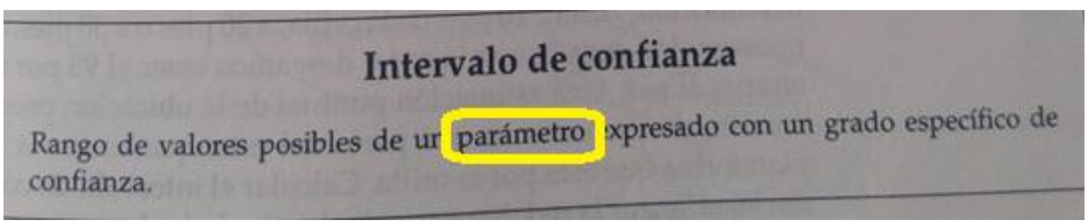
Libro L1: Límites, parámetro.

En este libro esta se destacan palabras como Límites y parámetro las cuales pertenecen a la categoría *T1.*



El valor calculado de 2.16 establece el límite inferior de confianza (LIC), el valor más pequeño que pensamos que podría tener μ_X. De manera semejante, 2.76 establece el límite superior de confianza (LSC), el valor más alto que pensamos que podría tener μ_X. Reconocemos que la media poblacional de la CP podría ser tan baja como 2.16

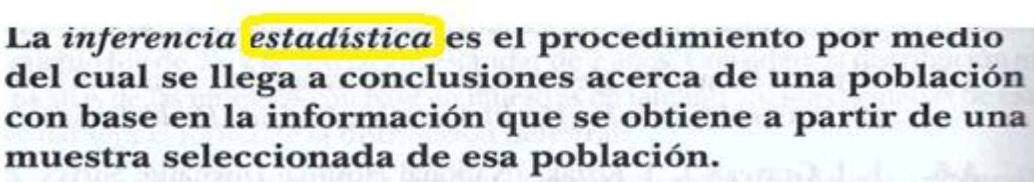
Figura 22. (L1, p. 228).



Intervalo de confianza

Rango de valores posibles de un parámetro expresado con un grado específico de confianza.

Figura 23. (L1, p. 227).



La *inferencia estadística* es el procedimiento por medio del cual se llega a conclusiones acerca de una población con base en la información que se obtiene a partir de una muestra seleccionada de esa población.

Figura 24. (L2, p. 151).

En el muestreo repetido, de una población con distribución normal y desviación estándar conocida $100(1-\alpha)$ por ciento de todos los intervalos de la forma $\bar{x} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sigma_{\bar{x}}$ incluyen a la larga la media de la población μ.

Figura 25. (L2, p.152).

Libro L3: Estimación, inferencia, Distribución, probabilidad, parámetro.

Un *intervalo de confianza* para estimar un parámetro a partir del correspondiente valor del estadístico de una muestra (estimador), es un intervalo con centro en dicho estimador y un cierto radio. El intervalo, probablemente incluye el parámetro de interés.

Figura 26. (L3, p.235).

El *nivel de confianza* del intervalo es la probabilidad que se tiene de acertar en la estimación. Un nivel de confianza del x% significa que en x% de las ocasiones en las que se construye el intervalo de confianza, el parámetro estará incluido ahí.

Figura 27. (L3, p.235).

En resumen se observa, en general, que los tres libros mencionan términos claves que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano como son: Parámetro, Estimación, Confiabilidad o probabilidad. Además, en el segundo libro se destacan términos que más complejos, pues requieren de mayor estudio de definición más que de un término**.**

T2: *Son aquellas palabras que aparecen en las matemáticas y el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos*.

Libro L1: Rango, Intervalo, Nivel de confianza, Límites.

Intervalo de confianza

Rango de valores posibles de un parámetro expresado con un grado específico de confianza.

Figura 28. (L1, p. 227).

Libro L2: Estimación, precisión, estadística, confiabilidad, intervalo, desviación.

En este libro esta se destacan palabras como Estimación, precisión, confiabilidad e intervalo las cuales que pertenezcan a *T2.*

Precisión A la cantidad que se obtiene al multiplicar el factor de confiabilidad por el error estándar de la media se le llama *precisión* de la estimación. También, se le llama *margen de error*.

Figura 29. (L2, p.157).

o margen de error. Para un error estándar dado, incrementar la confiabilidad significa un coeficiente con mayor confiabilidad. Y un coeficiente con mayor confiabilidad produce un intervalo más amplio.

Figura 30. (L2, p.157).

Libro L3: Intervalo, desviación, estimación, población, certidumbre, confiabilidad.

estimador ± r, donde r depende de dos aspectos de la distribución muestral implicada en el caso (modelo y fórmula para calcular el error estándar) y también depende del grado de certidumbre que se quiera tener.

Figura 31. (L3, p. 235).

En la sección anterior se hizo mención siempre a la estimación de la media de una población y debió quedar claro el proceso de construcción de intervalos a través de los cuales se hace la estimación. Pues bien, la esencia de ese proceso

Figura 32. (L3, p. 235).

Se concluye que el libro uno menciona más términos matemáticos, mientras que el segundo y tercer libro presentan términos que se asocian tanto a la matemática como a la cotidianidad.

T3: Son las palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

Libro L1: Cálculo, fórmula, frecuente, Especificaciones.

Al calcular un intervalo de confianza, ... una muestra, su media, su desviación estándar y su tamaño son "especificaciones". Es decir, no podemos deshacernos de ellos. Tales especificaciones determinan el error estándar del intervalo de confianza y, por consiguiente, influencian grandemente la amplitud del intervalo de confianza calculado. Si la desviación estándar es grande o el tamaño de la muestra es pequeño, el intervalo de confianza resultará amplio; por tanto, no será muy preciso. Después de que la muestra es "especificada", sin embargo, tal vez aún influyamos en la precisión de un intervalo de confianza a través de nuestra elección del nivel de confianza. El nivel de confianza elegido determina

Figura 33. (L1, p. 238).

Libro L2: Precisión, cálculo, Estimación, Distribución.

Distribución muestral y estimación Para obtener dicha estimación por intervalos, se debe aprovechar el conocimiento acerca de las distribuciones muestrales. En este caso, puesto que el interés está en la media de la muestra como estimador de la media de una población, es necesario recordar lo que se sabe respecto a la distribución muestral de la media de la muestra.

Figura 34. (L2, p. 154)

Libro L3: Confiabilidad, estimación, distribución, probabilidad, parámetro.

El *nivel de confianza* del intervalo es la probabilidad que se tiene de acertar en la estimación. Un nivel de confianza del x% significa que en x% de las ocasiones en las que se construye el intervalo de confianza, el parámetro estará incluido ahí.

Figura 35. (L3, p. 235).

Por ejemplo, si la distancia de la media muestral que se tiene, $\bar{x}$, a la media de la distribución es menos 1,96 errores estándar, entonces un intervalo con centro en tal media muestral y radio igual a 1,96 errores estándar contendrá a la media de la distribución muestral –que es la misma media poblacional– con una probabilidad de acertar del 95%. Y, entonces se dirá:

se estima que μ está en el intervalo$[\bar{x}-1{,}96EE(\bar{x}), \bar{x}+1{,}96EE(\bar{x})]$ con una probabilidad de acertar del 95%.

Figura 36. (L3, p. 232).

En suma, en el libro dos y tres presentan términos muy similares entre ellos y a su vez a la categoría de *T3*, en cambio el primer libro presenta palabras diferentes para ambos contextos.

4.3.2 Notaciones y símbolos

Es importante aclarar que los expertos mantienen como notación unicamente la simbología matemática, más que la expresión en palabras de la estimación por intervalos. De acuerdo a ello, lo que se analizó en los textos fue lo siguiente:

Para el primer caso, la descripción es más de expresión y de escritura que en símbolos matemáticos.

Intervalo de confianza = una estimación puntual ± un término del error

Figura 37. (L1, p. 230).

Para el segundo libro, la notación es de tipo simbología- matemática y de expresión con palabras indicando los distintos coeficientes de confiabilidad dependiendo del tamaño de la muestra y de la aplicación de dicha estimación.

Cálculo del error estándar (estimado) de un intervalo de confianza de una media poblacional

$$s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{n-1}}$$

donde

$s_{\bar{X}}$ = error estándar estimado de medias para una variable X de intervalo/razón u ordinal de tipo intervalo

s_X = desviación estándar de una muestra

n = tamaño de la muestra

Figura 38. (L1, p. 233).

Sucede lo mismo que lo anterior, este maneja una simbología y a su vez matemática.

Cálculo de intervalos de confianza al 95 y 99 por ciento de una media poblacional para una situación común donde $n > 120$

$$IC\ 95\%\ \text{de}\ \mu_X = \bar{X} \pm (1.96)\,(s_{\bar{X}})$$

e

$$IC\ 99\%\ \text{de}\ \mu_X = \bar{X} \pm (2.58)\,(s_{\bar{X}})$$

donde

X = una variable de intervalo/razón

$IC\ 95\%$ de μ_X = "Intervalo de confianza al 95% de la media poblacional de X"

$IC\ 99\%$ de μ_X = "Intervalo de confianza al 99% de la media poblacional de X"

$\bar{X}$ = media de la muestra

$s_{\bar{X}}$ = Error estándar estimado de la media

Figura 39. (L1, p. 233).

