

LA UTILIDAD DEL GEOPLANO CUADRADO EN LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS, ESPECÍFICAMENTE EN EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN
DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

UBALDO LUQUE OSORIO
EDINSON MENA BECERRA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2016

LA UTILIDAD DEL GEOPLANO CUADRADO EN LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS, ESPECÍFICAMENTE EN EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN
DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

UBALDO LUQUE OSORIO
EDINSON MENA BECERRA

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
ESPECIALISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Asesor
EDWIN CARRANZA VARGAS
Magister

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2016

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y es de nuestra autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos”.

La utilidad del Geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del Álgebra escolar.

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

Nota de aceptación

Presidente del jurado

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	La utilidad del Geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del Álgebra escolar.
Autor(es)	Luque Osorio, Ubaldo; Mena Becerra, Edinson
Director	Carranza Vargas, Edwin
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 75 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	GEOPLANO CUADRADO, PROCESO DE GENERALIZACIÓN, ÁLGEBRA ESCOLAR.

2. Descripción
<p>El propósito de nuestro trabajo de grado de especialización es presentar el diseño de una cartilla con actividades para profesores donde se promueve el desarrollo de procesos de generalización de patrones geométricos y numéricos, desde el uso del Geoplano Cuadrado. Las actividades propuestas permiten identificar las etapas de generalización descritas por Radford (2003) promoviendo el uso del Geoplano como mediador para potenciar el proceso de generalización en los estudiantes. Para el diseño de la cartilla se presenta el pilotaje de una de las actividades con el fin de identificar la pertinencia de ésta en relación con el proceso de generalización. El Geoplano y en particular el Geoplano Cuadrado, tiene en este trabajo un enfoque distinto al tradicional, puesto que su uso no radica en la enseñanza de conceptos geométricos sino en la presentación de patrones que permitan generalizar usando conteo, registro de regularidades y patrones. De esta manera se incorporan en la propuesta elementos tales como, el uso de material didáctico, procesos de generalización y la ayuda a los profesores para promover el desarrollo de pensamiento matemático en sus estudiantes.</p>

3.Fuentes

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1990). *El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría*. Madrid.

Álvarez, A. (1996). *Actividades Matemáticas con materiales didácticos*. Madrid.

Esquinas, A. (2008). *Tesis para optar el título de doctor, titulada dificultades del Lenguaje Algebraico: del Símbolo a la Formalización Algebraica: Aplicación a la Práctica Docente*. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Godino, J. D. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros*. Granada.

Mariño, A. (2000). *El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría*. Venezuela.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá, C. (s.f.).

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. Bogotá, C. E.-1. (s.f.).

Mora, L. (2012). *Generalización en Primaria*. Bogotá D.C.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*.

Solano, U. y. (2009). *El proceso de objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde artefactos*.

Trujillo, P. (2008). *Tesis de grado titulada proceso de generalizacion que realizan futuros maestros*. Universidad de Granada, Granada, España.

Van, H. (1955). *El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría*. Venezuela.

Vergel, R. (2015). *Generacion de Patrones y Formas de Pensamiento Algebraico Temprano*. Bogotá D.C.

4. Contenidos

El presente trabajo de grado de especialización se ha organizado de la siguiente manera:

1.) Planteamiento del problema.

En las diferentes indagaciones, acerca del uso del Geoplano y en particular el Geoplano Cuadrado, no se evidencia otro tratamiento distinto al uso exclusivo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Caleb Gattegno en los años (1960-1961) crea el Geoplano con el fin de contribuir al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el estudio de la geometría. Así pues surge la idea de ampliar el espectro de uso del Geoplano cuadrado en otras instancias y se ubica en el álgebra, con propósitos de generar procesos de generalización.

Otra tensión de nuestro problema es la poca información acerca del uso de material didáctico para el desarrollo de procesos de generalización, puesto que la mayoría se encuentran diseñados y dispuestos para otros procesos que habitan normalmente en la enseñanza de la aritmética.

El problema en sí, radica en la falta de material didáctico para el desarrollo de procesos de generalización en el álgebra escolar. Un aporte a la solución del problema es la presentación de una cartilla para maestros que logre evidenciar el uso del Geoplano Cuadrado para desarrollar procesos de generalización.

2.) El Geoplano Cuadrado y el proceso de generalización.

Incluir en el aula material didáctico es importante para la mejor comprensión de conceptos matemáticos. Godino, 1999 y Alsina 1997; (citados por Mariño, 2000), proponen que los modelos geométricos (Geoplano, tangram, ábaco, dados, fichas, etc.) deben ofrecerse como “casi obligado” en los primeros niveles primarios y secundarios, puesto que ayudan a comprender los significados de las ideas matemáticas.

Nuestro trabajo se fundamenta bajo la teoría de la cultura de la objetivación de Radford (2003), esta teoría se divide en tres etapas:

Etapa uno: Capturar o identificar una característica común, sobre algunos elementos de una secuencia a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observaciones sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, p_1 , p_2 , p_3 ..., p_k), por medio de gestos, movimientos, ritmos, etc. Esta actividad perceptual y las palabras a este tipo de pensamiento se le denomina como pensamiento factual o etapa de la abducción.

Etapa dos: Los gestos y las palabras son sustituidas por otras palabras claves como, por ejemplo, el estudiante dice: “arriba quito uno”, “dos por la figura más uno”, “número de la figura más para la fila de arriba y número de la figura más

dos para la de abajo”, “sumar los dos para el total”, etc. Esto significa que los estudiantes en este nivel de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión; lo cual sugiere un pensamiento algebraico contextual o etapa de la transformación de la abducción. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia ($pk+1$, $pk+2$, $pk+3\dots$), suponen un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas o deducción de una fórmula.

Etapa tres: Las frases claves son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, como: $n+(n-1)$ o $2n-1$. La capacidad de usar esta propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia se define como pensamiento algebraico simbólico o deducción de una fórmula. En esta etapa el estudiante hace uso de la letra como variable con el fin de entenderla como número generalizado.

Mason (1989), plantea que *“Generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema”* (citado por Esquinas, 2008, p. 94).

Desde la pertinencia de los Estándares Básicos de Calidad MEN (2006), la propuesta se basa en lo que se nombra como pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos. El álgebra se concibe como un sistema de representación y descripción de fenómenos donde intervienen la variación y el cambio dotada de propiedades y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio.

Desde los Lineamientos Curriculares (1998) respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos

3.) Aplicación y descripción de una prueba piloto.

La actividad que se piloteó “Secuencia de Cuadrados”, tenía como propósito observar dos aspectos: el primero verificar si se evidencian las etapas del proceso de generalización de Radford (2003), etapa de la abducción, etapa de la transformación de la abducción y etapa de la deducción de una fórmula y el segundo aspecto adecuar cada una de las actividades que van a ir en la cartilla a un mismo esquema con la finalidad que en todas se puedan dar los procesos de generalización de Radford (2003).

Durante la etapa de la abducción se evidenció que los estudiantes lograron capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de la secuencia; a través de la observación de ciertos términos particulares, que expresaron a través de gestos, movimientos como señalar con el índice derecho o con el lápiz, etc.

En la etapa de la transformación de la abducción, los estudiantes pasaron de

gestos, movimientos, señales de decir “arriba aumenta en uno”, “a la derecha crece en dos”; a reducir o simplificar cada una de las características observadas en la abducción, realizar hipótesis y plantear conjeturas, a llevar la regularidad a un ámbito más global y abstracto y a realizar una forma de generalización más avanzada sin llegar a un nivel de generalización simbólica.

Ya en la etapa de la deducción de una fórmula, los estudiantes pasan de las palabras a realizar representaciones de forma simbólica, ya hacen uso de la letra como forma de simbolizar situaciones específicas a globales; buscan expresiones que repliquen los términos de la secuencia, es decir; buscan una fórmula y luego generalizan mediante enunciados o escritos de la situación que se presenta.

5. Metodología

La metodología de nuestro trabajo está dividido en tres partes:

1. Presentación de la propuesta. Se eligió como prueba piloto, la actividad número uno, propuesta para la cartilla titulada “*Secuencia de Cuadrados*”. Con esta actividad se mirarían los siguientes aspectos:

- Observar si el Geoplano Cuadrado cumple un papel protagónico en el desarrollo de la actividad piloto.
- Mirar si en el desarrollo de la actividad “*Secuencia de Cuadrados*” se logran evidenciar las etapas del proceso de generalización descritas por Radford (2003).
- Verificar que si se cumplen los dos propósitos ya mencionados, pasar a diseñar una cartilla con el esquema de la prueba piloto con las respectivas reestructuraciones arrojadas durante el desarrollo de ésta.

