

ERRORES PRESENTADOS POR ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO EN
TORNO A PROBLEMAS QUE REQUIEREN EL USO DE LA MEDIA ARITMÉTICA

OMAR FERNANDO ARIAS RAYO
MIRIAM YAMILE SILVA MORA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2012

ERRORES PRESENTADOS POR ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO EN
TORNO A PROBLEMAS QUE REQUIEREN EL USO DE LA MEDIA ARITMÉTICA

OMAR FERNANDO ARIAS RAYO
MIRIAM YAMILE SILVA MORA

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Especialista en Educación Matemática

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de
nuestra total autoría, en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo
de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos”

Asesora
INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2012

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, 6 de noviembre de 2012

RESUMEN ANALITICO EN EDUCACION (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Especialización.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Errores presentados por estudiantes de grado octavo en torno a problemas que requieren el uso de la media aritmética.
Autor(es)	ARIAS RAYO, Omar Fernando; SILVA MORA, Miriam Yamile.
Director	ÁLVAREZ ALFONSO, Ingrith.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2012. 53 páginas.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.
Palabras Claves	Errores, medidas de tendencia central, identificación y caracterización de errores.

2. Descripción
El presente trabajo de grado de especialización es una indagación sobre errores que cometen los estudiantes de grado octavo al resolver problemas que requieren el uso de la media aritmética, para luego caracterizarlos de acuerdo a la clasificación de errores propuesta por Silva (2010) y así poder establecer si dichos errores son los mismos que se reportan en la literatura como usuales y recurrentes.

3. Fuentes
<p>Para el desarrollo del presente trabajo se consultaron en total dieciocho (18) fuentes clasificadas de la siguiente manera: Documentos sobre errores en matemáticas (3 revistas), revisión teórica sobre errores respecto a las medidas de tendencia central (7 revistas, 1 libro y 1 memoria de un encuentro), currículo y diseño curricular (1 tesis y 3 documentos legales de enseñanza de las matemáticas) y metodología de la investigación (1 presentación web y 1 página web) siendo las más relevantes las que se indican a continuación:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Batanero, C (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. <i>Revista UNO No 25. 41-58</i> Disponible en línea en http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/Aldizkariak/Uno/uno25.asp Recuperado el: 17 de marzo de 2012 2. Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. II encuentro iberoamericano de biometría. Veracruz, México. (En línea en www.uv.mx/eib/curso_pre/videoconferencia/53ErroresEstadis.pdf) Recuperado el: 5 de mayo de 2012 3. Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria. Granada. 4. Del Puerto, Seminara, y Minnard. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. <i>Revista iberoamericana de educación No 25.</i>, Disponible en línea en http://www.rieoei.org/expe/1729Puerto.pdf. Recuperado el: 20 de marzo de 2012. 5. García, A., & Garret, J. (2007). <i>Algunos resultados sobre promedios con estudiantes en estudiantes de Luanda y Tenerife</i>. Luanda y Tenerife: Universidad de la Laguna. Recuperado en Junio 2012 de http://webpages.ull.es/users/jagacruz/Articulos/Promedios_JAEM_05.pdf. Recuperado el: 30 de marzo de 2012.

6. Ministerio de educación nacional (2006). *Estándares básicos de competencia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional [MEN].
7. Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1- 14. (En línea en www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf) Recuperado el 30 de marzo de 2012.
8. Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. *Una empresa docente*, 69-104).
9. Silva, M. (2010). Propuesta didáctica para la superación de algunos errores comunes en la conceptualización de las medidas de tendencia central. Bogotá (Colombia): Tesis de pregrado no publicada.

4. Contenidos

El presente trabajo se ha organizado en seis secciones de la siguiente manera. En la primera aparece el planteamiento del problema en la cual se exponen las razones que le originaron y las cuales permitieron desembocar en la pregunta de indagación; a continuación, en la sección dos, se describe la introducción al tema; luego, en la sección tres se encuentran los objetivos que se pretenden alcanzar con el presente trabajo, los cuales también orientan el desarrollo del mismo. En la cuarta sección se presentan los fundamentos teóricos que incluyen la perspectiva y el tratamiento del error en matemáticas, los errores reportados en torno a la media aritmética y la clasificación de los errores. En la quinta sección se detalla el proceso seguido para la construcción de la prueba diagnóstica presentada a los estudiantes, las implementaciones de la primera y segunda versión de la misma y la concreción de los resultados de esta a través de la caracterización y extracción de conclusiones particulares de cada una de las situaciones planteadas, así como también de las características de fondo y forma de la prueba desarrollada. Finalmente se presentan las conclusiones y bibliografía.

5. Metodología

Para la realización del presente trabajo de especialización se llevó a cabo en primer lugar la revisión teórica de los antecedentes en cuanto a los errores en el aprendizaje de las medidas de tendencia central y en particular los referidos a los de la media aritmética, igualmente se remitió a la taxonomía de errores propuesta por Silva (2010) y se seleccionó el curso en el que, acorde a los estándares nacionales, y a aspectos de conocimientos previos, se aplicaría el estudio. A continuación se dio lugar a la planeación, la cual se dividió en 2 fases: para esta primero se realizó el diseño del instrumento a partir de los referentes teóricos y del respectivo ajuste a algunas preguntas para el contexto que se requería y la creación de otras para lograr los objetivos propuestos, igualmente creándose una matriz de intencionalidad de preguntas, posibles respuestas e indicadores sobre estas; la segunda fase consistió en la intervención en el aula (prueba piloto), la cual luego de su ejecución permitió hacer ajustes a una prueba definitiva en lo referente a tiempos, espacios, redacción, etc.

Posteriormente se realizó la aplicación definitiva del instrumento, el cual tras su implementación permitió hacer el respectivo análisis a cada una de las respuestas dadas por los estudiantes a cada uno de los ítems propuestos, conclusiones a nivel de ítem y de comparación con la tabla de indicadores realizada en la etapa de planeación. Finalmente se extraen las conclusiones generales del estudio en cuanto a cuáles son los errores cometidos por los estudiantes de grado octavo al abordar problemas de la media, y se hace la comparación con los reportados desde la literatura revisada.

6. Conclusiones

El estudio de errores no puede basarse en las creencias de los docentes sino que requiere de la creación de pruebas que indaguen por los mismos, esto con el fin de que sea utilizado como un

organizador curricular que aproveche al máximo los errores de los estudiantes en procura de la superación de las dificultades que subyacen a estos, para finalmente conseguir una adecuada conceptualización del objeto matemático en cuestión.

Al hacer referencia a los errores correspondientes a las medidas de tendencia central, Silva (2010) afirma que “para el caso de Colombia no aparecen estudios con tal fin, pero podría inferirse que se comparten los mismos errores con los estudiantes de los otros países”, por lo que el presente trabajo permitió dar cuenta de cuales errores son evidenciados en estudiantes de grado octavo y cuáles no, al compararlos con los reportados en la literatura, pero adicional a estos fue encontrado otro error que no habían sido evidenciado en dichos estudios y el cual debe ser incluido en la clasificación hecha por Silva (2010), el cual corresponde a un error relacionado con el cálculo y comparación del valor de la media aritmética y ante resultados similares el estudiante asume una igualdad de los mismos.

En cuanto a los errores de comprensión y ejecución de algoritmos, se encuentra que estos son evidenciables en una proporción muy pequeña de la población sujeto de este trabajo de indagación; siendo entre estos los más notorios los correspondientes a cálculo de la media ponderada y reversión algorítmica, tal cual como es reportado desde las investigaciones relacionadas.

Para las categorías de error comparación de distribuciones, lenguaje y argumentación, es bastante notorio en el desarrollo de la prueba que el aspecto predominante fue el nexo de los problemas con el contexto, por cuanto los análisis relacionados con los ítems iban mas encaminados a relacionarlo subjetivamente con experiencias propias sobre el mismo, que en sí a la apreciación de los datos, siendo esto referenciado también por autores en investigaciones similares en España y Angola, donde el contexto utilizado era utilizado algunas veces de forma errónea para validar sus respuestas.

En referencia al error asociado a la representatividad de la media aritmética, se evidencia en contraste a los referentes teóricos, que de los estudiantes que contestaron el ítem, 54% contemplan otras medidas que representen al conjunto de datos, esto considerándose como un aspecto positivo en cuanto a que la media aritmética no es siempre el representante de los datos, y dando lugar a la presentación de las otras medidas de tendencia central o de posición como estimadores más representativos del conjunto de datos.

Según los resultados obtenidos, los errores que más se evidencian en los estudiantes sujetos de estudio del presente análisis, son los referentes a los de asignación de propiedades, y entre estas sobresaliendo como el más recurrente el de la asignación de la propiedad asociativa a la media aritmética; algunos autores afirman que esto es debido a extensión de propiedades como la suma y el producto hacia la media aritmética, pero puede contemplarse también la posibilidad de una experiencia exitosa previa haciendo uso de alguna de estas estrategias. Dentro del campo de respuestas a los ítems de intencionalidad sobre propiedades algebraicas se encuentran que los errores presentados no son excluyentes, es decir, los estudiantes presentan en un mismo ítem varios errores cuyas categorías son diferentes; por lo que sería conveniente hacer un estudio posterior sobre la incidencia de algunos errores de una categoría sobre los otros, ya que este no es un aspecto tratado desde los referentes teóricos.

Finalmente, se obtuvo un error de gran importancia realizado por un estudiante, este fue el realizar para dos ítems dos procedimientos diferentes, uno era correcto y el otro no, y al encontrar resultados bastante próximos decide que indiferentemente del procedimiento ambos son iguales, este error puede ser incluido en la taxonomía de Silva (2010) , consideramos que en la categoría de argumentación, sub-categoría contraste de resultados, haciendo referencia al uso simultáneo de varias estrategias erróneas en la resolución de un problema, que para el caso citado consistió

de errores en selección de algoritmo y redondeo del valor de la media aritmética, los cuales priman sobre el desarrollo correcto que hiciera el estudiante.

Elaborado por:	ARIAS RAYO, Omar Fernando; SILVA MORA, Miriam Yamile.
Revisado por:	ÁLVAREZ ALFONSO, Ingrith.

Fecha de elaboración del Resumen:	27	10	2012
--	----	----	------

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	9
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	10
2. JUSTIFICACIÓN	12
3. OBJETIVOS	14
4. ANTECEDENTES Y MARCO DE REFERENCIA.....	15
5. METODOLOGÍA.....	22
5.1 REVISIÓN TEÓRICA	22
5.2 PLANEACIÓN	22
5.2.1 Diseño de Instrumentos	23
5.2.2 Intervención en el Aula.....	27
5.3 APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO	27
6. CATEGORIZACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	30
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	42
BIBLIOGRAFÍA.....	45

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Clasificación de errores de la media aritmética.	21
Tabla 2. Intencionalidad de las preguntas del instrumento	26
Tabla 3. Análisis de pregunta número 1. Propiedad del elemento neutro.	30
Tabla 4. Análisis de pregunta número 2. Propiedad asociativa.	32
Tabla 5. Análisis de pregunta número 3. Propiedad Clausurativa.	33
Tabla 6. Análisis de pregunta número 4. Confusión entre media y moda.	35
Tabla 7. Análisis de pregunta número 5. Alteración de la media aritmética ante el aumento de datos.	37
Tabla 8. Análisis de pregunta número 6. Media como valor esperado.	39
Tabla 9. Análisis de pregunta número 7. Representatividad de la media.	40

INTRODUCCIÓN

El propósito del presente trabajo es indagar sobre los errores que cometen los estudiantes en cuanto a la conceptualización de la media aritmética; se toma como base un estudio realizado por Silva (2010) en cuanto a una clasificación de los errores encontrados en la literatura y considerados como recurrentes en los estudiantes. La autora propone una serie de actividades cuyo fin es que tras su implementación, se logre evitar los errores por parte de los estudiantes; pero una dificultad considerada era si los errores que se indicaban en las poblaciones documentadas, eran en efecto los mismos que de los estudiantes de similares edades, pero en el contexto colombiano.

El estudio de errores se constituye en un elemento importante de los procesos de enseñanza-aprendizaje; muy similar a la evaluación diagnóstica, permite la elaboración e implementación de actividades enfocadas a las necesidades de los estudiantes, que propendan por mejorar la calidad de los conceptos y superar las dificultades encontradas. Si bien, los conocimientos previos de los estudiantes posibilitan la construcción de un nuevo conocimiento, estos también podrían constituirse en impedimentos para lo mismo, pues según Mulhern (1989) (citado por Rico, 1995) algunos de éstos son tan persistentes y tan difíciles de superar que requieren ahondar y generar una reestructuración de dichos conocimientos.

Este trabajo de indagación muestra, a partir de un instrumento diagnóstico en torno a la media aritmética, los errores que presentan estudiantes de grado octavo al abordar situaciones en que el empleo de esta medida es requerido. Se toman como referente las investigaciones desarrolladas sobre las medidas de tendencia central y los instrumentos propuestos para identificar los errores cometidos en ellas.

