LA TRAYECTORIA INSTRUCCIONAL DE UN PROCESO DE ESTUDIO SOBRE EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Ángel Contreras de la Fuente y Manuel García Armenteros
Universidad de Jaén

Resumen. *Se analiza una clase de matemáticas de primero de bachillerato, en cuanto al concepto de límite de una función, bajo el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006), utilizando las herramientas de la trayectoria y configuración instruccional, así como las configuraciones de referencia correspondientes a un proceso de estudio. Se discuten los resultados que se obtienen, haciendo explícitos ciertos fenómenos didácticos relacionados con los conflictos semióticos, y se describen los procesos dialógicas presentes en el aula, mostrando la complejidad ontosemiótico de dicho proceso de estudio.*

Abstract. *In this paper, students' concept of limit of a function by ontological-semiotic framework of mathematical cognition is analyzed (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006). The students are in first level of Spanish baccalaureate. Tools of instructional trajectory and configuration are used. Configurations of reference of a study process are used, too. The findings are discussed and, we have found some didactic phenomena related to semiotic conflict. Processes of dialogue are described and, ontological-semiotic complexity of this process of study is showed.*

1. INTRODUCCIÓN

Dado que la comprensión del concepto de límite de una función es uno de los más problemáticos del Análisis Matemático, al estar asociado a las ideas de infinito potencial y actual, su enseñanza siempre ha supuesto una fuente de problemas didácticos de difícil solución. Esto hace que no extrañe la existencia de numerosos trabajos de investigación relacionados con el aprendizaje de esta noción. Incluso, se puede apreciar en la literatura que la profundización acerca de la naturaleza y fundamentación de esta noción, junto a otras del Análisis Matemático, ha sido motor de la construcción y formalización de algunas de las teorías más conocidas hoy en la Didáctica de las Matemáticas, como es el caso de la teoría APOS (Asiala y als., 1996; Baker y als., 2001).

Desde marcos teóricos diferentes, se han realizado tesis doctorales sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en los niveles pre y universitarios. En nuestro país, por ejemplo, Sánchez (1997) lo estudió desde la perspectiva de la teoría de los obstáculos epistemológicos; Espinoza (1998) aplicó la teoría antropológica de lo didáctico; Blázquez (1999) utilizó el método de la epistemología genética y los actos de comprensión de Sierpinska. En otros países, investigadores como Vinner y Tall (1981), Cornu (1983), Robinet (1983), Sierpisnka (1991), Deledicq (1994); y, más recientemente: Szydlik (2000), Schneider (2001), Mamona-Downs (2001) y Przenioslo

(2004), o bien han utilizado la ingeniería didáctica, o la teoría de obstáculos epistemológicos, o el APOS, o la teoría antropológica de lo didáctico.

Esta situación, nos ha impulsado a proponer en este trabajo un tema de investigación sobre "las causas de naturaleza ontosemiótica de las dificultades mostradas por los alumnos, respecto al concepto de límite de una función en 1º de Bachillerato". Se trata de un estudio que busca describir, explicar e identificar factores condicionantes de la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un contexto institucional fijado.

En esta comunicación se realiza una síntesis de la trayectoria instruccional de un proceso de estudio correspondiente a una clase de primero de bachillerato sobre el límite de una función (Contreras, García y Sánchez, 2006). El objetivo es extraer datos de dicho proceso de estudio que permiten analizar significados y conflictos semióticos presentes en el aula, mostrando la complejidad ontosemiótica del mencionado proceso de estudio.

2. MARCO TEÓRICO

La modelización de la instrucción matemática como un proceso estocástico formado por diversas trayectorias con diversos estados potenciales, proporciona un procedimiento con el que se identifican regularidades en la secuenciación de estados en cada trayectoria, o en las interacciones entre dos o más trayectorias. Se trata de describir cómo se relaciona el profesor con los alumnos a propósito de un saber matemático dado, usando determinados recursos materiales.

Llamaremos trayectoria instruccional a la secuencia interactiva de estados de las diferentes trayectorias que tienen lugar a propósito de las distintas situaciones-problema que componen dichas trayectorias. Una trayectoria instruccional se compone de las trayectorias docente y discente en interacción, además de las correspondientes mediacionales y emocionales. En este trabajo se utilizarán fundamentalmente la trayectoria docente y la trayectoria discente, estudiadas junto con aspectos topogenéticos y cronogenéticos (Sensevy et al., 2000).

Toda trayectoria instruccional estará compuesta por diversas configuraciones instruccionales, según las distintas situaciones-problema que aparecen en el proceso de estudio.