2. Descripción de la prueba piloto. se dividió en tres momentos:

Momento 1. Introducción: Aquí se explica en que consiste la prueba y se detallan aspectos como organización y desarrollo de la actividad.

Momento 2. Análisis de la actividad piloto: Está dividido en tres fases: fase 1, exploración, fase 2, desarrollo y registro de datos, y fase 3, formulación de conjeturas o generalización.

Momento 3. Socialización de la actividad piloto.

3. Descripción de los momentos de la prueba piloto: En esta parte se describen los momentos de la descripción de la clase, es decir, se describe el paso a paso de los momentos 1, 2 y 3. Veamos:

- Momento 1: Se monitoreó al azar a un grupo de tres estudiantes, tomando

como evidencia el registro de la actividad por medio de cuatro videos con contenido audiovisual, luego se tomaron fotografías; con el objetivo de sistematizar todo lo relevante que esté relacionado con la parte de generalización de patrones geométricos, numéricos y algebraicos; el resto del salón trabajó la misma actividad, posteriormente se conformaron grupos de tres estudiantes; la actividad se aplicó a estudiantes de octavo grado con edades entre los 13 y 15 años.

- Momento 2, análisis de la actividad piloteada: En este momento se aplicó la actividad titulada “Secuencia de Cuadrados”, con la finalidad de ver la viabilidad de ésta, si se podían evidenciar las tres etapas de Radford (2003); la etapa de la abducción, la etapa de la transformación de la abducción y la etapa de la deducción de una fórmula. La importancia de aplicar una prueba piloto es observar fortalezas y debilidades de la actividad; con el fin de mejorar la actividad y dar la misma organización o esquema a las otras actividades propuestas que van en la cartilla, la cual se presentará como una guía a los maestros que deseen implementarla.

- Momento 3: Con la socialización de la actividad se buscaba una unificación de conceptos, además nos brindó unos elementos de apoyo para elaborar unas conclusiones y recomendaciones sobre la elaboración de la cartilla con actividades pensadas desde el geoplano que potencialicen las etapas de generalización de Radford (2003), las conclusiones que arrojó esta prueba piloto permitieron modificar notablemente las actividades de la cartilla.

6. Conclusiones

- El Geoplano Cuadrado es un material didáctico que se le puede dar uso en el estudio del álgebra escolar en procesos de generalización; puesto que se pudo evidenciar en la práctica; cuando se aplicó la prueba piloto, que los estudiantes se apoyaban en él como medio visual sobre las configuraciones geométricas para revisar y comprobar algunas de sus conjeturas.
- De acuerdo a las observaciones que se pudieron apreciar en los estudiantes durante el desarrollo de la actividad “secuencia de cuadrados” como prueba piloto, éstos tuvieron que pasar por cada una de las etapas descritas por Radford (2003) en el proceso de generalización.
- El pilotaje contribuyó a mejorar las actividades de la cartilla.
- El papel del docente fue importante ya que él fue un mediador y facilitador del aprendizaje del proceso de generalización en los estudiantes.

Elaborado por:	Luque Osorio, Ubaldo; Mena Becerra, Edinson
Revisado por:	Carranza Vargas, Edwin

Fecha de elaboración del Resumen:	1	2	2017
--	---	---	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Universidad de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar presentado por los estudiantes:

Edinson Mena Becerra Cód. 2016182011, C.C. 1.077.435.854
Ubaldo Luque Osorio Cód. 2016182007, C.C. 79.365.888

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 39 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 22 días del mes de febrero de 2017.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: 
Edwin Alfredo Carranza

Jurados: Profesor: 
Luis Eduardo Espitia (UPN)

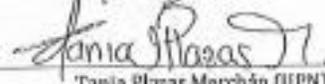
Profesora: 
Tania Plazas Merchán (UPN)

TABLA DE CONTENIDO

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
JUSTIFICACIÓN.....	4
OBJETIVOS.....	5
OBJETIVO GENERAL.....	5
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	5
MARCO TEÓRICO	6
LA NATURALEZA SOCIAL DE LA OBJETIVACIÓN	8
DEFINICIONES SOBRE GENERALIZACIÓN	8
PROCESO DE GENERALIZACIÓN	9
1. ETAPA DE LA GENERALIZACION FACTUAL: “ ABDUCCIÓN ”	9
2. ETAPA DE LA GENERALIZACION CONTEXTUAL: “ TRANSFORMACIÓN DE LA ABDUCCIÓN ”	9
3. ETAPA DE LA GENERALIZACIÓN SIMBÓLICA: “ DEDUCCIÓN DE UNA FÓRMULA ”.....	10
MATERIAL DIDÁCTICO	11
EL GEOPLANO Y ALGO DE HISTORIA	12
METODOLOGÍA.....	15
PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA	15
DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA PILOTO.....	16
MOMENTO 1: INTRODUCCIÓN	16
MOMENTO 2: ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD PILOTO	16
MOMENTO 3: SOCIALIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PILOTO.....	18
DESCRIPCIÓN DE LOS MOMENTOS DE LA PRUEBA PILOTO.....	21
MOMENTO 1: INTRODUCCIÓN	21
MOMENTO 2: ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD PILOTO.....	22
MOMENTO 3. SOCIALIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PILOTO.....	30
CONCLUSIONES.....	32
CONCLUSIONES DESDE LA PRUEBA PILOTO.....	32
CONCLUSIONES GENERALES.....	34

RECOMENDACIONES PARA EL MAESTRO.....	35
CARTILLA PARA MAESTROS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS.....	37
ANEXOS.....	67
BIBLIOGRAFÍA.....	75

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En las diferentes indagaciones sobre el Geoplano y en particular el Geoplano Cuadrado, se logra evidenciar un tratamiento correspondiente al uso exclusivo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría; tal vez porque en su origen, su inventor, el profesor Caleb Gattegno entre los años de 1960 y 1961 lo dio a conocer al mundo con dicha directriz de utilidad y es en ésta área que se han venido dando algunos avances con este material didáctico. Así pues nos surge la idea de ampliar el espectro de uso del Geoplano cuadrado en otras instancias, ubicándolo en el álgebra, con propósitos de generar procesos de generalización. Pretendemos mostrar con la aplicación de una prueba piloto que esta herramienta permite de una forma sencilla y eficaz que los estudiantes indaguen, experimenten y aprendan a construir modelos matemáticos, así como visualizar regularidades geométricas, secuencia de patrones, descubrir propiedades-relaciones y comprobar conjeturas e hipótesis entre otras.

Claudi Alsina (1999) Propone que los modelos geométricos (Geoplano, tangram, ábaco, dados, fichas etc.) deben ofrecerse como casi obligado en los primeros niveles primarios y secundarios ya que la utilización de materiales manipulativos pueden ayudar a los niños a comprender el significado de las ideas matemáticas. Si atendemos a esta propuesta, estudiantes y maestros, nos podríamos ver beneficiados en el proceso de enseñanza – aprendizaje; al poder experimentar con este tipo de materiales manipulables; específicamente para nuestro caso con el Geoplano Cuadrado.

Otra tensión es la poca información acerca del uso de material didáctico para el desarrollo de procesos de generalización, puesto que la mayoría se encuentran diseñados y dispuestos para otros procesos que habitan normalmente en la enseñanza de la aritmética.

En los textos consultados sobre el Geoplano Cuadrado, como ya lo hemos venido diciendo, su uso apunta hacia el estudio de la geometría; en este trabajo se le dará otro uso; iniciando con actividades o regularidades geométricas y a partir de esas regularidades introducir las etapas de generalización de Radford (2003), poniendo la mirada en el álgebra escolar, ya que en este campo no se evidencian trabajos. Tomando la secuencia de patrones geométricos, aritméticos como pilar, llegando a expresiones algebraicas o fórmulas que simplifiquen ciertas situaciones con la prioridad de usar el Geoplano Cuadrado; para constituirse como una herramienta que potencialice la modelación de situaciones, cuantificación de diversos fenómenos de variación y cambio.