Inicialmente, se expone un marco teórico sobre los estudios desarrollados para determinar los errores y especialmente aquellos que permiten delimitar el trabajo a la conceptualización de la media aritmética, se presenta un instrumento construido utilizando modelos de preguntas de cuestionarios de Batanero (2001) y García y Garret (2007), haciendo una selección de los más adecuados para indagar sobre algunos aspectos de la conceptualización del objeto matemático y se toma la propuesta de Silva (2010) para categorizarlos.

Finalmente, se analizan los datos arrojados y se constata si los errores vislumbrados por otros autores en distintos países y categorizados posteriormente por Silva (2010) son comunes a los errores presentados por estudiantes sujetos de estudio del presente trabajo, para hacer así un aporte a sus investigaciones.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Autores como Del Puerto, Seminara y Minnard (2007) afirman que el error en el aprendizaje de las matemáticas ha dejado de ser un aspecto a penalizar para convertirse en un elemento valioso en cuanto a su potencialidad para la creación de estrategias diversas en la superación de las dificultades que le subyacen en el proceso de conceptualización de diversos objetos matemáticos; este aspecto ha sido igualmente identificado por Rico (1998), quien además propone que la potencialidad del estudio de los errores en matemáticas se puede dar desde cuatro diferentes enfoques: clasificación de errores, tratamiento curricular de errores, formación del profesorado y errores relativos a las herramientas computacionales. Dentro de estos enfoques, dicho autor hace especial énfasis en que estos estudios no sólo deben quedarse en la identificación del error sino en su tratamiento curricular y le asigna a este el papel de organizador curricular.

Pochulu (2005) aduce que aunque los errores tienen causas diversas, toda tarea o actividad es potencialmente generadora de estos, los cuales se presentan debido no a la ausencia de conocimientos sino a un marco conceptual consistente aunque incorrecto, estos se hacen notorios debido a que se identifican en las producciones de los escolares cuando ellos abordan tareas específicas poniendo en juego el conocimiento que tienen en ese momento. Por lo tanto, la mayor parte de los errores son consecuencia de ese conocimiento y de la manera como los escolares lo movilizan para resolver la tarea según Rico (1995b, citado por Gómez, 2000)

Poniendo de manifiesto lo anterior, Batanero (2001) y Cobo (2003) realizaron investigaciones similares entre sí, en poblaciones de educación media en distintos países, las cuales permitieron evidenciar errores en los diferentes aspectos inmersos en la conceptualización de las medidas de tendencia central, llegando a que independiente del país de aplicación de las tareas, los resultados apuntan a errores comunes. Silva (2010), partiendo de los reportes de éstas y otras investigaciones, asume que los errores podrían ser comunes también al contexto colombiano, sin llegar a corroborar la teoría expuesta por Batanero, enfocando su estudio en clasificarlos y categorizarlos, para posteriormente diseñar una serie de actividades que permita superarlos. Finalmente, la autora deja planteadas las actividades, pero no logra llevarlas al aula para verificar su efectividad.

La inclinación de Silva (2010) por desarrollar en el aula las actividades sugeridas denota que los errores reportados en la literatura ya han sido evidenciados en los estudiantes a través de uno o varios instrumentos o desde la práctica profesional, y que la aplicación de éstas resultarán potencialmente efectivas en el proceso de superación de los errores y en la correcta conceptualización del objeto matemático en cuestión (medidas de tendencia central), pero en vista que Silva (2010) en su trabajo de indagación no implementa los instrumentos diseñados por Batanero

(2001) con el fin determinar qué errores presentan los estudiantes, se muestra la preocupación de constatar si dichos errores se evidencian en estudiantes de grado octavo en un contexto más próximo.

En vista de que la categorización establecida por Silva (2010) muestra una mayor proporción de los errores identificados para la media aritmética que para los presentados en las otras dos medidas de tendencia central (moda y mediana), se indaga sobre la razón de esto, teniendo como premisas de que esta es una medida que tiene la capacidad de representar de manera concisa una característica en un conjunto de datos y con esto la representatividad como el aspecto que mayor dificultad genera en los estudiantes según lo afirma Mokros y Rusell (1995 citados por García y Garret 2007); además de que aparte de ser el primer acercamiento procedimental entre números particulares en estadística descriptiva, tiene muchas aplicaciones en cuestiones prácticas de la vida diaria (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos; 1994); y finalmente en que varias de las dificultades asociadas a la comprensión de este objeto radican en la enseñanza de ésta como operación o algoritmo.

Se debe además reconocer que la población sujeto de estudio ha debido tener una preparación previa sobre las medidas de tendencia central, para así llegar a evidenciar sus errores, por lo que con base a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN] 2006) en los que se propone para el ciclo sexto- séptimo el desarrollo de dichos temas, se toma como población a estudiantes de octavo grado debido a que en este se ha visto el tema en cuestión y se garantiza que los estudiantes tendrán un mínimo de conocimientos previos; además de que la secuencia de instrucción presentada por Silva (2010) fue diseñada para este curso y podría apuntar a la solución de algunos errores que se evidencien en los estudiantes de este grado; posteriormente se indaga acerca del uso y los procesos relacionados con la media aritmética, elementos que se llegan a examinar al abordar la pregunta: ¿qué tipos de errores con respecto a los procesos relacionados a la media aritmética presentan estudiantes de grado octavo al enfrentarse a situaciones que requieran su empleo?

2. JUSTIFICACIÓN

Batanero (2001) plantea el reciente incremento en la demanda de la educación Estadística en cursos no universitarios en consecuencia del desarrollo de los ordenadores y del interés por la investigación, haciéndose esta disciplina muy útil en todos los campos en los que el análisis de datos se hace presente, y brindándole así un aspecto de una actividad significativamente interdisciplinar.

No obstante, Sánchez y Cobo (1996 citados por Batanero 2001), afirman que la enseñanza de la Estadística no tiene la importancia que se merece dentro de los currículos de matemáticas en la educación básica y de igual forma, existen libros de texto que presentan en muchas ocasiones errores de tipo conceptual y metodológico. Dichas falencias en los procesos educativos, promueven en la mayoría de ocasiones una dificultad mayor para la enseñanza de la disciplina, lo cual no difiere de lo expuesto por Pochulu (2005), quien afirma que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, los cuales no surgen de forma accidental sino por las estructuras cognitivas.

Las dificultades presentadas durante un proceso cognitivo se tornan más evidentes en la medida en que se avanza en la complejidad de los conceptos, por lo que se hace imprescindible iniciar con elementos claros de tipo conceptual en la apertura de los temas a tratar, es decir, cuando la enseñanza de la disciplina tiene bases fuertes, estos podrían eventualmente reducir la cantidad de errores presentados con posterioridad. Es entonces, donde las medidas de tendencia central se hacen presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística como el primer componente matemático de la disciplina.

Con la evolución de la Estadística y la preocupación que se tiene con respecto a los procesos educativos en torno a la misma, se han desarrollado investigaciones que apuntan a determinar los tipos de errores que los estudiantes presentan en el tratamiento de las medidas de tendencia central, todos ellos en distintos países; España, México y Angola, en los que se evidenciaron errores bastante comunes sin importar el lugar de indagación. En trabajo reciente desarrollado por Silva (2010), se hace un estudio que parte de los errores descritos por otros autores, proponiendo una clasificación de los mismos que no permite entrever si también los errores son comunes a Colombia.

En concordancia con las diversas aplicaciones de la media aritmética dentro de todas las disciplinas y siendo ésta la medida de tendencia en la que más se focalizan los errores, tal como lo afirman autores como Mevarech (1983, citado en García & Garret, 2007), Strauss y Bichler (1988, citado por Batanero, 2000), (1991) y Pollatsek y cols. (1981, citado por Batanero 2001), el presente trabajo se encamina al estudio del uso de aspectos referentes a la media aritmética desde la

consideración de errores en el tratamiento de la misma, por estudiantes de grado octavo, para quienes Batanero et al. (1994) menciona que no existen muchas investigaciones de este tipo.

Se hace importante realizar estudios referentes a errores en Estadística pues tal como lo afirma dicha autora, gran parte de las investigaciones se han realizado en geometría y álgebra, siendo muy reducida la que se enfoca en la Estadística; y dentro de estas, la mayor proporción se ha hecho en los conceptos de probabilidad desde resultados experimentales y no desde resultados escolares, además los resultados existentes de estos últimos se encuentran situados en estudiantes de temprana edad o universitarios, dejando casi nula la correspondiente a edades entre los 11 a 16 años.

En este sentido, el estudio de los errores no sólo concernientes a la Estadística sino a cualquier área del conocimiento, se constituye en una herramienta de significativo valor a la labor como educadores, pues permite reorientar tareas y proponer actividades que apoyen los procesos y que sean objetivas y dirigidas específicamente a las necesidades de los educandos. De ahí, el presente trabajo brinda elementos que permiten reflexionar sobre los procesos académicos y las estrategias para el abordaje de situaciones que involucran la media aritmética desde los diferentes aspectos que implican su comprensión.

3. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Evidenciar y categorizar los errores presentados en estudiantes de grado octavo al resolver problemas que requieren el uso de la media aritmética.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Evidenciar errores en estudiantes de grado octavo al abordar situaciones que requieran el uso de la media aritmética para su resolución.

Caracterizar los errores presentados en estudiantes de grado octavo, en cuanto a la media aritmética a partir de los referentes teóricos y en general, respecto a la clasificación hecha por Silva.

Determinar, a partir de los errores evidenciados en los estudiantes en cuanto al manejo de la media aritmética, algunas dificultades de tipo conceptual y procedimental que subyacen a estos.

Categorizar a partir de los resultados de una prueba diagnóstica los errores relacionados a la media aritmética expuestos por otras investigaciones, aportando así elementos que permitan ampliar o ratificar la clasificación de los diversos autores.

4. ANTECEDENTES Y MARCO DE REFERENCIA

Los errores cometidos por estudiantes en torno a la media aritmética y los medios empleados para determinarlos, se constituyen como los dos grandes elementos a ser tratados en el presente apartado. Es por esto, que a continuación se exponen algunos factores que permiten establecer diversas fuentes que se tornan fundamentales a tener en cuenta para el desarrollo de esta indagación.

Para iniciar, se hace importante reseñar algunas investigaciones que contemplan el error como aspecto relevante en el proceso de conceptualización; qué le subyace y cómo puede ser entendido desde el punto de vista de quienes han tenido dicho particular como objeto de estudio. Es entonces cuando se hace referencia a Pochulu, Luján & Abrate (2006) quienes ubican la fuente del conocimiento desde el empirismo, partiendo así de la experiencia y observaciones del mundo físico. Otros por el contrario, proponen que el conocimiento se da desde la razón, en este sentido tratándose de construcción a nivel abstracto y Popper (1983, citado por Pochulu, et.al. (2006)) indica que no hay fuente última de conocimiento, que toda fuente puede considerarse como aceptable pero debe estar sujeta a un examen crítico con el fin de llegar a la verdad, por lo que se llega a concluir que cualquiera que sea el método de construcción, se encuentra presente el error como aspecto implícito.

En consecuencia, Rico (1998) afirma que “el error es parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento”, y que se origina en organizaciones insuficientes o deficientes las cuales conllevan a conceptualizaciones incompletas; además señala que los errores no aparecen por azar en el dominio de conceptos previos y que juega un papel importante para el aprendizaje del objeto en cuestión. Dicho autor además señala que debe haber un cambio en la tendencia de la culpabilidad por los errores a una tendencia de previsión de errores y estrategias para superarlos. En este sentido otorga al estudio de errores en matemáticas un papel determinante de apoyo al proceso de aprendizaje, en cuanto permite al docente detectar cuáles son las dificultades que subyacen a estos y a partir de ellas crear estrategias que posibiliten su superación.

Rico (1998) propone visualizar los errores desde cuatro diferentes enfoques: clasificación de errores, tratamiento curricular de los errores, formación del profesorado en relación con los errores que cometen los alumnos y estudios de carácter técnico que implementan una determinada clase de análisis de los errores; igualmente señala que la mayoría de estudios realizados con anterioridad a 1960, consistían de un recuento de errores y su clasificación para así inferir de alguna forma las razones que conducían a estos, indicando además que un mayor aprovechamiento de este tipo de estudios se fundamenta en el análisis propio de las dificultades que subyacen a los errores, que oriente un eficaz diseño curricular basado en las necesidades identificadas. Del Puerto et al. (2007) plantean estos

estudios como una herramienta para revelar el estado del conocimiento de los alumnos e imprescindible para retroalimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, con el fin de mejorar los resultados.

En este punto, se hace fundamental exponer elementos relacionados con el objeto estadístico media aritmética, antes de hacer un estudio de los errores cometidos en el tratamiento del mismo, así Strauss y Bichler (1988, citado por Batanero 2000) plantean que las características relacionadas a la media aritmética atienden a tres aspectos; estadístico, abstracto y representativo. El aspecto estadístico según los autores, obedece a tres propiedades: A) La media está localizada entre los valores extremos. B) La suma de las desviaciones a la media es cero. C) La media se ve influenciada al añadir otros datos distintos de la media. Por otro lado, el aspecto abstracto de la media aritmética hace referencia a la interpretación que se da al resultado de su cálculo y la existencia del cero dentro del conjunto de datos. Finalmente, los autores proponen que la representatividad del objeto estadístico es su característica fundamental y es la que le proporciona su importancia, pero que a su vez es la más compleja para su comprensión.