Estas nociones van a permitir un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática, según los modelos teóricos que nos servirán de referencia (Godino, Contreras y Font, 2006).

Se considerarán cuatro tipos de configuraciones instruccionales teóricas que van a desempeñar el papel de configuraciones de referencia y que se designan como *configuración magistral, adidáctica, personal y dialógica.*

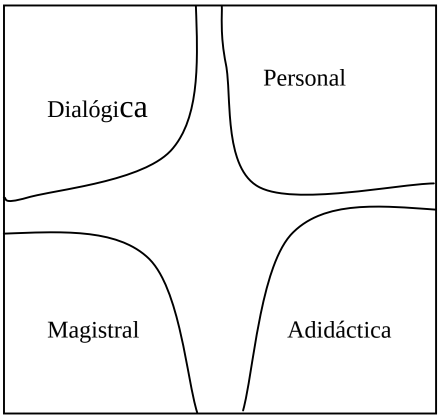
La primera configuración, *magistral*, corresponde a la manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas, basada en la presentación de los contenidos, seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos presentados. Es decir, primeramente se presenta el componente discursivo del significado de los objetos matemáticos (definiciones, enunciados, demostraciones), y se deja la responsabilidad de dar sentido al discurso a los propios estudiantes por medio de los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que se proponen. En realidad, en este tipo de configuración instruccional no se suprimen los momentos de exploración, de formulación y de validación, sino que quedan bajo la responsabilidad del estudiante, o bien se ponen en juego en momentos aislados de evaluación.

La configuración *adidáctica* viene marcada por la teoría de situaciones didácticas, la cual propone una manera de organizar el trabajo del profesor y los alumnos a propósito de un saber matemático pretendido, que se considera óptimo en términos de los aprendizajes de los alumnos. La secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización, especifican los papeles del estudiante en interacción con el medio. Esta configuración puede interpretarse como un tipo de configuración instruccional de naturaleza teórica ya que la propia teoría de situaciones didácticas no afirma que todos los saberes matemáticos puedan, ni deban, ser estudiados de esta manera.

La configuración instruccional *dialógica* debe verse como una estructura tripolar: profesor, alumno, clase (lo que Sensevy et al. (2000) denominan estructura general dialógica), y es intermedia entre las configuraciones instruccionales adidáctica y magistral, respetándose en ella el momento de exploración, aunque los procesos de formulación y validación se construyen entre el profesor, algunos alumnos determinados y la clase. Incluso la institucionalización tiene lugar mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos.

Por último, la configuración instruccional *personal* surge cuando la resolución de una situación-problema la realiza directamente el estudiante sin una intervención directa del docente. En la práctica esto es lo que ocurre cuando los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor, o están incluidos en el libro de texto y están capacitados para resolverlos. Es decir, se trata de un tipo de configuración instruccional en la que básicamente predomina el estudio personal.

Como se señala en Godino, Contreras y Font (2006), en la figura siguiente se representan en los cuatro vértices de un cuadrado los cuatro tipos de configuraciones instruccionales teóricas descritos.



Figura

Las configuraciones instruccionales empíricas que acontecen en los procesos de estudio reales pueden representarse mediante un punto interior del cuadrado y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas, es decir, oscilarán entorno a los cuatro tipos teóricos.

En función, pues, de las configuraciones de referencia *magistral*, *dialógica*, *adidáctica* y *personal*, vamos a describir la trayectoria instruccional seguida en una sesión de clase sobre el objeto límite de una función.

3. TRAYECTORIA INSTRUCCIONAL DE UNA SESIÓN DE CLASE

La sesión corresponde al cálculo de límites de funciones continuas en un punto. Se ha dividido en seis unidades de análisis de las cuales se describe la primera, cuya transcripción aparece en el Anexo.

Unidad de análisis 1: Límite de una función continua en un punto.

0. ***Profesor:*** *Hasta ahora hemos visto el límite en el infinito, lo que nos ha llevado a una idea agradable de asíntotas.*

La acción del profesor es comentar lo visto hasta ahora en las dos sesiones anteriores, pero la síntesis que hace en este comentario tan breve no es muy afortunada porque el alumno puede entender que el límite en el infinito lleva asociado necesariamente la aparición de asíntotas, tanto verticales como horizontales, ya que el docente no especifica más su afirmación. Podemos, pues, afirmar que el profesor conduce a los alumnos al conflicto semiótico siguiente: cuando se estudia el límite en el infinito, entonces aparecen asíntotas.