Entre las dificultades observadas en el aula de clases con relación al proceso de generalización están: la complejidad de los objetos de las Matemáticas y los procesos del pensamiento matemático propios de la disciplina, los métodos inadecuados de enseñanza para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de aprendizaje no se da de igual manera para todos los educandos y las diferentes actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas por parte de los estudiantes.

Es necesario manifestar que al respecto de la complejidad de los objetos básicos de las matemáticas, las dificultades se clasifican en dos estatus: el operacional y el conceptual. El primero es de carácter dinámico y los objetos son vistos como un proceso, el segundo es de carácter estático y los objetos son vistos como una entidad conceptual. Estos constituyen aspectos complementarios del objeto de las matemáticas parafraseando a Pérez, (2005)

El problema radica en la falta de material didáctico para el desarrollo de procesos de generalización en el álgebra escolar.

Se hace entonces necesario crear un espacio pedagógico y didáctico en el aula de clases que posibilite el desarrollo de actividades que promuevan la construcción y simbolización de conceptos, la aplicación de procesos algorítmicos y analíticos; usando materiales didácticos como el Geoplano Cuadrado.

Un aporte a la solución del problema es la presentación de una cartilla para maestros que logre evidenciar la flexibilización del uso del Geoplano Cuadrado en otro ambiente al del estudio de la geometría, y el uso de éste para el desarrollo de procesos de generalización en el álgebra escolar.

JUSTIFICACIÓN

El Geoplano fue diseñado y construido por el profesor Caleb Gattegno con la intención de facilitar la comprensión de la geometría en sus estudiantes. Desde nuestra experiencia en el aula, el Geoplano ha contribuido de manera positiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En nuestras observaciones de aula hemos notado que el Geoplano Cuadrado por ser un material manipulable, incentiva la parte creativa en el estudiante, ayudándole a afianzar conceptos matemáticos y a facilitar la comprensión en los procesos de generalización, colaborándole por ejemplo al planteamiento y formulación de hipótesis. Otras ayudas que nos brinda el Geoplano en aquellas personas que experimentan, construyen y estudian en él son: desarrollar procesos y habilidades de visualización, potenciar la parte cognitiva, estimular el pensamiento espacial, afianzar conceptos tales como paralelismo, perpendicularidad, diagonal, perímetro y área de polígonos, área de regiones sombreadas, plano cartesiano, tablas de multiplicar, números pares, números impares, números triangulares, números cuadrados, clases de polígonos, secuencias etc., además el Geoplano es un material comercial, no es tan costoso adquirirlo o se puede construir de manera sencilla si se desea, puede usarse con cualquier edad por su fácil manejo y por lo tanto podemos usarlo en los diferentes grados escolares.

Por tales razones y otras que enunciaremos a continuación, nos parece bastante importante profundizar en el estudio del uso del Geoplano Cuadrado en el aula desde lo aritmético y lo algebraico y diseñar una cartilla con actividades propuestas al maestro que le sirva de ayuda en sus clases.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Diseñar una cartilla para profesores, donde se use el Geoplano Cuadrado como instrumento articulador para potencializar el proceso de generalización.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Indagar sobre el Geoplano Cuadrado y sus usos.
2. Plantear actividades que contribuyan al pensamiento algebraico en los estudiantes a través del uso del Geoplano Cuadrado como herramienta pedagógica.
3. Rediseñar las actividades propuestas en la cartilla según los resultados obtenidos en la prueba piloto.

MARCO TEÓRICO

La corriente Early-Álgebra, busca un cambio curricular; de manera concreta propone incorporar a las aulas de educación primaria actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para de este modo desarrollar competencias propias del álgebra. Tal y como señalan Blanton y Kaput (2005) son actividades que generan un ambiente de trabajo en Matemáticas en la que los alumnos exploran, modelan situaciones, hacen predicciones, discuten, argumentan y comprueban ideas además de practicar habilidades de cálculo. En definitiva se trata de desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y el algebraico desde la Educación Primaria, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje con comprensión que facilite el estudio posterior del Álgebra en la Educación Secundaria. (Mora, 2012).

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), en cuanto a la formación matemática básica, se hace hincapié en potenciar el pensamiento matemático a través de la apropiación de contenidos referentes a ciertos sistemas matemáticos. Dichos contenidos se constituyen en herramientas para desarrollar, entre otros, el pensamiento variacional.

En relación al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y luego se establece en una poderosa herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, por lo tanto se debe incluir entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), establecen desde los siguientes conjuntos de grados, las siguientes situaciones con respecto al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos:

Grados primero a tercero
Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Grados cuarto a quinto

Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica y gráfica. Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
--

Grados octavo a noveno

Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.
--

Al tratar de generalizar se debe tener cuidado porque diferentes pruebas aplicadas en diferentes contextos confirman que personas experimentan una serie de dificultades y en otros casos tienden a cometer errores que son comunes cuando se trabajan procesos de generalización *“al utilizar configuraciones geométricas, es posible que al observarlas, se encuentre gran variedad de características de tales configuraciones, que pueden resultar difíciles de guardar en la memoria, de relacionar, clasificar o identificar cuáles son las más importantes para disponer de una solución”* (Mora, 2012), Para estos casos sugerimos registrar en el papel esas características que son relevantes y marcan pautas dentro del contexto, las cuales son indispensables para luego plantear conjeturas, de esta forma es posible garantizar un buen elemento al tratar de generalizar alguna regularidad.

LA NATURALEZA SOCIAL DE LA OBJETIVACIÓN

Los medios semióticos de objetivación son entendidos como los objetos, herramientas, recursos lingüísticos y signos que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidente sus intenciones, y llevar a cabo un despliegue de acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (Radford, 2003, 2010).

DEFINICIONES SOBRE GENERALIZACIÓN

“La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela” (Vergel, 2015), cuando se habla sobre la generalización de patrones se hace referencia a cómo debe ser esa enseñanza del álgebra en la escuela y cómo sería esa transición de la aritmética al álgebra; lo cual implica la interacción con cantidades desconocidas.

Mason (1989), plantea que *“Generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema”* (citado por Esquinas, 2008, p. 94).

La generalización de patrones se considera como algo que es inamovible, pero ese algo inamovible genera o transforma un siguiente el cual comparte características específicas similares con relación a los demás términos *“Los patrones se consideran como algo que se repite con regularidad”* (Trujillo, 2008). El autor ve la generalización como una secuencia la cual comparte una característica común que se repite de forma implícita en cada término de la regularidad.

Nuestro trabajo se fundamenta bajo la teoría de la cultura de la objetivación de Luis Radford (2003), teoría que asume una postura sobre las etapas del proceso de generalización. El término objetivación tiene su antecesor en la

palabra objeto, cuyo origen se deriva de *objectare*, verbo latino que significa "*lanzar algo en el camino, o Lanzar antes*" (Charleton, 1996, p.550). El sufijo tipificación viene del verbo *facere* que significa "*hacer*" (Charleton, 1996, p. 311), la objetivación se relaciona con aquellas acciones destinadas a algo delante de alguien o haciendo algo visible.

PROCESO DE GENERALIZACIÓN

Radford (2003) sobre el proceso de generalización, hace una división de su teoría titulada, teoría cultural de la objetivación en tres etapas: etapa de la generalización factual, etapa de la generalización contextual y etapa de la generalización simbólica.

1. ETAPA DE LA GENERALIZACIÓN FACTUAL: "**ABDUCCIÓN**"

Una generalización factual es aquella donde las acciones juegan un papel importante, la cual tiene forma operativa, es decir logra esa articulación entre las palabras, gestos, movimientos observables en la conducta que manifiestan los estudiantes; Los cuales permiten dar cuenta de una intención comunicativa que pone algo presente. Esta etapa permite evidenciar e identificar características sobre algunos elementos de una secuencia a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observaciones sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, p_1 , p_2 , $p_3...$, p_k), por medio de gestos, movimientos, ritmos, etc. Esta actividad perceptual y las palabras a este tipo de pensamiento se le denomina como etapa de la generalización factual o etapa de la abducción; Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala y dice "más dos". Cuando se evidencia este tipo de manifestaciones estamos frente a la etapa de la abducción la cual permite a los estudiantes establecer y usar esa característica común la cual tienen presente en el desarrollo de actividades.