García y Garret (2007), trabajaron en particular la clasificación de errores en el aprendizaje de la Estadística, específicamente de la media aritmética, en un conjunto de estudiantes en Angola y Tenerife, con el cual se pretendía visualizar los errores que presentaban los estudiantes al abordar situaciones que implicaban los diversos elementos que componen la media aritmética como concepto.

Al finalizar los autores concluyen algunos errores que no solamente se presentan en estudiantes de secundaria, sino que además son comunes a estudiantes universitarios. Errores en la forma en que se entiende la media y que se pueden asociar con su estudio meramente algorítmico, se listan a continuación:

- Desconocimiento de la media como un estimador correcto cuando existen errores de medición.
- Existencia de valores atípicos.
- La existencia del cero dentro del conjunto de datos.

Este último error no fue solamente reseñado por los autores del trabajo, otros como Strauss y Bichler (1988, citados por Batanero, 2000) y León y Zawojewski (1991, citados por García y Garret 2007) también afirman que la comprensión del cero en el conjunto de datos es bastante abstracta. Además muchos de los errores presentados por los estudiantes objeto de la investigación muestran dificultad al observar valores nulos, y muchos ven la moda como un mejor estimador que la media.

De este trabajo, lo que se tiene en cuenta para el estudio que se quiere aquí desarrollar, además de los tipos de errores que presentaron los estudiantes, es la

diversidad de contextos y tipos de preguntas que proponen para estructurar la elaboración de la prueba, tal como se concluye allí. Además la metodología que los autores plantean también es importante, pues ofrece elementos que permiten evidenciar criterios claros para un manejo positivo de los resultados.

Elementos importantes fueron también desarrollados por Cobo (2003) quien estudia los índices de dificultad de los estudiantes de Educación Secundaria en cuanto al significado de las medidas de posición central, que es similar a la investigación mencionada anteriormente, para lograr obtener un conjunto de evidencias y conseguir concluir en torno al objeto de estudio, Cobo (2003) también aplica un instrumento al conjunto de estudiantes de grados sexto y noveno, que buscaba identificar el nivel de comprensión en torno a todas las medidas de tendencia central, intentando evaluar los tipos de comprensión en relación con las propiedades de las medidas, los tipos de representaciones (verbales, numéricas y gráficas), lo procedimental y lo argumentativo. De ésta, se evidenció el poco manejo de la media ponderada y tal como se expuso para la investigación anterior, la media no es observada como representante de un conjunto de datos.

Así, hasta aquí se ha presentado elementos que pueden guiar el presente estudio, especialmente en las conclusiones que se extrajeron sobre los errores asociados a las medidas de tendencia central. Aunque en estos estudios, se encuentran reflexiones en torno al tipo de situaciones a llevar al aula cuando se trabaja la Estadística, sobresale la afirmación de Chan (2009) quien propone que en las instituciones escolares es necesario enfatizar la construcción del conocimiento matemático por parte del estudiante, mediante situaciones didácticas en donde la acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento se lleve a cabo. El autor enfatiza en crear situaciones que lleven a los estudiantes a tomar decisiones donde no hay una respuesta única, interpretar gráficos y comunicar información, por lo que esto orienta hacia las consideraciones a tener en cuenta en la creación de tareas para la clase y en específico para la creación de la prueba diagnóstica para detectar los errores con respecto a la media aritmética.

Como último referente, se hace presente Silva (2010) quien tras revisar los documentos de varios de los autores antes mencionados, entra a clasificar los errores reportados y cometidos con mayor frecuencia por los estudiantes en torno a los diferentes aspectos de la conceptualización de las medidas de tendencia central; y respecto a esto, de manera específica para la media aritmética se encuentran los relacionados a la consideración de ésta como operación, representante de un conjunto de datos y en cuanto a propiedades estadísticas, tal y como se plantea en la Tabla 1, es de aclarar que se tienen en cuenta las categorías y los errores que propone Silva (2010), pero se proponen algunos ejemplos, la modificación y la descripción de otros para lograr una mejor comprensión de dichos errores

CATEGORIA DEL ERROR	ERROR	PREGUNTA PROBLEMA Y RESPUESTAS DADAS																
ASIGNACIÓN DE PROPIEDADES A LA MEDIA ARITMÉTICA	<p>Propiedad Asociativa</p> <p>Dado un conjunto A, y A_1, A_2, \dots, A_n, subconjuntos de A tales que $A_1 \cap A_2 \cap A_n = \emptyset$, se cumple que:</p> $\bar{A} = \frac{\overline{A_1 + A_2 + A_n}}{2}$ <p>Nota: Esta propiedad solo se cumple cuando la cantidad de elementos en el conjunto es un número no primo, y cada subconjunto tienen igual cantidad de elementos.</p>	<p>¹Al indagar sobre la cantidad de horas destinadas a ver televisión por nueve estudiantes de octavo grado se tienen los siguientes resultados: 8, 3, 4, 5, 6, 4, 8, 9, 10.</p> <p>Al hallar la media aritmética se divide el conjunto de datos así $A_1 = 8, 3, 4, 5, 6, 4$; y $A_2 = 8, 9, 10$.</p> <p>$\bar{A}_1 = 5$ horas y $\bar{A}_2 = 3$ horas y al hallar el promedio del conjunto de datos haciendo uso de estos resultados parciales se obtiene $\overline{A_1 + A_2} = 4$ horas, mientras que el promedio del conjunto de datos sin hacer partición del conjunto es: 6,33 horas</p>																
	<p>Propiedad Clausurativa</p> <p>Dado un conjunto A y su media \bar{A}, estas deben pertenecer al mismo conjunto numérico.</p>	<p>Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1,2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿Cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1,2? Justifica tu respuesta.</p> <p>Podrían tener dos niños. Porque la media es de 9,6 niños entre las 8 familias:</p> <table border="1" data-bbox="906 1140 1313 1220"> <tr> <td>Fam</td> <td>1ª</td> <td>2ª</td> <td>3ª</td> <td>4ª</td> <td>5ª</td> <td>6ª</td> <td>7ª</td> </tr> <tr> <td>Hijos</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1.6</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	Fam	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	Hijos	2	1	1	1.6	1	1	1
	Fam	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª										
Hijos	2	1	1	1.6	1	1	1											
<p>Propiedad del elemento neutro</p> <p>Existe un número a tal que</p> $\overline{A + a} = \bar{A}$	<p>El número de peces capturados por seis alumnos en una actividad de ocio, es 3, 4, 5, 3, 1, y 2 respectivamente, que hace un promedio de 3 peces por alumno $[(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2)/6]$. Más tarde se descubrió que en la actividad había participado otro alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Crees que cambiará el valor medio de peces capturados por cada alumno, al considerarse este último alumno? Justifica tu respuesta</p> <p>-La media de peces no varía, aunque se considere el último alumno, porque cero es un valor nulo.</p> <p>- El valor medio de peces no varía porque el último alumno no capturó ningún ejemplar, luego, la media sigue siendo la misma.</p>																	

¹ El ejemplo original de la tabla fue cambiado por los autores de este documento con el fin de ejemplificar con mayor claridad el error clasificado por Silva.

COMPRESIÓN DE LA MEDIA ARITMETICA	<p>No consideración de la alteración de la media aritmética ante el aumento en la cantidad de datos.</p> <p>Si la muestra aumenta, la media se mantendrá igual.</p>	<p>El número de peces capturados por seis alumnos en una actividad de ocio, es 3, 4, 5, 3, 1, y 2 respectivamente, que hace un promedio de 3 peces por alumno $[(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2)/6]$. Más tarde se descubrió que en la actividad había participado otro alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Crees que cambiará el valor medio de peces capturados por cada alumno, al considerarse este último alumno? Justifica tu respuesta</p> <p>- No varía, aunque se considere la participación del otro alumno.</p> <p>²Para este caso el estudiante no hace referencia a un valor nulo, sino considera una invarianza del valor medio ante el aumento en la cantidad de datos.</p>
	<p>No consideración de la media como valor esperado</p> <p>Ante una media poblacional o muestral, el valor de la variable de un elemento cualquiera de la población es un número tal que promediado con los demás datos sea igual a la media dada.</p>	<p>La altura media de los alumnos de un colegio es 1.40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1.38, 1.42, 1.60, 1.40. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?</p> <p>$(1.38 + 1.42 + 1.60 + 1.40 + x)/5 = 1.40$</p>
SELECCIÓN DE LA MEDIDA REPRESENTANTE DE UNA DISTRIBUCIÓN DE DATOS	<p>Selección persistente de la media como representante de los datos.</p> <p>La media es invariablemente la medida que mejor representa un conjunto de datos.</p>	<p>Obtener el promedio de una variable ante una distribución con datos atípicos.</p> <p>A pesar de los datos atípicos los estudiantes sugieren a la media como valor representante del conjunto de datos.</p>
EJECUCIÓN DE ALGORITMOS O PROCEDIMIENTOS	<p>Cálculo de la media ponderada sin considerar las frecuencias.</p> <p>El procedimiento para calcular una media en la cual se repiten datos es:</p> <p>Sea n el número de datos diferentes en una</p>	<p>María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte.</p> <p>a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?</p> <p>1.2 horas de media.</p>

² Aclaración de la selección del ejemplo para dos tipos de categorías diferentes (asignación de propiedades y comprensión de la media aritmética) ante una respuesta por parte del estudiante encaminada hacia diferentes consideraciones del objeto matemático media aritmética.

	<p>distribución de frecuencias, su media es:</p> $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ <p>Donde</p> $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$	<p>Obtenido de $\frac{8 + 4}{2}$.</p>
COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE DATOS	<p>Comparación de distribuciones sin considerar la variación.</p> <p>Escogen la distribución con base en una inspección visual de los datos sin tener en cuenta la variación de éstos.</p>	<p>Se pedía escoger el mejor grupo de calificaciones entre dos distribuciones que tenían medias iguales.</p> <p>El grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados.</p> <p>No hay diferencias entre los dos grupos porque tienen medias iguales.</p> <p>El grupo 1 es mejor porque en él hay alumnos con mayor nota.</p>
	<p>Consideración de la media de dos variables independientes como representante.</p> <p>Dadas las medias de variables diferentes X e Y, se puede obtener un promedio con las medias de cada variable así:</p> $\frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$	<p>10 estudiantes el fin de semana ven televisión una media de 1,2 horas y escuchan música una media de 0,4 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades: ver televisión y escuchar música?</p> <p>Teniendo las medias de dos distribuciones, 4.8 y 2.4, hallan una media de $(4.8 + 2.4)/2 = 3.6$.</p> <p>Lo cual constituye un error en cuanto a que se trata de dos variables diferentes.³</p>
ERRORES EN EL LENGUAJE	<p>Confusión entre media y moda.</p> <p>La media aritmética, la describen como 'el valor más frecuente'.</p> <p>Confusión entre la media y la mediana</p> <p>Explican la media aritmética como 'el valor que se sitúa en el centro de la secuencia de datos'.</p>	<p>Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1,2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.</p> <p>Que han hecho la media y lo más frecuente es entre 1 y 2 hijos.</p>

³ Aclaración propuesta por los autores del presente documento, con el fin de evitar asemejar el error en cuestión con errores de asignación de propiedad asociativa a la media aritmética.

	<p>Confusión entre la media y el valor mínimo.</p> <p>Indican que la media es 'el valor mínimo que toma una variable en una población'.</p>	<p>Cada familia tiene como mínimo 1,2 hijos.</p>
<p>ARGUMENTACIÓN</p>	<p>Argumentos circulares basados en definiciones o el procedimiento para cálculo de la media</p> <p>Una respuesta es justificada citando la definición de la media o alguno de sus algoritmos.</p>	<p>Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1,2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.</p> <p>Que han sumado y lo han dividido y le han salido 1,2.</p> <p>La anterior explicación se constituye en un error en cuanto el estudiante recurre al procedimiento, siendo que esto no constituye la significación del objeto media aritmética.⁴</p>

Tabla 1. Clasificación de errores de la media aritmética.

Dicha clasificación será la empleada en el presente trabajo con el fin de constatar, como ya se mencionó en el planteamiento del problema, que dichos errores detectados por los autores y luego clasificados por Silva (2010) se hacen evidentes en la población objeto de estudio.

⁴ Aclaración de los autores explicitando el argumento bajo el cual la explicación del estudiante se considera como error.