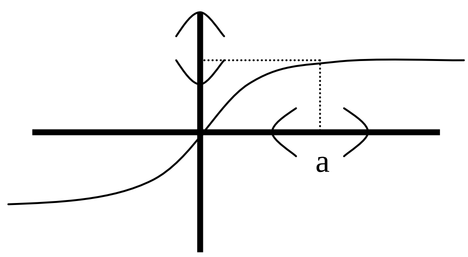
De todas formas, sigue intentado mantener la atención y la implicación del alumnado en la tarea, haciendo ver que este estudio es muy asequible para los alumnos y que no se pueden desanimar (*…idea agradable de asíntotas*).

1. ***Profesor****: Hoy vemos el límite en un punto. Dada y = f(x) hay que hallar* $\lim_{x \to a} f(x)$.

La acción del profesor es plantear la tarea que toca a partir de ahora, aunque no entendemos por qué ha titulado la cuestión a tratar como "límite de una función continua en un punto", cuando aún no va a abordar la continuidad de las funciones. El alumnado se puede crear una concepción de *continuidad* que más tarde no se ajuste a la realidad.

El profesor, que a largo de sus clases tiene acostumbrados a los alumnos a utilizar una técnica de enseñanza en la que trata con objetos extensivos (ejemplos particulares) y luego generaliza a intensivos, cambia su discurso comenzando la explicación directamente con un intensivo. Es decir, utiliza una técnica cronogenética de aceleración para llegar rápidamente a la definición de límite en un punto.

2. **Profesor:** *Veremos una idea intuitiva, a ver gráficamente en qué deriva. Un esquema:*



De nuevo, el planteamiento comienza con un esquema gráfico para comentar la idea de límite en un punto, aunque, por el dibujo, se desprende que quiere plantear el concepto de entorno en un punto, cuando tampoco lo ha desarrollado anteriormente.

El profesor, en su discurso, utiliza términos que son confusos para los alumnos, como es el caso de "*idea intuitiva*", cuando está usando intensivos.

3. ***Profesor****: El valor es...*

4. ***Alumnos:*** *f(a).*

El profesor está señalando el valor de "a" que ha marcado en el eje de abcisas, siguiendo con el dedo hasta llegar al eje de ordenadas, por lo que s entiende cómo los alumnos responden correctamente a su demanda.

De forma implícita, el profesor está diciendo que se necesita que exista f(a) para poder hablar de límite. Es decir, introduce otro conflicto semiótico: si hay límite, entonces la función es continua.

5. ***Profesor***: *¿Qué ocurre con una serie de valores muy próximos tanto a la derecha como a la izquierda? Las imágenes, ¿qué pasa con ellas?*

La primera acción es plantear una pregunta expresada incorrectamente, tratando de introducirles en la idea de entorno, ya que no especifica que se trata de valores a la derecha como a la izquierda del valor que ha seleccionado como “a”. Pensando en la transparencia del concepto, su segunda acción es preguntar por las imágenes de estos puntos en relación con f(a).

Cabe la posibilidad de que parte del alumnado no sepa interpretar el sentido de estas preguntas porque da la impresión de que la presentación que hace el docente del concepto se ha realizado de una forma un tanto rápida, presionado, tal vez, por la falta de tiempo de enseñanza ya que queda muy poco para acabar el curso y muchos contenidos por desarrollar.

6. ***Alumnos:*** *Se acercan a f(a).*

Algunos alumnos responden a la demanda del profesor, aunque muchos ratifican la respuesta una vez que la han oído de sus compañeros. El tiempo de que se dispone hace que el profesor haya propiciado lo que hemos denominado “efecto del alumno genérico” (considerar que todos los alumnos conocen lo que dice un único estudiante) en sus alumnos.

7. ***Profesor***: [Da valores separados por una centésima, una milésima...]. *Las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera.*

La acción del profesor es señalar valores muy cercanos al valor de “a” para analizar el comportamiento de las imágenes de estos valores, siempre desde un punto de vista gráfico y prescindiendo de una tabla de variación numérica, con la dificultad añadida de “comprobar” la afirmación posterior de *“tan cerca como yo quiera”* que tanto se repite en el trabajo con límites. Además, no resulta lógico que se den valores concretos si no se sabe cuánto vale a.

8. ***Profesor***: *¿Cuál es la diferencia de los valores con “a”?*

La acción del profesor es preguntarles por la relación antes descrita del “tan cerca como yo quiera” respecto al valor “a”, e inducirles que la diferencia también se hará tan pequeña como se quiera. La dificultad de este razonamiento estriba en que todo lo está tratando con valores genéricos en los que es imposible analizar la idea de aproximación sin contar con una tabla de valores que haga más explícito este comentario.