Cálculo de un intervalo de confianza (IC) de una media poblacional

$$(100\% - \alpha)\ IC \text{ de } \mu_X = \bar{X} \pm (t_\alpha)\,(s_{\bar{X}})$$

donde

α = nivel de significancia (o error esperado, expresado como un porcentaje)
$(100\% - \alpha)$ = nivel de confianza
IC de μ_X = "intervalo de confianza de una media poblacional"
$\bar{X}$ = media de la muestra
t_α = puntuación t crítica que corresponde al nivel de significancia y confianza establecidos y al número de grados de libertad
$s_{\bar{X}}$ = error estándar (estimado) de un intervalo de confianza de la media

Figura 40. (L1, p. 233).

Lista breve de verificación de los cinco pasos para calcular intervalos de confianza

Paso 1. Enuncie la pregunta de investigación, identifique el nivel de medición de la variable, liste las "especificaciones" y elabore un diagrama conceptual de la población y muestra de interés (como en la figura 8-1).
Paso 2. Calcule el error estándar y el término del error.
Paso 3. Calcule el LIC y el LSC del intervalo de confianza.
Paso 4. Proporcione una interpretación en lenguaje cotidiano.
Paso 5. Proporcione una interpretación estadística que ilustre la noción de "confianza en el procedimiento".

Figura 41. (L1, p.234).

Para el libro dos, maneja una forma de simbología y a su vez matemática.

$$\text{estimador} \pm (\text{coeficiente de confiabilidad}) \times (\text{error estándar})$$

Figura 42. (L2, p.156).

$$\bar{x} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sigma_{\bar{x}} \qquad (6.2.2)$$

donde $z_{(1-\alpha/2)}$ es el valor de z a la izquierda de donde está $1 - \alpha/2$ y a la derecha en que se encuentra $\alpha/2$ del área bajo la curva.

Figura 43. (L2, p. 156).

Intervalos de confianza que utilizan la distribución t

estándar. Para ser más específicos, *cuando se obtienen muestras a partir de una distribución normal cuya desviación estándar, σ, se desconoce, el* $100(1-\alpha)$ *por ciento del intervalo de confianza para la media de la población, μ, está dado por*:

$$\bar{x} \pm t_{(1-\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (6.3.1)$$

Figura 44. (L2, p. 163).

Intervalo de confianza para la diferencia entre dos medias poblacionales.

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Figura 45. (L2, p. 167).

El tercer texto se hace diferente al primer y segundo libro ya que muestra la notación totalmente descriptiva en palabras, sin mayor grado de complejidad o uso de simbología matemática.

estimador ± r, donde r depende de dos aspectos de la distribución muestral implicada en el caso (modelo y fórmula para calcular el error estándar) y también depende del grado de certidumbre que se quiera tener.

Figura 46. (L3, p. 235).

$$[\bar{x} - r; \bar{x} + r] = [1,5 - r; 1,5 + r]$$

Figura 47. (L3, p. 226).

Se concluye entonces que en el primer y segundo libro se evidencia la notación descriptiva y matemática acompañada de símbolos matemáticos que de alguna manera es relacionada con la categoría *NB1,* pues la notación está sujeta a la simbología y descripción matemática, mientras que en el tercer libro sólo maneja la notación descriptiva, sólo palabras y uso la notación con r, lo que equivale al radio del intervalo, lo cual no se clasifica con alguna categoría señalada.

4.3.3 Tablas y Gráficos Estadísticos

En el caso de la Inferencia estadística, es importante el orden de los elementos característicos y representación de los datos, las tablas y los gráficos que se identifican para los Intervalos de confianza. Con base en ello, se evidencian los siguientes en los libros.

Para el primer y segundo libro, las gráficas estan relacionadas *GO1*, *GO3 y GO5*, pues han sido construidas haciendo uso de la simulación (software) para explicar la cantidad de Intervalos que contienen un paràmetro en determinada estimación y tomando una distribución en especial, la distribución normal que en últimas es la misma distribución T con la diferencia de que la normal se ha tabulado ampliamente.

Además, la distribución normal es parte fundamental de la representación de los Intervalos de confianza indicando el parámetro central a contener.

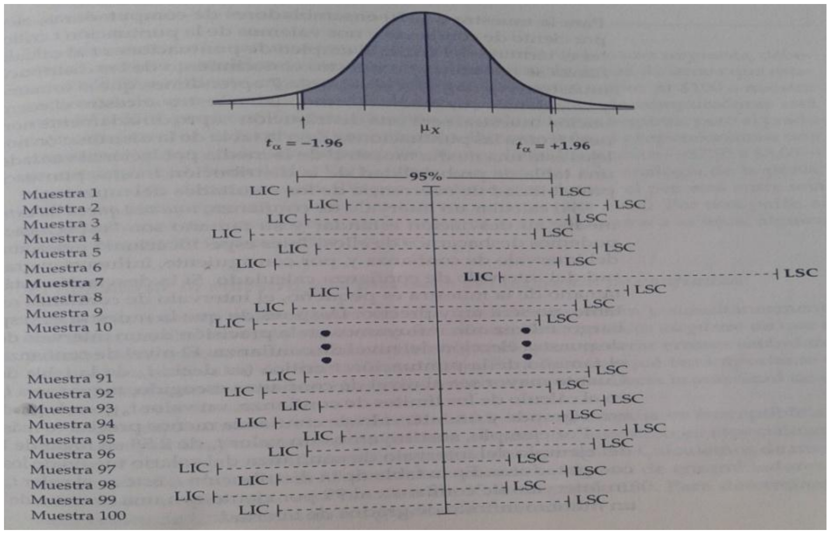


Figura 48. (L1, p. 237).

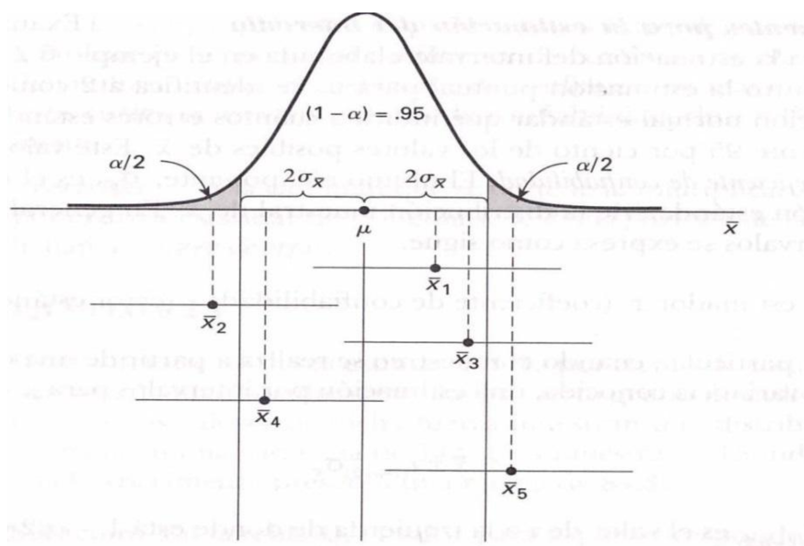
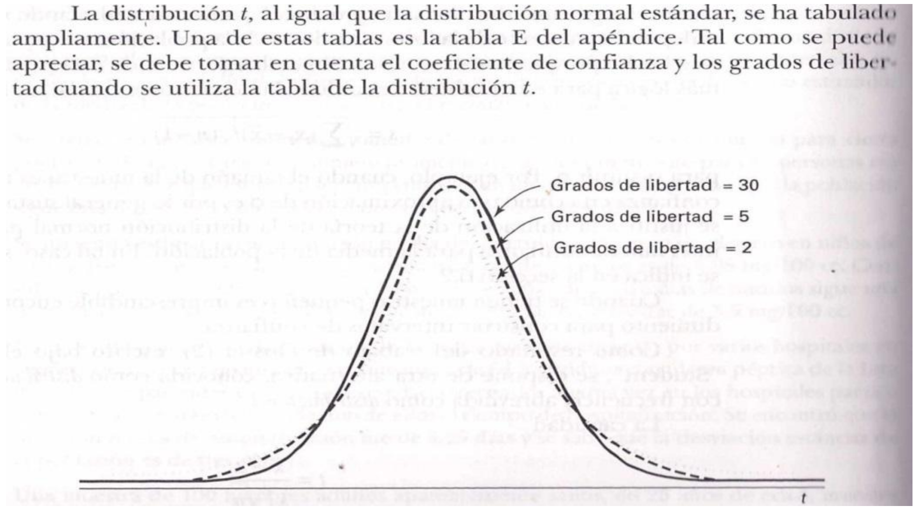


FIGURA 6.2.1 Intervalo de confianza de 95 por ciento para μ

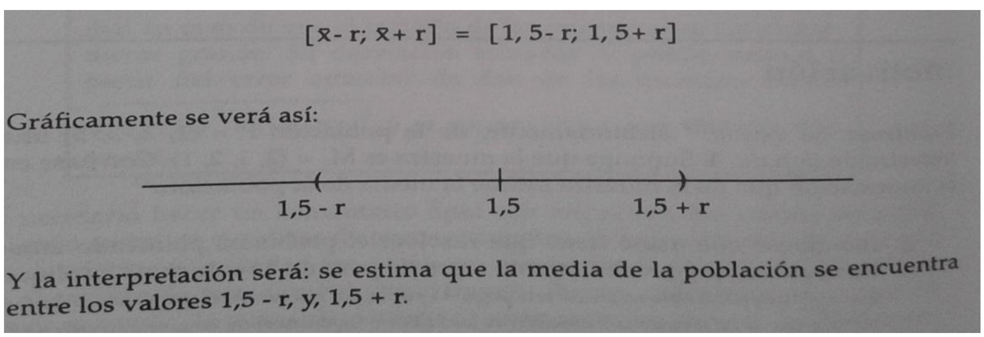
Figura 49. (L1, p. 237).