5. METODOLOGÍA

A continuación, se presenta la descripción de la metodología empleada para la recolección de los datos, relativos a los errores cometidos por estudiantes de grado octavo en cuanto a la resolución de problemas que requieran el uso de la media aritmética y el respectivo análisis de los mismos a la luz de la clasificación realizada por Silva (2010). Para esto se plasma el siguiente esquema, en el cual se contempla de forma general cada etapa del estudio:

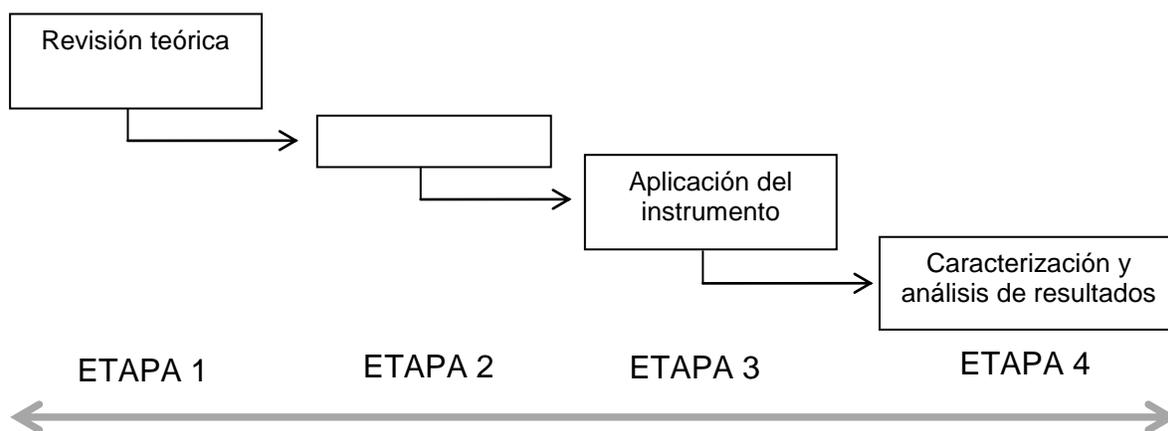


Gráfico 1. Etapas para el desarrollo del estudio

5.1 REVISIÓN TEÓRICA

Esta indagación corresponde a un estudio de tipo diagnóstico-descriptivo, que en palabras de Pochulu (2005) “se caracteriza por el análisis y la categorización de los errores cometidos por los estudiantes al ser enfrentados a la solución de problemas o ejercicios correspondientes a un contenido matemático”; para este propósito se realiza en primer lugar una revisión documental sobre los errores que han reportado diferentes autores en investigaciones similares referentes al aprendizaje del objeto matemático media aritmética, con esta se determinan los errores más frecuentes, los problemas, situaciones o ejercicios que apoyaron la detección de dichos errores, la identificación de las estrategias erróneas que suelen usar los estudiantes (escrita y verbalmente) y la clasificación de estos en cuanto a la taxonomía de errores, propuesta por Silva (2010), con lo cual se construye el marco de referencia presentado en el capítulo anterior.

5.2 PLANEACIÓN

La etapa de planeación obedece a dos momentos: el diseño de instrumentos y la intervención en el aula. Para el primer momento se toma como modelo, el empleado por García y Garret (2007), quienes trazan como estrategia de

recolección de datos la implementación de un instrumento con diversas situaciones extraídas de otras investigaciones con objetivos similares, y posteriormente modificadas para sus propósitos; respecto a los ítems se consultan además de esta fuente, trabajos elaborados por Batanero (2000) y Del Puerto; Seminara & Minnard (2007). El segundo momento corresponde al cómo se llevan dichos instrumentos al aula, es decir, la forma en que se ejecuta tal prueba.

5.2.1 Diseño de Instrumentos

Acorde a los resultados de la revisión teórica, se construye un instrumento (prueba diagnóstica) para ser llevado al aula, con cual se pretende hacer evidentes los errores que presentan los estudiantes en cuanto al uso de la media aritmética en una situación que requiera su empleo. Para la elaboración de dicho instrumento, se parte de la taxonomía propuesta por Silva (2010) y las tareas planteadas por diversos autores, teniendo en cuenta los propósitos de cada una de éstas y haciendo una adaptación de las mismas. Para ello, se presenta un contexto cercano a los estudiantes, que posibilite generar de manera relacionada las preguntas del cuestionario. Los ítems de la prueba indagan de manera conjunta por la media aritmética como operación y la asignación de propiedades algebraicas a esta, posteriormente sobre construcción y comparación de distribuciones de datos, sin dejar de lado la argumentación de las respuestas.

Para el diseño de la prueba se elabora la Tabla 2, en la cual se registra cada enunciado, la intencionalidad de los mismos, la respuesta esperada y las posibles respuestas que referencian los indicadores en cuanto a los errores que se pueden llegar a cometer al abordar dichas situaciones. La prueba inicialmente contaba con una tabla de frecuencias y un polígono de frecuencias junto a su respectiva tabla, a partir de las cuales se proponían siete ítems que indagaban por errores en cuanto a la consideración de la media aritmética como operación y como representante de datos, al igual que se solicitaban argumentaciones de los procesos, buscando hacer evidentes los errores relacionados con el lenguaje (ver Anexo A). El diseño de la prueba definitiva se establece tras una aplicación del Anexo A, a un grupo de estudiantes del mismo grado, en donde se hace posible evidenciar los errores de interpretación de los enunciados, al encontrar respuestas no relacionadas con lo que se pretende indagar, considerando la redacción de las preguntas en procura de una mínima intervención del docente. Adicionalmente, dicha aplicación brinda la posibilidad de establecer los tiempos requeridos para su desarrollo y la organización de los ítems.

	PREGUNTA	RESPUESTA ESPERADA		HIPÓTESIS	
PARTE A	¿Cuál fue el promedio de cestas de cada jugador durante la semana de prácticas?	El estudiante suma todas las cestas hechas por el jugador y divide por el total de prácticas a las que asistió. Repitiendo este procedimiento para cada uno de los 6 jugadores.		<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto Se suman las cestas de cada jugador y se divide por el número de prácticas a las que asistió.	<ul style="list-style-type: none"> • Errores asociados: Propiedad del elemento neutro • Indicadores ✓ Asume las inasistencias como cero cestas; suma los seis puntajes y divide entre seis. ✓ Suma los puntajes y los divide entre la cantidad de prácticas en las que anotó.
	Si el entrenador desea saber el promedio de cestas del equipo durante los seis días de práctica, ¿Cuál procedimiento debería seguir? y ¿cuál sería el promedio de cestas? Justifica tu respuesta	El estudiante suma todas las cestas presentadas en la tabla de prácticas (las de todos los jugadores) y las divide por la cantidad de las prácticas realizadas.		<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto Se suma la cantidad de cestas realizadas durante toda la semana y se divide por la cantidad de días de las prácticas.	<ul style="list-style-type: none"> • Errores asociados Asignación de propiedad asociativa a la media aritmética (promedio de promedios). • Indicadores ✓ Aplica el procedimiento de la media aritmética al conjunto de las medias halladas en el primer ítem. ✓ Halla el promedio del promedio de cestas diarias.
PARTE B	El entrenador del equipo decide entregar un premio al jugador con mejor rendimiento en los cinco primeros partidos del campeonato. Si para el entrenador el rendimiento se refiere al promedio de cestas en los cinco partidos	¿Cuál es el rendimiento de cada jugador durante dichos partidos?	El estudiante suma las cestas marcadas en los cinco partidos y divide esta suma entre el número de partidos. Finalmente se argumenta este valor como el promedio de las cestas	<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto Realiza el algoritmo de la media aritmética para las cestas de cada jugador y acepta indistintamente dicho valor como el promedio del rendimiento de cada jugador.	<ul style="list-style-type: none"> • Error asociado: Propiedad Clausurativa de la media aritmética. • Indicadores ✓ Recurre al redondeo de la media a cifras enteras para que esta "tenga sentido dentro del contexto".
		¿Qué quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Flor?		<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto Se encuentra la media de las cestas de cada jugador y se interpreta está como el promedio	<ul style="list-style-type: none"> • Error asociado: Error de lenguaje; confusión entre la media y la moda. • Indicadores

	¿Cuál es el rendimiento de cada jugador durante dichos partidos?	¿Qué quiere decir el valor que hallaste para Carlos?	marcadas por partido por cada jugador.	marcado por cada jugador durante los partidos.	✓ Se calcula el promedio de cestas de Flor, pero se argumenta este como el valor que más se repite.
	Si el entrenador decide postergar la entrega del premio para tener en cuenta el sexto partido, ¿se verá afectado el rendimiento del que se ha considerado como el mejor jugador, si en el último partido no encesta? Justifica	Se tiene en cuenta el valor "0" como un dato, que aunque no cuenta para la suma, cuenta para la cantidad de datos por la cual se divide dicha suma.		<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto <p>El estudiante promedia la cantidad de cestas hechas por el jugador que más encesta, teniendo en cuenta el sexto día y que en éste no hizo cesta alguna.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Error asociado <p>No consideración de la alteración de la media aritmética ante el aumento en la cantidad de datos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Indicadores <p>✓ Promedia los datos correspondientes a los cinco primeros partidos asumiendo que el no anotar cestas en el sexto partido, equivale a un valor "nulo" en el cálculo de la media aritmética.</p> <p>✓ Promedia los datos, sin considerar el aumento en la cantidad de estos.</p>
	Partiendo de las cestas que hizo Beatriz en los cinco primeros juegos en los que obtuvo un rendimiento de 8 cestas por partido, ¿cuántas tendrá que anotar en el sexto juego, para que su rendimiento no se altere? Justifica	El estudiante tomará el mismo valor de la media como la cantidad de cestas que se debe marcar en el sexto partido.		<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto <p>El estudiante indica que el numero de cestas que Beatriz debe hacer es ocho debido a que este es el valor que se obtuvo de la media de los cinco primeros partidos, por lo tanto es el que se espera para el sexto.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Error asociado: <p>No consideración de la media como valor esperado.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Indicadores <p>✓ Hace una reversión algorítmica con el procedimiento de la media aritmética.</p>
	Si durante los juegos 6 y 7 del campeonato, Beatriz no hizo ninguna cesta, ¿Cuál será la	El estudiante argumenta que la cantidad de cestas en los dos últimos partidos están fuera de la cantidad de cestas que normalmente hace Beatriz, por lo que la		<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto <p>La cantidad de cestas que hace Beatriz en los partidos 6 y 7, no están dentro de lo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Error asociado <p>Selección persistente de la media como representante de los datos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Indicadores

	cantidad más representativa de cestas que anotó esta jugadora por partido teniendo en cuenta los resultados anteriores?	media aritmética no da un valor representativo de la cantidad de cestas de Beatriz en los 7 partidos.	que normalmente hace ella, por lo que si los datos se promedian no dan un buen resultado del rendimiento de Beatriz. Por lo que asume un valor dentro del conjunto de cestas como valor representativo.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Como la cantidad de cestas de los partidos 6 y 7 son cero, entonces estos valores no tienen algún efecto sobre el resultado promedio del rendimiento de Beatriz, por lo que la media aritmética es un valor representativo. ✓ Se promedian la cantidad de cestas que anotó Beatriz en los 7 partidos y se divide por 7, el resultado es el valor representativo de las cestas de Beatriz, indiferente del valor de los datos.
PARTE C	De acuerdo a los valores de la tabla anterior, entonces en promedio Andrés hace _____ puntos por partido. ¿Describe cómo hallaste ese resultado?	El estudiante tiene en cuenta la cantidad de cestas de cada valor que hizo Andrés y utiliza el algoritmo de la media ponderada o escribe por extensión cada uno de los datos y utiliza el algoritmo de la media aritmética.	<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento correcto Se utiliza el procedimiento de la media ponderada para el cálculo del promedio de puntos realizados por Andrés, o realizando el procedimiento de la media aritmética anotando cada uno de los valores registrados en la tabla, tantas veces como lo indique la frecuencia, y dividiendo por la cantidad total de partidos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Error asociado Cálculo de la media ponderada sin considerar las frecuencias • Indicadores <ul style="list-style-type: none"> ✓ Se suman la cantidad de cestas y se dividen entre tres. ✓ Se suman los valores de las cestas y se divide por tres (que corresponden a la cantidad de datos que visualizan de acuerdo a que solo hay tres categorías).

Tabla 2. Intencionalidad de las preguntas del instrumento

En el Anexo B se puede encontrar la prueba definitiva, construida a partir de las observaciones hechas tras la aplicación del Anexo A. Dichas observaciones se exponen a continuación:

- La ubicación continua de las tablas 1 y 2 generaron algunas confusiones de lectura, dado que para la resolución de un ítem los estudiantes miraban indistintamente cualquiera de las tablas sin fijarse si los datos eran del rendimiento o de las prácticas. Por lo cual, se toma la decisión de dividir la

prueba en tres partes (A, B y C) de tal forma que el estudiante asocie con mayor facilidad las tablas a las cuales debe acudir para extraer los respectivos datos y resolver las situaciones planteadas. Además se opta por desistir del uso del polígono de frecuencias de los datos presentados en la Tabla 2. debido a que genera poca información y los estudiantes recurren en mayor medida a la representación tabular.

- La duración de la prueba debe ser de una hora y media debido a que se evidenció premura del tiempo, encontrándose así respuestas incompletas y algunas sin abordar.

