

***UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE RAZÓN DE CAMBIO CON  
ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO A PARTIR DE LA MEDIACIÓN CON  
GEOMETRÍA DINÁMICA.***

**PRESENTADO POR:**

**CARLOS ALBERTO FORERO TORO. Código: 2012182018**

**DANIEL LÓPEZ VÉLEZ. Código: 2012182025**

**DIRECTOR:**

**PROFESOR EDWIN CARRANZA**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
ESPECIALIZACIÓN EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS – ÉNFASIS  
CÁLCULO  
BOGOTÁ, D.C.**

# Resumen Analítico en Educación-(RAE)

1. Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Una aproximación al concepto de razón de cambio con estudiantes de grado sexto a partir de la mediación con geometría dinámica
<b>Autor(es)</b>	LÓPEZ VÉLEZ, Daniel y FORERO TORO, Carlos Alberto
<b>Director</b>	Carranza Vargas Edwin Alfredo
<b>Publicación</b>	Bogotá D.C., 2012, págs. 87
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	Razón de cambio, derivada, mediación instrumental, sistemas de representación, representaciones ejecutables. Geometría dinámica.

2. Descripción
<p>El objetivo de la propuesta es el de observar los procesos de aprendizaje, en la asignatura de matemáticas asociados a la noción de razón de cambio a partir de la implementación de una secuencia de actividades mediada por el programa libre de geometría dinámica Geogebra 4.0 con estudiantes de grado sexto.</p> <p>Las actividades se diseñaron para introducir la razón de cambio, con el fin de potenciar aspectos relacionados al aprendizaje del concepto de derivada y el desarrollo del pensamiento variacional desde edades tempranas</p> <p>El trabajo fue implementado con un grupo de 5 estudiantes de grado sexto del colegio Cafam en la ciudad de Bogotá, los cuales fueron seleccionados aleatoriamente y se les brindó, de manera secuencial, ciertas actividades (4 Applet en total) modeladas con ayuda del programa Geogebra, sobre predicción de patrones de regularidad, relaciones en series aritméticas, correlación de magnitudes y por último una actividad de comparación en las velocidades de llenado de varios envases; donde los estudiantes tenían que manipular varias herramientas que proporciona el</p>

programa, entre ellas la herramienta “deslizador”.

### 3. Fuentes

Para la producción del trabajo tomamos 20 referencias teóricas de los cuales los más destacados son:

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, New York.

Cruz, Angie; Vargas, Ángel; López, Lennin; Rojas, Marcela (2009). *Reflexionando en el currículo sobre el pensamiento variacional*. Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Hohenwarter, M. Hohenwarter, J. Kreis, Y. & Lavicza, Z. (2008). *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software Geogebra*. 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, México

Lupiañez, I. (2000) "Nuevos acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92" Ed: Universidad De Granada España.

Ministerio de Educación Nacional (2000). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. Cooperativa editorial Magisterio, Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Serie Documentos Especiales, Bogotá. D. C. Colombia.

Rendón M. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Tesis de Maestría. Universidad Antioquia. Medellín. Colombia

Sánchez Matamoros, G. García, M. Linares, S. (2008), *la comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de las matemáticas*. Revista latinoamericana de investigación en

matemática educativa. Vol. Numero 002, pp, 267-296. México.

Santacruz, M, (2009). *La gestión del profesor desde la perspectiva de la mediación instrumental*. Instituto de educación y pedagogía. Universidad del Valle. Colombia.

#### 4. Contenidos

En el primer capítulo se presenta toda la propuesta de trabajo en la que se pretende llegar a la noción de razón de cambio por medio de actividades mediadas por el software Geogebra y su aplicación en el aula de matemáticas en grado sexto.

En el capítulo dos se muestra un recorrido histórico alrededor del concepto de razón de cambio, como fueron sus inicios y como ha evolucionado a través de las civilizaciones más influyentes, en cuanto a, pensamiento matemático se refiere. Se dispone también una parte para hablar sobre las concepciones del cambio, los tipos de cambio; cambio cualitativo, cambio cuantitativo y dos formas de representaciones, pertinentes para nuestro trabajo, la representación geométrica y la representación tabular.

En el tercer capítulo esta toda la base teórica que dio sustento a la formulación de las actividades, al tratamiento del concepto matemático, a la concepción de la tecnología como mediadora instrumental y a los procesos de aprendizaje desarrollados por el estudiante, bajo la mirada y los planteamientos de autores como Duval, Moreno, Sánchez, entre otros.

En el cuarto capítulo se presenta el marco metodológico, la forma en que se desarrollo la propuesta, haciendo un recorrido por la estructura de las actividades, los referentes didácticos tenidos en cuenta, la población con la cual se aplicó la propuesta y las técnicas que se utilizaron para la recolección de información.

En los capítulos cinco y seis se hace el cierre del trabajo con el análisis de los resultados, para la cual se diseñaron unas rejillas que categorizaban las respuestas de los estudiantes, y que llevaron

a la formulación bajo los referentes teóricos, de las conclusiones finales.

### 5. Metodología

Para la consecución de los objetivos que nos planteamos, tuvimos en cuenta varios aspectos metodológicos, referentes a la documentación, planeación, diseño y análisis. En primera instancia se realizó todo el rastreo teórico, que nos permitiría diseñar una secuencia pertinente y concisa, entre los que encontramos el concepto de razón de cambio en la comprensión de la derivada (Sánchez, G. Et el. 2008) y el papel de las nuevas tecnologías en la comprensión de conceptos matemáticos, *Instrumentos matemáticos computacionales* (Moreno, A. 2001). Luego la recolección de la información por medio de material fílmico e impreso, dejándonos la evidencia de los avances en la comprensión de la razón de cambio que conllevo al análisis frente al uso y traslado que hacen los estudiantes entre representaciones, por medio de la mediación del software.

### 6. Conclusiones

Para las conclusiones se retomo el trabajo de los estudiantes y las justificaciones que dieron de éste en las entrevistas individuales, de lo cual se pudo encontrar, que es de vital importancia la implementación de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, ya que estas permiten una mejor visualización del contexto en que son presentados los conceptos y brindan herramientas que facilitan los procesos haciendo mas amable el acercamiento de los estudiantes hacia la matemática. En cuanto al concepto trabajado se observó que sí es posible un acercamiento a la razón de cambio en estudiantes de primeros grados de la educación básica, ya que son capaces de encontrar relaciones entre magnitudes y su representación de manera cuantitativa fácilmente; se espera que el trabajo propuesto permita formular, aun más, el acercamiento de la razón de cambio al concepto de derivada vista desde los cocientes incrementales en situaciones de cambio.

**Elaborado por:** López Vélez Daniel y Forero Toro Carlos Alberto

**Revisado por:** Carranza Vargas Edwin Alfredo

**Fecha de elaboración del  
Resumen:**

29

11

2012

# Índice General

PAG

## RESUMEN

1. PROPUESTA DE TRABAJO	
Introducción Justificación	
Antecedentes	
1.1.Pregunta orientadora.....	14
1.2.Objetivos.....	14
1.2.1. Objetivo General.....	14
1.2.2. Objetivos Específicos.....	14
2. MARCO HISTÓRICO	
2.1. La razón de cambio y su avance a través de la historia.....	15
Los babilonios y los egipcios.....	15
Los griegos.....	16
La baja edad media .....	17
Los inicios del cálculo diferencial.....	18
2.2. Concepciones del cambio. ....	20
3. REFERENTES TEÓRICOS.	
3.1. La Conceptualización De Las Herramientas Tecnológicas Dentro Del Aula De Matemáticas.....	23
3.2. El Software Geogebra Como Instrumento De Mediación.....	26
3.3. El sentido de las representaciones.....	28
3.4. La comprensión de la razón de cambio.....	30
4. MARCO METODOLÓGICO	
4.1. Propuesta metodológica.....	32
4.1.1. Hilo conductor. Descripción de la propuesta.....	32
4.1.2. Referentes Didácticos.....	35

4.1.3. Estructura de las actividades.....	36
Applet 0.....	36
Applet 1.....	38
Applet 2.....	40
Applet 3.....	41
4.1.4. Temporización.....	43
Implementación de las actividades con los estudiantes.....	43
4.1.5. Población.....	44
4.1.6. Recolección de información.....	44
Pilotaje.....	44
Aplicación de las actividades.....	45
Entrevistas individuales.....	45
5. ANÁLISIS.....	46
6. CONCLUSIONES.....	
6.1. Con relación a los objetivos.....	64
General.....	65
Específicos.....	66
6.2. Con relación a la propuesta metodológica.....	68

**BIBLIOGRAFIA**

# Índice De Imágenes

Imagen 1. Principales mediaciones instrumentales en el Sistema didáctico.....	26
Imagen 2. Tarea C3 en el estudio de Ortón (1983).....	31
Imagen 3. Esquema didáctico de la propuesta.....	35
Imagen 4. Fotografía Applet 0.....	37
Imagen 5. Fotografía Applet 1.....	38
Imagen 6. Fotografía Applet 2.....	40
Imagen 7. Fotografía 2 Applet 2.....	41
Figura 8. Fotografía Applet 3.....	41
Imagen 9: fotografía 2 Applet 0.....	49
Imagen 10. Fotografía sobre la grabación en el trabajo con Applet 0.....	50
Imagen 11. Fotografía de video Applet 0. ....	50
Imagen 12: tabla punto 1 Applet 1 del estudiante E2.....	53
Imagen 13: tabla punto 2 Applet 1 del estudiante E1.....	54
Imagen 14: tabla punto 2 Applet 1 del estudiante E4.....	55
Imagen 15. Fotografía 3 Applet 2.....	56
Imagen 16. Fotografía 4 Applet 2.....	56

# Índice de anexos

## ANEXOS DE PRUEBAS CON LOS ESTUDIANTES

(1-Parte) Test De Cambio – E1

(4-Parte) Applet 3 – E1

(3-Parte) Applet 1 – E1

(1-Parte) Test De Cambio – E2

(4-Parte) Applet 3 – E2

(3-Parte) Applet 1 – E2

(1-Parte) Test De Cambio – E3

(4-Parte) Applet 3 – E3

(3-Parte) Applet 1 – E3

(1-Parte) Test De Cambio – E4

(4-Parte) Applet 3 – E4

(3-Parte) Applet 1 – E4

(1-Parte) Test De Cambio – E5

(4-Parte) Applet 3 – E5

(3-Parte) Applet 1 – E5

# Capítulo 1.

## Propuesta De Trabajo.

### INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que el sistema educativo colombiano se rige por los dictámenes del (M. E. N) y el caso de las matemáticas no es la excepción. Según los lineamientos Curriculares (1997) y los Estándares Curriculares (2004) para matemáticas, en los establecimientos que brinden el servicio educativo en educación básica, se debe enseñar a “pensar matemáticamente” refiriéndose a que un estudiante debe estar en capacidad de:

- Formular y resolver problemas
- Modelar procesos y fenómenos de la realidad
- Comunicar
- Razonar
- Ejercitar procedimientos y algoritmos

Para lograrlo, el M.E.N plantea el desarrollo de cinco tipos de pensamiento:

- *Espacial y sistemas geométricos.*
- *Numérico y los sistemas numéricos.*
- *Métrico y los sistemas métricos o de medidas.*
- *Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.*
- *Aleatorio y los sistemas de datos.*

Ahora bien, tomando en consideración nuestra experiencia como docentes de matemáticas, y las investigaciones de múltiples autores dentro de las que resaltamos la del profesor Carlos Vasco (2002), en su escrito “*el pensamiento variacional y la modelación matemática*”

podemos evidenciar la necesidad de implementar el pensamiento variacional en las instituciones educativas de manera temprana; es decir, desde los primeros grados escolares atacando así las problemáticas que no han permitido un buen desarrollo del mismo.

Un problema que nos preocupa, es que la mayoría de los estudiantes al llegar a grado 11 o incluso en los primeros semestres de universidad, no tienen una idea clara de lo que es la razón de cambio y por ende (aunque sepan el algoritmo) no dan el significado apropiado a la definición de derivada en contextos diferentes al algebraico; esto perjudicando fuertemente el desarrollo del cálculo y del pensamiento variacional.

En consecuencia esta propuesta busca abordar esta dificultad de comprensión, por medio de una propuesta de aula que permita potencializar la noción de razón de cambio a partir de la interacción con el programa Geogebra 4.0 y una secuencia de actividades, aplicadas a una pequeña población de estudiantes de grado sexto.

## **JUSTIFICACIÓN**

A lo largo de nuestra experiencia como docentes en diferentes grados de bachillerato, hemos podido identificar que algunos estudiantes de grado 11, presentan dificultades a la hora de reconocer patrones de cambio, en situaciones de variación. Esta problemática tiene raíces mas profundas enmarcadas en el tratamiento teórico y práctico de años anteriores, dentro de los cuales es pertinente mencionar que parte de la dificultad radica en la no comprensión del fenómeno de la variación, además de la restringida interpretación de la letra, los pocos procesos de generalización y análisis funcional, entre otros pero sobretodo, se debe recalcar la baja asignación de significado a los conceptos y nociones.

El tema central que ha llamado la atención en este trabajo, es el acercamiento al *pensamiento variacional* desde sus bases, considerando pertinente establecer desde los primeros años escolares ambientes propicios para la potencialización de habilidades y destrezas en los estudiantes, por medio de situaciones significativas que permitan el desarrollo del mismo

haciendo hincapié en que el abordaje de los fenómenos de cambio y variación ya no son prioridad únicamente de los últimos grados escolares.

Algunas de las dificultades presentadas están ligadas a situaciones donde se usa la derivada como razón de cambio, relaciones con el concepto de variable, uso de lenguaje simbólico formal, uso de representaciones, modelación matemática y la misma resolución de problemas.

Para dar herramientas de solución a estas dificultades se han hecho avances en didáctica sobre el concepto de variable (Cruz, A. Et Al, 2009), y la inclusión de nuevas tecnologías para crear ambientes nuevos y usos de diferentes representaciones por medio de la simulación. El uso de este tipo de tecnologías, potencian a un más la visualización y manipulación de entidades matemáticas, que con el lápiz y el papel se confunden y se esconden, permitiéndole al estudiante una mayor confianza y aproximación a lo que se pretende desarrollar con las situaciones problema.

En este tipo de situaciones problema es necesario vincular al estudiante con los aportes que puede hacer la matemática en su realidad inmediata, recordando lo que menciona el MEN (1998, p. 35) en cuanto a que *“es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista”*. De acuerdo a este planteamiento el propósito de la matemática escolar es el desarrollo del pensamiento matemático y para ello son pilares la modelación y la resolución de problemas.

De todo lo anterior, nace la pretensión de crear una secuencia de actividades que pueda ser modelada a partir la aplicación del programa Geogebra 4.0, con la que se busca desarrollar nociones y significaciones de algunos conceptos asociados al pensamiento variacional y más precisamente sobre la noción de razón de cambio en los estudiantes de grado sexto, con el fin de contribuir y establecer un camino para la comprensión y significación de la derivada.

## ANTECEDENTES

Desde hace ya varios años se ha venido tomando como objeto de estudio la enseñanza del cálculo y las implicaciones que estas tienen en el aprendizaje de los estudiantes, en Colombia desde los lineamientos curriculares (2000) se propone, primero tener en cuenta la historia sobre el desarrollo del cálculo y luego las herramientas metodológicas que permitirían acceder a un buen conocimiento de esta parte de la matemática. Así también se han hecho valiosos aportes sobre temas relacionados que se ven seriamente afectados en el tratamiento del cálculo en grados superiores como lo son: *el desarrollo del pensamiento variacional, la modelación matemática, la resolución de problemas* y en particular estudios sobre el *concepto de derivada* y como puede ser esta involucrada en el aula utilizando herramientas tecnológicas.