La distribución t, al igual que la distribución normal estándar, se ha tabulado ampliamente. Una de estas tablas es la tabla E del apéndice. Tal como se puede apreciar, se debe tomar en cuenta el coeficiente de confianza y los grados de libertad cuando se utiliza la tabla de la distribución t.

Figura 50. (L2, p. 162).

Por otro lado, el tercer libro ilustra una forma distinta forma de representar los Intervalos, tomando diferente desviación y tamaño o radio en cada uno dichos Intervalos pero para una misma media. Este tipo de representación no se relaciona con alguna de las categorías propuestas.



$$[\bar{x} - r; \bar{x} + r] = [1,5 - r; 1,5 + r]$$

Gráficamente se verá así:

Y la interpretación será: se estima que la media de la población se encuentra entre los valores 1,5 - r, y, 1,5 + r.

Figura 51. (L3, p. 226).

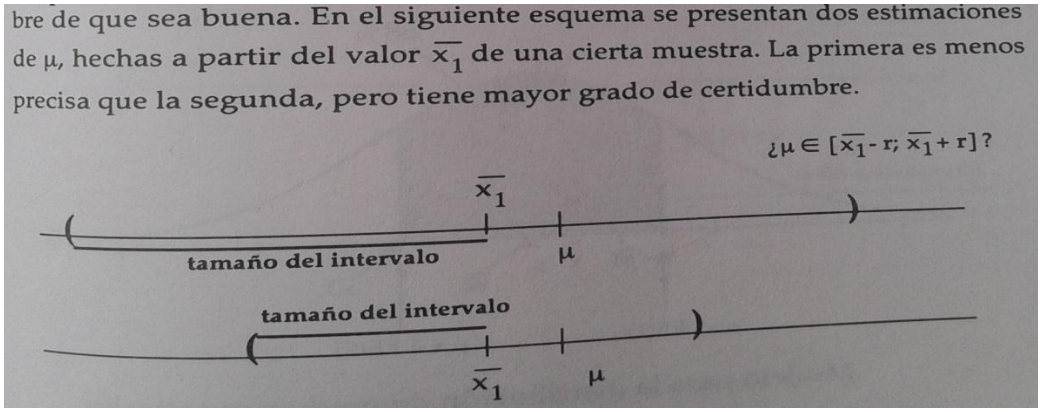

bre de que sea buena. En el siguiente esquema se presentan dos estimaciones de μ, hechas a partir del valor $\overline{x_1}$ de una cierta muestra. La primera es menos precisa que la segunda, pero tiene mayor grado de certidumbre.

Figura 52. (L3, p. 227).

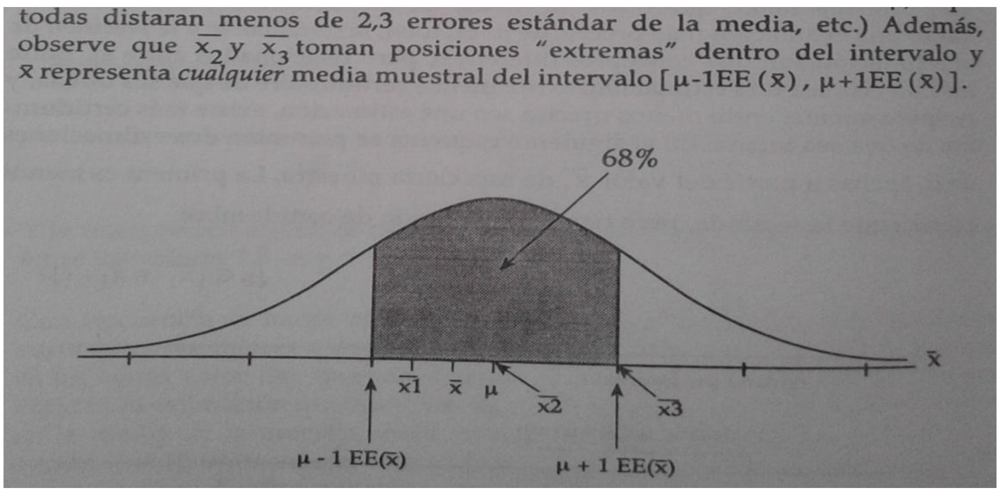

todas distaran menos de 2,3 errores estándar de la media, etc.) Además, observe que $\overline{x_2}$ y $\overline{x_3}$ toman posiciones "extremas" dentro del intervalo y $\bar{x}$ representa *cualquier* media muestral del intervalo $[\mu\text{-1EE}(\bar{x}), \mu\text{+1EE}(\bar{x})]$.

Figura 53. (L3, p. 228).

Se concluye que en el primer y segundo libro, se muestran simulaciones realizadas para la localización de la cantidad de Intervalos que contienen el parámetro. El tercer libro sólo tiene en cuenta el radio o tamaño del intervalo para tomar el intervalo que contenga μ. Los tres libros asumen una distribución normal.

4.4 Elementos Actuativos

A continuación se muestra una clasificación de los diversos procedimientos necesarios para solucionar problemas de la estimación por medio de Intervalos de confianza.

4.4.1 Algoritmos y procedimientos

Dentro de los procedimientos y algoritmos para calcular un intervalo de confianza están los siguientes que se encontraron en los textos universitarios. A continuación se muestran las formas de estimación.

Para el primer libro lo que se analizó fue lo siguiente:

1. *Primera forma de estimación: Estimación intervalar del valor del parámetro desconocido de la población con la Distribución t-student*:

Para calcular un intervalo de confianza, calculamos un error estándar. Entonces, mediante la tabla de distribución t (tabla estadística C en el apéndice B), obtenemos la puntuación t crítica (el t_α) que corresponde al número de grados de libertad $(n-1)$ y a un nivel de significancia o error esperado (α) escogido. Multiplicamos t por el error estándar para obtener un "término del error". Después sumamos y restamos este término del error a la media de la muestra. El margen de valores resultante constituye una estimación del intervalo de confianza de la media poblacional:

Intervalo de confianza = una estimación puntual ± un término del error

Figura 54. (L1, p. 230).

2. *Segunda forma de estimación: Cálculo de Intervalos de confianza de una media poblacional para una situación común donde* $n \geq 120$.

Cálculo de intervalos de confianza al 95 y 99 por ciento de una media poblacional para una situación común donde $n > 120$

IC 95% de $\mu_X = \bar{X} \pm (1.96)\,(s_{\bar{X}})$

e

IC 99% de $\mu_X = \bar{X} \pm (2.58)\,(s_{\bar{X}})$

donde

$X =$ una variable de intervalo/razón
IC 95% de $\mu_X =$ "Intervalo de confianza al 95% de la media poblacional de X"
IC 99% de $\mu_X =$ "Intervalo de confianza al 99% de la media poblacional de X"
$\bar{X} =$ media de la muestra
$s_{\bar{X}} =$ Error estándar estimado de la media

Figura 55. (L1, p. 233).

3. *Tercera forma de estimación: Cálculo de Intervalos de confianza de una media poblacional*

Cálculo de un intervalo de confianza (IC) de una media poblacional

$$(100\% - \alpha)\ IC \text{ de } \mu_X = \bar{X} \pm (t_\alpha)\ (s_{\bar{X}})$$

donde

α = nivel de significancia (o error esperado, expresado como un porcentaje)
$(100\% - \alpha)$ = nivel de confianza
IC de μ_X = "intervalo de confianza de una media poblacional"
$\bar{X}$ = media de la muestra
t_α = puntuación *t* crítica que corresponde al nivel de significancia y confianza establecidos y al número de grados de libertad
$s_{\bar{X}}$ = error estándar (estimado) de un intervalo de confianza de la media

Figura 56. (L1, p.233).

En los libros analizados, para el primer libro, la primera estimación que corresponde a la distribución T está relacionada con *AO2*, pues lo hace específicamente con la distribuciónT. Ahora la segunda y tercera estimación están relacionadas con la categoría *AB1*, pues la forma que estiman el parámetro es con una distribución normal, además describiendo cada paso del algoritmo de solución.

Para el segundo libro lo que se analizó fue lo siguiente:

1. *Primera forma de estimación*

Componentes para la estimación del intervalo Examine la composición para la estimación del intervalo elaborada en el ejemplo 6.2.1. Éste contiene en su centro la estimación puntual para μ. Se identifica a 2 como un valor de la distribución normal estándar que indica a cuántos errores estándar están aproximadamente 95 por ciento de los valores posibles de $\bar{x}$. Este valor de z se conoce como *coeficiente de confiabilidad*. El último componente, $\sigma_{\bar{x}}$, es el error estándar o desviación estándar, de la distribución muestral de $\bar{x}$. En general, una estimación por intervalos se expresa como sigue:

$$\text{estimador} \pm \text{(coeficiente de confiabilidad)} \times \text{(error estándar)} \qquad (6.2.1)$$

Figura 57. (L2, p. 156).

2. *Segunda forma de estimación: Intervalo de confianza para la media de una población.*

En particular, cuando el muestreo se realiza a partir de una distribución normal con variancia conocida, una estimación por intervalos para μ se expresa como:

$$\bar{x} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sigma_{\bar{x}} \qquad (6.2.2)$$

donde $z_{(1-\alpha/2)}$ es el valor de z a la izquierda de donde está $1 - \alpha/2$ y a la derecha en que se encuentra $\alpha/2$ del área bajo la curva.

Figura 58. (L2, p. 156).