5.2.2 Intervención en el Aula

La prueba se ha trabajar con estudiantes de grado octavo y ser desarrollada de forma individual; esto en aras de garantizar la diversidad de pensamientos de los estudiantes, sin estos verse afectados por la influencia del estudiante con menor, ni del con mayor cantidad de dificultades, que sería la diferencia a un modo de trabajo grupal; además de que en la institución donde se realizará la prueba dentro de su metodología de trabajo se hace indispensable el trabajo de carácter individual. Las modificaciones ya realizadas a la prueba han de permitir que no haya intervención alguna por parte del docente para aclaraciones durante el desarrollo de ella, más que las correspondientes a las indicaciones iniciales.

Dentro de las instrucciones iniciales, se le ha de indicar a los estudiantes que la calculadora puede ser utilizada para agilizar los resultados, sin embargo todos los procedimientos deben ser registrados en la guía con la intención de que haya un registro escrito tanto para ellos como para el docente. Además, la entrega del taller desarrollado por parte de los estudiantes no debe contener hojas adicionales a la suministrada por el docente a cargo, pues se considera que a cada pregunta se le asigna el suficiente espacio para su solución, evitando así la recepción hojas que puedan complicar su análisis por la incorrecta organización de los mismos o la pérdida de papeles adjuntos.

5.3 APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

Debido a la logística de la institución en la que se realiza la prueba y que ninguno de los indagadores está a cargo este año de grado octavo, se debió contar con la colaboración de un docente de matemáticas externo al trabajo de indagación para que estuviera presente durante la aplicación del Anexo 2. A este docente se le dan las indicaciones previas, especificadas en el numeral anterior.

La prueba es presentada por un grupo de 20 estudiantes de grado octavo, durante 60 minutos y desarrollada en forma individual, se organizan dentro del aula en forma habitual, en filas, de modo que ninguno pueda observar las respuestas de

sus compañeros, con el fin de no obtener resultados guiados por otros, y así perdiendo la diversidad en cuanto a la creación de estrategias y argumentos de validación en la resolución de problemas que tengan que ver con la media aritmética.

Los estudiantes no son informados previamente de la actividad, por lo que no tienen la oportunidad de repasar algún tema. La prueba se inicia una vez el docente ingresa al aula y da las instrucciones y es recogida una vez se observa que todos han terminado de dar sus respuestas (las hojas no se recogen por separado en la medida en que cada estudiante termina, pues de acuerdo a las dinámicas propias de la institución educativa, se pretende formar a los estudiantes en la disciplina de presentar las pruebas externas del Bachillerato Internacional.)

Una vez termina la presentación de la prueba, se realiza una entrevista no estructurada al docente encargado, con el fin de registrar los sucesos más importantes durante el tiempo transcurrido y extraer aspectos significativos para el análisis de los resultados.

Al preguntársele al docente cómo transcurrió la prueba, el docente afirma que la prueba se desarrolló sin contratiempo alguno en horas de la mañana y que los estudiantes estuvieron bastante organizados. En cuanto a los inconvenientes presentados, se afirma que hubo preguntas para las partes A y B del Anexo B.

Al pedírsele al docente exponer las inquietudes mostradas por los estudiantes para la parte A, se explica que las inquietudes se refirieron a la convención usada para las inasistencias a las prácticas (NA), pues no tenían claro cómo éste se tendría en cuenta para los cálculos. El docente solamente aclaró que dicha convención correspondía a las inasistencias (No Asistencias). El docente hace una reflexión en torno a la segunda pregunta de la Parte A, indica que el grupo de estudiantes no gusta de la escritura y análisis de respuestas en las que se debe justificar el uso de un procedimiento, y que además se ejercita mucho más la parte algorítmica, por lo que al ser una pregunta en la que se requería de una explicación, varios optaron por dejarla en blanco, al considerar “muy difícil” comunicar en forma escrita sus procesos y resultados.

Luego a esto, se solicitó al docente mencionar el tipo de inconvenientes presentados por parte de los estudiantes en la parte B, el entrevistado comenta que éstas se enfocaron en la pregunta 4, en la cual se requirió justificar lo que pasaría en un sexto partido si un jugador no encesta, pues no era claro para ellos el procedimiento a seguir.

5.4. TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN:

Para el tratamiento de la información obtenida tras la aplicación de la prueba de indagación de errores, se procede en primer lugar a su lectura, comparación y clasificación acorde a los hipótesis previstas en la tabla de indicadores; en este momento se analiza si fuera el caso de haber respuestas no contempladas en dicha tabla y establecer en que cual fuese la razón de dicho error, esto se realizara para cada pregunta de la prueba indicada; además se hará el análisis sobre la cantidad de estudiantes que presentan determinados tipos de estrategias (correctas o incorrectas).

Seguidamente se categorizaran dichos errores acorde a la clasificación realizada por Silva en 2010, para así determinar exactamente en qué nivel de error se encuentran los argumentos utilizados por los estudiantes para validar sus argumentos, y a partir de esto y de los resultados reportados por otros autores en cuanto al mismo objeto, poder hacer una comparación sobre puntos en común en la recurrencia a determinadas estrategias erróneas por parte de los estudiantes al abordar problemas que requieran del uso de la media aritmética para su solución.

6. CATEGORIZACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se procede a hacer lectura de las respuestas de los estudiantes teniendo en cuenta las hipótesis propuestas en la Tabla 2; para luego hacer la clasificación de éstas de acuerdo con la taxonomía propuesta por Silva (2010) y determinar en qué categoría se encuentran las respuestas de los estudiantes.

Pregunta 1.

¿Cuál fue el promedio de cestas de cada jugador durante los seis días de práctica?		
PROCEDIMIENTO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS	No. DE ESTUDIANTES
Suma las cestas hechas por el jugador durante los días en los que asistió a prácticas y divide esta suma por la cantidad de asistencias.	Este es un procedimiento esperado para la pregunta número uno de la prueba, y se considera como el correcto, pues asume solo las cestas marcadas tanto para la suma como para la división.	5 de 20
Suma solo las cestas hechas durante las prácticas a las que asistió cada jugador, pero el total es dividido por las seis prácticas que se hicieron.	Los estudiantes presentan un error en cuanto a la cantidad de datos que usa para realizar el promedio; hay una incongruencia entre los datos sumados y la cantidad de datos que cuenta, para tomarla como divisor.	3 de 20
Toma las inasistencias como 0 cestas, sumando las seis cantidades, dividiendo finalmente por seis.	Este error corresponde a la asignación de valor "0" a los datos no numéricos de la tabla; al momento de solicitar el promedio de cestas de cada jugador, a pesar de hacer mal la asignación de NA como 0 cestas, este valor es tenido en cuenta tanto en el numerador como en el denominador en el algoritmo de la media aritmética, por lo que no estaría representando un valor nulo para los estudiantes.	13 de 20
Toma las inasistencias como 0 y las cuenta para la suma de puntajes, pero divide dicha adición en el número de prácticas a las que asistió.	Los procedimientos corresponden a errores asociados al "0" como valor nulo en la operación de la media aritmética, en cuanto a que se tiene en cuenta el valor "0" en la suma, pero en el número registrado como cociente, este corresponde a la cantidad de datos que no son cero en la suma registrada en el numerador.	2 de 20
Se toman las inasistencias a las prácticas y las cero cestas como datos nulos, no haciéndolos parte de la suma, dividiendo finalmente por las misma cantidad de sumandos asumidos.		1 de 20
Redondea el valor de la media aritmética obtenida para la cantidad de cestas hechas por un jugador.	Error de asignación de propiedad clausurativa a la media aritmética.	2 de 20

Tabla 3. Análisis de pregunta número 1. Propiedad del elemento neutro.

En el anterior análisis se incluyen respuestas que permitieron evidenciar el error de propiedad clausurativa, con el que no se contaba para las hipótesis en la Tabla 2, por lo que el total de estudiantes registrados no corresponde al número de aquellos que presentaron la prueba.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 1:

1. El error asociado a la asignación del “0” como módulo de la operación media aritmética no es un error que se presente de manera masiva en la población sujeto de estudio, esto viéndose en la poca cantidad de estudiantes que recurren a esta supuesta propiedad para hacer el cálculo del promedio solicitado.
2. Los niveles de argumentación de los estudiantes al momento de solicitárseles dar una justificación a sus respuestas, son recurrentes en gran medida a la descripción del procedimiento de la media aritmética, esto indicado en frases como:

“Para sacar el promedio le suma todo y se divide por el número de data (datos)”.

 Carlos: <u>8</u>	Procedimiento $\frac{9+1+4+4+3+3}{6} = 8$	Justifica tu respuesta Para sacar el promedio, le suma todo y se divide por el número de data.
--	--	---

Además en las explicaciones se encuentran también errores de tipo argumentativo, al asociar la media aritmética con los valores de los datos que se repiten mayor cantidad de veces (moda), esto referenciado en respuestas como:

“Carlos obtuvo un buen promedio ya que fue todos los días y obtuvo casi siempre lo mismo”.

 Carlos: <u>A</u>	Procedimiento $\frac{9+1+4+4+3+3}{6}$	Justifica tu respuesta Carlos obtuvo un buen promedio ya que fue todos los días y obtuvo casi siempre lo mismo.
--	--	--

Pregunta 2.

Si el entrenador desea saber el promedio de cestas del equipo durante los seis días de práctica, ¿Cuál procedimiento debería seguir? y ¿cuál sería el promedio de cestas? Justifica tu respuesta		
PROCEDIMIENTO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS	No. DE ESTUDIANTES
El estudiante suma todas las cestas presentadas en la tabla de prácticas (las de todos los jugadores) y las divide por la cantidad de las prácticas realizadas (días).	Este es el procedimiento esperado como correcto para el numeral dos. Éste busca encontrar el promedio de cestas por día del equipo.	1 de 20
Suma los promedios obtenidos para el punto anterior y los divide en la cantidad de sumandos	Este tipo de respuesta, es un indicador del error contemplado para este numeral de la prueba. El procedimiento empleado es el	7 de 20

(jugadores).	de promediar promedios, obteniendo un valor bastante inferior al expuesto por la respuesta anteriormente analizada.	
Suma todas las cestas presentadas en la Tabla 1 y las divide en 36.	Esta respuesta es un indicador que no se presupuestó para el error en esta pregunta. En ésta los estudiantes dividen por el total de datos de la Tabla 1, incluyendo las no asistencias a las prácticas asumidas como 0 ya que dividió la suma de la cantidad de cestas por 36.	2 de 20
No responde	Los estudiantes no hacen algún procedimiento y/o gráfico que permita evidenciar cuál es su razonamiento al resolver la situación planteada.	10 de 20

Tabla 4. Análisis de pregunta número 2. Propiedad asociativa.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 2:

1. Se evidencia una gran recurrencia al procedimiento de calcular la media aritmética a través del promedio de los promedios calculados en el ítem 1, esto denota que la mayoría de la población que contestó este ítem asigna la propiedad asociativa a la media aritmética, error reportado frecuentemente en las investigaciones. Para el caso de los estudiantes que presentaron este error, se evidenció además dificultades en la comprensión de enunciados, puesto que el resultado encontrado para este procedimiento corresponde a un valor lo bastante pequeño, como para ser considerado un promedio lógico para las cestas diarias de todo el equipo durante las prácticas.
2. En particular un estudiante consideró dos procedimientos: el promedio a través de la suma de los datos numéricos y la respectiva división entre la cantidad de datos, y además el promedio de promedios; luego de realizar ambos llegó a resultados muy próximos, por lo que concluyó que podría utilizar cualquiera de los dos y finalmente seleccionó el segundo.

2. Si el entrenador desea saber el promedio de cestas del equipo durante los seis días de práctica, ¿Cuál procedimiento debería seguir? y ¿cuál sería el promedio de cestas? Justifica tu respuesta

Puede hacerlo sumando todas las cestas de todos los jugadores y dividir por uno y dividir por la cantidad de datos o puede sumar los promedios de los jugadores y dividir por los datos, igualmente los resultados de estos procesos son casi iguales. El promedio de cestas sería 4,43 o 4,4. Aquí utilice el procedimiento de sumar los promedios y dividir y ese es el resultado.

Pregunta 3.

El entrenador del equipo decide entregar un premio al jugador con mejor rendimiento en los cinco primeros partidos del campeonato. Si para el entrenador el rendimiento se refiere al promedio de cestas en los cinco partidos ¿Cuál es el rendimiento de cada jugador durante dichos partidos?		
PROCEDIMIENTO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS	No. DE ESTUDIANTES
Suma las cestas hechas por cada jugador y las divide en cinco, encontrando así el promedio para cada uno.	Este es el procedimiento esperado como correcto para el numeral dos. Se suma las cestas de cada jugador durante los cinco partidos y luego se divide en la cantidad de	17 de 20

	partidos. La respuesta para cada uno de los jugadores se escribe sin redondear las respuestas a un número entero, lo cual implica que estos estudiantes reconocen que el valor encontrado para la media aritmética puede ser un valor no perteneciente al conjunto de datos.	
Suma las cestas hechas por cada jugador y las divide por la cantidad de datos que hay (30).	Los estudiantes suman las cestas correspondientes a los cinco partidos de cada jugador y toma como divisor el número de partidos en que se hicieron cestas. Para éste, los resultados del rendimiento no se redondean a un entero, es decir, que aunque no se comete el error relacionado a la propiedad clausurativa, hay una comprensión del enunciado.	2 de 20
Después de sumar las cestas hechas por cada jugador y dividir en cinco, redondea el valor de la media aritmética al valor entero más cercano.	El procedimiento es correcto, pero el error radica en que el estudiante no considera como válidos los resultados decimales de la media aritmética y procede al redondeo de los mismos, por lo que llega a conclusiones sobre la igualdad de la media para dos jugadores, dado que tienen cantidad diferentes de cestas.	1 de 20
No responde	El estudiante no hace algún procedimiento y/o gráfico que permita evidenciar cual es su razonamiento al resolver la situación planteada.	1 de 20

Tabla 5. Análisis de pregunta número 3. Propiedad Clausurativa.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 3:

La pregunta se dividía en dos partes, una correspondiente al cálculo numérico de la media aritmética la cual se detalla en el cuadro anterior, y las partes a y b, que pretendían obtener información de los aspectos de argumentación respecto a la media aritmética de dos jugadores en particular, a partir de los interrogantes:

- a. ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Flor?
- b. ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Carlos?