2. ETAPA DE LA GENERALIZACIÓN CONTEXTUAL: "**TRANSFORMACIÓN DE LA ABDUCCIÓN**"

Los gestos y las palabras son sustituidas por otras palabras claves como, por ejemplo, el estudiante dice: “*arriba quito uno*”, “*dos por la figura más uno*”, “*número de la figura más para la fila de arriba y número de la figura más dos para la de abajo*”, “*sumar los dos para el total*”, etc. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión; lo cual sugiere un pensamiento algebraico contextual o etapa de la transformación de la abducción. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia ($pk+1$, $pk+2$, $pk+3\dots$), suponen un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas. (Vergel, 2015).

En esta etapa el estudiante después de haber realizado un listado de características sobre la regularidad que se presenta simplifica, mediante palabras que él considera son claves estableciendo una serie de hipótesis, con el objetivo de generalizar el fenómeno de una forma global.

3. ETAPA DE LA GENERALIZACIÓN SIMBÓLICA: “**DEDUCCIÓN DE UNA FÓRMULA**”

Las frases claves son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, como: $n + (n - 1)$ o $2n - 1$. Esa capacidad de usar esta propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia se define como pensamiento algebraico simbólico o deducción de una fórmula. En esta etapa el estudiante hace uso de la letra como variable con el fin de entenderla como número generalizado, además hace uso del símbolo para generalizar situaciones tomando el alfabeto y los números como herramienta para reducir procesos y ganar tiempos, con la salvedad que esta generalización puede ser de tipo alfanumérica, es decir, combinar letras y números o de tipo lenguaje natural que manejan los estudiantes. La generalización de tipo simbólica también se puede dar a través de un lenguaje o concepto elaborado el cual exprese la conjetura planteada mediante un enunciado.

MATERIAL DIDÁCTICO

Daremos algunos conceptos sobre lo que es material didáctico y recurso didáctico desde diferentes autores:

- Álvarez, (1996) *“un buen material Prescinde del término recurso y utiliza sólo el de material didáctico para referirse a todo objeto, juego, medio técnico, etc. capaz de ayudar al alumno a suscitar preguntas, sugerir conceptos o materializar ideas abstractas”*.
- Alsina, Burgués y Fortuny, (1988), agrupan bajo la palabra material: *“todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que ayudan a descubrir, consolidar o entender conceptos en las diferentes fases del aprendizaje”*. Además estos autores crean una lista de clasificación de materiales didácticos donde tienen cabida tanto los creados con fines únicamente educativos (modelos de figuras, ábacos, regletas etc.), cómo otros que no tienen este fin, pero se consideran herramientas como son: proyectores, videos, lecturas, instrumentos para dibujar o medir etc.
- Hernán & Carrillo, (1998), al hablar de *“material didáctico”* se refieren a los soportes físicos como: cubos encajables, calculadora, palillos, hojas punteadas en geometría..., que ayudan a la abstracción y que permiten enfocar de una forma más adecuada las actividades y cuando hablan de *“recursos didácticos”*, lo enfocan hacia el sentido de estrategias, refiriéndose a aquellas que el maestro utiliza, pero no se pueden ver ni tocar como: los estimuladores del aprendizaje, la consolidación e interrelación de conceptos, etc.
- Sobre lo que es material didáctico y lo que es recurso didáctico según Coriat, (1997), los *“materiales didácticos”* se crean con fines exclusivamente educativos por ejemplo (libros de texto, fichas de trabajo, balanza numérica...), y los *“recursos”* son utensilios que no se han diseñado para el aprendizaje de ningún concepto matemático, pero que el profesor integra en el aula, con el objetivo de utilizarlos para optimizar su práctica docente (pizarra, ordenador, metro, tiza...). Aunque no es fácil establecer una delimitación clara entre ambos términos. El mismo Coriat (1997) afirma: *“un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite varias aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material didáctico y qué es un recurso”*.

Entre las diferentes definiciones que hacen los autores anteriormente citados sobre lo que se considera como material didáctico y recurso didáctico, nos identificamos con la que plantea Coriat, (1997), los *“materiales didácticos”* se

crean con fines exclusivamente educativos y que *“un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite varias aplicaciones”*, el Geoplano cuadrado fue diseñado para ser usado en el aula para facilitar la enseñanza de la geometría, nuestra propuesta consiste en usar esta herramienta como mediador para potenciar el proceso de generalización en los estudiantes permitiendo dar un enfoque distinto al uso original, puesto que no radica en la enseñanza de conceptos geométricos sino en la presentación de patrones que permitan generalizar desde la geometría mediante regularidades de figuras llegando al álgebra.

EL GEOPLANO Y ALGO DE HISTORIA

El Geoplano fue inventado por el egipcio Caleb Gattegno en los años (1960-1961), con el fin de contribuir al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el estudio de la geometría.

La palabra Geoplano significa *“plano de geometría”*, en cuanto a su construcción las cabezas de los clavos pertenecen a un mismo plano. Consiste en un tablero cuadrado, generalmente de madera, en el cual se deben introducir clavos en cada uno de sus vértices de tal manera que éstos sobresalgan en la superficie de la madera unos 2 cm. El tamaño del tablero es variable y está determinado por un número de cuadrículas; éstas pueden variar desde 25 (5 x 5) hasta 100 (10 x 10).

El trozo de madera utilizado no puede ser una plancha fina, ya que tiene que ser lo suficientemente grueso (2 cm aproximadamente) como para poder clavar los clavos de modo que queden firmes y que no se ladeen. Sobre esta base se colocan gomas elásticas (cauchos) que se sujetan en los clavos formando las figuras geométricas que se deseen.

Las diferentes aplicaciones que se realizan con el Geoplano permiten que se pongan en juego procedimientos tales como la clasificación, reproducción de figuras a partir de modelos obtenidos. En este tablero, las tareas que implican la utilización de conceptos y relaciones geométricas a realizarse con este material pueden ser tanto individuales como colectivas; es recomendable que cada niño y niña tenga su propio Geoplano, esto permitirá que cada uno haga sus propias exploraciones y trabaje a su propio ritmo.

Construir un Geoplano es relativamente fácil, al invitar a los padres a participar en su elaboración se contribuye a la unidad familiar y a la participación de estos en las acciones educativas. Es muy conveniente, luego de las primeras actividades, dibujar Geoplanos en papel y replicarlas para que los alumnos puedan dejar graficadas las tareas realizadas.

Entre las clases de Geoplanos resaltamos:

1. El Geoplano Ortométrico, de trama cuadriculada: en un principio se construían en madera, se utilizaban redes cuadriculadas de 9, 16, 25, 36, 49 y 121 clavos. Los más frecuentes en el mercado son los de 25 clavos y los de 36 clavos. En el segundo y tercer ciclo de primaria conviene disponer de Geoplanos de 100 clavos; debido a que el tipo de figuras que se trabajan en este nivel requieren de ese número de puntillas, ya que la abstracción aumenta con el avance de los grados.

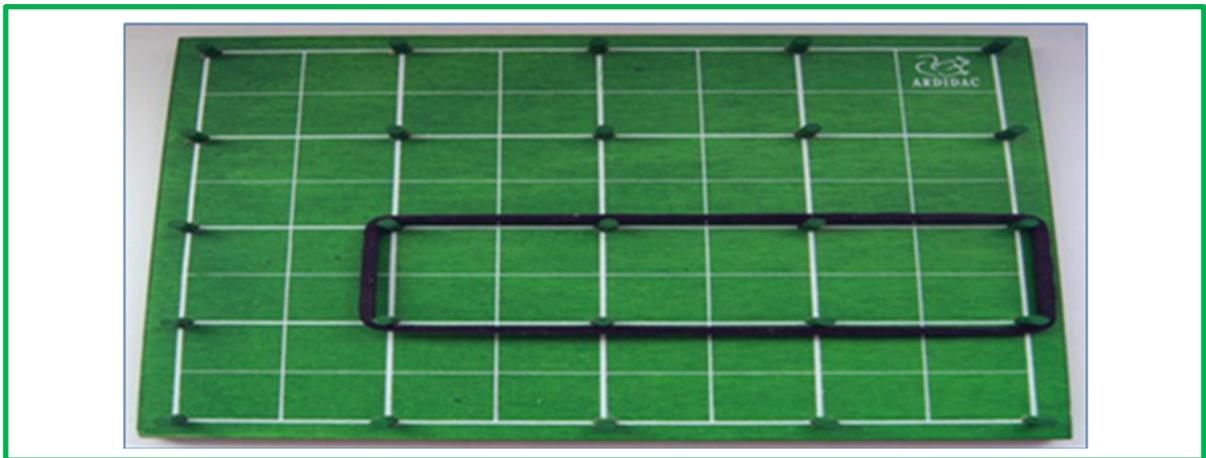


Imagen 1. Geoplano Ortométrico. Tomado de:
<https://www.google.com.co/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=imagen+de+geoplanos>

2. El Geoplano Circular: es una colección de puntos de una circunferencia igualmente espaciados, que se colocan como sigue (en los modelos antiguos de madera): un pivote central, cuatro pivotes exteriores en las esquinas y el resto (12) formando una circunferencia. Permite construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 12 y 24 lados. Sirve también para estudiar propiedades de los elementos de la circunferencia y de las figuras inscritas. Los actuales en plástico disponen de 24 pivotes.