3. *Tercera forma de estimación: Intervalos de confianza que utilizan la distribución t.*

Intervalos de confianza que utilizan la distribución t El procedimiento general para construir intervalos de confianza no se ve afectado por la necesidad de utilizar la distribución t en lugar de la distribución normal estándar. Aun es necesario usar la relación expresada por:

estimador ± (coeficiente de confiabilidad) × (error estándar)

Figura 59. (L2, p.163).

4. *Cuarta forma de estimación: Intervalos de confianza que utilizan la distribución t.*

Lo que es diferente es el origen del coeficiente de confiabilidad. Éste se obtiene a partir de la tabla de la distribución t en lugar de la tabla de la distribución normal estándar. Para ser más específicos, *cuando se obtienen muestras a partir de una distribución normal cuya desviación estándar, σ, se desconoce, el* 100(1 − α) *por ciento del intervalo de confianza para la media de la población, μ, está dado por*:

$$\bar{x} \pm t_{(1-\alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (6.3.1)$$

Figura 60. (L2, p.163).

para sustituir σ. Por ejemplo, cuando el tamaño de la muestra es mayor que 30, la confianza en *s* como una aproximación de σ es por lo general sustancial, por lo que se justifica la utilización de la teoría de la distribución normal para construir un intervalo de confianza para la media de la población. En tal caso, se procede como se indica en la sección 6.2.

Cuando se tienen muestras pequeñas es imprescindible encontrar otro procedimiento para construir intervalos de confianza.

Como resultado del trabajo de Gosset (2), escrito bajo el seudónimo de "Student", se dispone de otra alternativa, conocida como *distribución t de Student*, con frecuencia abreviada como *distribución t*.

Figura 61. (L2, p. 161).

Decidir entre z y t Cuando se obtiene un intervalo de confianza para la media de una población, se debe decidir si se utiliza un valor de *z* o de *t* como factor de confiabilidad. Para hacer una elección adecuada, se debe considerar el tamaño de la muestra, si la población muestreada sigue una distribución normal y si la varianza de la población es conocida. La figura 6.3.3 muestra un diagrama de flujo que se

Figura 62. (L2, p.164).

En el segundo libro, las dos primeras estimaciones asumen una distribución normal, por tal motivo están relacionadas con *AO1* y *AB1* respectivamente, pues lo describen de forma general, considerando una distribución normal y por último la tercera y cuarta estimación se asocian con *AO2,* pues asumen una distribución *t*-student.

Para el tercer libro lo que se analizó fue lo siguiente:

1. *Primera forma de estimación*

La situación presentada con las medias $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ y $\overline{x}$ se puede transferir a medias muestrales que disten más de 1 error estándar de la media de la distribución muestral, logrando así intervalos más amplios, a la vez más confiables, pero menos precisos.

Por ejemplo, si la distancia de la media muestral que se tiene, $\overline{x}$, a la media de la distribución es menos 1,96 errores estándar, entonces un intervalo con centro en tal media muestral y radio igual a 1,96 errores estándar contendrá a la media de la distribución muestral –que es la misma media poblacional– con una probabilidad de acertar del 95%. Y, entonces se dirá:

> se estima que μ está en el intervalo $[\overline{x}-1{,}96EE(\overline{x})\ ,\ \overline{x}+1{,}96EE(\overline{x})]$
> con una probabilidad de acertar del 95%.

Una vez tratado lo concerniente al tamaño del radio de los intervalos, podemos dar respuesta al problema propuesto al inicio de esta sección. Reto-

Figura 63. (L3, p.232).

2. *Segunda forma de estimación*

través de los cuales se hace la estimación. Pues bien, la esencia de ese proceso es la misma siempre que se quiera estimar un parámetro. Sólo cambian el modelo que se emplea (normal, u otros que aquí ni siquiera nombraremos) de acuerdo al comportamiento de la distribución muestral correspondiente, y el error estándar. En resumen, ese proceso se puede expresar así:

> estimador ± r, donde r depende de dos aspectos de la distribución muestral implicada en el caso (modelo y fórmula para calcular el error estándar) y también depende del grado de certidumbre que se quiera tener.

Figura 64. (L3, p.235).

El tercer libro, se relaciona con la primera categoría *AO1* de forma general y concisa indicando la simbología necesaria, utilizando una distribución para calcular el parámetro teniendo en cuenta el error de la muestra para calcular los Intervalos de confianza.

Como conclusión se observa que en el primer y segundo libro, se destacan por estimar un parámetro de acuerdo al tamaño de la muestra, lo que hace tener en cuenta la distribución *t*-student y la distribución normal para el cálculo de

Intervalos. Para el tercer libro, es evidente que no se estima el parámetro con una distribución específica, sino que se detiene en calcularlo de una forma general.

4.5 Elementos Extensivos

Dado que los elementos extensivos se describen como los campos de problemas que se relacionan con el objeto matemático, se pueden identificar los siguientes campos en los ejercicios planteados por los textos:

4.5.1 Situaciones – problemas

Los campos de situaciones-problemas relacionados con Intervalos de confianza que se presentan, inicialmente se muestran para dar respuesta a un panorama sobre todos los campos existentes, se describe detalladamente la clase de problemas para cada uno de los textos:

Para el primer libro se analizó el siguiente campo de problema:

Estimar un parámetro desconocido a partir de diversas mediciones realizadas.

Problema: Estamos realizando un estudio sobre la estructura salarial de una planta industrial que emplea a varios miles de ensambladores de computadoras. Necesitamos obtener una idea general del salario medio por hora de esta población de

ensambladores. Seleccionamos aleatoriamente 130 expedientes del personal y registramos los salarios por hora. En esta muestra encontramos una media de $8.00 y una desviación estándar de $1.70. Calcule el intervalo de confianza al 95 por ciento para el salario medio por hora de los ensambladores de la planta. (Al resolver un problema, no es necesario señalar las instrucciones que se mencionan en paréntesis.)

Figura 65. (L1, p.234, 235).

La situación-problema se asocia con *CPO1.2*, pues al estimar un parámetro desconocido en este caso el salario medio por hora, es necesario calcular

Intervalos de confianza para establecer el salario medio de estos ensambladores y aunque no se compruebe una hipótesis, se está estimando un parámetro desconocido.

Para el segundo libro se analizaron los siguientes campos de problema:

> Suponga que un investigador, interesado en obtener una estimación del nivel promedio de alguna enzima en cierta población de seres humano, toma una muestra de 10 individuos, determina el nivel de la enzima en cada uno de ellos, y calcula la media de la muestra $\bar{x} = 22$. Además, que la variable de interés sigue una distribución aproximadamente normal, con una variancia de 45. Se desea estimar el valor de μ.

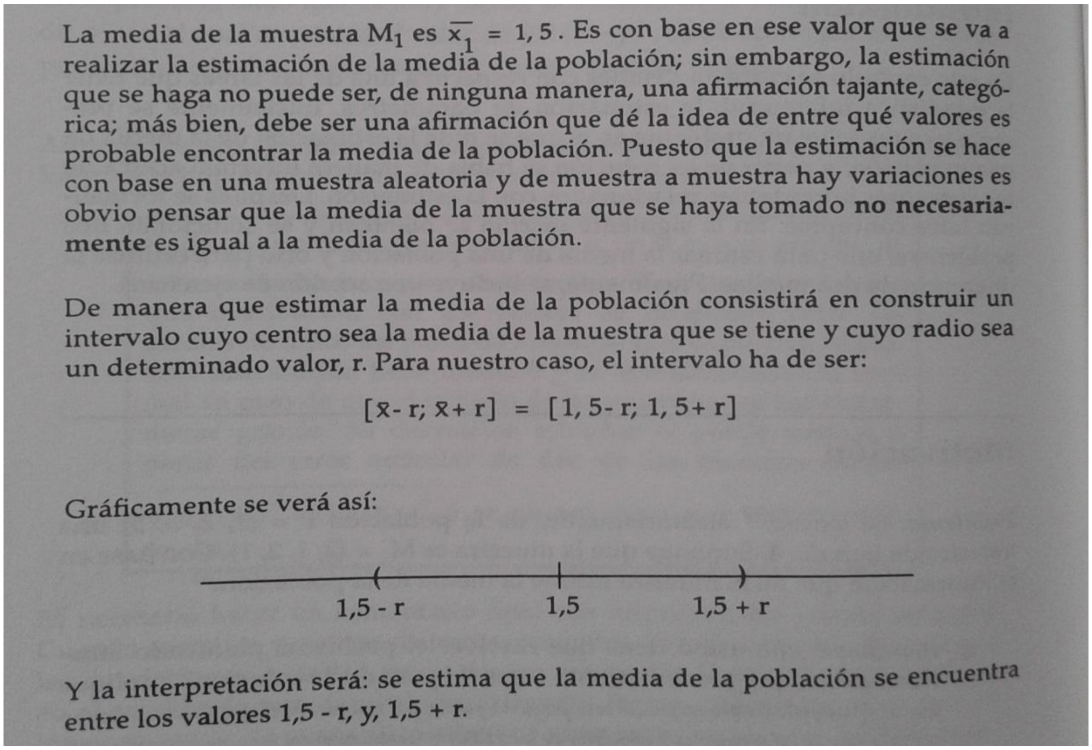
Figura 66. (L2, p.155).

> Un fisioterapeuta desea estimar, con 99 por ciento de confianza, la media de fuerza máxima de un músculo particular en cierto grupo de individuos. Se inclina a suponer que los valores de dicha fuerza muestran una distribución aproximadamente normal con una variancia de 144. Una muestra de 15 individuos que participaron en el experimento presentó una media de 84.3.