*Siguiendo lo planteado por Artigue (1995) quien asegura "que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera mas o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar ...se presentan las dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental. Entonces hasta que no se ve a la noción de derivada como una organización de las variaciones sucesivas, no será comprendida...lo cual implica acercarse a la derivada con base en la practica social de la predicción mediante la matematización de fenómenos de cambio"* (Sánchez G. Et al. 2008, p. 268)

Algunos documentos que ya han hecho un trabajo previo sobre la razón de cambio, la modelación matemática y el aporte que hacen las nuevas tecnologías a la enseñanza de las matemáticas, nos dan la base para plantear nuestra propuesta.

- Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. (Rendón M. 2009).
- La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de las matemáticas.(Sánchez G. Et al. 2008)
- Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. (MEN. 2006)

## **1.1. PREGUNTA ORIENTADORA**

*¿Cómo potenciar el pensamiento variacional a partir de una secuencia didáctica de actividades que involucre el concepto de razón de cambio, en estudiantes de grado sexto, por medio de la simulación con software?*

## **1.2. OBJETIVOS**

### **1.2.1. Objetivo General**

Diseñar e implementar, una propuesta de aula en la cual se potencialice la noción de razón de cambio y en consecuencia el pensamiento variacional a partir de la modelación de situaciones en el programa Geogebra 4.0 como herramienta tecnológica, en estudiantes de grado sexto.

### **1.2.2. Objetivos Específicos.**

- \* Diseñar una secuencia de Applet en Geogebra que permitan la simulación de situaciones de cambio.
- \* Crear un instrumento de indagación que permita recoger información acerca de la manipulación de los Applet y del concepto a trabajar, por parte de los estudiantes.
- \* Identificar si los estudiantes logran reconocer el fenómeno del cambio y la razón de cambio a partir de la secuencia planteada.

# Capítulo 2.

## Marco Histórico

### 2.1. LA RAZÓN DE CAMBIO Y SU AVANCE A TRAVÉS DE LA HISTORIA.

La razón de cambio ha tenido varios avances y su concepción se ha complejizado y estructurado a través del trabajo hecho por algunos de los matemáticos más importantes de la historia, a continuación mostraremos algunos aspectos donde se ha trabajado este concepto, en diferentes momentos y culturas.

#### **Los babilonios y los egipcios**

En esta época (hace más de 3000 años), la concepción de la matemática era eminentemente práctica, por ello lograron establecer relaciones entre las variaciones de las diversas magnitudes que estudiaban, en un principio de forma *cuantitativa*, describían los cambios de su entorno con relación al universo, posteriormente los análisis se hicieron *cuantitativos*, debido a que registraban valores cambiantes de obras arquitectónicas, como las pirámides egipcias, que requerían de patrones de medida constantes.

Las anteriores son pruebas fehacientes de la preocupación por encontrar y mantener regularidades en las medidas y del sentido práctico de la variación. En la construcción de las pirámides por ejemplo, el problema consistía en mantener “una pendiente uniforme en cada cara y la misma en cada una de las cuatro caras de la pirámide”. Se solía utilizar la relación *avance Vs subida*, denominada por la palabra *seqt*, que significaba la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura. (Boyer, C. 1986, p.11)

## Los griegos

Esta civilización comenzó a trabajar las matemáticas más por interés intelectual, que por resolver problemas de la vida práctica. Este trabajo produjo un gran avance en la geometría, sobre todo por convertir en objeto de estudio aquello que anteriormente se trabajaba de manera empírica. Dentro del estudio teórico realizado por los griegos se encuentran los avances de Tales de Mileto, realizados hacia el año 585 a. C., sobre las proporciones, estudios que se constituyeron en la génesis de la matematización de las comparaciones entre medidas geométricas de segmentos (Boyer, C. 1986, pp. 48-52).

*Arquímedes (287 - 212 a. C.), hace uso de la razón geométrica para encontrar las fórmulas para el área y el volumen de diversas figuras planas y sólidos regulares. “El trabajo matemático de Arquímedes se constituye en una excepción al tratamiento dado a la matemática por los griegos, pues se preocupó por problemas prácticos como la determinación de áreas y volúmenes y por el estudio de curvas engendradas por movimientos. No solo determinó las fórmulas antes mencionadas como contribución a la resolución de problemas, sino que utilizó la matemática en la confección de máquinas para el trabajo científico y para la guerra” (González, P. 2008).*

Este gran matemático estudió los lugares geométricos de puntos, en donde hace una caracterización de la espiral, que lleva su nombre, en términos de composición de movimientos:

*“Si una línea recta trazada en un plano gira un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y vuelve a la posición inicial, mientras que, sobre la línea en rotación, un punto se mueve uniformemente como ella, a partir del extremo fijo, el punto describe una espiral en el plano” (González, P. 2008).*

Con este trabajo profundizó en la construcción de líneas tangentes a la espiral, por diferentes puntos de la curva, como forma de caracterización de la velocidad y dirección del movimiento. Arquímedes realizó un trabajo diferente, respecto del tratamiento matemático usual de la ciencia griega al discutir la *variabilidad de la dirección del movimiento* en términos cuantitativos, aspecto al que los griegos no se dedicaron. (González, P. 2008).

### **La Baja Edad Media**

Las raíces que originaron un vuelco al pensamiento matemático y lo orientaron en una dirección diferente a la seguida por los griegos, se dieron en esta época (1250 - 1492), hacia la primera mitad del siglo XIV, cuando los matemáticos del colegio de Mentón se propusieron predecir, utilizando herramientas matemáticas, el valor de una magnitud física que esta cambiando, como la fuerza que actúa sobre un móvil que se desplaza por un camino inclinado. La relación entre la matemática y la física dio origen a una nueva ciencia: la cinemática, que se constituyó en la base del cálculo.

Para el caso de un cuerpo con movimiento acelerado, Oresme dibujaba una curva de velocidad vs tiempo en las que los puntos de una recta horizontal representaban los sucesivos instantes de tiempo iguales, que llamó longitudes, y para cada punto trazaba un segmento (al que llamo latitud) perpendicular a la recta horizontal, cuya longitud representaba la velocidad en ese instante. Con argumentos geométricos Oresme mostraba que, para un movimiento uniformemente diforme que parte del reposo, los extremos superiores de todos esos segmentos están en una recta, y la totalidad de los segmentos velocidades cubren el área de un triángulo rectángulo. Así, caracteriza el movimiento donde la velocidad cambia en forma constante, con respecto al tiempo, como un movimiento de razón constante. (Boyer, C. 1986, pp. 288 – 290)

Por medio de sus dibujos Oresme explicaba el teorema de la velocidad media para cuantificar la velocidad en un movimiento uniformemente acelerado.

Al estudiar movimientos en los que la diferencia de velocidades no es constante, Oresme se dio cuenta que el grado de amplitud (diferencia de velocidades) va disminuyendo a medida que hay un acercamiento al valor máximo de la velocidad, en cuyo entorno el grado de amplitud desaparece casi totalmente. Así, Oresme caracteriza el punto de máxima velocidad como aquel en donde la razón de diferencias entre las velocidades es casi nula.

Después de Oresme, Galileo Galilei (1564 - 1642), opta por describir el mundo físico en términos de cantidades medibles como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa. Hace uso de las representaciones geométricas de Oresme para los estudios de velocidades, introduciendo técnicas cuantitativas específicas con las cuales llega a la determinación del teorema de velocidad media, que explica haciendo uso de las razones geométricas, que enuncia:

*“Una distancia es recorrida por un cuerpo con velocidad uniformemente acelerada, es igual al tiempo en que el mismo espacio sería recorrido por el mismo objeto a velocidad uniforme igual a la velocidad media”* (Boyer, C. 1986, p. 291).

## **Los Inicios Del Cálculo Diferencial**

Después de los trabajos de Fermat y Descartes, Barrow (1630 - 1677) también trabajó con la intención de caracterizar tangentes pero a diferencia de sus antecesores, introdujo según el pensar de los historiadores de la matemática, *una interpretación infinitesimal al problema*. En su trabajo realizó modificaciones al método de Fermat considerando un arco, “indefinidamente pequeño” (Edwards, C. 1982) que asoció con un trozo de la tangente para construir lo que hoy llamamos triángulo diferencial.

Hacia 1640, Roberval y Torricelli empezaron a introducir interpretaciones cinemáticas de las curvas estudiadas. Por un lado, identificaban la gráfica como la representación de la

dependencia de dos magnitudes físicas, y por otro, consideraban la tangente en un punto de la curva como la expresión de la razón de cambio de la magnitud dependiente, respecto a la independiente, razón que permitía identificar la dirección del cambio de la magnitud, en ese punto. Esta última idea se constituye en la génesis de la identificación de las relaciones entre la dirección de las tangentes en diferentes puntos de la curva y la caracterización del movimiento en un instante. Con su método, Roberval consiguió determinar tangentes de todas las curvas típicas de la época e introdujo la aceptación de las razones de cambio heterogéneas.

Posterior a estos trabajos surgieron los trabajos de Newton y Leibnitz. Este último trabajo la razón de diferencias, que posteriormente se transformó en la razón de diferencias entre valores infinitamente pequeños, es decir, se dio cuenta que esta razón de diferencias le permitía encontrar una ecuación para determinar la inclinación de la recta tangente y encontrar razones de cambio instantáneas, el diferencial.

Los trabajos de Descartes y Fermat llevaron al surgimiento de dos ramas importantes de la matemática. Con el estudio de las razones de diferencias entre magnitudes se dio lugar al estudio de las razones de cambio infinitamente pequeñas y al cálculo diferencial, y con el estudio de las razones de cambio invariantes en el tiempo se dio lugar al surgimiento de la geometría analítica con la caracterización de curvas a través de expresiones algebraicas. Por el primer camino se llegó al concepto de razón de cambio y por el segundo al surgimiento del concepto de pendiente.

La aceptación de las razones de cambio heterogéneas rompió con la manera griega de ver las razones y permitió acceder al estudio de los fenómenos de variación entre magnitudes interdependientes. Cada punto de la curva en el plano se desligó de los segmentos asociados como representantes de dicha magnitud (a la manera de Oresme) y empezó a verse como la asociación de dos valores de magnitudes de diferente especie. Así surgen, en el contexto de los estudios variacionales, las razones heterogéneas.

Con el avance del álgebra y la posibilidad de hacer uso de ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes interdependientes, surge la representación de las razones de cambio por medio de razones heterogéneas de diferencias, que se constituyen en la clave para avanzar hacia el cálculo diferencial.

Por otra parte, con el uso de las tangentes para caracterizar curvas se fue gestando el concepto de pendiente en todo el proceso que dio origen a las razones de cambio instantáneas, pero su conceptualización como objeto de estudio se realizó por un camino distinto al del cálculo, en la geometría analítica.

Con lo anteriormente expuesto, se reconoce la importancia que se le da al concepto de razón de cambio y como este ha fundamentado el avance de la matemática desde muchos ámbitos. En el campo educativo vale la pena considerar como actualmente se conceptualiza en el aula de clase, debido a que es el primer lugar donde comienza a tomar significado para los estudiantes. Esta comparación crea la necesidad de implementar alternativas metodológicas con las que los alumnos logren aprender comprensivamente este concepto fundamental para el cálculo y al mismo tiempo abonar el terreno para el pensamiento variacional necesario para comprender los fenómenos relacionados con las ciencias exactas y naturales.

## **2.2. CONCEPCIONES DEL CAMBIO.**

El cambio ha estado presente en la historia del hombre, diariamente se pueden identificar situaciones de cambio en diferentes formas y contextos, el clima, la economía, la sociedad, los cambios culturales, y con base en ellos la matemática ha buscado la forma de estudiar e interpretar estos cambios de manera que se haga comprensible y predecible. Este tipo de

cambios se pueden describir de dos maneras; el cambio cualitativo y el cuantitativo, (MEN. 2004, p. 18-20)

## **EL CAMBIO CUALITATIVO**

Descripción e interpretación de situaciones de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo. La identificación de las magnitudes y la descripción verbal y escrita de la manera cómo estas magnitudes se comportan en la situación, es el acercamiento cualitativo al fenómeno que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer las primeras predicciones de lo que sucederá con los elementos involucrados con el transcurso del tiempo. Se espera que en las descripciones de la situación de cambio se usen expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, etc.

## **EL CAMBIO CUANTITATIVO.**

La necesidad de medir y poder establecer comparación entre distintos conjuntos ha hecho que encontremos formas numéricas de establecer estas relaciones, cuando encontramos patrones de regularidad y podemos matematizarlos buscamos como fin la posible predicción de hechos que afecten nuestro diario vivir. *Estas relaciones cuantitativas se pueden representar de varias maneras geométrica, tabular, algebraica y gráficamente, retomaremos dos de ellas para efectos del trabajo propuesto.* (MEN. 2004, p. 18-20)

### **Formas de representación cuantitativa de situaciones de variación y cambio.**

**Representación geométrica.** Aparece cuando las magnitudes involucradas en la situación de cambio se asocian con longitudes de segmentos, identificar esta relación no es una mera forma de representación gráfica sino un reconocimiento del comportamiento de la magnitud en

cuestión, longitud de un segmento, es decir, se reconocen propiedades comunes de comportamiento algebraico y continuidad (El comportamiento algebraico y las propiedades de continuidad comunes a las magnitudes continuas son las que dan origen a la definición formal de número real y a su representación geométrica como punto de un eje numérico). Este acercamiento al estudio de las situaciones de variación y cambio permite la modelación mediante el uso de programas de geometría dinámica.

**Representación tabular.** Aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Por ejemplo, en el caso del llenado de un balde, podríamos, por medio de una graduación actual del balde y un reloj, producir diferentes valores del volumen de agua en el balde, relacionados en diferentes momentos de tiempo, crean una organización de la información por medio de columnas correlacionales (representación tabular) de forma que es más fácil evidenciar las relaciones entre las magnitudes. Se puede hacer un estudio de esos datos numéricos para encontrar patrones de regularidad. Las tablas de datos numéricos se pueden producir también con sensores conectados a calculadoras o a partir de expresiones algebraicas. Los patrones de regularidad o los métodos de regresión permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables involucradas y que se ajustan a los datos que sobre los mismos se tienen.

# Capítulo 3.

## Marco Teórico

### **3.1. La Conceptualización De Las Herramientas Tecnológicas Dentro Del Aula De Matemáticas.**

El papel del docente en la escuela ha venido tomando un rumbo más dinámico en la medida en que la tecnología se ha involucrado en la clase de matemáticas, el profesor se ha visto en la necesidad de incorporar formas más efectivas de mostrar como la matemática escolar esta directamente relacionada con acciones del diario vivir, algunas de estas relaciones más complejas que otras, sin embargo esta brecha entre la complejidad de los objetos matemáticos y la comprensión de los estudiantes se disminuye cuando los procesos son mediados por algún instrumento que permita visualizar las propiedades de los objetos.

Desde siempre el hombre ha sentido la necesidad de utilizar algún tipo de herramienta que le permita adaptarse al medio que lo rodea, y así mismo ha tenido la necesidad de comunicar el avance que se ha logrado con estas herramientas, el lenguaje de acuerdo con Vygotsky, es uno de los mayores potencializadores del desarrollo del pensamiento, pues la actividad social mediada por la comunicación del lenguaje permite crear estructuras de conocimiento.

Así como el lenguaje es un mediador en la actividad intelectual del hombre, existen otro tipo de herramientas que también apoyan la construcción de conocimiento, algunas de tipo estático y otras de tipo dinámico, esto es claro para Vygotsky como lo menciona (Parica, A. et al. 2005) *“Vygotsky concentra así su esfuerzo en el lenguaje como medio para desarrollar más rápidamente su modelo de mediación aunque en ningún momento deja de interesarse por los*

*otros medios o tecnologías del intelecto...*” estos medios o tecnologías del intelecto como los nombran, ya sean de tipo audiovisual o computacional, han venido siendo objeto de estudio por investigadores que concentraron su atención en como este tipo de tecnología crea estructuras de conocimiento de maneras mas efectivas en la escuela que los métodos convencionales, *“De hecho, la educación ha abierto una línea de producción de instrumentos psicológicos de finalidad estrictamente educativa, es decir, concebidos implícitamente como mediadores representacionales en la Zona de Desarrollo Próximo.”* (Parica, A. et al. 2005).