El uso de intensivos dificulta la comprensión del objeto matemático "tan cerca como yo quiera".

9. ***Alumno*** [Luis]*: Infinitamente pequeña.*

Un alumno parece caer en la cuenta de esta idea de aproximación y contesta correctamente, utilizando una expresión demasiado precisa como para que el profesor no haya sacado partido de ella comentándola más explícitamente.

10. ***Profesor****: Una forma de decir "estar muy cerca" es ésa: si* $x\text{-}a \longrightarrow 0$ *implica f(x)-L...*

El profesor pretende conducir a los alumnos a la idea de que unos valores muy próximos también se pueden estudiar desde otro punto de vista: su diferencia "tiende" a cero. Se deja entrever que el profesor quiere introducir la definición de límite de una función en un punto y les está presentando distintas "partes" de esta definición que, más adelante, intentará enlazar en la misma.

11. ***Alumnos***: [Dudan de lo que les pasa a las imágenes. No lo ven. Dicen f(a). Uno sólo dice 0].

Una prueba de que el concepto que se está tratando no es nada transparente es que los alumnos no saben encontrar el significado de lo que pretende el profesor con estas preguntas y aquí lo demuestran con sus dudas y errores. Parece que están pidiendo más claridad en la explicación del profesor, pero éste no termina de adivinar dicha demanda. Sólo hay un alumno que responde correctamente, pero ni siquiera enfatiza su respuesta.

Se observa cómo la técnica cronogenética de la confrontación no ha funcionado.

12. ***Profesor****: Si tomo valores de x tan cerca de a como yo quiera, las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera, pero pueden estar antes o después.*

El profesor no atiende a la demanda de los alumnos sobre una mayor claridad y da por hecho de que todos han respondido lo dicho por uno solo (efecto del alumno genérico), con lo que sigue su guión de considerar ahora que esas diferencias puedan ser positivas o negativas, comentario que puede hacer que los alumnos terminen por no ver el sentido a la línea de explicación que el profesor ha utilizado.

Da la impresión de que el profesor quiere introducir un concepto de forma brusca y rápida, provocando en los alumnos el que no sepan seguirle como lo han hecho hasta ahora, por lo que se podría estar produciendo una ruptura del contrato didáctico que haga que la motivación del alumnado decaiga.

Una de las confusiones viene dada por no haberse definido, mediante prácticas adecuadas, el entorno de un punto. Es decir, hay un conflicto semiótico obvio: utilizar un objeto matemático sin haber realizado prácticas con el mismo.

13. ***Profesor**: Si x es más pequeño que a, x-a será negativa. Pero si tomo valor absoluto:*

$$|x-a| \to 0 \Longrightarrow |f(x)-L| \to 0.$$ *Ya da igual.*

La acción del profesor es proponer la solución de evitar diferencias negativas utilizando el valor absoluto, institucionalizando una implicación fundamental en la definición de límite, aunque el comentario que hace al final es muy significativo: ya da igual que las diferencias sean del signo que sean, o da igual que los alumnos hayan, o no, entendido el concepto (perece ser consciente de lo poco fructífera que ha resultado su exposición).

Se da una topogénesis descendente al utilizar la clase magistral, por medio de una técnica cronogenética de aceleración.

14. ***Profesor**: El límite de f(x) es un valor L, cuando se verifica: en un entorno de a con todos los valores de x de ese entorno, ¿qué les pasa a sus imágenes? Pues que las f(x) estarán en un entorno de L.*

Se trata de una definición intuitiva de $\lim_{x\to a} f(x)$, que no tiene en cuenta el término "tan cerca como quiera".

En esta acción del profesor se ratifica en lo anterior: ha tomado conciencia de que no va a dar una definición rigurosa de límite en un punto, dado el desconcierto que su exposición ha creado en la mayoría del alumnado, enunciando sin rigor lo que él ha querido tratar y que no ha conseguido.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra la complejidad ontosemiótica de un proceso de estudio sobre el límite de una función, mediante el análisis de la trayectoria instruccional, al haber aflorado una serie de conflictos semióticos, un conjunto de técnicas cronogenéticas y topogenéticas, así como ciertos fenómenos didácticos como el del alumno genérico. Además, el estudio ha permitido relacionar elementos de la teoría del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática con la teoría de Sensivy et al. (2000), así como con aspectos de la teoría de situaciones.