Para ésta se obtuvieron argumentos como:

1. De la primera parte de la pregunta, se observó que el valor hallado como media aritmética corresponde al valor de las cestas que hace a diario en promedio un jugador (ver respuesta), este tipo de argumento es el considerado como correcto, pero es solo evidenciado en dos estudiantes.

3. El entrenador del equipo decide entregar un premio al jugador con mejor rendimiento en los cinco primeros partidos del campeonato. Si para el entrenador el rendimiento se refiere al promedio de cestas en los cinco partidos ¿Cuál es el rendimiento de cada jugador durante dichos partidos?
- a) ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Flor?
- b) ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para Carlos?

$$a) 6+5+6+6+7=30$$

$$30 \div 5 = 6$$

6 es el promedio de cestas de Flor en los 5 partidos.

$$b) 1+8+4+4+4=21$$

$$21 \div 5 = 4.2$$

4.2 Es el promedio de cestas en los 5 partidos de Carlos.

2. Argumentos del valor hallado de la media aritmética no como el aspecto que representa, sino en cuanto al comparativo de éste respecto a las prácticas o rendimientos de otros jugadores del equipo fueron unos de los errores más

del equipo decide entregar un premio al jugador con mejor rendimiento en los cinco primeros partidos del campeonato. Si para el entrenador el rendimiento se refiere al promedio de cestas en los cinco partidos ¿Cuál es el rendimiento de cada jugador durante dichos partidos?

a) ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Flor?

b) ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para Carlos?

3) a) quiere decir que su rendimiento bajo, porque en la práctica su rendimiento fue de 6.7.

8) b) quiere decir que su rendimiento aumento, porque en la práctica su rendimiento fue 8.

3. El entrenador del equipo decide entregar un premio al jugador con mejor rendimiento en los cinco primeros partidos del campeonato. Si para el entrenador el rendimiento se refiere al promedio de cestas en los cinco partidos ¿Cuál es el rendimiento de cada jugador durante dichos partidos? El mejor rendimiento fue de Darío.

a) ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Flor?

b) ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para Carlos?

a) El rendimiento de Flor fue igual en el entrenamiento y en el torneo

b) Durante el torneo Carlos mejoro su rendimiento.

observados durante el análisis.

3. Argumentos no asociados a ninguna clase de consideración estadística, por ejemplo al decir que:

“Flor es una muy buena jugadora y con muy buenas técnicas para entrenar” y “Carlos es muy buen jugador y aporta mucho al equipo”.

Pregunta 4.

Si el entrenador decide postergar la entrega del premio para tener en cuenta el sexto partido, ¿se verá afectado el rendimiento del que se ha considerado como el mejor jugador, si en el último partido no encesta? Justifica		
ARGUMENTOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS	No. DE ESTUDIANTES
Afirma que el rendimiento del jugador sí se verá afectado al no encestar en el último partido, pues los nuevos cálculos se realizarán contando con el dato cero "0".	Esta respuesta se considera como correcta por que el estudiante promedia la cantidad de cestas hechas por el jugador que más encesta (Darío), teniendo en cuenta el sexto día y que en éste no hizo cesta alguna. Se está teniendo en cuenta la variabilidad de la media aritmética ante el aumento de datos.	6 de 20
Argumenta una baja en el rendimiento del jugador, pero no a partir de sus resultados, sino haciendo una comparación con los resultados que puedan alcanzar los demás jugadores.	El argumento se considera como incorrecto ya que no hay una consideración del rendimiento del mejor jugador en función de sus propios resultados, sino que lo argumenta partiendo de lo que pueden lograr sus compañeros de equipo para superarlo.	6 de 20
No considera una alteración en el rendimiento del jugador, pues asegura que el no encestar no influenciaría en el promedio.	En esta respuesta se evidencia que el estudiante asume el valor "0" como valor nulo (error), el cual no tienen efecto alguno sobre el promedio de cestas del mejor jugador del campeonato.	1 de 20
Asegura que si dicho jugador no encesta, se verá afectado el rendimiento del equipo.	El argumento es incorrecto pues no se considera el rendimiento del jugador sino su efecto en el rendimiento del equipo.	1 de 20
El estudiante considera una reducción del promedio de cestas del mejor jugador, pero no toma la cantidad indicada en el enunciado sino con el dato "2".	No se puede concluir si el estudiante comete o no comete un error, pues considera el número "2" y no el cero como se indica en el enunciado, sin embargo tampoco se puede afirmar que se toma dicho valor inferior al promedio para mostrar cómo se afecta el rendimiento del mejor jugador.	1 de 20
El estudiante da un argumento que podría considerarse de comparación entre los resultados de dos jugadores; pero este razonamiento no se concretiza en ningún momento.	El estudiante no presenta un argumento que se pueda considerar como correcto, en la medida que parece de comparación con los resultados que pueda alcanzar el segundo mejor jugador, pero este razonamiento se queda inconcluso cuando el estudiante no aporta mayor información que pueda sugerir a qué variable compara al decir: " <i>Si, ya que el primero está muy cerca del segundo</i> ".	1 de 20
No responde	Los estudiantes no hacen algún procedimiento y/o gráfico que permita evidenciar cual es su razonamiento al resolver la situación planteada.	4 de 20

Tabla 6. Análisis de pregunta número 4. Confusión entre media y moda.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 4:

1. Con éste ítem no se logró recoger mayor información sobre los errores relacionados a la media aritmética, pues se evidenció en la mayoría de las

- respuestas aspectos relacionados con el contexto y la situación del juego más allá de los aspectos matemáticos.
- Se evidencia por parte de los estudiantes una gran recurrencia, no hacia la consideración de los resultados del jugador en cuestión, sino hacia la de la comparación de los resultados del jugador con mejor rendimiento con los resultados de los demás jugadores del equipo.
 - El error que se consideraba durante la planeación iba a ser recurrente en los estudiantes, el cual era la asignación de valor nulo al dato "0", fue únicamente registrado por 1 de los 20 estudiantes sujetos de estudio.
 - Se registran errores de argumentación en cuanto no se explicita la variable que está comparando el estudiante y aparece su argumento como inconcluso (ver respuesta).

Si el entrenador decide postergar la entrega del premio para tener en cuenta el sexto partido, ¿se verá afectado el rendimiento del que se ha considerado como el mejor jugador, si en el último partido no encesta? Justifica

Si, ya que el primero esta muy cerca del segundo

- Se evidencia una respuesta en la que no se puede definir si hay o no error, en cuanto a que se hace con un dato diferente al indicado, siendo que se propuso el dato "0" porque es el que se reporta en la literatura como el que genera, por parte de los estudiantes una falsa asignación como elemento neutro en la operación de la media aritmética. El estudiante en cuestión da un argumento válido, pero cuando quiere formalizar este a través de un procedimiento, lo hace con un dato diferente al cero, lo cambia por el dato "2", lo que hace imposible dar un juicio sobre si comete el error inicialmente considerado. (ver respuesta).

Si el entrenador decide postergar la entrega del premio para tener en cuenta el sexto partido, ¿se verá afectado el rendimiento del que se ha considerado como el mejor jugador, si en el último partido no encesta? Justifica

Si, porque el mejor promedio es el de Dario y si por ejemplo mete dos cestas en el proximo partido su promedio seria:
 $75 + 2 + 75 + 73 + 0 + 2 = 47$
 $47 \div 6 = 7.8$
 Por ende bajaría de promedio.

Pregunta 5.

Partiendo de las cestas que hizo Beatriz en los cinco primeros juegos en los que obtuvo un rendimiento de 8 cestas por partido, ¿cuántas cestas tendrá que anotar en el sexto juego, para que su rendimiento no se altere? Justifica.		
PROCEDIMIENTO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS	No. DE ESTUDIANTES
El estudiante contesta que para que no se afecte el promedio de cestas de Beatriz, esta debe hacer en el sexto partido la misma cantidad de cestas que lleva en el promedio hasta el quinto partido.	Los estudiantes toman el valor de la media aritmética correspondiente a los primeros cinco partidos como valor esperado. Éste es considerado como la respuesta correcta, ya que se está considerando la media como el valor esperado de un conjunto de datos.	4 de 20
Se hace recurrencia a la reversión	Debido que 8 es el promedio de cestas de	6 de 20

algorítmica de la media aritmética agregando el dato "8" en la suma del numerador, y dividiendo dicha suma por la cantidad total de datos (6).	Beatriz en los primeros cinco partidos, el procedimiento puede ser válido en cuanto a la consideración de la media aritmética como operación, sin embargo en este caso es tomado como error pues no hay una interpretación de ésta como un valor esperado para resultados futuros (esperanza matemática).	
El estudiante afirma que el promedio de cestas de Beatriz no se verá alterado si la jugadora hace como mínimo seis cestas (mínima cantidad de sestras que hizo Beatriz).	El procedimiento se considera erróneo en cuanto se asocia la media aritmética con el valor mínimo del conjunto de datos. Se considera que la media aritmética no varía si se toman en el conjunto de datos, datos con valores iguales o superiores al mínimo presente en el mismo. Para la distribución de Beatriz cualquier dato igual o superior a seis no modificaría el promedio de cestas hasta el sexto partido.	4 de 20
El estudiante muestra únicamente la respuesta correcta (8), aunque no a un procedimiento para hallarla.	No se evidencia un procedimiento que pueda determinar si se consideró de manera correcta la media aritmética como valor esperado, si se hizo como reversión algorítmica, o si la respuesta fue correcta solo por azar.	1 de 20
El estudiante recurre a una reversión algorítmica pero haciendo uso de la letra como representante del valor desconocido (cestas que debe hacer Beatriz en el sexto partido), no logra hacer correctamente el despeje de la misma, por lo cual llega a un resultado incorrecto.	El estudiante recurre a la reversión algorítmica de la operación media aritmética, pero de manera contraria a otros estudiantes que utilizaron el mismo método, no asigna un valor determinado (8) a las cestas del sexto partido de Beatriz, sino que lo busca como valor desconocido. El resultado queda incorrecto al hacer mal el despeje de la incógnita, obteniendo así 6.6 como el número de cestas que no afectará el rendimiento de Beatriz, dicho valor no se redondea a ningún entero.	1 de 20
Se afirma que Beatriz no debe hacer cesta alguna debido a que este valor de dato "0" no afectaría el promedio de cestas hasta el sexto partido.	Se asume como módulo de la media aritmética el valor "0", el cual no modificaría los resultados de la media aritmética.	1 de 20
El estudiante muestra únicamente la respuesta incorrecta (4), aunque no recurre a un procedimiento para hallarla.	No se evidencia un procedimiento que pueda determinar qué tipo de procedimiento dio lugar a la respuesta incorrecta del estudiante.	1 de 20
No responde	Los estudiantes no hacen algún procedimiento y/o gráfico que permita evidenciar cual es su razonamiento al resolver la situación planteada.	2 de 20

Tabla 7. Análisis de pregunta número 5. Alteración de la media aritmética ante el aumento de datos.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 5:

1. Se presenta mayor recurrencia por parte de los estudiantes hacia la reversión algorítmica para la consideración de resultados futuros que no modifiquen un promedio dado, sea dicho procedimiento acertado o no. En muy pocos estudiantes se notó la consideración de la media como valor esperado.
2. Algunos estudiantes relacionan la media aritmética con el valor mínimo del conjunto de datos, razón por la cual asignan datos iguales o superiores al mínimo registrado, considerando que no se variará el promedio de la distribución de datos.

Partiendo de las cestas que hizo Beatriz en los cinco primeros juegos en los que obtuvo un rendimiento de 8 cestas por partido, ¿cuántas cestas tendrá que anotar en el sexto juego, para que su rendimiento no se altere? Justifica.

de 6 en adelante ya que su mínimo de cestas es ese.

3. No se consideró dentro de las hipótesis para esta pregunta, que hubiera estudiantes que asignaran al cero como valor nulo que no afectaría el promedio de cestas de la jugadora en particular. Y aunque solo fue presentado por un estudiante, este error ha sido recurrente en otros ítems, por lo que se hace necesario prestar mayor atención a situaciones relacionados con este error.