Esta línea de investigación ha sido acogida no solo desde una mirada psicológica sino también desde un ambiente matemático, intentando crear una teoría que permita conceptualizar y analizar de que forma debe ser el proceso de inclusión de las tecnologías en el aula de matemáticas, haciendo hincapié en cuales son los papeles que ejercen el profesor de matemáticas, el estudiante, el saber, la herramienta y las relaciones subyacentes entre estos.

Uno de los autores que plantea un marco teórico sobre este asunto es Pierre Rabardel, (Santacruz, M, 2009).

*“RABARDEL (1995) plantea un enfoque teórico que pretende dar cuenta de la naturaleza compleja del instrumento y la génesis del instrumento en el sujeto, enfatizando en la relación de este con la actividad humana, pues se plantea que los instrumentos por ser desarrollos de la historia social y cultural, presentan una fuerte influencia en el sujeto, por tanto, constituyen estructuras cognitivas que median la construcción del conocimiento...”*

En otras palabras lo que se busca es comprender en primera instancia cuales son las posibilidades que ofrece y abre el instrumento en la mediación del conocimiento matemático y en segundo aspecto cuales son los resultados de avance cognitivo que tiene el estudiante luego de realizar una actividad matemática mediada por el instrumento. Dos procesos que son la base de la génesis instrumental que plantea Rabardel. (Santacruz, M, 2009).

*“Desde esta perspectiva, RABARDEL (2001) sostiene que la Génesis Instrumental, como elaboración cognitiva del sujeto, se desarrolla a partir de un proceso doble de instrumentalización e instrumentación, donde los procesos de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto, por ejemplo sus funciones, usos y propiedades, mientras que la instrumentación está relacionada con el sujeto, particularmente con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de uso de actividad instrumentada.”*

Se fija la atención entonces en el momento en que la herramienta pasa de ser un simple objeto de ayuda didáctica a un instrumento que potencializa el aprendizaje y la actividad intelectual, podemos tomar como ejemplo el uso de la calculadora, en el momento en que la calculadora le sirve al estudiante simplemente para hacer algún cálculo bastante complejo, la calculadora no es más que un artefacto que facilita un proceso matemático, pero si por contrario tomamos como herramienta algún software matemático en el que la actividad que se proponga al estudiante este centrada en la observación del comportamiento de crecimiento de una población mediante su representación gráfica y tabular, esta actividad esta obligando al estudiante a cuestionarse sobre aspectos que esta observando, quizás encontrando relaciones entre objetos, fomentando a si su actividad cognitiva.

Claro que esta actividad también depende en gran medida del trabajo del profesor y el estudiante, del profesor en la medida en que las actividades que proponga realmente sean pensadas, anticipándose a respuestas inmediatas y evidentes por parte del estudiante, que contengan un reto para el estudiante, que creen conflicto cognitivo y verdaderamente a partir de sus cuestionamientos llegue a realizar conjeturas que le faciliten la comprensión de los conceptos involucrados, y del estudiante pues sin la entera disposición frente al logro de habilidades, la mediación puede viciarse y caer en detrimento. Estas relaciones que implican la responsabilidad de todos los agentes involucrados lo plantea también Rabardel como lo deja ver (Santacruz, M, 2009).

“RABARDEL (1999) realiza una aproximación a las distintas mediaciones instrumentales que se establecen en una relación didáctica dentro de dicho sistema, observando el impacto fundamental de los instrumentos en el aprendizaje de las matemáticas y las concepciones que tienen, tanto profesores como estudiantes, del papel que juegan los instrumentos en el diseño y puesta en escena de situaciones didácticas. Se sustenta que los instrumentos presentan una fuerte influencia en la construcción del saber y en sus modos de construcción, pero al mismo tiempo, es ostensible la complejidad del instrumento como variable importante en una situación didáctica, haciendo viable la posibilidad que tiene el profesor de anticipar las acciones de los estudiantes en los desarrollos instrumentales, lo cual hace que la génesis instrumental y la medicación del instrumento sean dimensiones susceptibles a un análisis a priori...”

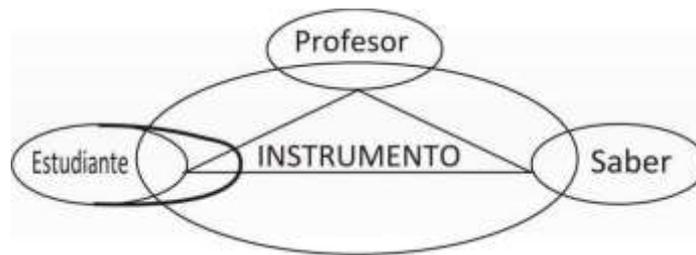


Imagen 1. Principales mediaciones instrumentales en el Sistema didáctico

### 3.2. El Software Geogebra Como Instrumento De Mediación.

En el proceso de inclusión de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas, se pueden encontrar numerosas investigaciones alrededor de estos procesos y quizás en la misma proporción un sin fin de programas matemáticos que permiten facilitar cálculos, representaciones, visualizaciones y modelaciones de situaciones matemáticas, todo dependiendo de la pretensión o el objetivo que se establezca y del tipo de población con quien se vaya a trabajar. Sin embargo no hay que desconocer que la intervención de la tecnología en el aula de matemáticas es un proceso lento y complejo (Hohenwarter, M. Et al. 2008), quizás condicionada por distintas razones, algunas de tipo académico, otras de tipo cultural y otras porque no, de tipo económico.

Es clara la necesidad de ir implementando las nuevas tecnologías en educación matemática, dado todo su potencial como lo menciona (Hohenwarter, M. Et al. 2008), *“Numerous research results suggest that these software packages can be used to encourage discovery and experimentation in classrooms and their visualization features can be effectively employed in teaching to generate conjectures”* pero también es necesario evaluar las posibilidades de acceso a este tipo de tecnologías, evaluar los momentos en los que se debe realizar la aplicación de un objeto matemático mediante la implementación de un ordenador y por supuesto evaluar los resultados obtenidos a partir de esta implementación.

En el desarrollo de una propuesta de aplicación de nuevas tecnologías en los currículos de matemáticas se requiere de un gran compromiso de tiempo para que los estudiantes puedan empezar a ser competentes en el uso de dichas tecnologías y en lo que al pensamiento matemático refiere, de allí que buscar la herramienta que minimice al máximo este tipo de variables, (tiempo, costo, potencialidad) se hace imprescindible.

En esta búsqueda encontramos un software que cubre gran parte de estás condicionamientos y que permite dado su naturaleza de software libre, aplicarlo en cualquier tipo de escuela que cuente con computadores escolares e incluso desde cualquier sitio con una computadora. El software Geogebra es un programa que combina la geometría, con la estructura de los sistemas algebraicos, potenciándose conceptos matemáticos desde los primeros años de escolaridad hasta grados universitarios si se desea. (Hohenwarter, M. Et al. 2008)

*“The basic idea of the software is to join geometry, algebra, and calculus, which other packages treat separately, into a single easy-to-use package for learning and teaching mathematics from elementary through university level. Geogebra is available free of charge on the Internet, has been translated to 36 languages by volunteers, and gathers a rapidly growing worldwide user community...”*

El programa le permite al profesor crear cualquier tipo de actividad para introducir un concepto matemático y de igual manera para institucionalizarlo, por otra parte el estudiante

cuenta con herramientas de tipos geométrico, algebraico y propias del cálculo, para explorar y entender propiedades fundamentales de los objetos matemáticos, además de poder pasar de una representación a otra de un mismo concepto, lo que conlleva de acuerdo a (Duval 1999), a entender realmente la estructura de los elementos matemáticos involucrados.

### **3.3. El Sentido De Las Representaciones.**

La necesidad que ha tenido la humanidad de transferir conocimiento ha llevado a comunicar experiencias de manera que den sentido a los objetos que se quieren transferir, esto lleva al uso de representaciones que permitan dar cuenta de lo que se quiere representar, mediante acciones como describir, dibujar, simbolizar, entre otras, estas representaciones miden de alguna forma el conocimiento que puede tener una persona pues la capacidad de expresar un pensamiento complejo a otras personas de manera que las personas la entiendan, muestra un dominio en la forma de representar el conocimiento debido a que es capaz de moverse de una a otra.

Específicamente en Educación Matemática, se considera que un estudiante es competente frente al manejo de algún concepto matemático si reconoce varias representaciones del mismo concepto y, es capaz de moverse entre esas representaciones de manera habilidosa. Para este efecto es necesario entender que es una representación desde la Educación Matemática, para ello tomamos la siguiente definición de representación (Lupiañez, L. 2000):

*“Por representaciones entenderemos, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes.”*

Las representaciones para un mismo concepto matemático pueden clasificarse en diferentes registros de representación (Duval 1999), por ejemplo para la derivada es posible la representación en un registro grafico, o en un registro algebraico, de acuerdo a la tarea que se solicite, o bien, podría trabajarse los dos o más registros a la vez. Dentro de este tipo de registros se pueden determinar acciones llamadas procesamientos, transformaciones en un

mismo registro o conversiones cuando se pasa de una transformación de un registro a otro. (Duval 1999).

Duval (1996) sostiene que el traslado de un registro a otro surge espontáneamente o no de acuerdo a la complejidad en las tareas, y este traslado refiere a la confrontación de representaciones de distinta naturaleza de un mismo objeto. Por ejemplo puede ser sencillo el pasar de una representación algebraica de  $f(x)=x$  a que el estudiante pueda relacionarla con su grafica siendo esta una recta. Pero puede llegar a causar confusión cuando se presenta la imagen de una función constante y se le solicita que establezca la ecuación que define la grafica o que defina conceptos como el de inyección en ella. Entonces el éxito de la coordinación de estos registros esta dado desde la movilización constante de los sistemas semióticos involucrados.

Se hace necesario para Duval aclarar que el objeto representado no debe confundirse con el contenido de la representación, es de considerar que en algunos casos, las representaciones en si mismas son imperfecciones de los objetos representados, así se deduce que no siempre la representación que se muestra es la que realmente esta identificando el objeto que queremos representar, Sin embargo también afirma que una persona que avanza en su actividad conceptual necesariamente tiene que realizar la traslación de un registro a otro, para que pueda diferenciar el representante del representado (Guzman, 1998).

Es importante observar que la implementación de las tecnologías en la clase de matemáticas también esta sustentada dentro de los principios y estándares para las Matemáticas escolares (Lupiañez, L. 2000, p, 41):

*“Los programas de instrucción matemática, deberían enfatizar las representaciones matemáticas para fomentar la comprensión de las matemáticas de forma que todos los estudiantes:*

- *Creen y usen representaciones para organizar, memorizar y comunicar ideas matemáticas.*

- *Desarrollen un repertorio de representaciones matemáticas que puedan usarse de forma útil, flexible y apropiada.*
- *Usen representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.”*

Todo este tipo de habilidades entorno a las representaciones de los objetos matemáticos pueden, visualizarse de una manera mas relacional y dinámica mediante los programas de geometría dinámica, en nuestro caso el software Geogebra ofrece esta posibilidad, produciendo lo que Lupiañez & Moreno (2000) nombran como representaciones ejecutables, caracterizadas especialmente, por que las representaciones pierden el sentido de estáticas, y por lo contrario toman un carácter potencializador en la simulación de situaciones problema, además que se convierten en manipulables lo que permite actuar directamente sobre varias de ellas si se desea visualizando la estructura de los conceptos matemáticos involucrados.

### **3.4. La Comprensión De La Razón De Cambio**

Uno de los objetivos planteados para esta propuesta es el de introducir el concepto de razón de cambio ya que este lleva a una buen comprensión de la derivada, (Sánchez, G. Et al 2008) en este trabajo sé recogen varias investigaciones realizadas entorno a las dificultades que se presentan en el aprendizaje del concepto de derivada, la investigación muestra como se organiza la información de manera que se vayan atacando estas problemáticas. Un primer aspecto que mencionan, y el cual es de nuestro interés, esta directamente definido sobre la comprensión de la razón de cambio (Sánchez, G. Et al, 2008, p. 271), y los errores que comenten los estudiantes en tareas que involucren este concepto.

Uno de los errores que cometieron los alumnos fue que daban el valor de la abscisa cuando se les preguntaba por la razón de cambio en un punto no dado en la tabla, y para un valor genérico  $X=T$ , cuando se presentaban funciones lineales en forma de gráfico-tabla (Figura 1, Task C3).

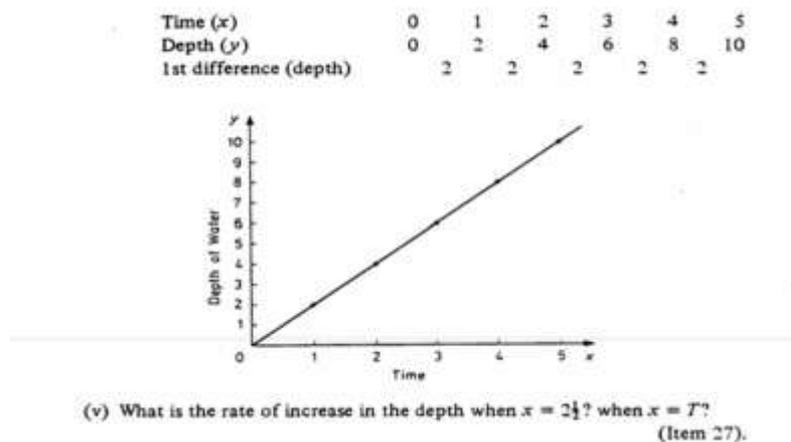


Imagen 2. Tarea C3 en el estudio de Ortón (1983)

Esto quiere decir que los estudiantes no pueden establecer el valor que hace que aumente la función en cada instante, tomando solo en cuenta el valor que toma la función con respecto a  $y$  en ese punto, dejando en evidencia las debilidades que hay en la comprensión de regularidades, patrones de comportamiento, pensamiento correlacional, incremento constante, entre otros. Esto implica que si el concepto de razón de cambio instantánea no es claro el de razón de cambio variable va a crear mayor confusión o quizás ni siquiera su comprensión. Así que no será posible interpretar la razón de cambio en puntos particulares y generales y mucho menos considerar que la derivada en un punto indica la velocidad de cambio de una situación problema.

# Capítulo 4.

## Marco Metodológico

### **4.1. PROPUESTA METODOLÓGICA**

#### **4.1.1. Hilo Conductor. Descripción De La Propuesta.**

El desarrollo de la propuesta, busca indagar que aspectos de la razón de cambio pueden percibir estudiantes de grado 6°, luego de la implementación de una secuencia de actividades guiadas y mediadas por el software dinámico Geogebra 4.0, enmarcado bajo la mediación instrumental (Santacruz, M, 2009) y focalizado en la comprensión de las representaciones ejecutables (Lupiañez & Moreno. 2000), se busca una aproximación hacia el concepto de razón de cambio, en estudiantes de grados básicos para atacar una de las problemáticas encontradas en la investigación realizada por (Sánchez, G. Et al. 2008), que evidencia cuatro aspectos importantes en la comprensión de la derivada en estudiantes de grado 11° y que resultaban en un primer aspecto en dificultades en la comprensión de la noción de razón de cambio, además la observación de aspectos relevantes al desarrollo del pensamiento variacional según los lineamientos y estándares curriculares en matemáticas estipuladas en el marco legal colombiano.

La delimitación que realizaremos en este escrito sobre lo que plantea Rabardel (Santacruz, M, 2009) en su trabajo esta definida en primera instancia sobre la instrumentalización; Es decir, sobre el avance que puedan mostrar los estudiante frente al concepto que se esta trabajando a partir de las herramientas que brinda el programa Geogebra, sin dejar de lado los procesos de instrumentación. Para el análisis de ello contaremos con algunos aspectos relevantes para nosotros de lo que plantea Duval (1999), en cuanto a los sistemas semióticos de representación

y los diversos registros de representación de los cuales se puede valer un estudiante para dar solución a una tarea planteada.