Figura 67. (L2, p.157).

Con el segundo libro, es evidente que se quiere estimar un parámetro a partir de una muestra de cierto tamaño, la estimación del promedio o media que se quiere obtener, además los dos ejemplos siguen una distribución se realiza a través del cálculo de Intervalos de confianza, por ende se relaciona *CPO1.2 y CPO1.4*.

Para el tercer libro se analizó el siguiente campo de problema:



La media de la muestra M_1 es $\overline{x_1} = 1,5$. Es con base en ese valor que se va a realizar la estimación de la media de la población; sin embargo, la estimación que se haga no puede ser, de ninguna manera, una afirmación tajante, categórica; más bien, debe ser una afirmación que dé la idea de entre qué valores es probable encontrar la media de la población. Puesto que la estimación se hace con base en una muestra aleatoria y de muestra a muestra hay variaciones es obvio pensar que la media de la muestra que se haya tomado **no necesariamente** es igual a la media de la población.

De manera que estimar la media de la población consistirá en construir un intervalo cuyo centro sea la media de la muestra que se tiene y cuyo radio sea un determinado valor, r. Para nuestro caso, el intervalo ha de ser:

$$[\bar{x} - r; \bar{x} + r] = [1,5 - r; 1,5 + r]$$

Gráficamente se verá así:

Y la interpretación será: se estima que la media de la población se encuentra entre los valores 1,5 - r, y, 1,5 + r.

Figura 68. (L3, p.226).

Se evidencia una forma diferente de estimar el parámetro, pues se soluciona tomando un radio y la gráfica del intervalo. Sin embargo, el hecho de estimar un parámetro para una media desconocida lo relaciona con *CPO1.2,* pues se tiene en cuenta un tamaño o r (radio del intervalo), un nivel de confianza calculando el intervalo de confianza.

En resumen en el tercer libro se estima el parámetro con base a un radio o tamaño del intervalo, de igual forma la gráfica contribuye a la explicación de la estimación de una media, mientras que el primer y segundo libro calcula el intervalo teniendo en cuenta los datos necesarios para estimar el parámetro de la situación-problema. La categoría *CPO1.3* no es utilizada ya que en ninguno de los textos se muestran problemas haciendo uso de la distribución t-student.

4.6 Elementos Validativos

Son todas las definiciones, propiedades, problemas y algoritmos relacionados entre ellas mediante argumentos o razonamientos que son utilizados para verificar o demostrar resultados y propiedades de un objeto matemático. Se han encontrado los siguientes tipos de argumentos en los textos:

4.6.1 Comprobación de casos particulares y contraejemplos

Para verificar si el intervalo que se construya contenga el parámetro se encuentran los casos particulares o los ejemplos en donde haya una contradicción en una situación determinada, como se presentan en las que siguen:

En el primer libro, se muestra una situación-problema comparando dos niveles de confianza, un ejemplo claro para el cálculo e interpretación de los Intervalos de confianza; a su vez involucra una situación tipo contraejemplo para verificar dicha interpretación con base a cada una de las herramientas que necesita el cálculo de Intervalos. Aunque los expertos no hayan evidenciado esta forma de validar el cálculo de Intervalos de confianza, es una alternativa para verificar tanto los cálculos, propiedades como la interpretación, por ello se relaciona con *V1*.

Situación- problema

Para una muestra de 130 ensambladores de computadoras, elegimos el nivel de 95 por ciento de confianza y nos valemos de la puntuación t crítica de 1.96 para calcular el término del error. El empleo de puntuaciones t al calcular Intervalos de confianza se relaciona con nuestro conocimiento de las distribuciones muestrales del muestreo repetido.

Si se toma un valor $t_{\propto}$ de 2.58 en lugar de 1.96 para un intervalo del salario medio de los ensambladores de computadoras en este ejercicio resulta:

Comparando los dos intervalos de confianza, observamos que tenemos mayor confianza en el nivel de 99 por ciento, pero que nuestra estimación es menos precisa:

IC 95% de μ_X = \$7.71 a \$8.29; este intervalo tiene una amplitud de \$ .58

IC 99% de μ_X = \$7.61 a \$8.39; este intervalo tiene una amplitud de \$ .78

Cuanto mayor sea el nivel de confianza establecido, mayor será el término del error y, por consiguiente, menos preciso será el intervalo de confianza.

Figura 69. (L1, p.239).

Como resultado se evidencia la interpretación de contradicción al realizar los cálculos.

Esto tiene sentido. Si vamos a tener mucha fe (o confianza) en una respuesta, debemos asegurarlo permitiendo bastante error. Por ejemplo, quizá diríamos que estamos 99.9999 por ciento seguros (y estaríamos dispuestos a apostar \$100 a nuestra respuesta) de que el salario medio de los ensambladores de computadoras está entre \$3 y \$100 por hora. En esta situación absurda estamos seguros; pero el grado de precisión es tan bajo que no tiene sentido. Por otro lado, si proporcionamos una estimación con un grado alto de precisión de, por decir, 10 centavos —\$7.95 a \$8.05— no apostaríamos demasiado. Para volver una vez más a la analogía de la pesca,

Figura 70. (L1, p.239).

En el segundo libro se presentan situaciones tipo ejemplo con el fin de estimar un valor o parámetro desconocido de dicha población, pues muestra una situación específica la cual es el nivel de enzima en seres humanos, realizando los determinados cálculos del intervalo de confianza para dar solución y respuesta al problema establecido, lo cual permite asociar este problema a la categoría de *V1* pues indica un ejemplo particular de estimación del parámetro, en este caso nivel promedio.

Suponga que un investigador, interesado en obtener una estimación del nivel promedio de alguna enzima en cierta población de seres humano, toma una muestra de 10 individuos, determina el nivel de la enzima en cada uno de ellos, y calcula la media de la muestra $\bar{x} = 22$. Además, que la variable de interés sigue una distribución aproximadamente normal, con una variancia de 45. Se desea estimar el valor de μ.

Solución: Un intervalo de confianza de aproximadamente 95 por ciento para μ está dado por:

$$\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$$

$$22 \pm 2\sqrt{\frac{45}{10}}$$

$$22 \pm 2(2.1213)$$

Figura 71. (L2, p.155).

Un fisioterapeuta desea estimar, con 99 por ciento de confianza, la media de fuerza máxima de un músculo particular en cierto grupo de individuos. Se inclina a suponer que los valores de dicha fuerza muestran una distribución aproximadamente normal con una variancia de 144. Una muestra de 15 individuos que participaron en el experimento presentó una media de 84.3.

Solución: En la tabla D, el valor para z que corresponde a un coeficiente de confianza de .99 es 2.58. Éste es el coeficiente de confiabilidad. El error estándar es de $\sigma_{\bar{x}} = 12/\sqrt{15} = 3.0984$. Por lo tanto, el intervalo de confianza de 99 por ciento para μ es:

$$84.3 \pm 2.58(3.0984)$$

$$84.3 \pm 8.0$$

$$76.3,\ 92.3$$

Se dice que se tiene 99 por ciento de confianza de que la media de la población esté entre 76.3 y 92.3, porque al repetir el muestreo, 99 por ciento de todos los intervalos que pueden construirse en la forma descrita, incluyen a la media de la población. ■

Figura 72. (L2, p.157).

En el tercer libro, sucede lo mismo que con el segundo libro, pues se evidencia un ejemplo particular de estimación de un parámetro, en este caso la de fuerza máxima de un músculo en determinado grupo, allí está comprobando un la estimación, por ende también se relaciona con *V1*.

En el primer libro se presenta una comparación y a su vez involucra una propiedad absurda de interpretación, pues de acuerdo a la solución de la situación con un

95% el intervalo está entre \$7.71 y \$8.29, mientras que con un 99% el intervalo está entre \$7.61 y \$8.39, entonces entre mayor sea el nivel de confianza establecido, mayor será el término del error luego menos preciso será el intervalo de confianza y esto se contradice pues la longitud del intervalo permanece igual de acuerdo a la categoría *PNnvO1,* entonces es una forma de dar un contraejemplo en la situación. El segundo y tercer libro se muestran un ejemplo de problema mostrando paso a paso los cálculos respectivos para tal solución, lo que permite identificarlos como ejemplos particulares.

4.6.2 Uso de gráficos cuando la argumentación verbal o simbólica se apoya en las propiedades visuales de un gráfico auxiliar.

En el primer libro, es relacionado con la categoría *GO1* y *GO4*, pues al observar la situación que establece, concreta allí ciertas propiedades en esta representación, haciendo uso de la curva normal para 100 muestras tomadas con sus Intervalos de confianza construidos, además con el mismo **nivel de confianza**. Esto refleja la argumentación y comprobación de ver cuántos Intervalos construidos, contienen la media de la población. Por ello, se relaciona con lo que describe Olivo (2008) en el análisis de las propiedades del nivel de confianza para los Intervalos de confianza.

Se presenta simulación para verificar si el intervalo contiene o no la media.

ampliamente para captar el parámetro verdadero. En otras palabras, el procedimiento para calcular un intervalo de confianza al 95 por ciento funciona el 95 por ciento de las veces. En el siguiente diagrama se presentan 20 de 100 muestras con sus intervalos de confianza calculados. Noventa y cinco por ciento (19 de 20) incluyen el parámetro de población (μ_X). La muestra número 7 ilustra el único intervalo de 20 (es decir, 5 por ciento) que no capta la media poblacional.