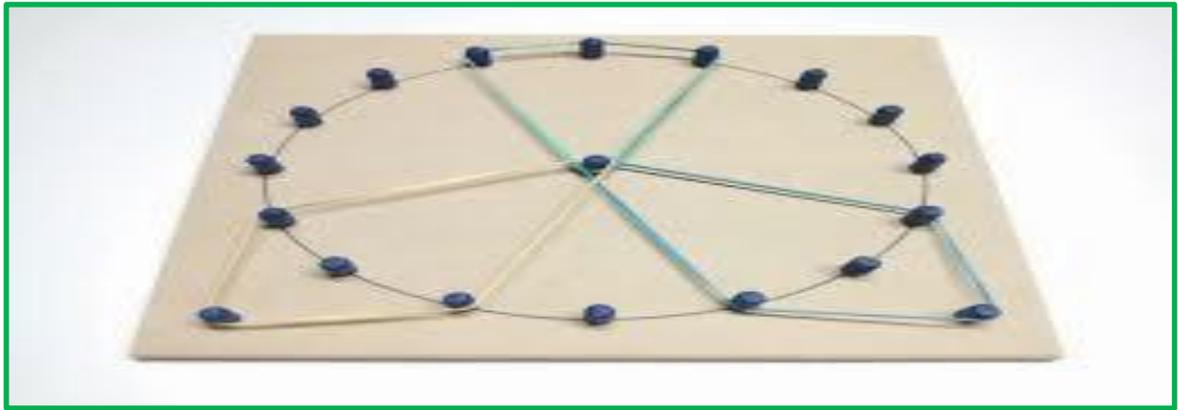


Imagen 2. Geoplano Circular. Tomado de:
<https://www.google.com.co/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=imagen+de+geoplanos>

3. El Geoplano Isométrico: es de trama triangular, con los pivotes situados en vértices de triángulos equiláteros, la distancia entre cada punto y todos los puntos contiguos a él es la misma. Actualmente se comercializan en plástico a doble cara, por una en trama cuadrada de 25 o 36 pivotes y por la otra circular. Otros modelos presentan por una cara el Geoplano Isométrico y por la otra el Geoplano ortométrico. Para trabajar con ellos se usan preferentemente gomas elásticas aunque también pueden utilizarse lanas, cordones e hilo de plástico.

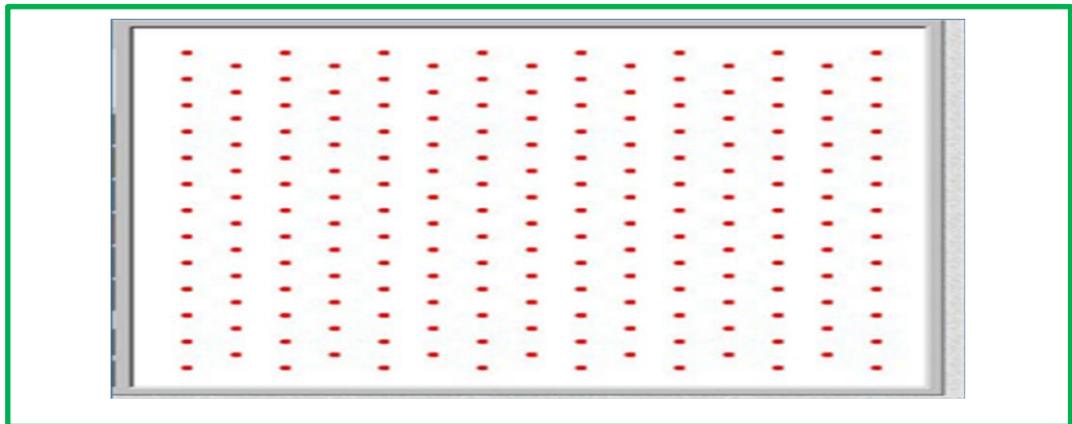


Imagen 3. Geoplano Isométrico. Tomado de:
<https://www.google.com.co/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=imagen+de+geoplanos>

METODOLOGÍA

A partir de unos objetivos propuestos, pensamos en diseñar y aplicar una prueba piloto que logrará desde nuestro marco teórico evidenciar las etapas de generalización descritas por Radford (2003), y además observar si el Geoplano Cuadrado pudiera funcionar como instrumento mediador para potenciar los procesos de generalización a través de actividades pensadas desde él mismo.

Finalmente si lográbamos demostrar el cumplimiento de estos dos propósitos ya mencionados, entonces pasaríamos a diseñar una cartilla con actividades que conservarían el esquema de la actividad piloto que se aplicó. Dicha cartilla sería como una guía para el maestro, teniendo en cuenta que aquellos que deseen implementarla o aplicarla en sus prácticas pedagógicas, entonces realicen los respectivos ajustes de acuerdo a sus necesidades.

La prueba piloto se aplicó a un curso de estudiantes de grado octavo de educación básica del Colegio Semilla de Vida de la ciudad de Bogotá. Se ha diseñado un marco teórico desde lo conceptual, didáctico y cognitivo, de tal manera que permita llevar a cabo una propuesta metodológica compuesta principalmente por una prueba piloto, una intervención pedagógica y un análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba piloto, expuestos a través de unas conclusiones y unas recomendaciones.

La metodología de nuestro trabajo está dividido en tres partes:

1. Presentación de la propuesta
2. Descripción de la prueba piloto: dividido en tres momentos
 - Momento 1. Introducción
 - Momento 2. Análisis de la actividad piloto
 - Momento 3. Socialización de la actividad piloto
3. Descripción de los momentos de la prueba piloto.

PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA

Se eligió para aplicar como prueba piloto la actividad número 1 titulada “*Secuencia de Cuadrados*”, de la cartilla de maestros. La actividad se diseñó pensada desde el Geoplano Cuadrado de tal manera que logre alcanzar dos aspectos:

- 1.) Evidenciar las etapas de generalización de Radford (2003)

2.) Que el material didáctico, para nuestro caso, el Geoplano Cuadrado tome un papel protagónico en el trabajo que los jóvenes desarrollen durante la actividad propuesta, visto desde el uso constante e imprescindible de éste.

DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA PILOTO

La aplicación de ésta prueba piloto, la dividimos en tres momentos:

MOMENTO 1: INTRODUCCIÓN

Este momento es dirigido por el profesor, con el objeto de organizar la actividad que los estudiantes desarrollarán. Se organizan los grupos de trabajo, se informan los tiempos y momentos de desarrollo de la actividad, se da a conocer el objetivo de la actividad, se entrega el material de trabajo y se dan instrucciones de comportamiento

MOMENTO 2: ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD PILOTO

Los estudiantes pasan por tres fases y el docente debe orientarlas para que ellos sean partícipes de su aprendizaje por medio de la actividad. Las tres fases son: Exploración, desarrollo y registro de datos y finalmente formulación de conjeturas o generalización. Estas fases dan cuenta del proceso de generalización.

Fase 1: exploración

Esta fase permite y promueve la exploración del material por parte del estudiante, permite a éste reconocer atributos del material y realizar acciones en él. Además lleva al estudiante a tener que usarlo en la realización de la actividad propuesta. La etapa que más se aprecia es la de la abducción; puesto que en la manipulación y el reconocimiento de los atributos del material didáctico; el Geoplano Cuadrado, se descubren cosas que son manifestadas en la acción y en las expresiones causales de los estudiantes.