Partiendo de las cestas que hizo Beatriz en los cinco primeros juegos en los que obtuvo un rendimiento de 8 cestas por partido, ¿cuántas cestas tendrá que anotar en el sexto juego, para que su rendimiento no se altere? Justifica.

ella no debería encestar ninguna cesta para no afectar su rendimiento o

Promedio ya que:

$$\frac{16+9+7+10+8+0}{6} = 40 \quad 40 \div 6 = 6.67$$

Pregunta 6.

Si durante los juegos 6 y 7 del campeonato, Beatriz no hizo ninguna cesta en la victoria de su equipo, ¿Cuál será la cantidad más representativa de cestas que anotó esta jugadora por partido teniendo en cuenta los resultados anteriores?		
PROCEDIMIENTO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS	No. DE ESTUDIANTES
El estudiante considera un valor representativo diferente a la media aritmética, éste dentro del valor mínimo y máximo de los datos, pero no refiere a un valor en particular.	El argumento se considera correcto en cuanto se indica un valor representativo diferente a la media aritmética, al parecer haciendo referencia al rango medio. Por lo que se evidencia que el estudiante asume que la media no era el mejor representante para el conjunto de datos.	1 de 20
Se considera el valor representativo, como el promedio de cestas hasta el quinto partido, excluyendo los partidos donde no hubo cestas.	Los estudiantes proponen como valor representativo la media aritmética recortada, es decir, excluyendo del promedio de los datos aquellos que se consideran atípicos.	3 de 20
El estudiante asume el valor más representativo de las cestas de Beatriz como el mayor valor del dato registrado en la tabla de la parte B (10 cestas en el cuarto partido).	Los estudiantes proponen un valor representativo diferente al de la media aritmética, asumiendo que este podría ser el mayor valor del dato dentro de los registrados en la tabla correspondiente. Este procedimiento es considerado en su	4 de 20

	totalidad incorrecto, pues es válido al considerar otra medida diferente a la media aritmética como valor representativo, pero el asumir el dato con valor máximo como representativo del conjunto de datos es una afirmación incorrecta pues ni el valor máximo ni el mínimo haría referencia a un valor que represente la cantidad de cestas de la jugadora.	
El estudiante argumenta que el valor más representativo de las cestas de Beatriz hasta el séptimo partido, es el promedio de los valores registrados en la tabla, incluyendo los ceros correspondientes a los dos últimos partidos en los que no encesta.	No se considera el efecto de los valores atípicos en la selección de la medida representativa del conjunto de datos. Por lo que el argumento dado es considerado como erróneo, aunque el procedimiento es válido.	5 de 20
El estudiante propone una respuesta ausente de claridad, o los argumentos son circunloquios que no concluyen en una afirmación determinada.	No se puede concluir acerca de la existencia de error o no, debido a que los estudiantes no tienen una argumentación clara del proceso que realiza para dar una respuesta a la situación planteada.	3 de 20
No responde	Los estudiantes no hacen algún procedimiento y/o gráfico que permita evidenciar la estrategia a seguir para resolver el problema	5 de 20

Tabla 8. Análisis de pregunta número 6. Media como valor esperado.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 6:

1. De los estudiantes que dan respuesta a éste ítem, es reducida la cantidad de aquellos que dan una solución clara que permita categorizarla. Además, se evidencia proporciones similares de los estudiantes que recurren a la asignación de la media aritmética como valor representativo del conjunto de datos, y de aquellos que proponen otra medida diferente para este fin.
2. A nivel de argumentación, se vislumbran serios inconvenientes que no permiten entrever cuáles son los errores ni las dificultades que le subyacen, debido a que se presentan ambigüedades que no desencadenan en alguna proposición, o simplemente carecen de coherencia en la redacción textual para dar a conocer claramente la idea o razonamiento seguido para dar respuesta al ítem en cuestión.

Si durante los juegos 6 y 7 del campeonato, Beatriz no hizo ninguna cesta en la victoria de su equipo, ¿Cuál será la cantidad más representativa de cestas que anotó esta jugadora por partido teniendo en cuenta los resultados anteriores?

teniendo en cuenta los resultados anteriores Beatriz ~~tuvo~~ no tuvo cestas ya que con la información anterior de los juegos 6 y 7 del campeonato no anoto cestas.

Pregunta 7.

De acuerdo a la anterior tabla, entonces en promedio Andrés hace _____ puntos por partido. ¿Describe cómo hallaste ese resultado?		
PROCEDIMIENTO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS	No. DE ESTUDIANTES
Se realiza el algoritmo de la media ponderada, es decir, se multiplican los datos por sus respectivas frecuencias y estas se suman y posteriormente se dividen por la cantidad de partidos en los que jugó Andrés (cinco).	Se considera como procedimiento correcto aplicando el algoritmo de la media ponderada.	2 de 20
Promedia las frecuencias registradas en la tabla.	Se hace una lectura errónea de la variable a tener en cuenta y se realiza el promedio considerando como variable las frecuencias registradas en la tabla, es decir, se suman las tres frecuencias y se divide por el número de sumandos.	2 de 20
El estudiante multiplica cada uno de los datos registrados en la tabla por el valor de sus respectivas frecuencias y suma dichos valores.	Se considera el peso de cada uno de los datos, pero al momento de hacer el promedio se olvida hacer la división por la cantidad de partidos (cinco).	1 de 20
El estudiante suma las frecuencias.	Se realiza como promedio solo la suma de las frecuencias, es decir, hay lectura errada de la variable y un mal procedimiento, tomando como base dichas frecuencias.	1 de 20
El estudiante da una respuesta pero es ausente de procedimiento y/o argumento.	No se evidencia un procedimiento y/o argumento que permita percibir el procedimiento por el cual encontró la respuesta, siendo errada en todos los casos, ya que el valor dado, no corresponde a la respuesta esperada.	7 de 20
No responde	Los estudiantes no hacen algún procedimiento y/o gráfico que permita evidenciar cuál es el argumento al resolver la situación planteada.	7 de 20

Tabla 9. Análisis de pregunta número 7. Representatividad de la media.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 7:

1. Se nota una gran cantidad de respuestas que no permiten evidenciar los errores en los que incurren los estudiantes al resolver situaciones que requieren el uso del algoritmo de la media ponderada, pues no presenta un procedimiento o argumento verbal, en la misma medida se presentan casos en los que los estudiantes no contestan el ítem; por tal razón el análisis que pueda hacerse a esta pregunta será solo a partir de las respuestas de 6 estudiantes; una baja proporción de los sujetos de estudio.
2. Se evidencia dificultades en la lectura de tablas de frecuencia a las que pertenece la variable a tener en cuenta y en la consideración de los pesos de cada una de las frecuencias sobre los datos.

De acuerdo a las consideraciones previas al desarrollo de la prueba y a los resultados de la misma, a continuación se exponen algunas observaciones generales que permiten dar cuenta de aspectos relevantes para la realización de futuras pruebas de indagación de errores sobre el objeto matemático media aritmética:

1. De la revisión que se hace a las justificaciones que dan los estudiantes, se observa en algunas pruebas que éstas no se dan de manera completa y que en algunas se busca de cierta forma reducir argumentos a partir de flechas que indiquen procesos similares en otros ítems. De acuerdo a esto se plantea que para futuras pruebas diagnóstico se debe generar diversas formas de acceder a las justificaciones, esto con el fin de que el estudiante no se cargue en el proceso de darlas, pero que se pueda acceder a la información.
2. El haber dividido la prueba en tres partes, permite observar más seguridad por parte de los estudiantes que durante el desarrollo del anexo A, al remitirse de manera autónoma y sin titubeos a las tablas correspondientes a cada pregunta.
3. Se observa que a medida que se avanza en el desarrollo de la prueba, es mayor la cantidad de estudiantes que dejan de contestar los ítems o no presentan argumentos o procedimientos que les permitan justificar sus respuestas, por lo que podría considerarse una mayor cantidad de tiempo para la solución de la prueba, o la presentación de formatos diferentes de instrucción que permita captar mayormente el interés por parte de los estudiantes. O hacerla en dos o tres sesiones diferentes en donde ellos no se cansen de una jornada tan larga.
4. Se debe reconocer que el planteamiento de la situación llevó a los estudiantes a exponer ideas correspondientes al contexto deportivo de la situación, más que al componente matemático que se buscaba con el mismo. Por lo que se podría entrever que al haber propuesto una situación que no generara dichas posturas, sería posible encontrar más evidencias en torno al error asociado al valor nulo.
5. Durante el análisis de las repuestas dadas por lo estudiantes, se observa como algunas preguntas dan cuenta de errores para lo que se tenían previstos otros ítems según la Tabla 2., por lo que para futuros estudios se puede contemplar la posibilidad de omitir algunos de ellos en procura de analizar los errores evitando el uso de tantos cuestionamientos. Ejemplo de esta afirmación es el siguiente:

Las preguntas 4 y 6 de la parte B aunque mostraban según las hipótesis intencionalidades distintas, se observó que el error a identificar con la primera mencionada podría ser evidenciables simplemente al emplear la sexta pregunta.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El análisis realizado a cada uno de los ítems permitió observar errores no contemplados en la planeación de la prueba, encontrándose así estudiantes que aportaban al presente estudio con errores no considerados dentro de la intencionalidad de cada pregunta del instrumento (Tabla 2). A continuación se presentan las conclusiones generales, las cuales permiten dar cuenta sobre los errores que presentan los estudiantes de grado octavo al enfrentarse a problemas que requieren del uso de la media aritmética para su resolución, a la luz de las teorías expuestas y los resultados obtenidos tras la aplicación de la prueba.

De acuerdo a las teorías presentadas, se realiza la prueba que busca constatar si los errores observados por distintos investigadores son además evidenciables en estudiantes de una población en la que no se tienen antecedentes de la revisión de los mismos, encontrándose de forma general elementos que aportan a establecer relaciones entre la teoría y los resultados de la prueba.

De los errores más reportados por los autores revisados durante el estudio teórico, están los correspondientes a la asignación de propiedades a la media aritmética, sobresaliendo entre ellos la del elemento neutro (tomando el cero como un valor nulo), aunque este se hizo evidente en tres numerales de la prueba (problemas uno, cuatro y cinco), es bastante complejo llegar a concluir sobre la población, pues muy pocos estudiantes lo presentan y al realizar la comparación con los resultados en otras investigaciones se ve que al igual que en éstas los estudiantes sujetos de estudio del presente trabajo muestran dificultades en la extensión de una supuesta propiedades modulativa de la media aritmética, pero en contraste los resultados no fueron tan marcados hacia dicha tendencia debido a cuestiones de argumentación y en aspectos propios del diseño de la prueba (ver página 37).

En relación a la asignación de la propiedad clausurativa a la media aritmética es también identificada en este estudio, pero en contraste a los referentes teóricos, no se evidencia a través de un nivel de producción argumentativo textual, sino en la necesidad de los estudiantes del uso de números que tengan relación en el contexto, por lo que las actividades de redondeo pueden dar cuenta de las dificultades u obstáculos que tienen los estudiantes al momento de comprender la media aritmética.

Un aspecto que poco se detalla en los referentes teóricos, son los correspondientes a los elementos validativos, en estos se muestran algunas dificultades al momento de dar argumentos a las afirmaciones; en este estudio, de manera semejante a los referentes teóricos se visualizó que este es un aspecto determinante en cuanto hay serios inconvenientes al momento de hacer argumentaciones ya sea por la confusión con otros tipos de medida (conceptos intuitivos) o por la manera de expresar las ideas las cuales no conducen a un

resultado por su misma redacción; además a estas, finalmente se encuentra una predominancia de la conexión del estudiante con el contexto de la situación problema (valoración subjetiva) más que con el aspecto matemático inmerso en las mismas.

Continuando con los errores asociados a la asignación de propiedades a la media aritmética, se encontró un porcentaje representativo de estudiantes (70% de los que respondieron la pregunta) que asignan una supuesta propiedad asociativa a la media aritmética en un problema que pareciera requerirlo, siendo este un error que de igual manera se ha identificado en otros estudios y también en grandes proporciones.

En cuanto a los errores de comprensión y ejecución de algoritmos, se encuentra que estos son evidenciables en una proporción muy pequeña de la población sujeto de este trabajo de indagación; siendo entre estos los más notorios los correspondientes a cálculo de la media ponderada y reversión algorítmica, tal cual como es reportado desde las investigaciones relacionadas.

Para las categorías de error comparación de distribuciones, lenguaje y argumentación, es bastante notorio en el desarrollo de la prueba que el aspecto predominante fue el nexo de los problemas con el contexto, por cuanto los análisis relacionados con los ítems iban mas encaminados a relacionarlo subjetivamente con experiencias propias sobre el mismo haciendo de los argumentos para validar afirmaciones, supuestos muchas veces incorrectos, siendo esto referenciado también por autores en investigaciones similares en España y Angola, donde el contexto utilizado era utilizado algunas veces de forma errónea para validar sus respuestas.

En referencia al error asociado a la representatividad de la media aritmética, se evidencia en contraste a los referentes teóricos, que de los estudiantes que contestaron el ítem, 54% contemplan otras medidas que representen al conjunto de datos, esto considerándose como un aspecto positivo en cuanto a que la media aritmética no es siempre el representante de los datos, y dando lugar a la presentación de las otras medidas de tendencia central o de posición como estimadores más representativos del conjunto de datos.