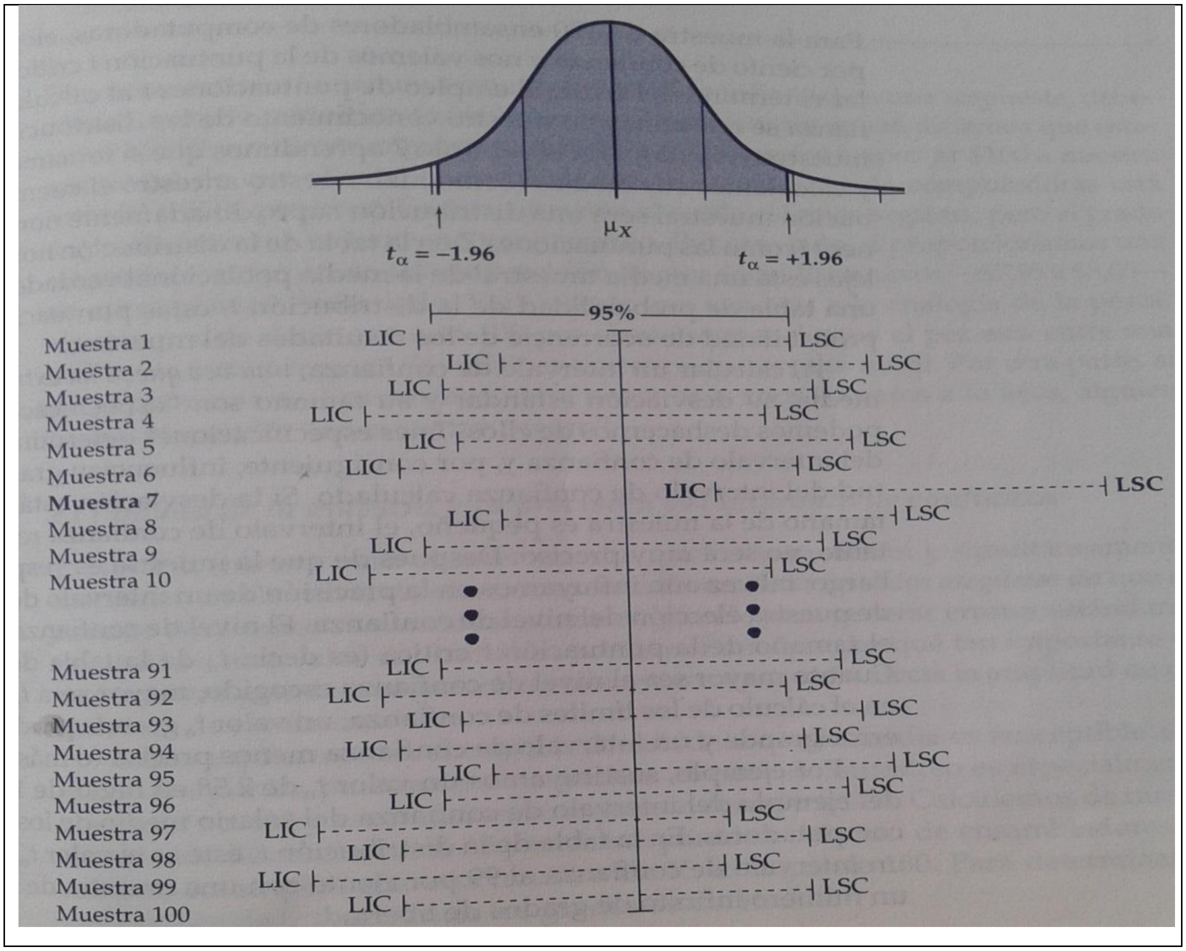


Figura 73. (L1, p.237).

Para el segundo y tercer libro, sucede algo similar con respecto al primer libro, pues se construyen varios Intervalos con el mismo nivel de confianza, pero que allí se fija en la desviación y amplitud del intervalo o en el radio del mismo. Esto permite de alguna forma relacionarlo con la categoría *GO1* para interpretar los resultados con la construcción de Intervalos bajo el mismo nivel de confianza.

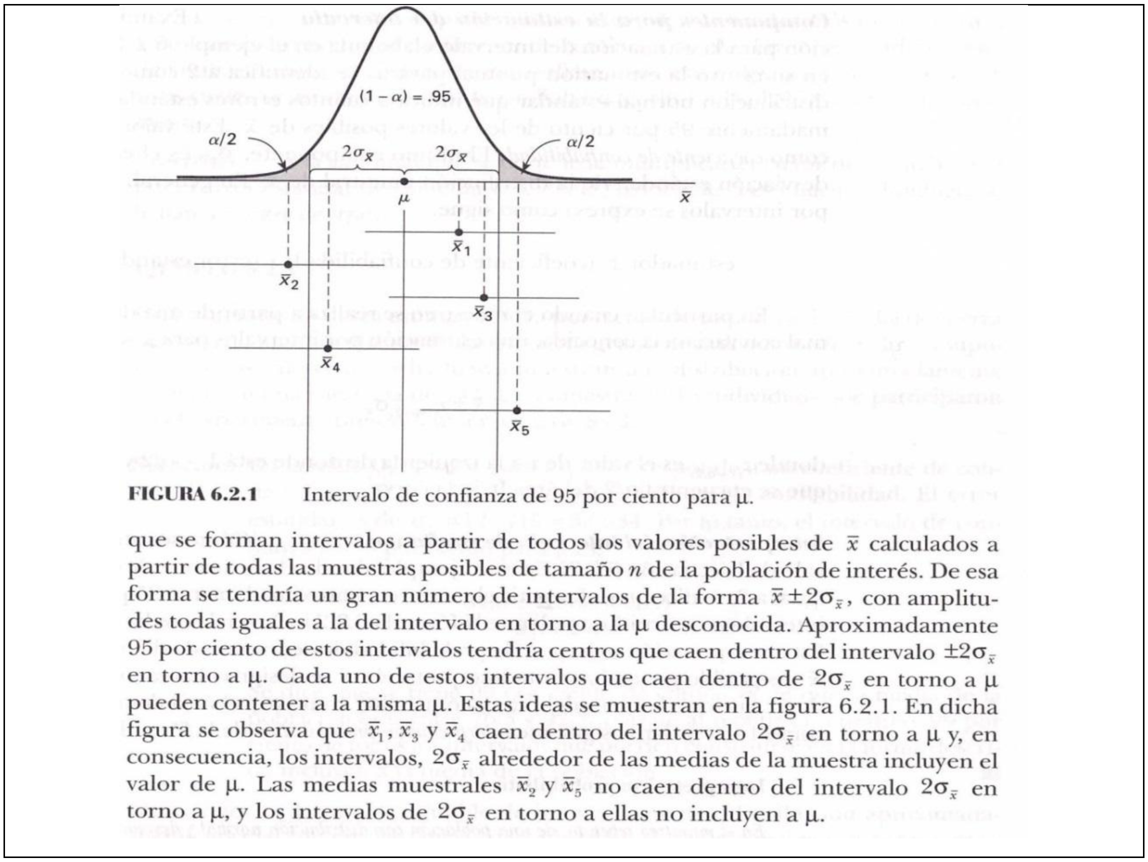
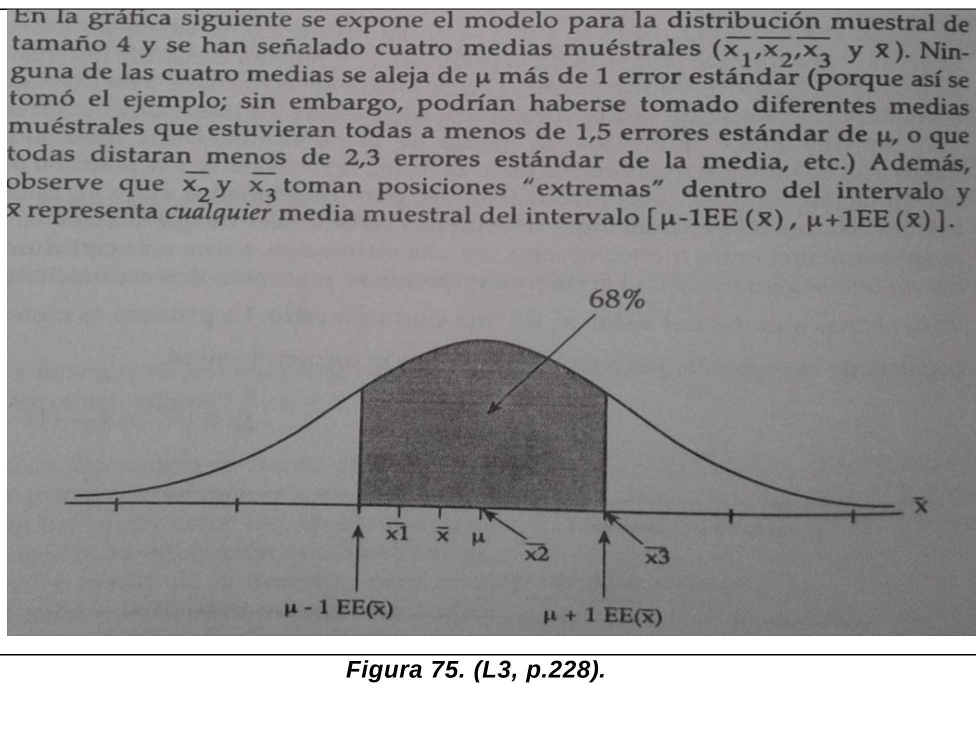


FIGURA 6.2.1 Intervalo de confianza de 95 por ciento para μ.

que se forman intervalos a partir de todos los valores posibles de $\bar{x}$ calculados a partir de todas las muestras posibles de tamaño n de la población de interés. De esa forma se tendría un gran número de intervalos de la forma $\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$, con amplitudes todas iguales a la del intervalo en torno a la μ desconocida. Aproximadamente 95 por ciento de estos intervalos tendría centros que caen dentro del intervalo $\pm 2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a μ. Cada uno de estos intervalos que caen dentro de $2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a μ pueden contener a la misma μ. Estas ideas se muestran en la figura 6.2.1. En dicha figura se observa que $\bar{x}_1$, $\bar{x}_3$ y $\bar{x}_4$ caen dentro del intervalo $2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a μ y, en consecuencia, los intervalos, $2\sigma_{\bar{x}}$ alrededor de las medias de la muestra incluyen el valor de μ. Las medias muestrales $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_5$ no caen dentro del intervalo $2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a μ, y los intervalos de $2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a ellas no incluyen a μ.