Fase 2: desarrollo y registro de datos

Esta fase permite y promueve al estudiante usar el material para realizar la actividad y registrar datos y conjeturas en el instrumento dispuesto para ello. Es aquí donde el estudiante debe hacer conjeturas, tomar y registrar datos para usarlos posteriormente. La etapa que mejor se aprecia es la de transformación de la abducción, puesto que al registrar los datos, el lenguaje cambia manifestándose de manera más preciso y mostrando el reconocimiento de patrones o regularidades.

Fase 3: formulación de conjeturas o generalización.

En esta fase el estudiante registra conjeturas o fórmulas matemáticas que recoge la actividad en la fase 2. El proceso de generalización debe terminar en obtener la deducción de la generalización a algún tipo y forma de registro. La última etapa se aprecia mejor aquí, pues es donde se pasa al lenguaje matemático y se pide dar cuenta de la generalidad.

MOMENTO 3: SOCIALIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PILOTO

En este momento el profesor organiza la discusión para evidenciar el paso a paso de las etapas del proceso de generalización y reconocer el aprendizaje, descubrir habilidades y debilidades de la actividad desarrollada. El docente genera el espacio de discusión y concreción de los saberes, recoge las experiencias vividas por los estudiantes durante la actividad, despeja dudas en los estudiantes, organiza y establece un conocimiento común de los elaborados por los diferentes grupos de estudiantes.

A continuación presentamos la actividad piloto que se les aplicó a los estudiantes, resaltando que esta actividad fue modificada después de un análisis sobre los resultados arrojados.



Estudios de postgrado: Especialización en Educación Matemática

Proyecto de grado "La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas específicamente en el estudio del álgebra escolar"

Estudio realizado por: Lic. Edinson Mena y Lic. Ubaldo Luque

Agradecemos al Colegio Cristiano Semilla de Vida y a los estudiantes del curso 802 jornada única por su colaboración en esta actividad de pilotaje.

ACTIVIDAD: "SECUENCIAS DE CUADRADOS"

NOMBRES: _____

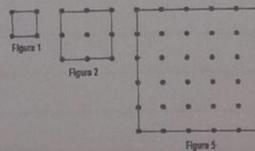
FECHA: _____ **Hora de inicio:** _____ **Hora de finalización:** _____

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como herramienta didáctica el geoplano cuadrado.

MATERIALES: geoplano cuadrado, bandas elásticas o cauchos.

La siguiente actividad se puede realizar en forma individual o en grupos. El número de estudiantes por grupo dependerá al número de geoplanos disponibles en la clase.

PROCEDIMIENTO: Con ayuda de las bandas elásticas, construye en el geoplano cuadrado las tres siguientes imágenes correspondientes a una secuencia de cuadrados.



Como pueden observar no están las figuras correspondientes a los numerales 3 y 4. Constrúyanlas en el geoplano de acuerdo al patrón que muestran las figuras dadas anteriormente.

Llamaremos **constante** a una cantidad que no varía y **variable** a una cantidad que puede tomar diferentes valores numéricos.

Encierre en un círculo la opción correspondiente a la respuesta correcta. De acuerdo a los dos conceptos anteriores; para la secuencia de cuadrados se podría deducir entonces que:

1. Una constante sería:

- A. El número de puntillas en un lado en los diferentes cuadrados
- B. El número de puntillas al interior de los diferentes cuadrados
- C. El número de lados en cada uno de los cuadrados
- D. El número total de puntillas alrededor de cada uno de los cuadrados.

2. Complete las cantidades numéricas para cada una de las casillas vacías de la siguiente tabla, de acuerdo a lo que observen y puedan deducir en las diferentes construcciones de la secuencia de cuadrados

FIGURA		1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	100	n
CONSTANTE O VARIABLE													
V	NÚMERO DE PUNTILLAS EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	2	3							16			
W	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS ALREDEDOR DEL CUADRADO	4	8		16							400	
X	NÚMERO DE PUNTILLAS AL INTERIOR DEL CUADRADO	0	1										n-1
Y	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	1	2					8					
Z	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA ALREDEDOR DEL CUADRADO	4	8										4n

3. Escriban para cada una de las variables el proceso mental o patrón que encontraron para ir obteniendo los resultados numéricos para cada una de sus casillas; de acuerdo a la secuencia de las figuras o posición determinada de cada cuadrado.

VARIABLE V: _____

VARIABLE W: _____

VARIABLE X: _____

VARIABLE Y: _____

VARIABLE Z: _____

DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

La prueba piloto se aplicó a los treinta estudiantes del curso 802 del grado octavo, jornada única, del Colegio Cristiano Semilla De Vida, situado en el barrio residencial Santa Isabel perteneciente a la localidad de Los Mártires en la ciudad de Bogotá. La organización se realizó en grupos de tres estudiantes, se pensó en ese número de alumnos por dos instancias; la primera por la cantidad de Geoplanos que se contaban en el momento, pues solo teníamos a nuestra disposición doce y la segunda instancia, lograr una mejor relación de comunicación entre los estudiantes y poder recoger datos más precisos y así una mejor calidad en las apreciaciones del desarrollo de la actividad, para su consecuente estudio. Se monitoreo un solo grupo; el cual se eligió al azar, quedando un grupo conformado por dos mujeres y un hombre a los cuales se les tomo registro en videos, audios y evidencias fotográficas. El rango de edad de estos estudiantes estaba entre los 13 y 15 años.

DESCRIPCIÓN DE LOS MOMENTOS DE LA PRUEBA PILOTO

MOMENTO 1: INTRODUCCIÓN

Inicialmente se organizaron grupos de tres estudiantes, seguido se entregó el material por grupo el cual constaba de un Geoplano y una bolsa de bandas elásticas (cauchos); luego se realizó una pequeña explicación de cómo se iba a desarrollar la actividad. Posteriormente se dio a conocer que la tarea estaba programada para un tiempo inferior a las dos horas.

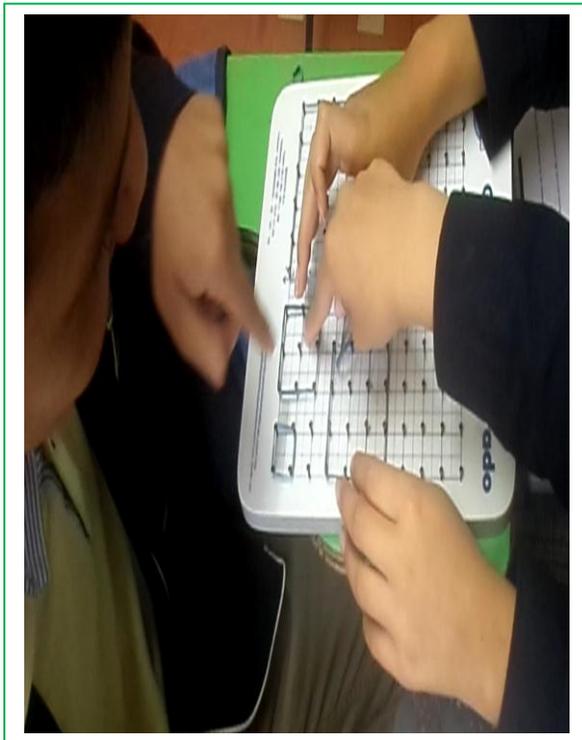


Evidencia 1. Conformación de grupos.

MOMENTO 2: ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD PILOTO

Para este momento 2, se detallarán de manera separada cada una de las tres fases antes mencionadas (exploración, desarrollo y registro de datos y la formulación de conjeturas o generalización), haciendo especificaciones concretas para cada una de estas; con la intención de mostrar que etapas del proceso de generalización según Radford (2003), se promueven en cada una de estas. Además se expondrán mediante tablas elaboradas de la siguiente forma: en la parte izquierda de la tabla se pondrán las evidencias fotográficas correspondientes a las tres fases del momento dos y en algunos casos se adjuntarán como apoyo las frases que los estudiantes usaban textualmente, recopiladas de los registros de audio y video que se les tomó en el transcurso del desarrollo de la actividad piloto y en la parte derecha de la tabla se desarrollará la respectiva descripción de las diferentes etapas del proceso de generalización.