Por representaciones se entenderá, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes. Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación (Duval, 1999), según sean las características que posean; así, considerando por ejemplo la noción de función, existe un registro gráfico, uno algebraico o analítico y uno tabular, y aunque hay otros, estos han sido lo más usados en enseñanza hasta hoy.

Este tipo de representaciones son muy comunes en el desarrollo e implementación de tareas en la clase de matemáticas, los estudiantes constantemente están trabajando sobre este tipo de representación y de alguna manera de acuerdo al trabajo propuesto por el docente se vuelven familiares, pero aun así no dejan de ser estáticas, si la propuesta de enseñanza no es lo suficientemente rica, las representaciones pueden llegar a no encontrar relación unas con las otras y mantenerse aisladas generando vacíos en la comprensión de las propiedades de los conceptos, de esta manera es que a partir de la mediación instrumental y del aporte que hace la tecnología a la clase de matemáticas es que este tipo de representaciones puede tomar un tinte relacional y manipulable.

Como lo plantea Moreno (2001) se puede imaginar los sistemas de representación como herramientas de mediación. En sus versiones informáticas, la forma general de representación tiene una característica central: es ejecutable; Esto significa, dicho de manera que una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en un entorno de geometría dinámica. (Moreno, A. 2001, p. 84)

La posibilidad de establecer la herramienta del deslizador como un potenciador de cambio en las relaciones que se hacen con las figuras y los modelos planteados, conservando aspectos estructurales de las mismas, es una forma de manipulación, de ejecución de representaciones

informáticas, que contribuye al realismo de estos objetos geométricos. Esta herramienta es quizá la más importante a la hora de observar la variación en una situación de cambio, pues permite ver en tiempo real cuáles han sido las modificaciones que se hacen del objeto representado, permite realizar la devolución en los pasos, para de ver con detenimiento el cambio y si es necesario comprobar lo que se visualizó en una primera instancia para tener certeza sobre las conjeturas.

El concepto de razón de cambio es fundamental en la comprensión de la derivada pues a partir del tránsito en el sentido de la razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea es que se llega a establecer el concepto de derivada como el límite de los cocientes incrementales en un punto dado, cuando el límite de la diferencia de estos cocientes se aproxima a cero, según la investigación de Sánchez G. Et al, (2008) “si se considera que la derivada en un punto nos indica *la velocidad de cambio*, la comprensión de tal idea se apoya en el saber previo de la noción de la razón entre el incremento de  $x$  en relación al de  $y$ .”

El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático que se da a la variación y el cambio, “*En este sentido, puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad*” (Vasco. C. 2002).

Este tipo de pensamiento está relacionado con la razón de cambio puesto que pretende la búsqueda de una versión cada vez más general y abstracta del conocimiento que implica el conocimiento de estructuras invariantes en medio de la variación y cambio, y por otro lado, se busca la modelación de situaciones a través de funciones como resultado de la cuantificación de la variación. (Posada, M. 2005, p. 49)

#### 4.1.2. Referentes Didácticos.



Imagen 3. Esquema didáctico de la propuesta.

En búsqueda de un marco que nos permita comprender la manera de presentar los procesos seleccionados para este estudio, basamos la estructura de las actividades y el análisis de los resultados que proporcionen los estudiantes bajo las siguientes miradas; en primera instancia la mediación instrumental definida por Vygotsky (1983), en la que supone que toda actividad humana de carácter cognitivo esta basada en el uso de alguna herramienta que mejora los procesos de aprensión del conocimiento, continuamos sobre la idea de Rabardel (2001) en la que plantea el estudio de las transformaciones que sufren estas herramientas en su paso a instrumentos de aprendizaje matemático. Caracterizando dos procesos claros, la instrumentación que hace referencia a como el artefacto, en este caso el programa Geogebra, influye sobre el estudiante, y la instrumentalización que permite que el conocimiento del estudiante y su forma de trabajar guíen la forma en que se utiliza el programa. Para observar como estos procesos están presentes en el la propuesta y en lo que pretendemos desarrollen los estudiantes, tendremos en consideración las representaciones ejecutables de Lupiañez & Moreno (2001) en la medida de ver como pueden pasar de un registro de representación a otro (registros en lenguaje natural y registros tabulares) y como estos se convierte en sistemas procesables y manipulables, para llegar a

establecer la noción de Razón de cambio que es el eje central del concepto matemático que queremos que los estudiantes reconozcan.

#### **4.1.3. Estructura De Las Actividades.**

El diseño de las actividades esta planeado en dos momentos que deben ocurrir simultáneamente, estos son “*el enfrentamiento con el Applet*” donde el estudiante esta interactuando con el software y la “PRUEBA DEL ESTUDIANTE” (la cual es nuestro instrumento impreso de indagación y recolección de información donde el estudiante debe enfrentarse a una serie de preguntas). Organizamos la secuencia de actividades de la siguiente manera:

##### **APPLET CERO “Predicción de Patrones de Regularidad”**

Después de aplicar un pilotaje de las actividades, encontramos la necesidad de generar un Applet con el fin de inducir a los estudiantes a procesos de predicción. En este Applet presentamos una tabla en la cual se evidencia una secuencia de puntos, por medio de la opción nuevo punto en Geogebra. Los estudiantes deben hallar y completar la cantidad de puntos que deberían ir en cada posición. Lo que pretendemos es que los jóvenes logren calcular el número de puntos en posiciones consecutivas y no consecutivas, realizando acciones de conteo y búsqueda de patrones de regularidad.

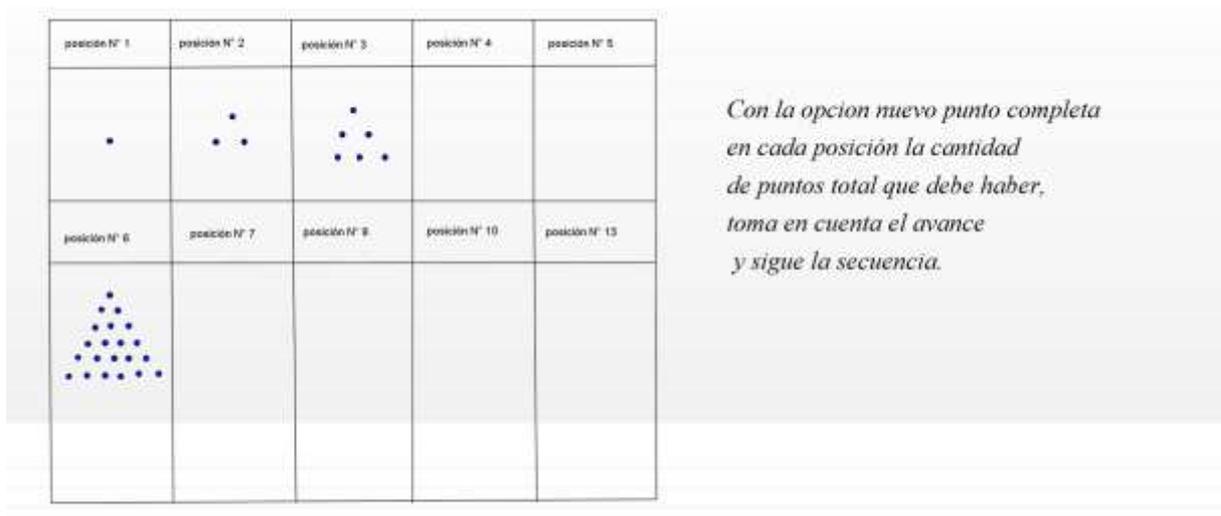


Imagen 4. Fotografía Applet 0

En este Applet preguntamos por la cantidad de puntos en posiciones no consecutivas, pero como podemos ver más adelante, en la prueba del estudiante solicitamos que completen una tabla de datos que indaga sobre posiciones consecutivas. Esto con el fin de observar los procesos de predicción.

**Prueba del estudiante - APPLET N° 0**

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

<u>N° posición</u>	<u>Cantidad total de puntos en la posición</u>
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

<u>N° posición</u>	<u>Cantidad total de puntos en la posición</u>
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

## APPLET UNO “Procesos de Generalización- Patrón de Incremento”

Por medio de la manipulación del deslizador a y b, buscamos que los estudiantes identifiquen la cantidad de cuadros “*que aumenta*” dependiendo de la posición en la que se encuentre, es decir, que reconozcan un “*patrón de incremento*” en posiciones consecutivas y no consecutivas, además de los procesos de generalización subyacentes en la actividad.

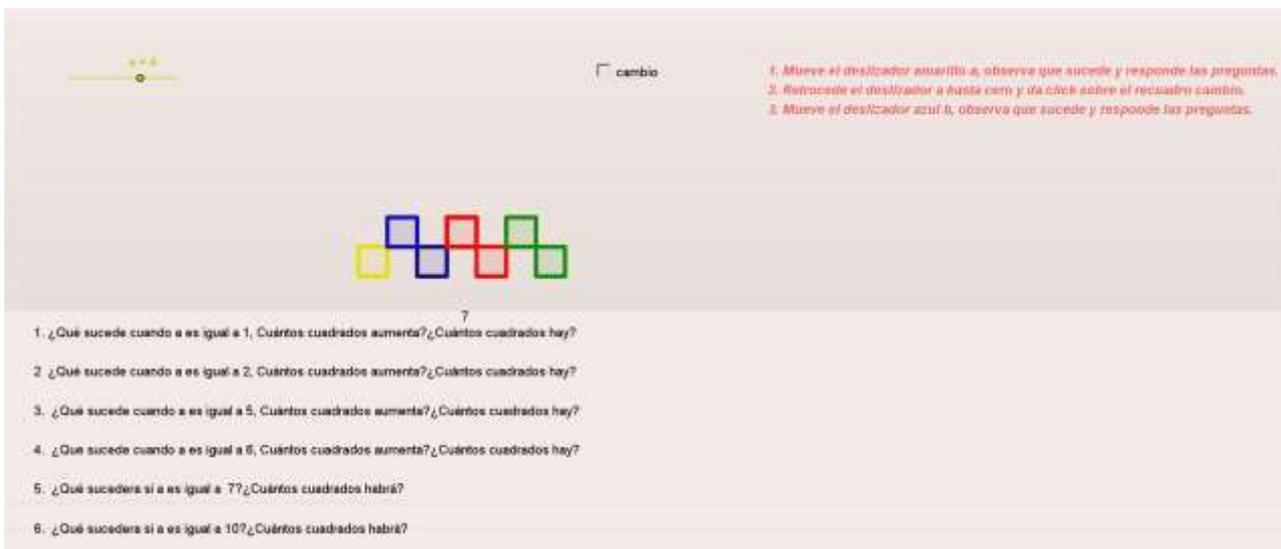


Imagen 5. Fotografía Applet 1

Los estudiantes deben responder las preguntas ubicadas en la parte inferior del Applet en la prueba del estudiante. Después de clicar la casilla cambio, se modifica el patrón de incremento y nuevamente deben responder las preguntas. Buscamos indagar sobre el *incremento según la posición*.

### **Prueba del estudiante - APPLET N° 1**

1. Responde cada pregunta de la segunda aplicación de Geogebra en los siguientes espacios.

DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
1. _____ _____	1. _____ _____
2. _____ _____	2. _____ _____
3. _____ _____	3. _____ _____
4. _____ _____	4. _____ _____
5. _____ _____	5. _____ _____
6. _____ _____	6. _____ _____

2. Completa la tabla.

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
1				
2				
3				
4				
5				
20				

3. ¿Podrías encontrar una forma para saber la cantidad de cuadrados que aumentó en cualquier posición utilizando el número de la posición y la cantidad de cuadrados en esa posición? Escríbela en el espacio. Si es No explica el porqué.

DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL

### APPLET DOS “Patrón de Incremento- Lado-Perímetro”

En este Applet buscamos que los estudiantes a partir de una serie de relaciones funcionales cualitativas y cuantitativas logren establecer la *medida de incremento* de una magnitud cuando varía otra. En este caso específico, que encuentren cómo el incremento en la medida del lado de un cuadrado, afecta ó “incrementa” la medida del perímetro, teniendo una idea de incremento constante. Buscábamos que los estudiantes se hicieran preguntas del tipo ¿qué pasaría si aumento dos unidades a la medida del lado?

Observa cuidadosamente y analiza.  
¿Cómo cambia el perímetro?



PERÍMETRO= 32

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Imagen 6. Fotografía Applet 2.

En los ejercicios 2 y 3 sucede lo mismo, solo que ahora el incremento en el lado del cuadrado es mayor.

Observa cuidadosamente y analiza.  
¿Cómo cambia el perímetro?



Imagen 7. Fotografía 2 Applet 2

### APPLET TRES “Razón de Cambio Constante”

En este Applet esperamos encontrar como los estudiantes perciben la rapidez de llenado de 4 envases; de los cuales los envases 1 y 4, y los envases 2 y 3 tienen la misma velocidad de llenado respectivamente, además los envases 3 y 4 arrancan su proceso de llenado con una unidad de ventaja.

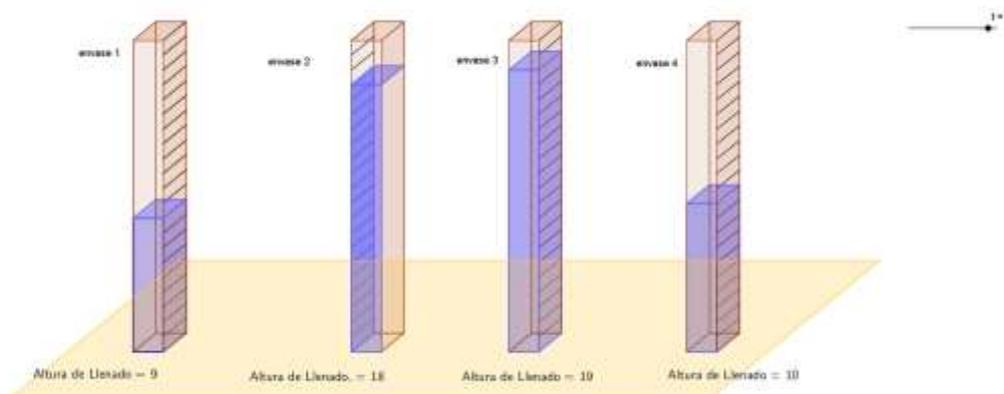


Imagen 8. Fotografía Applet 3

Deseamos conocer acerca del incremento constante y de la razón de cambio; para lo cual a partir de la exploración con el software, nuevamente los estudiantes deben enfrentarse a la prueba del estudiante donde hay una serie de preguntas y de tablas.

**Prueba del Estudiante- APPLET N°3**

1. Al mover el deslizador t hasta 10: (observa con cuidado)

a. ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido? ¿Por qué?

---



---

2. Completa las tablas.

T	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

---



---

4. Completa la tabla y responde.

Envase 2		
T	Altura llenado	Cantidad rayas e aumenta
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

1. ¿Cuánto va aumentando la altura de llenado cada vez que aumenta  $t$ ?  
\_\_\_\_\_
2. ¿Cambia la cantidad de rayas a medida que aumenta  $t$ ? Explique  
\_\_\_\_\_
3. En cada momento que aumenta  $t$ , ¿como es la altura de llenado? Explique  
\_\_\_\_\_
4. ¿Podrías encontrar una operación que te permita hallar la cantidad de rayas que aumenta el líquido en el envase, utilizando la altura de llenado y  $t$ ? ¿te serviría para cualquier valor de  $t$ ? Explica mediante un ejemplo.  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

#### 4.1.4. Temporización

IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES CON LOS ESTUDIANTES:

- \* Sesión 1. (100 minutos) Applet 0 y 1
- \* Sesión 2 (100 minutos) Applet 2
- \* Sesión 3 (100 minutos) Applet 3
- \* Sesión 4: (70 minutos aprox. Con C/ estudiante). Entrevistas individuales (3 estudiantes)

#### 4.1.5. Población

En la búsqueda de como realizar el tratamiento del concepto de razón de cambio desde los primeros años de escolaridad de forma que lleve a su comprensión para el estudio de la derivada, se seleccionó un grupo de 5 estudiantes de grado 6° de manera aleatoria, del colegio CAFAM en la ciudad de Bogotá, de edades entre los 11 y los 12 años.