Según los resultados obtenidos, los errores que más se evidencian en los estudiantes sujetos de estudio del presente análisis son los referentes a los de asignación de propiedades, y entre estas sobresaliendo como el más recurrente el de la asignación de la propiedad asociativa a la media aritmética; algunos autores afirman que esto es debido a extensión de propiedades como la suma y el producto hacia la media aritmética, pero puede contemplarse también la posibilidad de una experiencia exitosa previa haciendo uso de alguna de estas estrategias. Dentro del campo de respuestas a los ítems de intencionalidad sobre propiedades algebraicas se encuentran que los errores presentados no son

excluyentes, es decir, los estudiantes presentan en un mismo ítem varios errores cuyas categorías son diferentes; por lo que sería conveniente hacer un estudio posterior sobre la incidencia de algunos errores de una categoría sobre los otros, ya que este no es un aspecto tratado desde los referentes teóricos.

Finalmente, se obtuvo un error de gran importancia realizado por un estudiante, este fue el realizar para dos ítems dos procedimientos diferentes, uno era correcto y el otro no, y al encontrar resultados bastante próximos decide que indiferentemente del procedimiento ambos son iguales, este error debe ser incluido en la taxonomía de Silva (2010) consideramos que en la categoría de argumentación, sub-categoría contraste de resultados, haciendo referencia al uso simultaneo de varias estrategias erróneas en la resolución de un problema, que para el caso citado consistió de errores en selección de algoritmo y redondeo del valor de la media aritmética, los cuales priman sobre el desarrollo correcto que hiciera el estudiante.

Se observó la importancia de tener en cuenta algunos aspectos para la clasificación propuesta por Silva (2010), el primero de ellos en los que se contemplara un ejemplo distinto que apoyara la comprensión del error asociado al elemento neutro por parte del lector, evitando su confusión con la no consideración de la alteración de la media aritmética ante el aumento en la cantidad de datos. El otro aspecto hace referencia a la ampliación que se hizo de algunas descripciones de los ejemplos y el error asociado a cada categoría propuesta por la autora.

Se recomienda a aquellos que opten por usar el instrumento planteado en el presente trabajo, tener en cuenta las consideraciones expuestas en el análisis de las respuestas; principalmente aquellas en las que no se arrojaron suficientes estrategias para ser analizadas, pues se puede deber a los planteamientos de las preguntas o al tiempo destinado para la aplicación de la prueba, por lo que éste se podría extender con relación al destinado por los investigadores.

En cuanto a aspectos de realización de la prueba se puede considerar que la potencialidad de la resolución de problemas de manera individual, arroja un sin número de estrategias erróneas que pueden apoyar al docente para basar el desarrollo del concepto media aritmética a partir de la superación de las mismas. Sugerimos luego de este trabajo de indagación, la consideración de la implementación de las actividades propuestas por Silva (2010) para la superación de los errores que la autora registro en su clasificación; para poder a partir de esta puesta en práctica, apoyar el desarrollo cognitivo del objeto matemático en cuestión, al igual que continuar mejorando instrumentos tanto para la verificación de errores, como para su superación.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Revista UNO No 25. 41-58* Disponible en línea en <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/Aldizkariak/Uno/uno25.asp> Recuperado el: 17 de marzo de 2012

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada (España): Universidad de Granada. (Disponible en línea en <http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5C118didacticaestadistica.pdf>). Recuperado el: 10 de marzo de 2012

Batanero, C., Godino, J. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. HYPERLINK "<http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Logse.pdf>" En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada. Disponible en línea en www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Logse.pdf Recuperado el: 26 de febrero de 2012

Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. II encuentro iberoamericano de biometría. Veracruz, México. (En línea en www.uv.mx/eib/curso_pre/videoconferencia/53ErroresEstadis.pdf) Recuperado el: 5 de mayo de 2012

Chan, C. (2009). Una propuesta didáctica sobre la media aritmética, la mediana y su representatividad. Yucatán (México): Universidad Autónoma de Yucatán.

Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria. Granada.

Del Puerto, Seminara, y Minnard. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista iberoamericana de educación No 25.*, Disponible en línea en <http://www.rieoei.org/expe/1729Puerto.pdf>. Recuperado el: 20 de marzo de 2012

García, A., & Garret, J. (2007). *Algunos resultados sobre promedios con estudiantes en estudiantes de Luanda y Tenerife*. Luanda y Tenerife: Universidad de la Laguna. Recuperado en Junio 2012 de http://webpages.ull.es/users/jagcruz/Articulos/Promedios_JAEM_05.pdf. Recuperado el: 30 de marzo de 2012

Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA, 5 (3), 267-277.*

Ministerio De Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: [MEN]

Ministerio De Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional [MEN].

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1- 14. (En línea en www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf) Recuperado el: 30 de marzo de 2012

Pochulu, M., Luján, A., y Abrate, S. (2006). *Errores y dificultades en matemáticas: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires (Argentina): Universidad Nacional de Villa María, Buenos Aires, Argentina.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. *Una empresa docente*, 69-104).

Silva, M. (2010). Propuesta didáctica para la superación de algunos errores comunes en la conceptualización de las medidas de tendencia central. Bogotá (Colombia): Tesis de pregrado no publicada.

ANEXO A.
PRIMERA VERSIÓN DE LA PRUEBA DE INDAGACIÓN DE ERRORES

Ficha del campeonato inter-cursos

Para los juegos inter-cursos que se están desarrollando en el colegio se conformó el grupo de baloncesto de grado octavo A. Éste se encuentra compuesto por 6 estudiantes (5 titulares y un suplente). En la semana de **prácticas** los 6 jugadores anotaron el número de cestas que se presenta en la tabla 1.



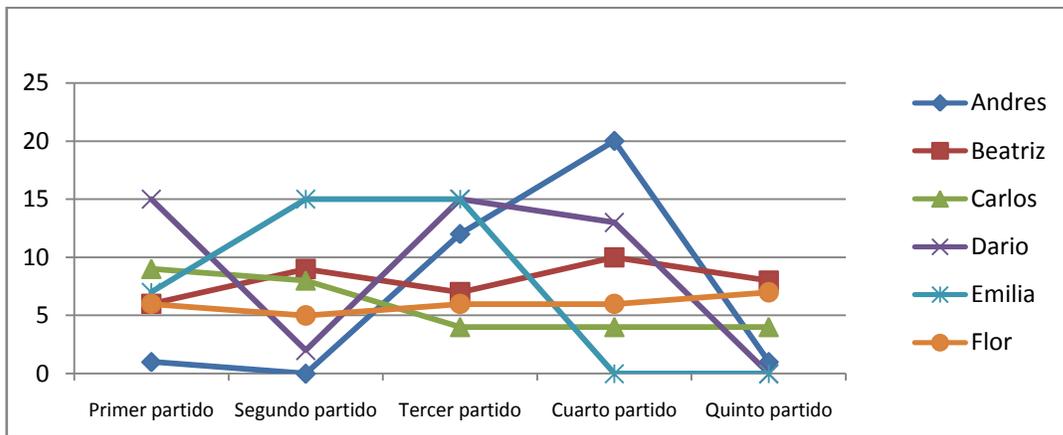
NE → no
asistió

TABLA DE CONTROL 8A						
RENDIMIENTO DE CADA JUGADOR DURANTE LAS PRÁCTICAS						
Jugador Día	Andrés	Beatriz	Carlos	Darío	Emilia	Flor
Lunes	3	2	9	1	3	5
Martes	2	0	1	12	2	9
Miércoles	1	4	4	NE	NE	10
Jueves	4	6	4	7	4	9
Viernes	5	NE	3	9	NE	2
Sábado	3	NE	3	1	NE	5

Tabla 1

Una vez inicia el campeonato, el rendimiento de los jugadores de acuerdo al número de cestas por **partido** se registró en la siguiente tabla:

	Primer partido	Segundo partido	Tercer partido	Cuarto partido	Quinto partido
Andrés	1	0	12	20	1
Beatriz	6	9	7	10	8
Carlos	9	8	4	4	4
Darío	15	2	15	13	0
Emilia	7	15	15	0	0
Flor	6	5	6	6	7



1. ¿Cuál fue el promedio de cestas de cada jugador durante la semana de **prácticas**?

 Andrés: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 Beatriz: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 Carlos: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 Darío: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 Emilia: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 Flor: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta

2. Si el entrenador desea saber el promedio de cestas que hace semanalmente el equipo durante las **prácticas**, ¿cuántas cestas serían? Justifica tu respuesta

3. El entrenador del equipo de octavo A decide entregar un premio al jugador con mejor rendimiento de los cinco primeros **partidos** del campeonato.
- a) ¿Que quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Flor? ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para Carlos?
- b) ¿Qué jugador obtendría el premio?
-
4. Si el entrenador decide postergar la entrega del premio para tener en cuenta hasta el sexto **partido**, ¿se verá afectado el rendimiento de éste jugador si en el último **partido** no encesta? Justifica
5. Partiendo de las cestas de Beatriz en los cinco primeros **partidos** en los que obtuvo un rendimiento de 8 cestas por partido, ¿cuántas tendrá que anotar en el sexto juego, para que su rendimiento no se altere? Justifica.
6. Si durante los juegos 6 y 7 del campeonato, Beatriz no hizo ninguna cesta en la victoria de su equipo, ¿Cuál será la cantidad más representativa de cestas que anotó esta jugadora por partido teniendo en cuenta los resultados anteriores?

ANEXO B
 VERSIÓN DEFINITIVA DE LA PRUEBA DE INDAGACIÓN DE ERRORES

Ficha del campeonato inter-cursos

Para los juegos inter-cursos que se están desarrollando en el colegio se conformó el grupo de baloncesto de grado octavo A. Éste se encuentra compuesto por 6 estudiantes (5 titulares y un suplente). En la semana de prácticas los 6 jugadores anotaron el número de cestas que se presenta en la tabla 1.



NA → no asistió a la

TABLA DE CONTROL 8A						
RENDIMIENTO DE CADA JUGADOR DURANTE LOS PRÁCTICAS						
Jugador Día	Andrés	Beatriz	Carlos	Darío	Emilia	Flor
Lunes	3	2	9	1	3	5
Martes	2	0	1	12	2	9
Miércoles	1	4	4	NA	NA	10
Jueves	4	6	4	7	4	9
Viernes	5	NA	3	9	NA	2
Sábado	3	NA	3	1	NA	5

Tabla 1. Rendimiento durante las prácticas

PARTE A.

1. ¿Cuál fue el promedio de cestas de cada jugador durante los seis días de práctica?

 Andrés: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 Beatriz: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 Carlos: _____	Procedimiento	Justifica tu respuesta

 <p>Darío: _____</p>	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 <p>Emilia: _____</p>	Procedimiento	Justifica tu respuesta
 <p>Flor: _____</p>	Procedimiento	Justifica tu respuesta

2. Si el entrenador desea saber el promedio de cestas del equipo durante los seis días de práctica, ¿Cuál procedimiento debería seguir? y ¿cuál sería el promedio de cestas? Justifica tu respuesta

PARTE B.

Luego de iniciado el campeonato, el rendimiento de los jugadores (de acuerdo al número de cestas por partido) se registró en la siguiente tabla:

	Primer partido	Segundo partido	Tercer partido	Cuarto partido	Quinto partido
Andrés	1	0	12	20	1
Beatriz	6	9	7	10	8
Carlos	9	8	4	4	4
Darío	15	2	15	13	0
Emilia	7	15	15	0	0
Flor	6	5	6	6	7

3. El entrenador del equipo decide entregar un premio al jugador con mejor rendimiento en los cinco primeros partidos del campeonato. Si para el entrenador el rendimiento se refiere al promedio de cestas en los cinco partidos ¿Cuál es el rendimiento de cada jugador durante dichos partidos?
- ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para el rendimiento de Flor?
 - ¿Qué quiere decir el valor que hallaste para Carlos?

4. Si el entrenador decide postergar la entrega del premio para tener en cuenta el sexto partido, ¿se verá afectado el rendimiento del que se ha considerado como el mejor jugador, si en el último partido no encesta? Justifica
5. Partiendo de las cestas que hizo Beatriz en los cinco primeros juegos en los que obtuvo un rendimiento de 8 cestas por partido, ¿cuántas cestas tendrá que anotar en el sexto juego, para que su rendimiento no se altere? Justifica.
6. Si durante los juegos 6 y 7 del campeonato, Beatriz no hizo ninguna cesta en la victoria de su equipo, ¿Cuál será la cantidad más representativa de cestas que anotó esta jugadora por partido teniendo en cuenta los resultados anteriores?

PARTE C

Teniendo en cuenta que los puntos de los cinco partidos dependen de la cantidad de cestas y la posición desde donde estas se efectúen, se organizó el total de puntos de Andrés en la siguiente tabla:

Valor de las cestas	Cantidad
1	21
2	5
3	8

7. De acuerdo a la anterior tabla, entonces en promedio Andrés hace _____ puntos por partido. ¿Describe cómo hallaste ese resultado?