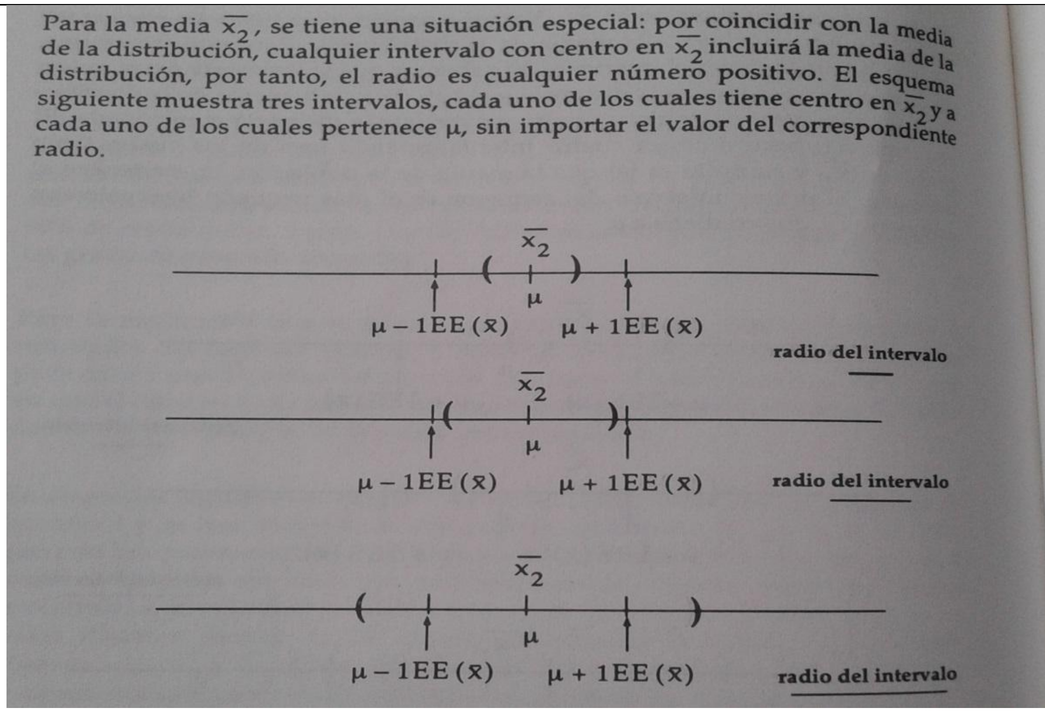
Figura 74. (L2, p.155).



En la gráfica siguiente se expone el modelo para la distribución muestral de tamaño 4 y se han señalado cuatro medias muéstrales ($\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ y $\bar{x}$). Ninguna de las cuatro medias se aleja de μ más de 1 error estándar (porque así se tomó el ejemplo; sin embargo, podrían haberse tomado diferentes medias muéstrales que estuvieran todas a menos de 1,5 errores estándar de μ, o que todas distaran menos de 2,3 errores estándar de la media, etc.) Además, observe que $\overline{x_2}$ y $\overline{x_3}$ toman posiciones "extremas" dentro del intervalo y $\bar{x}$ representa *cualquier* media muestral del intervalo [μ-1EE ($\bar{x}$), μ+1EE ($\bar{x}$)].

Figura 75. (L3, p.228).

Para el segundo caso del tercer libro, no se puede establecer relación con las categorías propuestas, pues es una situación donde se fija la media muestral y que coincide con la media poblacional, lo que evidencia es variar los centros o radios del intervalo, por tal razón esta gráfica pertenece a *Ge*.



Para la media $\overline{x_2}$, se tiene una situación especial: por coincidir con la media de la distribución, cualquier intervalo con centro en $\overline{x_2}$ incluirá la media de la distribución, por tanto, el radio es cualquier número positivo. El esquema siguiente muestra tres intervalos, cada uno de los cuales tiene centro en $\overline{x_2}$ y a cada uno de los cuales pertenece μ, sin importar el valor del correspondiente radio.

Figura 76. (L3, p.230).

Finalmente en los tres libros, excepto la gráfica dos del tercer libro, muestran Intervalos construidos conteniendo o no el parámetro. En el primer libro se determina una simulación con varios Intervalos construidos para observar cuántos contienen el parámetro, mientras que en el segundo y tercer libro se preocupan por observar cuánta desviación es necesaria para que el intervalo contengan el parámetro**.**

4.6.3 Razonamientos algebraicos deductivos

Una de las formas de comprobar propiedades tales como, que el parámetro está contenido en los Intervalos construidos a partir de un nivel de confianza, es observar una situación problema que tenga en cuenta la comparación con dos distintos niveles de confianza o distinto tamaño de la muestra. Teniendo en cuenta la situación anterior de (L1, p. 239) (promedio del salario de los ensambladores), se menciona la comparación tanto del nivel de confianza como del tamaño de la muestra a partir de la deducción de los diferentes cálculos.

En el primer libro es evidente la comparación que se realiza cuando se tienen dos niveles de confianza dejando fijo los otros datos como la media muestral, el tamaño de la muestra. De igual forma, la comparación con dos tamaños distintos de la muestra pero dejando fijo los otros datos, el nivel de confianza y la media.

Se presentan un ejemplo donde se muestran Intervalos, cambiando el nivel de confianza pero dejando fijo el tamaño de la muestra y la misma muestral.

Comparando los dos intervalos de confianza, observamos que tenemos mayor confianza en el nivel de 99 por ciento, pero que nuestra estimación es menos precisa:

IC 95% de μ_X = \$7.71 a \$8.29; este intervalo tiene una amplitud de \$ .58

IC 99% de μ_X = \$7.61 a \$8.39; este intervalo tiene una amplitud de \$ .78

Cuanto mayor sea el nivel de confianza establecido, mayor será el término del error y, por consiguiente, menos preciso será el intervalo de confianza.

Figura 77. (L1, p.239).

Se presentan ejemplos donde se evidencia tamaños de Intervalos diferentes, al cambiar tamaño de muestra pero dejando fijo el nivel de confianza y media muestral:

Como explicamos en el capítulo 7, debido a que la media es susceptible a la distorsión por las puntuaciones extremas, el error de muestreo es especialmente notorio si $n \leq 120$ y es marcadamente notorio cuando $n \leq 30$. Calculemos de nuevo el intervalo de confianza al 95 por ciento para la población de ensambladores de computadoras; pero con una muestra de 15 en lugar de 130. Para determinar el valor crítico de t_α calculamos los grados de libertad:

Figura 78. (L1, p.240).

Al comparar esta muestra de 15 con la muestra de 130, notamos que la estim
de la muestra más pequeña es menos precisa:

Con $n = 130$, el IC al 95 por ciento $\mu_X = \$7.71$ a $\$8.29$; este intervalo tiene una
plitud de $ .58.

Con $n = 15$, el IC al 95 por ciento $\mu_X = \$7.04$ a $\$8.96$; este intervalo tiene una
plitud de $1.92.

El intervalo de confianza más preciso para la muestra de $n = 130$ ofrece un se
intuitivo y precede a la ley de los números grandes (capítulo 7). A mayor tam
de la muestra, menor será el error de muestreo y, por consiguiente, mayor se
precisión del intervalo de confianza.

Figura 79. (L1, p.240).

En el segundo libro, no se identifica algún ejemplo con la comparación del nivel de confianza ni con el tamaño del intervalo, esto permite que no haya un razonamiento algebraico deductivo, pues son ejemplos de seguir cálculos y procedimientos sin comparar o cambiar algún dato.

Suponga que un investigador, interesado en obtener una estimación del nivel promedio de alguna enzima en cierta población de seres humano, toma una muestra de 10 individuos, determina el nivel de la enzima en cada uno de ellos, y calcula la media de la muestra $\bar{x} = 22$. Además, que la variable de interés sigue una distribución aproximadamente normal, con una variancia de 45. Se desea estimar el valor de μ.

Figura 80. (L2, p.155).

Un fisioterapeuta desea estimar, con 99 por ciento de confianza, la media de fuerza máxima de un músculo particular en cierto grupo de individuos. Se inclina a suponer que los valores de dicha fuerza muestran una distribución aproximadamente normal con una variancia de 144. Una muestra de 15 individuos que participaron en el experimento presentó una media de 84.3.

Figura 81. (L2, p.157).

Para el tercer libro, se evidencia la comparación de los radios del intervalo, es decir muestran varios tamaños del intervalo con el mismo nivel de confianza y que a su vez deducen una propiedad como precisión con relación a la certidumbre del intervalo.