Para efectos del análisis que se llevara a cabo más adelante en este documento, la forma de tipificar a cada estudiante es la siguiente:

E1; Estudiante: <u>Valentina</u>	Edad. <u>12 años</u>
E2; Estudiante: <u>Valentina</u>	Edad. <u>11 años</u>
E3; Estudiante: <u>Gianmarco</u>	Edad. <u>11 años</u>
E4; Estudiante: <u>Juan Diego</u>	Edad. <u>12 años</u>
E5; Estudiante: <u>Mariana</u>	Edad. <u>11 años</u>

#### **4.1.6. Recolección de información.**

##### **Pilotaje**

En primera instancia se realizó un pilotaje con un estudiante de grado sexto del Colegio Ambiental Los Catalanes. Con el fin de evaluar la pertinencia de forma y de fondo en los Applet (aplicativos en Geogebra 4.0) y en las Pruebas Del Estudiante (instrumento impreso). Durante este momento el docente guiaba el desarrollo de las actividades y formulaba preguntas en cuanto a la manipulación del programa y de las respuestas que daba el estudiante a cada planteamiento dentro del documento impreso. De este pilotaje se recogieron aspectos para modificar en cuanto a la forma de los Applet (colores, diseño, estructura) y de fondo con respecto a algunas preguntas del instrumento que no llevaban al propósito general que se planteaba.

##### **Aplicación De Las Actividades.**

Durante la aplicación de las actividades el espacio del cual se dispuso fue una sala de sistemas que contaba con el programa Geogebra 4.0 en cada uno de los computadores de manera que el trabajo se hiciera completamente individual; la intervención del docente durante este espacio se dio en la explicación de cada una de las actividades planteadas, y en la realización del video de lo que estaban realizando los estudiantes, teniendo en consideración la forma como se manipula el programa y se daba respuesta a partir de ello a cada pregunta formulada.

### **Entrevistas Individuales.**

Para este momento se seleccionaron a tres estudiantes (E3, E4 Y E5), quienes de acuerdo a la observación final de los instrumentos y de las grabaciones previas, mostraron mayor acercamiento a lo que se estaba buscando. Los espacios destinados fueron de 70 minutos aproximadamente con cada uno de ellos y de forma separada, se realizaron preguntas guiadas partiendo de las respuestas que habían dado y enfocadas a la comprensión del concepto de razón de cambio.

# Capítulo 5

## Análisis

En nuestro trabajo para operativizar los procesos de recolección de información, consideramos las posibles acciones que podían realizar los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas y de acuerdo a ello se formuló una rejilla que permite organizar y ubicar a cada estudiante con base en la acción realizada en cada actividad propuesta.

Actividad	Intención	Nociones relacionadas involucradas	Pregunta o instrucción	Categorías (Definidos por AR##, como las acciones que deberían realizar los estudiantes en cada Applet, estableciendo un incremento en la complejidad de las acciones.
Applet 0. (Predicción de patrones de regularidad)	Inducir al estudiante a la predicción de términos en series aritméticas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conteo</li> <li>• Búsqueda de patrones de regularidad</li> </ul>	Tabla t.0.1	AR00: No responde. AR01: Encuentra la cantidad de puntos en posiciones consecutivas. AR02: Encuentra la cantidad de puntos en posiciones no consecutivas.
Applet 1. (procesos de generalización)	Inducir al estudiante al reconocimiento de relaciones en situaciones de cambio.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Patrones de cambio.</li> <li>• Procesos de generalización.</li> </ul>	Tabla t.1.1. Y t.1.2. Pregunta 3.	AR10: No reconoce la relación entre la posición y el incremento. AR11: Reconoce la relación entre la posición y el incremento y la compara con respecto a la posición inicial. AR12: Reconoce la relación entre la posición y el incremento y la compara con respecto a la posición inmediatamente anterior.
Applet 2. (Incremento constante)	Inducir al estudiante al reconocimiento de relaciones cualitativas y cuantitativas en	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relaciones cualitativas y cuantitativas entre magnitudes</li> </ul>	Ejercicio 1, 2 y 3	AR20: Identifica el cambio. AR21: Identifica el cambio y establece la relación entre el lado y el perímetro de manera cualitativa. AR22: Identifica el cambio y establece la relación entre el lado y el perímetro de

	situaciones de cambio.	s		manera cuantitativa.
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Incremento constante</li> </ul>		
Applet 3. (Razón de cambio constante)	Inducir al estudiante a que identifique la relación entre el incremento de una magnitud en una situación de cambio y la rapidez.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Incremento constante</li> <li>• Razón de cambio</li> </ul>	Pregunta 1	AR33: No reconoce una relación entre el incremento nivel-tiempo con la rapidez de llenado. AR34: Reconoce una relación entre el incremento nivel-tiempo con la rapidez de llenado
			Tabla t.3.1. Y t.3.2.	
			Pregunta 3	

Realizamos una rejilla aparte para la pregunta número 4 de la parte final en la aplicación del Applet 3, ya que consideramos que en este último se recoge gran parte del avance en la propuesta y nos permitió observar con mayor claridad que aspectos de la noción de razón de cambio pudieron apropiarse los estudiantes. Para este efecto solo tendremos en consideración las respuestas dadas por los tres estudiantes entrevistados de manera individual.

Actividad	Pregunta	Nociones relacionadas involucradas	Categorías (se define como las acciones realizadas con relación a la idea de razón de cambio que puedan tener los estudiantes)
Punto 4	Pregunta 4-1.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relaciones cualitativas y cuantitativas entre magnitudes</li> </ul>	ARRC0: Determina la relación de la altura de llenado con el tiempo.
	Pregunta 4-2 y 4-3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Incremento constante</li> </ul>	ARRC1: Establece el incremento del nivel de llenado de manera cualitativa. ARRC2: Establece el incremento del nivel de llenado de manera cuantitativa.
	Pregunta 4-4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Razón de cambio</li> </ul>	ARRC3: Determina una forma para establecer el incremento de manera cualitativa. ARRC4: Determina una forma para establecer el incremento de manera cuantitativa.

Con base en esto y en el desarrollo de los estudiantes encontrado durante la implementación de las actividades y teniendo como evidencia los registros de video del grupo completo y de los tres estudiantes entrevistados individualmente se encontró que los estudiantes realizaban las siguientes acciones.

Actividad	NIVELES (Definidos por AR##, como las acciones que deberían realizar los estudiantes en cada Applet ( primer numero, numero del Applet) y establecido por el incremento en la complejidad de las acciones segundo numero)	Estudiantes que presentaron evidencias de acciones realizadas para cada nivel.
Applet 0. (Predicción de patrones de regularidad)	AR00: No responde.	
	AR01: Encuentra la cantidad de puntos únicamente para posiciones consecutivas.	
	AR02: Encuentra la cantidad de puntos en posiciones consecutivas y no consecutivas.	E1, E2,E3, E4, E5
Applet 1. (procesos de generalización)	AR10: No reconoce la relación entre la posición y el incremento.	
	AR11: Reconoce la relación entre la posición y el incremento y la compara con respecto a la posición inicial.	E1, E2
	AR12: Reconoce la relación entre la posición y el incremento y la compara con respecto a la posición inmediatamente anterior.	E4 E3,E5,
Applet 2. (incremento constante)	AR20: Identifica el cambio.	
	AR21: Identifica el cambio y establece la relación entre el lado y el perímetro de manera cualitativa.	E1, E2, E3
	AR22: Identifica el cambio y establece la relación entre el lado y el perímetro de manera cuantitativa.	E4 Y E5
Applet 3. (Razón de cambio constante)	AR33: No reconoce una relación entre el incremento nivel-tiempo con la rapidez de llenado.	E1, E2 y E4
	AR34. Reconoce una relación entre el incremento nivel-tiempo con la rapidez de llenado	E3 y E5

Actividad	Nociones relacionadas involucradas	Categorías (se define como las acciones realizadas con relación a la idea de razón de cambio que puedan tener los estudiantes)	Estudiantes encontrados en cada categoría.
punto 4	• Relaciones cualitativas y cuantitativas	ARRC0: Determina la relación de la altura de llenado con el tiempo.	
		ARRC1: Establece el incremento del nivel de	

<ul style="list-style-type: none"> <li>entre magnitudes</li> <li>• Incremento constante</li> <li>• Razón de cambio</li> </ul>	llenado de manera cualitativa.	
	ARRC2: Establece el incremento del nivel de llenado de manera cuantitativa.	E3, E2
	ARRC3: Determina una forma para establecer el incremento de manera cualitativa.	E5
	ARRC4: Determina una forma para establecer el incremento de manera cuantitativa.	

A partir de aquí presentaremos el análisis de la información recolectada, relacionando lo obtenido en las rejillas de categorización, con lo propuesto en el marco teórico.

### APPLET CERO “Predicción de Patrones de Regularidad”

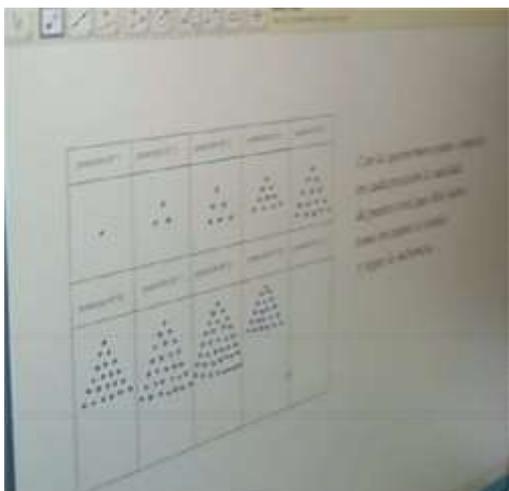
Como comentamos en la sección 4.1.2 estructura de las actividades, en este Applet presentamos una tabla en la cual se evidencia una secuencia de puntos. Lo que pretendemos es que los estudiantes logren calcular el número de puntos en posiciones consecutivas y no consecutivas, realizando acciones de conteo y búsqueda de patrones de regularidad.

posición N° 1	posición N° 2	posición N° 3	posición N° 4	posición N° 5
•	• ••	• •• •••		
posición N° 6	posición N° 7	posición N° 8	posición N° 10	posición N° 11
••• •••• ••••• ••••••				

*Con la opción nuevo punto completa en cada posición la cantidad de puntos total que debe haber, toma en cuenta el avance y sigue la secuencia.*

Imagen 9: fotografía 2 Applet 0

Teniendo en cuenta los niveles propuestos en la rejilla de análisis, observamos que los estudiantes recurrieron a un proceso de “exhaustión” dibujando la cantidad de puntos necesarios para las posiciones faltantes.



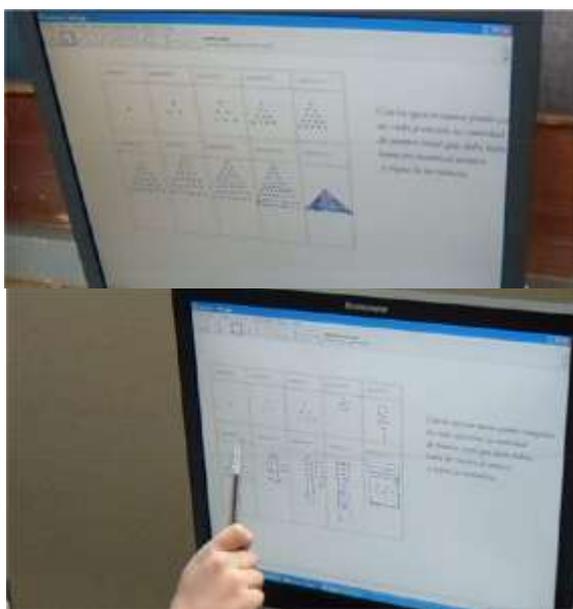
Fueron inmediatas preguntas como:

*E1. ¿Por qué el cambio del 8 al 10? ¿No hay 9? Y... luego de 10 a 13?*

A pesar de que E1 estaba realizando la actividad de conteo correctamente, la necesidad de completar la prueba del estudiante (la tabla) lo lleva a la pregunta de la posición. No obstante, llenó los datos de la tabla correctamente.

Imagen 10. Fotografía sobre la grabación en el trabajo con Applet 0

ACTIVIDAD	NIVELES	Estudiantes
Applet (Predicción de patrones de regularidad)	0. AR00: No responde.	
	AR01: Encuentra la cantidad de puntos únicamente para posiciones consecutivas.	
	AR02: Encuentra la cantidad de puntos en posiciones consecutivas y no consecutivas.	E1, E2, E3, E4, E5



En general:

- Realizaron procesos de conteo
- Zoom para visualizar la cantidad de puntos

Algo que nos llamó la atención dentro de las respuestas, fue el hecho que E4 modificó la posición de los puntos, es decir utilizó otras figuras para representar la cantidad de puntos.

*- E4 no requiere de la visualización para reconocer el patrón de incremento, desligando lo visual de lo numérico.*

Imagen 11. Fotografía de video Applet 0.

**(2° PARTE) APPLLET N° 0**

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

<u>N° posición</u>	<u>Cantidad total de puntos en la posición</u>
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36

<u>N° posición</u>	<u>Cantidad total de puntos en la posición</u>
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136

**(2° PARTE) APPLLET N° 0**

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

<u>N° posición</u>	<u>Cantidad total de puntos en la posición</u>
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36

<u>N° posición</u>	<u>Cantidad total de puntos en la posición</u>
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136

- Observamos que todos los estudiantes encuentran la cantidad de puntos en posiciones consecutivas y no consecutivas; encontrándose en el máximo nivel propuesto.
- Todos realizaron adecuadamente el respectivo cambio de registro de lo semi-concreto del Applet al lenguaje simbólico-tabular.
- Dos estudiantes no requieren del referente visual para hacer procesos de generalización y búsqueda de patrones.

## **APPLET UNO. RELACIONES EN SERIES ARITMÉTICAS.**

En la segunda parte del desarrollo de las actividades a los estudiantes se les presentaba en el Applet, dos situaciones de cambio muy familiares en el entorno escolar matemático, que buscaban la identificación de patrones de regularidad en situaciones de cambio discreto y relaciones entre el incremento en los patrones de cambio, la cantidad de elementos en una posición dada y el valor de la posición.

Los estudiantes tenían que manipular un deslizador que hacía referencia a la posición y a medida que va a aumento este, ir respondiendo las preguntas planteadas en el Applet y en la prueba del estudiante. Las dos situaciones en el Applet se mostraban a partir del uso de la herramienta botón y aparecían secuencialmente apenas se “clickeaba” sobre él.

Cada pregunta tenía la misma estructura que las preguntas anteriores, sin embargo, había diferencias en los incrementos de posición a posición (avance del deslizador), en la primera el incremento era de dos elementos (cuadros) y en la segunda era de cuatro elementos (cuadros).