Evidencias Fase 1: Exploración	Descripción etapa de la abducción.
<div data-bbox="310 411 894 1058" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="310 1079 954 1115">Evidencia 2: Adiestramiento con el Geoplano.</p> <div data-bbox="302 1304 959 1591" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="367 1318 943 1423">• Estudiante 1: <i>“¿Cómo encontramos la figura anterior?, ¿Cómo las encontramos...?”</i> <li data-bbox="367 1430 943 1577">• Estudiante 1: <i>“o sea es que nos están dando la figura 1,2 y 5, nos toca encontrar la 3 y 4, o sea que la de 3 sería 4 y la figura 4 sería de 5”</i> </div>	<p data-bbox="992 386 1479 1837">Para la evidencia 2: Adiestramiento con el Geoplano, los estudiantes comenzaron a representar en el instrumento lo que les proponía la actividad titulada “Secuencia de Cuadrados”, en su primera instancia. Esta actividad permitió que los niños se relacionaran y conocieran más e interactuaran con el Geoplano Cuadrado. Después que representaron la secuencia de cuadrados debían completar las casillas de la tabla, para llenar dichas casillas los estudiantes comenzaron a hacer un trabajo de visualización sobre la secuencia de cuadrados mediante la observación iniciaron por encontrar características comunes entre la secuencia de cuadrados, encontraron mediante conteo como aumentaba la cantidad de puntillas en un lado del cuadrado y que pasaba con el cuadrado siguiente, contaron la cantidad de puntillas al interior y alrededor de los cuadrados, cuando encontraban alguna característica común lo manifestaban mediante el lenguaje de gestos y movimientos con la mano; señalando directamente en las figuras implicadas. En otros casos lo manifestaban usando</p>



Evidencia 3: Identificación de características comunes.

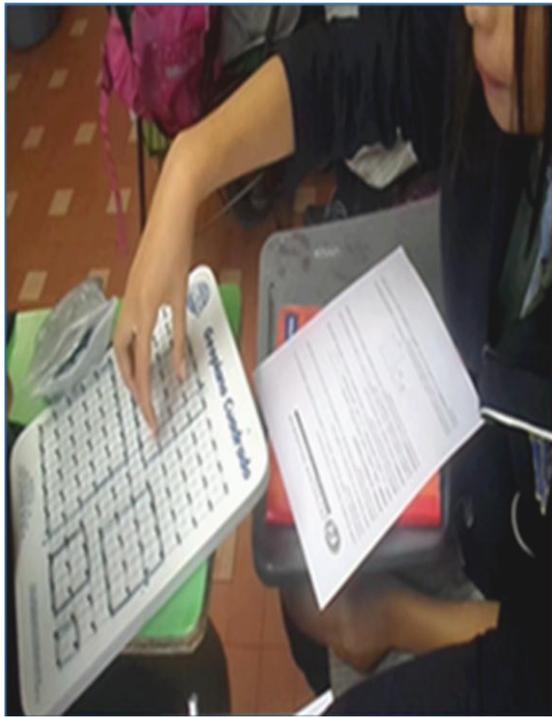
diferentes modos como el lenguaje normal con la intención de dar a conocer sus hallazgos o ideas.

Se logra observar en la evidencia 3, que los tres estudiantes aplican conteo sobre las figuras, señalando con su índice derecho sobre la secuencia de cuadrados. De esta forma se logra evidenciar la etapa de abducción descrita por Radford; puesto que los niños están manifestando a través de su lenguaje corporal sus ideas.

Lo cual nos brinda la noción de estar experimentando la etapa de la abducción descrita por Radford (2003).

<p>Evidencias fase 2: Desarrollo y registro de datos.</p>	<p>Descripción de la etapa de la transformación de la abducción.</p>
<div data-bbox="310 695 894 1423" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="329 1520 886 1551">Evidencia 4: Registro de regularidades.</p>	<p data-bbox="943 478 1438 947">Para esta etapa como se observa en la evidencia 4: registro de regularidades, los estudiantes comienzan a completar la tercera fila de la tabla ver página 20, según lo observado nos da la sensación que van dejando un poco de lado los gestos y movimientos con el dedo o el lápiz y comienzan a plasmar sus ideas en el papel, permitiendo registrar patrones y plantear conjeturas.</p> <p data-bbox="943 1024 1438 1528">Este proceso de registrar las regularidades en una tabla, les ofrece un trabajo más organizado, fácil para comprender y poder discutir entre ellos a la luz de los datos obtenidos y además verificar sus suposiciones. Posteriormente los estudiantes habiendo completado en su totalidad la tercera fila de la tabla, proceden a iniciar la fila cuatro de la tabla de la actividad, ver página 20.</p> <p data-bbox="943 1606 1438 1837">Los estudiantes pasan de expresar mediante gestos y movimientos con la mano a sistematizar aspectos específicos y sintetizar sus planteamientos. Ya realizan conjeturas más</p>

<ul style="list-style-type: none"> • Estudiante 1: <i>“la que sigue ósea la segunda tiene 8.”</i> • Estudiante 2: <i>“2 por 4 ocho (8).”</i> • Estudiante 2: <i>“es como decir, 2x2 cuatro, 4x2 ocho, 4x3 doce, 4x4 dieciséis, 4x5 veinte, 4x6 veinticuatro.”</i> • Profesor Ubaldo: <i>“¿la figura dos 8?”</i> • Estudiante 1: <i>“ya encontramos la fórmula. Seria multiplicación.”</i> • <i>“¿Para la diez?”</i> • Estudiante 1: <i>“cuarenta (40).”</i> 	<p>simplificadas permitiendo un avance en la consecución del término genérico.</p> <p>Como se puede evidenciar los estudiantes encuentran regularidades, dicen que se le restan dos a los lados, están planteando conjeturas, ya pudieron dar un avance de realizar gestos a elaborar un tipo de generalización no tan avanzada como el del nivel simbólico; no tan profundo, pero ya plantean hipótesis y tratan de verificar sus conjeturas pasando a otro estado de abstracción como se puede ver en la evidencia 5.</p> <p>Durante el desarrollo de la actividad se comprobó que el Geoplano realizó un papel protagónico; ya que constantemente hacían uso de él para representar cuadrados y verificar resultados.</p>
--	--



Evidencia 5: Conteo de puntillas al interior del cuadrado.

- Profesor Ubaldo: “¿ya tienen 9?”
- Estudiante 1: “no ¿9 u 8?, ¿y hay que hacemos vamos a contar?”
- Estudiante 1: “1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,2,3,4,5,6,7,8,9.”
- Estudiante 2: “entonces sería... fue la de 9.”
- Estudiante 1: “ pero se le resta dos a los lados”
- Estudiante 2: “serian 11, pero se le restan dos a los lados y eso se multiplica.”

- Estudiante 1: “haber te explico serian diez no once, pero se le restan 10, serian 9 entonces 9x9 ochenta y uno (81) ”
- Estudiante 2: “el número de la fórmula se le resta dos y la cantidad se multiplica 2 veces.”

- Profesor Edinson: *“otra pregunta ¿será que para contar el número de puntillas al interior de la figura es importante tener el Geoplano?”*
- Estudiante 1: *“para conocer la secuencia de las primeras figuras sí. Como para guiarnos. ”*
- Estudiante 2: *“pues es necesario como para verificar o estar seguro si la fórmula está funcionando o funciona, para eso creo que es necesario.”*

Evidencias fase 3: Formulación de conjeturas o generalización.	Descripción de la etapa, deducción de una fórmula.
<p>3. Escriban para cada una de las variables el proceso mental o patrón que encontraron para ir obteniendo los resultados numéricos para cada una de sus casillas; de acuerdo a la secuencia de las figuras o posición determinada de cada cuadrado.</p> <p>VARIABLE: <u>Según el número de la fig. la cantidad de puntillas o en todo va un número más adelante</u></p> <p>VARIABLE: <u>la fórmula para encontrar la cantidad de puntillas al rededor de la fig. es 4 por el número de fig</u></p> <p>VARIABLE: <u>1 número de fig se le resta 2 y el resultado se multiplica dos veces al cuadrado.</u></p> <p>VARIABLE: <u>El espacio encontrado entre cada puntilla es el número inicial de la figura</u></p> <p>VARIABLE Z: _____</p> <p>Evidencia 9: generalización de tipo enunciado.</p>	<p>VARIABLE V: “según el número de la fig. La cantidad de puntillas a un lado va un número más adelante”.</p> <p>VARIABLE W: “la fórmula para encontrar la cantidad de puntillas al alrededor de la fig. Es 4 por el número de la fig.”</p> <p>VARIABLE X: “el número de la fig. Se le resta 2 y el resultado se multiplica dos veces al cuadrado”.</p> <p>VARIABLE Y: “el espacio encontrado entre cada puntilla es el número inicial de la figura”.</p> <p>VARIABLE Z: _____</p>