Tal como seguramente usted lo expresó en su respuesta, no existe un único intervalo para estimar la media de la población. Se pueden construir muchísimos intervalos, todos ellos centrados en la media de la muestra y de diferentes tamaños, es decir, de radios diferentes. Algunos de los intervalos incluirán más probablemente que otros, la media de la población. Otros intervalos darán una estimación más precisa de μ. En total, la *certidumbre* y la *precisión* de la estimación son dos conceptos diferentes, pero relacionados entre sí. Entre más precisa sea una estimación, existe menos certidumbre de que sea buena, y recíprocamente, entre menos precisa sea una estimación, existe más certidumbre de que sea buena. En el siguiente esquema se presentan dos estimaciones de μ, hechas a partir del valor $\overline{x_1}$ de una cierta muestra. La primera es menos precisa que la segunda, pero tiene mayor grado de certidumbre.

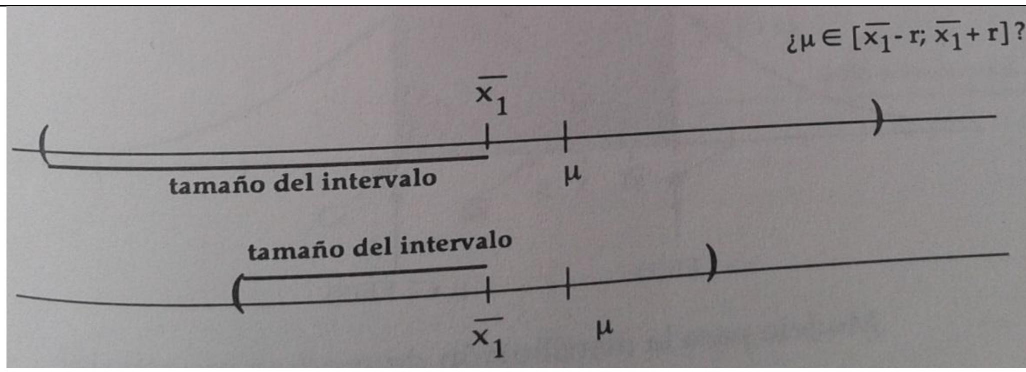


Figura 82. (L3, p.227).

Evidentemente en el primer y tercer libro se realizan comparaciones de tamaños de muestras usando un razonamiento algebraico y aunque lo hacen de maneras distintas se tienen en cuenta las mismas propiedades como en las categorías *PNnvO1* y *PNIB2*, observar el tamaño de la muestra.

4.6.4 Razonamientos verbales deductivos, basados en propiedades previas

En el primer y tercer libro se detectaron ejemplos concretos de razonamientos deductivos generales a partir de propiedades específicas de los Intervalos de confianza, ya que como dicen Olivo (2008) y Behar (2007), son generales una vez se calculan e interpretan los resultados de situaciones - problemas, lo que implica relacionar dichas soluciones con todas las propiedades de los Intervalos de confianza. Esto se evidenció con fue evidente con la figura 77, 79 y 82 pues relacionan las propiedades *PNIO1, PNIB1, PNnvO2, PNnvO1* y *PNnvB2* ya que involucra tamaños de muestras en comparación con el nivel de confianza y viceversa, longitud del intervalo y precisión del mismo.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Con base en el estudio realizado se puede establecer en primer lugar que el Intervalo de Confianza es un concepto interesante de analizar, puesto que engloba varias formas de estudiar como lo son: de tipo conceptual, de propiedades, de notaciones y representaciones, de algoritmos y procedimientos, y por supuesto de validaciones; herramientas que son reflejadas bajo un Enfoque Ontosemiótico (EOS), las cuales son denominadas como elementos de significado intensivos, extensivos, ostensivos, actuativos y de validación, respectivamente. Lo que hace que el análisis conceptual de los Intervalos de Confianza, desde la mirada ontosemiótica, sea un concepto complejo y extenso en cuanto a la interpretación, ya que su significado contiene diferentes direcciones de estudio.

En segundo lugar se puede concluir, de acuerdo al marco conceptual y a la metodología usada, que estos textos contemplan la mayoría de los elementos de significado establecidos. En efecto, en cada texto se evidenciaron la mayoría de la los elementos que propone el EOS. Este hecho pone en evidencia la importancia de la metodología usada para el análisis, en el sentido de hacer expuesto las falencias en el estudio y análisis de los autores que han trabajado este tema en textos académicos. Por ejemplo, se nota que en algunos casos, la definición de intervalo de confianza es superficial como sucede en el libro (L1, p. 227) y no da cuenta de toda la complejidad conceptual que encierra la misma; otro ejemplo, lo constituye, el tratamiento exiguo que se le da a propiedades que se pueden establecer que satisfacen o no, los Intervalos de confianza, como es el caso de notar que la unión de dos Intervalos de confianza con un nivel de confianza dado, usualmente no resulta ser un intervalo de confianza con el mismo nivel dado.

En tercer lugar, en el análisis de textos se pudo establecer que los elementos de significación que resume el EOS según Batanero (2000) identificados en los libros son explícitos, no en cantidad, pero si para cada uno de los elementos relacionándolo con el marco conceptual. Aunque expertos como Olivo (2008) menciona que hay poco estudio de esta temática en la Estadística, se considera que hay un determinado estudio pero no en detalle y tan extenso como se quisiera analizar para las distintas situaciones. En el mismo sentido, los Intervalos de confianza a nivel universitario, ocupa más importancia para verificar y comprobar una hipótesis o calcular un valor o parámetro desconocido, que simplemente saber calcularlo. Sin embargo, los estudiantes de nivel universitario no son exentos de tener algún tipo de falencia o problema con las matemáticas, pues sus carreras no son aquellas que permiten estudiar y dedicar tiempo en el estudio de las mismas, lo que puede ser un factor problemático a la hora de analizar y estudiar dicha temática. Además, la escasa literatura que existe sobre el mismo, teniendo en cuenta el porcentaje dedicado en los textos a esta temática, incide en que se le dedique poca atención y tiempo de trabajo dentro del aula.

Respecto a los elementos de significado de los Intervalos de confianza, existe un gran esfuerzo por evidenciar las definiciones, propiedades, procedimientos, términos, gráficos, notaciones y demás elementos relacionados con el tema, pero estos no son tratados en su totalidad en los tres textos, esto debido a que las situaciones-problemas presentadas priman en la solución y cálculo de parámetros sin tener en cuenta las herramientas, propiedades e interpretación adecuada. En la mayor parte algunos casos, los elementos estaban completos y específicos como los ostensivos, Actuativos, Extensivos y Validativos en comparación con los Intensivos, pues definiciones como la del nivel de confianza no registra en el segundo libro, propiedades estadísticas tampoco se evidencias en los libros analizados. Esto hubiese enriquecido mucho más el estudio de los Intervalos de confianza. Por otro lado, se puede afirmar que algunos elementos como las definiciones y propiedades eran diferentes en la forma de escribirlo, pero que en esencia su significado era igual, además en algunas ocasiones dichos elementos se presentaban en términos mucho más generales que en los otros textos. Además, se puede decir que los dos primeros libros (Ferris, 2002) y (Wayne, 2004) contemplan en su totalidad y afinidad los elementos de significado, pues el desarrollo de la temática permite que el lenguaje sea más factible comparado con el tercer libro (Perry, Mesa, Fernández y Gómez 1996), esto permite diferenciar una definición, propiedad, notación o cualquier otro aspecto. Esto se sujeta a las conclusiones detalladas por cada elemento de significado, es decir por cada elemento se compara las distintas o similares formas de exponer cada categoría de análisis.

Para finalizar, es importante el análisis desde cada punto y categoría una temática tan importante como es la de Intervalos de confianza, pues es una temática bastante amplia y compleja por lo que no es suficiente saber calcularlo o representarlo sino interpretar cada uno de los elementos de significación que muestra el Enfoque Ontosemiótico siendo fundamental para cualquier área, ya sea Medicina, Ciencia Sociales, Biología y otra, pues es una alternativa de estimación y solución de cualquier situación – problema que vale la pena profundizar para mayor conocimiento de interpretación y respuesta del mismo.

Además, con base en los elementos de significado se logra esclarecer y generar estrategias de análisis del objeto matemático, para cualquier estudiante universitario en cualquier área del conocimiento, para un texto matemático o de otra área distinta, contribuyendo de forma viable su entendimiento, organización y así generar un mayor aprendizaje e interpretación.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. UNO, p.p03-04.

Behar, R. (2007). *¿Estamos buscando el ahogado aguas arriba? El caso de la estimación con Intervalos de confianza.* Primer Encuentro Nacional de Educación Estadística (ENAES), Bogotá.

Fernández, A., Andrade, L y Álvarez, I. (2014). *Noción de intervalo de confianza con estudiantes universitarios (*Proyecto signado por el CIUP DMA-354-13). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). *Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.*

Olivo, E. (2008). *Significado de los Intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México.* Memoria para optar el para optar al grado de Doctor, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.

Perry, P., Mesa., V Fernández, F. y Gomez, P. (1996). *Matemáticas, Azar, Sociedad. Conceptos básicos de estadística*. Bogotá: una Empresa Docente y Grupo Editorial Iberoamérica. Universidad los Andes.

Ferris, R. (2002). *Estadística para las Ciencias Sociales. El potencial de la imaginación estadística.* Editorial McGraw-Hill/Interamericana, S.A. *de C.V.* México, D.F.

Wayne, D. (2004). *Bioestadística*. *Base para el análisis de las ciencias de la salud.* Editorial Limusa, S.A, México D.F.

Yánez, G. y Behar, R. (2009). *Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles*. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación

Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.