De acuerdo a esto se pudo observar lo siguiente:

- En cuanto al uso de los registros de representación en lenguaje natural y registro tabular que se solicitaban, se vio una dificultad marcada en los estudiantes E2 y E4 ya que no pudieron expresar en un lenguaje natural, claramente el paso de una posición consecutiva a una no consecutiva, no lograron determinar la cantidad de cuadros para la posición 10 pasando de la 7, y la cantidad de cuadros que aumente varía en cada respuesta. (Imagen 12)

1. Responde cada pregunta de la segunda aplicación de Geogebra en los siguientes espacios.

DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
1. se muestra 1 cuadrado - se aumenta 1 cuadro - hay 1 cuadrado	1. se muestra 1 cuadrado - se aumenta 1 cuadrado - hay 1 cuadrado
2. se muestra 2 cuadrados - se aumentan 2 - hay 3 cuadrados	2. se muestra 4 cuadrados - se aumentan 4 - hay 5 cuadrados
3. se muestra 8 cuadrados - se aumentan a 8 - hay 4 cuadrados	3. se muestra 8 cuadrados - se aumenta 8 - hay 4 cuadrados
4. se muestra 10 cuadrados - se aumentan a 11	4. se muestra 4 - se aumentan 4 hay 13
5. se aumentan 2 - habrá 13 cuadrados	5. se aumentan 4 y habrá 17
6. se aumentan 8 cuadrados	6. se aumentan 20 y habrá 37

Imagen 12: tabla punto 1 Applet 1 del estudiante E2

Cosa que si es claro en el registro tabular. En el momento de la revisión de los videos para observar que había pasado allí, sobre el porque en la tabla si lograron tener éxito y en las preguntas iniciales no, se observó que después de responder las primeras preguntas e iniciar a completar la tabla los estudiantes tomaron con mayor calma, el movimiento del deslizador para ver como va aumentando la figura, durante el llenado de la tabla, decidían devolverse desde el deslizador a la tabla y viceversa establecían un conteo mental para llegar a determinar cuantos cuadros había en cada posición y cuantos cuadros aumenta en cada posición, lo que sin duda es uno de los aspectos fuertes en la teoría de las representaciones ejecutables, pues la manipulación de las herramientas, en este caso el deslizador, del programa permite entender lo que se solicita en las tareas y reflexionar entorno a sus propias dificultades.

Con relación a los conceptos involucrados, los cinco estudiantes pudieron encontrar el patrón de regularidad en cada una de las dos situaciones, ya que determinaron correctamente la

cantidad de cuadros que había en las posiciones planteadas en las preguntas, a excepción de los estudiantes E2 y E4, como se mencionó anteriormente. Sin embargo la relación que hacían de la posición con respecto al incremento no fue igual en todos los estudiantes, los estudiantes E1 y E2, hacían la relación del incremento con la posición pero tomando como referencia la primera posición. (Imagen 13)

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL	DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL
1	1	1	1	1
2	3	5	2	8
3	5	9	4	12
4	7	13	6	16
5	9	17	8	20
20	391	77	38	80

Imagen 13: tabla punto 2 Applet 1 del estudiante E1

Es decir, el incremento no era el mismo a medida que aumentaba el deslizador, tomaban la sumatoria de los incrementos en el momento que se les preguntaba por el incremento en ese punto, dando validez a uno de los aspectos que encontró Sánchez, G. Et al (2008) en su investigación, *los estudiantes confunden el valor del incremento en el instante solicitado con el valor de la abscisa y (posición)*, que para este caso aun sigue siendo incorrecto ya que los dos valores no concuerdan.

Los estudiantes E3, E4 y E5 establecen el incremento para cada posición, es decir para cada instante en el que se le solicitaba. (Imagen 14)

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL	DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL
1	1	1	1	1
2	3	5	2	4
3	5	9	2	4
4	7	13	2	4
5	9	17	2	4
20	39	60	2	4

Imagen 14: tabla punto 2 Applet 1 del estudiante E4

Comparan y encuentran la diferencia entre el valor de elementos en la posición dada con respecto a una posición anterior para encontrar la cantidad de cuadros que se incrementó en cada posición.

También es importante observar que pueden encontrar la cantidad de elementos en una posición no consecutiva, por ejemplo logra pasar de una posición 5 a una posición 20, determinando correctamente la cantidad de elementos en ambas posiciones, pero a la hora de preguntar si pueden encontrar una forma para determinar la cantidad de cuadros en una posición cualquiera la respuesta de los cinco estudiantes, no es clara, pues solo mencionan que se obtienen sumando dos, no dice a quien o que hay que sumarle, no toma ningún referente para ello. Nuevamente es evidente que encontraron el patrón de cambio que existe en las situaciones presentadas.

### APPLET DOS “Patrón de Incremento- Lado-Perímetro”

En este Applet buscamos que los estudiantes a partir de una serie de relaciones funcionales cualitativas y cuantitativas logren establecer la *medida de incremento* de una magnitud cuando varía otra. En este caso específico, que encuentre ¿cómo el incremento en la medida del lado de un cuadrado, afecta ó “incrementa” la medida del perímetro? Teniendo una idea de

incremento constante. Buscábamos que los estudiantes se hicieran preguntas del tipo ¿qué pasaría si aumento dos unidades a la medida del lado?

Observa cuidadosamente y analiza.  
¿Cómo cambia el perímetro?

lado = 8

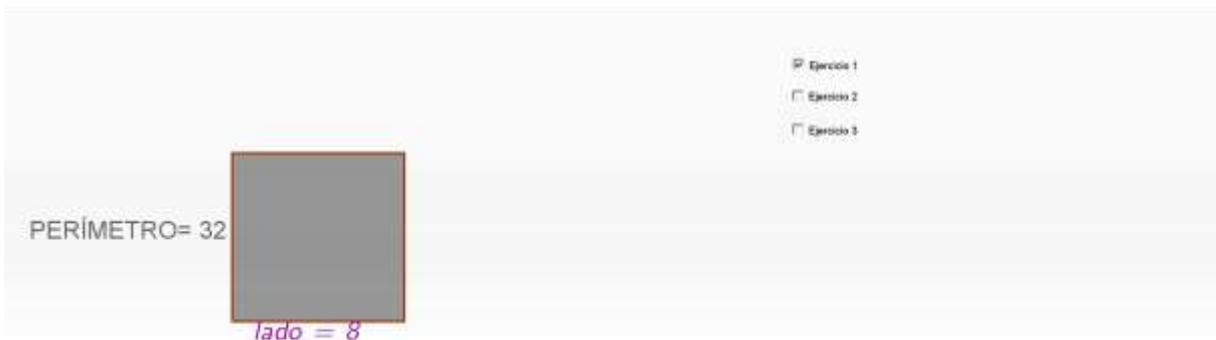
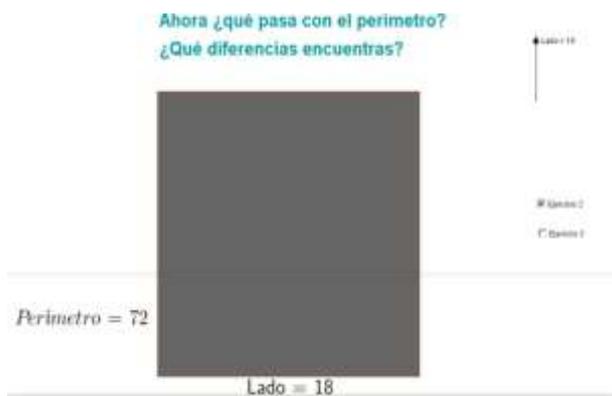


Imagen 15. Fotografía 3 Applet 2

En los ejercicios 2 y 3 se indaga sobre lo mismo, solo que ahora el incremento en el lado del cuadrado es mayor.



Observa cuidadosamente y analiza.

¿Cómo cambia el perímetro?



Imagen 16. Fotografía 4 Applet 2

Por el tipo de respuestas brindadas por los estudiantes establecimos que todos identificaron patrones de cambio, solo que unos poseen mayores habilidades comunicativas. Encontrando:

Applet 2. (incremento constante)	AR20: Identifica el cambio.	
	AR21: Identifica el cambio y establece la relación entre el lado y el perímetro de manera cualitativa.	E1, E2, E3
	AR22: Identifica el cambio y establece la relación entre el lado y el perímetro de manera cuantitativa.	E4 Y E5

E1, E2 y E3 se encontraban en el nivel AR21 debido que sus respuestas fueron:

- E1: *“como es un cuadrado entonces el perímetro es 4 veces lo que vale el lado”*.  
-Prof: *¿Y si se aumenta el lado de 5 en 5?*  
- E1: *El perímetro será 20.*
  
- E2: *“si aumento en 1 el lado, el perímetro aumentará cuatro”*  
- Prof: *¿Y si se aumenta el lado de 5 en 5?*  
- E2: *pues el perímetro aumentara de 5 en 5.*
  
- E3: *“si yo aumento el lado, el perímetro también aumentará, entonces el perímetro aumentará así como se aumente el lado”*  
- Prof.: *¿Y si se aumenta el lado de 5 en 5?*  
- E3: *aumenta 5.*

E4 y E5 se encontraban en el nivel AR22 debido que sus respuestas fueron más explícitas y mencionaron su razonamiento matemático en algún momento:

- E4: *“si sumo en 2 o 3 o lo que sea al lado, el perímetro será 4 veces lo que se aumente”*.
- Prof.: *¿Y si aumenta de 5 en 5?*

- E4: *pues el perímetro es cinco por cuatro, ósea que es la tabla del 20.*
- E5: *“si aumento de uno en uno el lado, el perímetro aumentará de cuatro en cuatro y si aumento de dos en dos el lado, el perímetro aumentará de ocho en ocho”*
- Prof: *¿Y si aumenta de 5 en 5?*
- E5: *pues el perímetro será... 20, pero aumenta de 20 en 20.*

Identificamos que los estudiantes hacen dos comparaciones simultáneas; en la primera comparan únicamente *el valor del perímetro dependiendo de la medida del lado*, en esta parte aunque reconocen patrones de cambio no reconocen la razón de cambio como tal. Mientras que E4 y E5 si encontraron la razón de cambio instantánea.

Cuando sistematizamos y analizamos las respuestas brindadas, nos dimos cuenta que sería muy interesante indagar en sentido contrario; es decir con preguntas si el perímetro aumenta de 8 en 8 ¿cuál sería el incremento en el lado del polígono?, ¿cómo aumenta? Dejando abierta la posibilidad a modificaciones futuras.

### **APPLET 3. “RAZON DE CAMBIO CONSTANTE”**

En este ultimo Applet la intención era observar, como recogiendo lo trabajado de los Applet anteriores, es posible identificar la rapidez en situaciones de incremento constante, reconociendo la rapidez de llenado a partir de la relación que hay entre dos magnitudes, una el tiempo (t) y otra el nivel (altura de llenado). La acción que debían realizar los estudiantes en cuanto a la manipulación del programa era la de hacer avanzar al deslizador y observar cual de los envases se llenaba más rápido. Dos de los envases tenían la misma velocidad y los otros dos otra velocidad, pero para efectos de comparación en cuanto a las velocidades, se dejaron dos envases con una altura inicial de 1 y no de cero.

En la primera pregunta de esta parte se pide que una vez manipulado el deslizador responda, ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido?, las respuestas que se encontraron, no estaban muy alejadas de lo que presupuestábamos, pues los cinco estudiantes coincidieron en que el envase 3 se llena mas rápido, la diferencia estuvo en que solamente el estudiante E1 mencionó que se llenaba mas rápido porque el envase partió de 1, dándole una ventaja sobre los demás envases:

a. ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido? ¿Por qué?  
El envase 3 porque se llena de 2 en 2 y además el tan-  
que estaba lleno en 1

Esto permite reconocer que con sólo la visualización del llenado no es posible identificar y comparar la relación que existe entre el tiempo y la distancia, la pregunta quizás se formula bastante abierta, lo que hace que el estudiante solo quiera verificar quien llega primero al borde del envase y no note que la velocidad con la que se van llenando los envases sean iguales para algunos de ellos, de allí que se formula ahora un ejercicio como en el applet 1, en el que los estudiantes tenían que completar dos tablas, la primera en la que verificará la altura de llenado a cada instante de  $t$  y la segunda la cantidad de aumentos en cada instante de  $t$ , esto con la intención de que pudieran responder nuevamente a un cuestionamiento sobre cuales envases podrían llenarse a la misma velocidad, pero ya con un análisis numérico y comparativo.

En el ejercicio 2 de completar las tablas, hubo un avance pues recordando en el applet 1, solamente dos estudiantes pudieron completar las tablas correctamente e identificar el patrón de comportamiento, aquí cuatro de los cinco estudiantes tuvieron éxito en la tarea, por ejemplo la respuesta para este punto de E2, quien no realizó el ejercicio en el applet 1 como se esperaba, fue;



t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1

Definiendo plenamente el comportamiento de crecimiento con respecto a cada avance de t, sin embargo, el estudiante E4 no respondió como se esperaba a la tabla, en la segunda colocó la cantidad de rayas acumuladas a medida que avanza t, quizás esto no permitió que respondiera a la siguiente pregunta favorablemente, pues no pudo evidenciar que realmente si hay envases que se llenan con la misma velocidad, las respuestas para estos puntos del estudiante E4 fueron;

2. Completa las tablas.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
0	1	2	1
1	3	4	2
2	5	6	3
3	7	8	4
4	9	10	5
5	11	12	6
6	13	14	7
7	15	16	8
8	17	18	9
9	19	20	10

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

ninguno se llena por completo.

*No porque solo*

Aquí se evidencia que el estudiante no logra identificar igualdades en los patrones de comportamiento; por lo tanto, responde a la pregunta con una respuesta arbitraria, confundiendo la velocidad con la distancia o capacidad total de llenado, pues responde que no hay velocidades iguales porque solo uno de ellos se llena por completo. Mientras que en las respuestas de los otros estudiantes para la pregunta 3 es más fácil evidenciar que, la tabla y el análisis que se hace de ella, permite comparar e identificar la igualdad en los patrones de comportamiento, por ejemplo el estudiante E3 responde así: “Si el envase 3 y 2, porque aumenta de a 2”.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	4
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	1
2	2	2	1
3	2	2	1
4	2	2	1
5	2	2	1
6	2	2	1
7	2	2	1
8	2	2	1
9	2	2	1
10	2	2	1

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

Si el envase 2 y 3, porque aumentan de 2

Mientras que el estudiante E5 identifica la otra igualdad;

2. Completa las tablas.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

t	¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	2	1
2	1	2	2	1
3	1	2	2	1
4	1	2	2	1
5	1	2	2	1
6	1	2	2	1
7	1	2	2	1
8	1	2	2	1
9	1	2	2	1
10	1	2	2	1

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

Si algunos el 1 y el 4

Cambiando de alguna manera lo respondido en la primera pregunta, pues al observar y manipular con detenimiento el applet, logran ver las igualdades en los comportamientos y se cuestionaban sobre quien se llena más “rápido”. Es algo curioso notar que ninguno de ellos identificó las 2 igualdades al tiempo, pese a que reconocieron que si hay envases que se llenan con la misma rapidez, verificando el incremento que hay de la cantidad de rayas (nivel) en cada instante de tiempo  $t$  (deslizador) y comparandolo con cada uno de los diferentes envases.

Al igual que el trabajo realizado en el applet 1, el registro tabular cobra una gran importancia pues permite hacer mas clara la visualización de los patrones de regularidad y de allí que establecer relaciones entre las magnitudes implícitas, se hace más sencillo para el estudiante, ya no solo con la simple visualización y manipulación del applet, sino llevando a cabo ambas tareas al tiempo, la manipulación y el registro.

El hecho de preguntar al estudiante sobre la cantidad de rayas que aumenta con relación al tiempo, hace que la mediación del applet sea fundamental pues los estudiantes tuvieron la posibilidad de avanzar y devolverse a voluntad, cayendo en la cuenta que no se preguntaba por

qué envase completa la cantidad total del líquido, sino por qué envases tienen la misma relación al irse llenando, esto es un indicio de que el applet permite relacionar las magnitudes de manera que el comportamiento entre ellas, lleve a la idea de rapidez constante. Ya que al aumentar la misma cantidad de rayas dos envases y discriminar su posición inicial están enfocando su atención sobre la relación entre tiempo-distancia y no solo distancia, lo que lleva a comprobar que se está identificando una noción de velocidad, uno de los primeros acercamientos a la noción de razón de cambio, aunque esta idea es aun muy intuitiva, se logra un primer acercamiento a una propuesta que podría focalizarse en el desarrollo y comprensión del concepto de razón de cambio, y el desarrollo del pensamiento variacional con estudiantes de grados básicos.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este capítulo final presentaremos las conclusiones frente a los resultados recogidos a lo largo de la propuesta, señalaremos los alcances obtenidos frente a la pregunta orientadora, los objetivos que nos trazamos, le pertinencia en el marco teórico y metodológico y por supuesto un breve análisis entorno a lo que se puede hacer con esta propuesta sobre la aproximación a la noción de razón de cambio.