A lo largo del proceso se han utilizado las configuraciones instruccionales empíricas de la lección magistral y dialógica. En el caso de la lección magistral se ha observado que está asociada, en general, a una técnica cronogenética de aceleración, lo cual indica que el objetivo del profesor, por razones de escaso tiempo en el desarrollo del currículum, es acortar el tiempo de enseñanza, en detrimento, obviamente, del tiempo de aprendizaje de los estudiantes. En cuanto a la configuración dialógica, nos parece importante como técnica de enseñanza, aunque se cae, a veces, en efectos del tipo "del alumno genérico", una vez más por cuestiones del tiempo de enseñanza. Con respecto a la configuración de referencia, se puede apreciar que la configuración empírica está situada entre la lección magistral y el proceso dialógico.

Por último, se han podido observar también lagunas de contenido, como la función continua y el valor absoluto (no impartidos como conceptos, aunque utilizados de forma intuitiva), lo cual ha producido notables dificultades en la comprensión de los estudiantes para poder seguir el discurso del profesor.

REFERENCIAS

Asiala, M. et al, (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld y Dubinsky. Research in CollegiateMathematicsEducation. II, CBMATH 6.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2001). A Calculus Graphing Schema. Journal for *Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.

Blázquez, M.S. (2000). Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Contreras, A., García, M. y Sánchez, C. (2006). Análisis de una experiencia de enseñanza de la noción de límite funcional con herramientas del enfoque ontosemiótico. *X Simposio de la SEIEM*, 285-295.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite. These de doctorat de troisieme cycle de Mathématiques pures. Université de Grenoble.

Deledicq, A. (1994). Les conceptions relatives aux limites. Vingt ans de didactique des Mathématiques en France. M. Artigue, R. Grass, C. Laborde y P. Tavignot (Eds.). La Pensée Sauvage, editions, 321-327.

Espinoza, L. (1998). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de una función. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Godino. J.D. (2002) Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22(2/3), 237-284.

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.

Robinet, J. (1983). Une experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (3), 223-292.

Sánchez, C. (1997). Estudio estadístico sobre le proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limits au secondaire. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 21 (1,2), 7-56.

Sensevy, G., Mercier, A. y Schubauer-Leoni, M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 20 (3), 263-304.

Sierpinska, A. (1991). Some remarks on undertanding in mathematics. Versión revisada del trabajo presentado al Canadian Mathematics Education Study Group, Vancouver.

Szydlik, J.E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (3), 258-276.

Vinner, S. y Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

ANEXO: Transcripción de un segmento de una clase de matemáticas

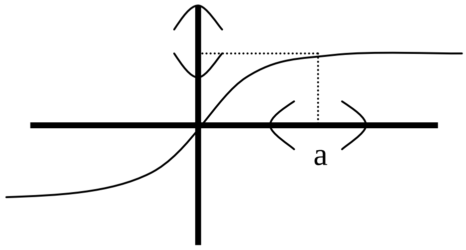
- Curso: 1º de Bachillerato-LOGSE

Unidad de análisis 1: Límite de una función continua en un punto

0. **Profesor: H**asta ahora hemos visto el límite en el infinito, lo que nos ha llevado a una idea agradable de asíntotas.

1. **Profesor**: Hoy vemos el límite en un punto. Dada y= f(x) hay que hallar $\lim_{x \to a} f(x)$.

2. **Profesor:** Veremos una idea intuitiva, a ver gráficamente en qué deriva. Un esquema:



3. **Profesor**: El valor es...

4. *Alumnos*: f(a)

5. **Profesor**: ¿Qué ocurre con una serie de valores muy próximos tanto a la derecha como a la izquierda? Las imágenes, ¿qué pasa con ellas?

6. *Alumnos*: Se acercan a f(a)

7. **Profesor**: Da valores separados por una centésima, una milésima ... y dice, las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera.

8. **Profesor**: ¿Cuál es la diferencia de los valores con a?

9. *Alumno (Luis)*: Infinitamente pequeña

10. **Profesor**: Una forma de decir "estar muy cerca" es ésa: x-a $\rightarrow$ 0 implica f(x)-L...

11. *Alumnos*: Dudan en lo que les pasa a las imágenes. No lo ven. Dicen f(a), uno sólo dice 0.

12. **Profesor**: Si tomo valores de x tan cerca de a como yo quiera, las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera, pero pueden estar antes o después.

13. **Profesor**: Si x es más pequeño que a, x-a será negativa. Pero si tomo valor absoluto:

    $|x-a| \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-L| \rightarrow 0$. Ya da igual.

14. **Profesor**: El límite de f(x) es un valor L, cuando se verifica: en un entorno de a con todos los valores de x de ese entorno, ¿qué les pasa a sus imágenes? Pues que f(x) estará en un entorno de L.