### **5.1. Con relación a los objetivos**

Desde la pregunta orientadora nos trazamos la meta de crear una secuencia de actividades que permitiera potenciar el pensamiento variacional y generara en el estudiante un acercamiento a los procesos que se ven envueltos en cuanto a la comprensión de la noción de razón de cambio, involucrando un instrumento mediador que facilitara dicho acercamiento, en este caso el software Geogebra 4.0 que dada su naturaleza de software libre, era pertinente en todo sentido pues no obstaculizaba de ninguna forma su implementación.

La pregunta permitió que las actividades fueran pensadas en contextos matemáticos accesibles, en complejidad, al estudiante, lo cual motivo fuertemente el hecho de poder utilizar herramientas manipulables como las que brinda el software, en especial la herramienta del deslizador, que para efectos de la propuesta y de la pregunta, fue la herramienta más importante para “potenciar” de alguna manera el pensamiento variacional, pues la factibilidad que tiene de anclar cambios, variaciones de objetos geométricos con el “tiempo real” permite una mayor visualización de estos cambios y

al poderse mover o “deslizar” con plena voluntad genera la idea de comprobación en lo que se esta observando.

De allí que se construyeron objetivos para guiar y focalizar de una manera más precisa lo que pretendíamos desarrollar con esta propuesta.

### **General.**

Respecto al diseño e implementación de la propuesta el objetivo se cumple, pues con base en el capítulo 4 sobre el Marco metodológico, se observa el paso a paso de como se plantearon cada una de las actividades, las intenciones en cada una de las preguntas que se formulaban y los resultados que se obtuvieron luego de la implementación y un análisis hecho bajo los parámetros definidos en el marco teórico.

Luego de la aplicación de las actividades propuestas, se logró evidenciar un avance en la comprensión de aspectos relacionados con el concepto de razón de cambio, en cuanto a la búsqueda y consecución de patrones de regularidad, correlación entre magnitudes de tiempo y distancia, de forma cualitativa y cuantitativa, en algunos casos.

La implementación del software generó que los estudiantes pudieran encontrar mayor sentido a las actividades que se plantearon, por ejemplo en la de llenado de los envases, ¿pues esta misma actividad presentada en un formato estático, no habría permitido que los estudiantes encontraran la relación del incremento del nivel con respecto al incremento del tiempo, situación que se logró en la última actividad propuesta (análisis Applet 3), además la visualización de como aumenta una magnitud con relación a otra en el mismo instante en que esta crece, también se hace considerablemente difícil si no se puede manipular, pues los procedimientos se hacen tediosos y más con estudiantes de grados básicos, pues son quienes tienen mayor acercamiento a aquello que requiere de acciones manuales.

## **Específicos**

Para evidenciar si los objetivos específicos se cumplieron se hace necesaria la revisión en primera instancia de la secuencia de actividades propuesta.

Al revisar el diseño de las actividades e implementarlas por primera vez en el pilotaje, encontramos que era necesario introducir una situación más que permitiera dirigir el pensamiento del estudiante a situaciones de cambio cuantitativo, pues hacia falta la predicción de fenómenos de cambio y patrones de comportamiento en series aritméticas, logrando así cumplir con nuestro primer objetivo específico.

En cuanto al desarrollo de las actividades, la evidencia escrita recolectada permitió el análisis de lo que habían realizado los estudiantes a la hora de manipular los Applet, las preguntas formuladas guiaron la secuencia de actividades, entorno a la comprensión de la noción de razón de cambio y el marco didáctico utilizado, pues la necesidad de pasar de registros en lenguaje natural a registros tabulares, y hacer dinámico este proceso mediante la manipulación de los Applet fortaleció todo el proceso y permitió que los estudiantes pudieran desarrollar las tareas en algunos casos de manera exitosa (ver análisis, capítulo 4).

Con respecto a los procesos de aprendizaje que los estudiantes pudieron desarrollar, logramos identificar que la propuesta si permite reconocer fenómenos de cambio y expresarlos de manera cualitativa y cuantitativa. Por medio de las entrevistas que se aplicaron a los tres estudiantes (E2, E3 y E5) con mayor rendimiento durante el proceso de aplicación de las actividades logramos evidenciar que ellos, por medio de la interacción con el software y de preguntas intencionadas, son capaces de comprender relaciones entre magnitudes y distinguir conceptos como el de velocidad constante, pero no son capaces aún por medio de la propuesta, de distinguir en que forma es esta relación entre las magnitudes, este se puede notar cuando responden a la pregunta número 4 del Applet 3, la cual encierra todos los procesos desarrollados en los Applet

anteriores, por ejemplo, se muestra la tabla que completó en el punto 2 del Applet 1 y la respuesta a la pregunta 4 del Applet 3 del estudiante E2.

Donde se evidencia un avance en cuanto a la predicción de patrones de regularidad, una búsqueda en la generalización del comportamiento de una situación de cambio, y lo más importante la identificación de la relación existente entre dos magnitudes correlacionadas.

2. Completa la tabla.

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESPLIZADOR AMARILLO	DESPLIZADOR AZUL	DESPLIZADOR AMARILLO	DESPLIZADOR AZUL
1	1	1	1	4
2	3	5	2	8
3	5	9	4	12
4	7	13	6	16
5	9	17	8	20
20	39	73	38	80

¿Podrías encontrar...

4. Completa la tabla y responde.

Envase 2		
t	Altura de llenado	Cantidad de rayas que aumenta
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
6	12	2
7	14	2
8	16	2
9	18	2
10	20	2

- ¿Cuánto va aumentando la altura de llenado cada vez que aumenta t?  
de 2 en 2.
- ¿Cambia la cantidad de rayas a medida que aumenta t? Explique  
Si en cada 2 unidades que se aumenta el llenado aumenta la cantidad de rayas.
- En cada momento que aumenta t, ¿cómo es la altura de llenado? Explique  
Va de 2 en 2 unidades a medida que aumenta t.
- ¿Podrías encontrar una operación que te permita hallar la cantidad de rayas que aumenta el líquido en el envase, utilizando la altura de llenado y t? ¿te serviría para cualquier valor de t? Explica mediante un ejemplo.  
Si, la suma  $2t + 2 = A$

## 5.2. Con relación a la propuesta metodológica.

-Desde nuestro punto de vista y teniendo en cuenta la propuesta desarrollada, consideramos que si se puede potenciar la noción de razón de cambio en estudiantes de grado sexto haciendo uso del software Geogebra; sin poder asegurar, que el avance logrado por los estudiantes sea el requerido para la comprensión en la construcción del concepto. Se abre la puerta a un posible estudio posterior, para observar dicho avance.

Surgen preguntas con un tinte abierto y de autocrítica, entre ellas:

- ¿Será posible que a través de otra secuencia de actividades modeladas por Geogebra, en realidad se podrá lograr disminuir la brecha existente en la comprensión de algunas problemáticas puntuales del cálculo, como la interpretación de la razón de cambio? ¿En qué grados puede aplicarse?

-Por otro lado, según lo evidenciado en el Applet cero, aparentemente algunos estudiantes no necesitan de la visualización para hallar el patrón de comportamiento. ¿Será que si se presenta una secuencia (sin ningún tipo de orden) podrán encontrar la regularidad? O bien, ¿será que el aspecto visual influye positiva o negativamente en la determinación del fenómeno de cambio y particularmente en la construcción del concepto de razón de cambio?

En conclusión, se logra identificar que los estudiantes si reconocen el fenómeno del cambio y aspectos iniciales relacionados con la noción de razón de cambio a partir de una secuencia de actividades mediadas por tecnologías educativas. Brindando un primer referente en cuanto al tratamiento del cálculo en los primeros años de secundaria, cosa que frente al concepto de razón de cambio no se encuentra no hay muchos trabajos realizados.

### **Con respecto a las representaciones ejecutables**

- Este tipo de actividades permiten evidenciar y potenciar el traspaso entre sistemas de representación. Por ejemplo, los estudiantes en todo momento debían hacer

manipulación concienzuda en el software, interpretar la información, tabularla y finalmente obtener conclusiones al respecto.

- Se evidencia la dificultad marcada en los estudiantes en el manejo del lenguaje natural, pues aunque numéricamente puedan resolver una pregunta o dar aparentemente una respuesta, no es fácil comunicar la forma en resolvieron la situación. Esto es una falencia, en las competencias comunicativas de las que se habla en los estándares hay que desarrollar para generar conocimiento matemático.
- La naturaleza cambiante en los objetos, que permiten los software de geometría dinámica le permiten al estudiante aproximarse un poco más al pensamiento variacional, debido a que facilita el proceso de observación de regularidades y patrones, dado que se puede repetir varias veces un experimento “cambiante” (cambiando de la misma manera) pero sin correr el peligro de cometer una equivocación en el proceso de repetición, lo cual haría que se cambie el patrón de cambio y obstaculiza los procesos de abstracción.

# BIBLIOGRAFIA.

Artigue, M. (1998). *Ingeniera didáctica en Educación Matemática, un esquema para la investigación y la innovación y la enseñanza de las matemáticas*. Universidad de los Andes, Bogotá.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, New York.

Cruz, Angie; Vargas, Ángel; López, Lennin; Rojas, Marcela (2009). *Reflexionando en el currículo sobre el pensamiento variacional*. Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Edwards, C. (1982). *The Historical Development of the Calculus*. Editorial Springer - Verlag, New York

González, P. (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral. Los orígenes de la Matemática*. . Nivola libro y ediciones, Madrid.

Hohenwarter, M. Hohenwarter, J. Kreis, Y. & Lavicza, Z. (2008). *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*. 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo León, México

Lupiañez, I. (2000) "Nuevos acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92" Ed: Universidad De Granada España.

Ministerio de Educación Nacional (1997). *Fundamentos Generales del Currículo*. Serie Documentos Especiales, Bogotá. D. C. Colombia.

Ministerio De Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares. Matemáticas. Editorial Magisterio. Bogotá D.C.

Ministerio de Educación Nacional (2000). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. Cooperativa editorial Magisterio, Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Serie Documentos Especiales, Bogotá. D. C. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Serie Documentos Especiales, Bogotá. D. C. Colombia.

Moreno, A. (2001). *Instrumentos matemáticos computacionales*. Incorporación De Nuevas Tecnologías Al Currículo De Matemáticas De La Educación Media De Colombia, Pp. 81-86. MEN. Colombia.

Parica, A. (2005). *Teoría Del Constructivismo Social De Lev Vygotsky Y Comparación Con La Teoría Jean Piaget*. Dto. De psicología educativa. Universidad central, Venezuela.

Posada, M. (2005). *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas*. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, Medellín.

Rendón M. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Tesis de Maestría. Universidad Antioquia. Medellín. Colombia

Sánchez Matamoros, G. García, M. Linares, S. (2008), *la comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de las matemáticas*. Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa. Vol. Numero 002, pp, 267-296. México.

Santacruz, M, (2009). *La gestión del profesor desde la perspectiva de la mediación instrumental*. Instituto de educación y pedagogía. Universidad del Valle. Colombia.

Vasco. C. (2002). *El pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías*. Memorias del Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá.

# Anexos.

## ANEXOS DE PRUEBAS CON LOS ESTUDIANTES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
 ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
 UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE RAZÓN DE CAMBIO EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO  
 REALIZADO POR:  
 Carlos Alberto Forero Toro  
 Daniel López Vélez



### PRUEBA DEL ESTUDIANTE

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Valentina Bonifaz Torres  
 GRADO: 6º D COLEGIO: SAICAM EDAD: 12 años

#### (1ª PARTE): TEST DE CAMBIO

- ¿Para usted que es un cambio o una variación?  
Es una modificación en donde se agrega ó se quita algo de algún objeto en un tiempo específico.
- ¿Por medio de la observación se puede medir un cambio o una variación?  
Por medio de la observación y el análisis de las modificaciones tiene el objeto.
- Indique una situación de la vida diaria en donde se producen cambios o variaciones.  
Al principio de año el cambio de profesores, horarios y curso.
- ¿Cómo podría medirse el cambio o la variación en la situación dada anteriormente?  
Por medio de gráficos y tablas.
- ¿Es importante poder medir los cambios que se presentan en distintas situaciones de la vida? SI, no Explique.  
Porque así se identifica el desarrollo obtenido durante un periodo determinado.

#### (2ª PARTE) APLET N° 0

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136

(3ª PARTE): APPLET N° 1

1. Responde cada pregunta de la segunda aplicación de Geogebra en los siguientes espacios.

DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
1. Aparecen 1 cuadrado, se aumenta 1 cuadrado + me quedan 1 cuadrado.	1. Aparece 1 cuadrado, aumenta un cuadrado + me quedan 1 cuadrado.
2. Aparecen 2 cuadrado, se aumentan 2 cuadrado + me quedan 3 cuadrado.	2. Aparecen 4 cuadrado, aumenta 4 cuadrado + quedan 5 cuadrado.
3. Se aumentan 3 cuadrado + quedan 4 cuadrado.	3. Aparecen 4 cuadrado, aumenta 4 cuadrado + quedan 4 cuadrado.
4. Se aumentan 10 cuadrado + quedan 11 cuadrado.	4. Aparecen 4 cuadrado, aumenta 4 cuadrado + quedan 13 cuadrado.
5. Se aumentan 2 cuadrado + quedan 13 cuadrado.	5. Aparecen 4 + se aumentan 4 + quedan 15.
6. Se aumentan 8 cuadrado + quedan 19 cuadrado.	6. Aparecen 20 + se aumentan 20 + quedan 39 cuadrado.

2. Completa la tabla.

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
1	1	1	1	1
2	3	5	2	4
3	5	9	2	4
4	7	13	2	4
5	9	17	2	4
20	39	73	32	80

3. ¿Podrías encontrar una forma para saber la cantidad de cuadrados que aumentó en cualquier posición utilizando el número de la posición y la cantidad de cuadrados en esa posición? Escríbela en el espacio. Si es No explica porque.

DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
MULTIPLICACION POR 2	MULTIPLICACION POR 4

(4ª PARTE): APPLET N°3

61

1. Al mover el deslizador t hasta 10: (observa con cuidado)

a. ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido? ¿Por qué?

El envase 3 porque se llena de 2 en 2 y además el ran- que que cada hora en +

2. Completa las tablas.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

t	¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	2	2	3	2
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	1

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

no, porque el unico que se llena es el 3.

4. Completa la tabla y responde.

Envase 2		
t	Altura de llenado	Cantidad de rayas que aumenta
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
6	12	2
7	14	2
8	16	2
9	18	2
10	20	2

1. ¿Cuánto va aumentando la altura de llenado cada vez que aumenta t?

de 2 en 2

2. ¿Cambia la cantidad de rayas a medida que aumenta t? Explique

si porque a medida que se aumenta el ran- que aumenta la cantidad de rayas

3. En cada momento que aumenta t, ¿como es la altura de llenado? Explique

va de 2 en 2 porque la medida de ran- que que aumenta

4. ¿Podrías encontrar una operación que te permita hallar la cantidad de rayas que aumenta el líquido en el envase, utilizando la altura de llenado y t? ¿te serviría para cualquier valor de t? Explica mediante un ejemplo.

si, la suma  $2t + 2 = 4$

PRUEBA DEL ESTUDIANTE

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Valentina Torres Álvarez  
 GRADO: 6º COLEGIO: Colcam EDAD: 11 años

(1ª PARTE): TEST DE CAMBIO

- ¿Para usted que es un cambio o una variación?  
Dar o un cambio o una variación es una modificación que puede aumentar o disminuir algo
- ¿De que forma nos damos cuenta que ha ocurrido un cambio o una variación?  
Observando cuando las medidas o los porcentajes cambian y hacer un análisis de cada una
- Indique una situación de la vida diaria en donde se producen cambios o variaciones.  
Cambio de estado cambias en el año, cambio de clase, cambio de amigos
- ¿Como podría medirse el cambio o la variación en la situación dada anteriormente?  
Se podría por tablas, por graficas
- ¿Es importante poder medir los cambios que se presentan en distintas situaciones de la vida? Si  no   
 Explique.  
Porque podemos observar diferentes resultados depende cada situación

(2ª PARTE) APPLET N° 0

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136

E2  
(3ª PARTE): APLET N° 1

1. Responde cada pregunta de la segunda aplicación de Geogebra en los siguientes espacios.

DESLIZADOR AMARILLO		DESLIZADOR AZUL	
1.	se muestra 1 cuadrado - se aumenta 1 cuadrado - hay 1 cuadrado	1.	se muestra 1 cuadrado - se aumenta 1 cuadrado - hay 1 cuadrado
2.	se muestra 2 cuadrados - se aumentan 2 - hay 3 cuadrados	2.	se muestra 4 cuadrados - se aumentan 4 - hay 5 cuadrados
3.	se muestra 8 cuadrados - se aumentan 8 - hay 9 cuadrados	3.	se muestra 8 cuadrados - se aumenta 8 - hay 9 cuadrados
4.	se muestra 10 cuadrados - se aumentan 9 - 11	4.	se muestra 4 - se aumentan 4 - hay 13
5.	se aumenta 2 - habrá 13 cuadrados	5.	se aumentan 4 y habrá 17
6.	se aumentan 8 cuadrados	6.	se aumentan 70 y habrá 37

2. Completa la tabla.

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL	DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL
1	1	1	1	4
2	3	5	2	8
3	5	9	4	12
4	7	13	6	16
5	9	17	8	20
20	39	77	38	80

3. ¿Podrías encontrar una forma para saber la cantidad de cuadrados que aumentó en cualquier posición utilizando el número de la posición y la cantidad de cuadrados en esa posición? Escríbela en el espacio. Si es No explica porque.

DESLIZADOR AMARILLO	DESLIZADOR AZUL
multiplicando por dos	multiplicando por cuatro

(4ª PARTE): APLET N°2

82

1. Al mover el deslizador t hasta 10: (observa con cuidado)

a. ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido? ¿Por qué?

El envase 3 porque va aumentando de a dos

2. Completa las tablas.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	2	2	1

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

No porque el envase 2 no se llena hasta el tope

4. Completa la tabla y responde.

Envase 1		
t	Altura de llenado	Cantidad de rayas que aumenta
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
6	12	2
7	14	2
8	16	2
9	18	2
10	20	2

1. ¿Cuánto va aumentando la altura de llenado cada vez que aumenta t?

va aumentando de a dos en dos

2. ¿Cambia la cantidad de rayas a medida que aumenta t? Explique

si porque se aumenta de a dos en dos

3. En cada momento que aumenta t, ¿cómo es la altura de llenado? Explique

se duplica porque la medida es 2

4. ¿Podrías encontrar una operación que te permita hallar la cantidad de rayas que aumenta el líquido en el envase, utilizando la altura de llenado y t? ¿te serviría para cualquier valor de t? Explica mediante un ejemplo.

$t \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24$   
si sumando

E3



REALIZADO POR:  
Carlos Alberto Forero Toro  
Daniel López Vélez

PRUEBA DEL ESTUDIANTE

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Juanmarco Jiménez Pachón  
GRADO: 6º D COLEGIO: \_\_\_\_\_ EDAD: 11 años

(1ª PARTE): TEST DE CAMBIO

- ¿Para usted que es un cambio o una variación?  
Un cambio es una modificación que puede afectar a aprovechar  
este cambio
- ¿De que forma nos damos cuenta que ha ocurrido un cambio o una variación?  
Cuando hay algo diferente en la que hacemos
- Indique una situación de la vida diaria en donde se producen cambios o variaciones.  
Cambiar de casa por algo de cosas
- ¿Como podría medirse el cambio o la variación en la situación dada anteriormente?  
porque mi dinero ya no está, pero otra cosa que me beneficia, pero  
a veces se perjudica
- ¿Es importante poder medir los cambios que se presentan en distintas situaciones de la vida? Si  no   
Explique.  
porque las consecuencias de los cambios puede ser positivas o  
negativas

(2ª PARTE) APPLET N° 0

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136

(3ª PARTE): APLET N° 1

1. Responde cada pregunta de la segunda aplicación de Geogebra en los siguientes espacios.

DESIZADOR AMARILLO		DESIZADOR AZUL	
1.	se muestran 1 cuadrado, aumentan 1 cuadrado - hay 1 cuadrado	1.	se muestran 1 cuadrado se aumentan 1 cuadrado - hay 1 cuadrado
2.	se muestran 3 cuadrados, aumentan 2 cuadrados - hay 3 cuadrados	2.	se muestran 5 cuadrados se aumentan 4 cuadrados - hay 5 cuadrados
3.	se muestran 9, aumentan 6 cuadrados hay 9 cuadrados	3.	se muestran 9 cuadrados, se aumentan 4 cuadrados - hay 9 cuadrados
4.	se muestran 11 cuadrados, aumentan 3 cuadrados - 11 cuadrados	4.	se muestran 13 cuadrados, se aumentan 4 cuadrados - hay 13 cuadrados
5.	aumentan 2 cuadrados, hay 13 cuadrados	5.	aumentan 4 cuadrados - hay 17 cuadrados
6.	aumentan 6 cuadrados, hay 19 cuadrados	6.	aumentan 20 cuadrados - hay 37 cuadrados

2. Completa la tabla.

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESIZADOR AMARILLO	DESIZADOR AZUL	DESIZADOR AMARILLO	DESIZADOR AZUL
1	1	1	1	1
2	3	5	2	4
3	5	9	2	4
4	7	13	2	4
5	9	17	2	4
20	39	77	30	60

3. ¿Podrías encontrar una forma para saber la cantidad de cuadrados que aumentó en cualquier posición utilizando el número de la posición y la cantidad de cuadrados en esa posición? Escríbela en el espacio. Si es No explica porque.

DESIZADOR AMARILLO	DESIZADOR AZUL
Ahí me multiplicando por 2	aumentados 4

(4ª PARTE): APPLET N°3

E3

1. Al mover el deslizador t hasta 10: (observa con cuidado)

a. ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido? ¿Por qué?

el envase 3, porque al principio la altura del llenado es de 1 y aumenta de 1

2. Completa las tablas.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	2	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

t	¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	2	2
2	1	2	2	1
3	1	2	2	1
4	1	2	2	1
5	1	2	2	1
6	1	2	2	1
7	1	2	2	1
8	1	2	2	1
9	1	2	2	1
10	1	2	2	1

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Sí los hay cuáles son? Explique.

si el envase 3 y 4, porque aumentan de 1

4. Completa la tabla y responde.

Envase 2		
t	Altura de llenado	Cantidad de rayas que aumenta
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
6	12	2
7	14	2
8	16	2
9	18	2
10	20	2

1. ¿Cuánto va aumentando la altura de llenado cada vez que aumenta t?

aumenta 2

2. ¿Cambia la cantidad de rayas a medida que aumenta t? Explique

2

3. En cada momento que aumenta t, ¿cómo es la altura de llenado? Explique

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 porque aumenta

4. ¿Podrías encontrar una operación que te permita hallar la cantidad de rayas que aumenta el líquido en el envase, utilizando la altura de llenado y t? ¿te serviría para cualquier valor de t? Explica mediante un ejemplo.

$t = 10 \rightarrow 2 \cdot 10 = 20 \quad t = 10$



PRUEBA DEL ESTUDIANTE

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Juan Diego León R  
 GRADO: 6C COLEGIO: Cafam EDAD: 11

(1ª PARTE): TEST DE CAMBIO

- ¿Para usted que es un cambio o una variación?  
Una variación es un cambio que se da en las cosas de una escuela
- ¿De que forma nos damos cuenta que ha ocurrido un cambio o una variación?  
Cuando se encuentra una variable
- Indique una situación de la vida diaria en donde se producen cambios o variaciones.  
descubrimos o es un problema
- ¿Como podría medirse el cambio o la variación en la situación dada anteriormente?  
Aplicando el cambio al problema
- ¿Es importante poder medir los cambios que se presentan en distintas situaciones de la vida? Si  no   
 Explique. Porque si no nos damos cuenta y crece el problema

(2ª PARTE) APPLET N° 0

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136

(3ª PARTE): APPLET N° 1

Σ 4

1. Responde cada pregunta de la segunda aplicación de Geogebra en los siguientes espacios.

DESILIZADOR AMARILLO		DESILIZADOR AZUL	
1.	Aparece 1 cuadro amarillo, 1, 1.	1.	Aparece 1 cuadro amarillo, 1, 1.
2.	Aparece 2 cuadros azules junto con el amarillo, 2, 3.	2.	Aparece 4 cuadros Azules, 4, 5.
3.	Aparece 2 cuadros verde claro, y 2 negros, y 2 rojos, 5, 9.	3.	Aparece 4 cuadros Rojos más, 4, 9.
4.	Aparece 2 cuadros verde oscuro, 2, 11.	4.	Aparece 4 cuadros Verde oscuro, 4, 13.
5.	Aumentaron 2 cuadros, 13.	5.	Aumentaron 2 cuadros, 17.
6.	Aumentaron 2 cuadros Azules, 15.	6.	Aumentaron 4 cuadros, 21.

2. Completa la tabla.

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
1	1	1	1	1
2	3	5	2	4
3	5	9	2	4
4	7	13	2	4
5	9	17	2	4
20	39	60	2	4

3. ¿Podrías encontrar una forma para saber la cantidad de cuadrados que aumentó en cualquier posición utilizando el número de la posición y la cantidad de cuadrados en esa posición? Escríbela en el espacio. Si es No explica porque.

DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
- de a 2 Porque cada vez que muevo el deslizador aumentan 2.	- de a 4 Porque cada vez que muevo el deslizador aumentan 4.

(4ª PARTE): APLET N°3

1. Al mover el deslizador t hasta 10: (observa con cuidado)

a. ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido? ¿Por qué?

*El 3 porque desde el principio tenía algo de líquido en el y va de a números impares.*

2. Completa las tablas.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
0	1	2	1
1	3	4	2
2	5	6	3
3	7	8	4
4	9	10	5
5	11	12	6
6	13	14	7
7	15	16	8
8	17	18	9
9	19	20	10

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

*No porque solo una se llena por completo.*

4. Completa la tabla y responde.

Envase 2		
t	Altura de llenado	Cantidad de rayas que aumenta
1	2	1
2	4	3
3	6	5
4	8	7
5	10	9
6	12	11
7	14	13
8	16	15
9	18	17
10	20	19

1. ¿Cuánto va aumentando la altura de llenado cada vez que aumenta t?

*va de 2 en 2*

2. ¿Cambia la cantidad de rayas a medida que aumenta t? Explique

*si porque las rayas va aumentando cada vez que se llena*

3. En cada momento que aumenta t, ¿cómo es la altura de llenado? Explique

*2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. Porque va de 2 en 2.*

4. ¿Podrías encontrar una operación que te permita hallar la cantidad de rayas que aumenta el líquido en el envase, utilizando la altura de llenado y t? ¿te serviría para cualquier valor de t? Explica mediante un ejemplo.

*Restar una a la altura de llenado. Ejemplo, está en 20 y le restamos 1 da 19 rayas.*



PRUEBA DEL ESTUDIANTE

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Mariana Gaona Salamanca  
 GRADO: 6c COLEGIO: calam EDAD: 11

(1ª PARTE): TEST DE CAMBIO

1. ¿Para usted que es un cambio o una variación?

un cambio para mí es algo que puede  
corregirse y una variación es algo que se da  
un cambio de unos datos

2. ¿De que forma nos damos cuenta que ha ocurrido un cambio o una variación?

cuando hay una corrección o algo modificado

3. Indique una situación de la vida diaria en donde se producen cambios o variaciones.

en alguna encuesta o de nuestra vida puede  
ocurrir que tengamos un problema

4. ¿Como podría medirse el cambio o la variación en la situación dada anteriormente?

podría medirse aplicando un cambio a un  
problema o una corrección

5. ¿Es importante poder medir los cambios que se presentan en distintas situaciones de la vida? Si  no   
 Explique.

porque cuando hay cambios debe haber una  
corrección

(2ª PARTE) APLET N° 0

1. Con base en la primera aplicación del programa Geogebra completa la siguiente tabla:

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36

N° posición	Cantidad total de puntos en la posición
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136

(3ª PARTE): APLET N° 1

65

1. Responde cada pregunta de la segunda aplicación de Geogebra en los siguientes espacios.

DESILIZADOR AMARILLO		DESILIZADOR AZUL	
1. aparece un cuadro, 1 cuadro, solo hay 1 cuadro		1. aparece un cuadro, aumento 1 cuadro, solo 1 cuadro	
2. aparecen 3 cuadros, aumento 2 cuadros, hay 3 cuadros		2. aparecen 5 cuadros, aumento 4 cuadros, hay 5 cuadros	
3. aparecen 9 cuadros, aumento 6 cuadros, hay 9 cuadros		3. aparecen 9 cuadros, aumento 4 cuadros, hay 9 cuadros	
4. aparecen 11 cuadros, aumento 2 cuadros, hay 11 cuadros		4. aparecen 13 cuadros, aumento 4 cuadros, hay 13 cuadros	
5. aparecen 13 cuadros, aumento 2 cuadros, habrá 13 cuadros		5. aparecerán 17 cuadros, aumentara 4 y habrá 15	
6. aparecerán 19 cuadros, aumento 6 cuadros, habrá 19 cuadros		6. aparecerán 37 cuadros, aumentara 20 cuadros, y habrá 37	

2. Completa la tabla.

Posición	¿Cuántos cuadrados hay en cada posición?		¿Cuántos cuadrados aumento en cada posición?	
	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL	DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
1	1	1	1	1
2	3	5	2	4
3	5	9	2	4
4	7	13	2	4
5	9	17	2	4
20	39	60	30	43

3. ¿Podrías encontrar una forma para saber la cantidad de cuadrados que aumentó en cualquier posición utilizando el número de la posición y la cantidad de cuadrados en esa posición? Escríbela en el espacio. Si es No explica porque.

DESILIZADOR AMARILLO	DESILIZADOR AZUL
de a 2 porque se sigue la secuencia	de a 4 porque se sigue la secuencia

(4ª PARTE): APLET N°3

ES

1. Al mover el deslizador t hasta 10: (observa con cuidado)

a. ¿Cuál de los cuatro envases se llena más rápido? ¿Por qué?

se llena más rápido el envase 3 porque cuando aumenta hasta 10 la altura de llenado se llena más rápido

2. Completa las tablas.

t	¿Cuál es la altura de llenado cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	3	2
2	2	4	5	3
3	3	6	7	4
4	4	8	9	5
5	5	10	11	6
6	6	12	13	7
7	7	14	15	8
8	8	16	17	9
9	9	18	19	10
10	10	20	21	11

t	¿Cuántas rayas va aumentando cada vez que avanza el deslizador?			
	Envase 1	Envase 2	Envase 3	Envase 4
1	1	2	2	1
2	1	2	2	1
3	1	2	2	1
4	1	2	2	1
5	1	2	2	1
6	1	2	2	1
7	1	2	2	1
8	1	2	2	1
9	1	2	2	1
10	1	2	2	1

3. ¿Hay envases que se llenan con la misma rapidez? ¿Si los hay cuáles son? Explique.

si algunos el 1 y el 4

4. Completa la tabla y responde.

Envase 2		
t	Altura de llenado	Cantidad de rayas que aumenta
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
6	12	2
7	14	2
8	16	2
9	18	2
10	20	2

1. ¿Cuánto va aumentando la altura de llenado cada vez que aumenta t?  
va aumentando cada 2 rayitas

2. ¿Cambia la cantidad de rayas a medida que aumenta t? Explique  
si porque va aumentando de 2

3. En cada momento que aumenta t, ¿cómo es la altura de llenado? Explique  
es cada vez mayor

4. ¿Podrías encontrar una operación que te permita hallar la cantidad de rayas que aumenta el líquido en el envase, utilizando la altura de llenado y t? ¿te serviría para cualquier valor de t? Explica mediante un ejemplo.

dependiendo podría hacer una ecuación o podría una suma