MOMENTO 3: SOCIALIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PILOTO

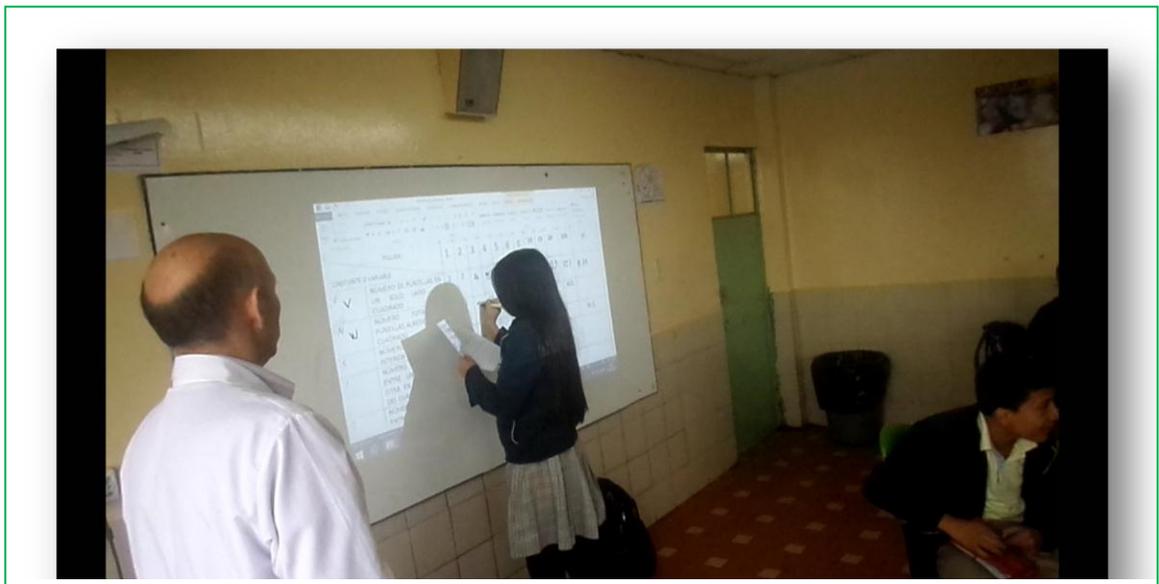
Este momento fue clave en el desarrollo de la actividad el cual sirvió para unificar conceptos, esta se presentó de la siguiente manera:

1.). La prueba piloto que se aplicó se proyectó en el tablero donde los estudiantes de cada grupo pasaban al tablero y exponían sus conjeturas.

2.). Los estudiantes pasaban al tablero y completaban los valores de las casillas de la tabla.

Este espacio fue importante porque en él se dio la discusión la cual permitió entre los estudiantes compartir distintos puntos de vista y fortalecer aspectos de la actividad en las cuales tenían dudas, esta socialización les brindó las herramientas necesarias para agrupar las diferentes posturas de cada grupo y poder unificarlas en una sola.

La interacción de los estudiantes con los otros grupos durante este momento fue de respeto y escucha, cuando algún participante de un grupo exponía las conjeturas encontradas sobre algún aspecto de la actividad recibían críticas por parte de los otros grupos participantes, la asumían con madurez, lo que nos



pareció un aspecto favorable en el desarrollo de la actividad.

Evidencia 10: socialización de la prueba piloto.

El papel del docente fue fundamental en el desarrollo de esta actividad porque era la persona quién conducía la tarea, fue el constante propiciador y el mediador en cada uno de los momentos en los que se desarrolló esta aplicación de esta prueba piloto, además aportó de forma significativa potencializando la cultura del trabajo en equipo dentro del grupo.

Los aportes que se evidenciaron para la elaboración de la cartilla fueron importantes porque a través de esta actividad se observaron algunas fallas en la presentación de la actividad, escuchar algunas posturas por parte de los estudiantes durante la socialización aportó de forma significativa en la reestructuración de estas actividades, ya que estas se proponen como una guía para el maestro que desee aplicarla como se presentan en la cartilla o modificando alguna de ellas según sus necesidades.

CONCLUSIONES

Las conclusiones son el resultado de: indagaciones bibliográficas que nos sirvieron de apoyo para nuestro marco teórico; entre ellas, la teoría de la cultura de la objetivación representada por Radford (2003), de un análisis realizado sobre los resultados de la prueba piloto y de los aportes y sugerencias recogidas en las asesorías; en fin en el desarrollo de nuestro trabajo de grado.

Las conclusiones las hemos dividido en dos partes; en la primera, se expondrán las conclusiones que arrojó la prueba piloto y en la segunda se incluirán las conclusiones generales.

1. CONCLUSIONES DESDE LA PRUEBA PILOTO:

- Se observó en la indagación sobre el Geoplano Cuadrado, un uso exclusivo de éste en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. El análisis de la actividad aplicada como prueba piloto nos demostró que si es posible hacer uso efectivo del Geoplano Cuadrado en el estudio del uso de la variable con generalización de patrones con esquemas geométricos; de esta manera podemos presentar un nuevo espectro de aplicación y estudio con el Geoplano Cuadrado.

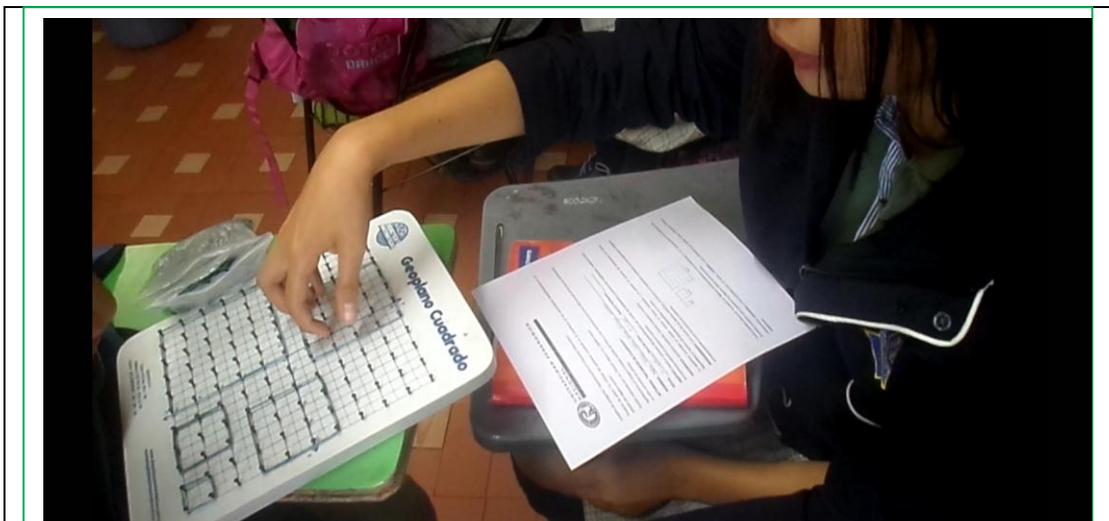
- La descripción de cada uno de los momentos de la actividad piloteada, “Secuencia de Cuadrados”, sirven como elementos de evidencia para mostrar que el Geoplano Cuadrado, si tomó un papel importante en el proceso de generalización porque fue el potenciador para que se dieran las etapas descritas por Radford (2003) en el proceso de generalización y que por lo tanto si es un material didáctico útil para ser llevado al aula para la enseñanza y el aprendizaje de procesos de generalización. Anexamos las siguientes evidencias fotográficas



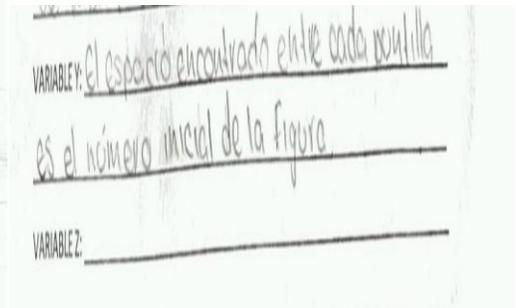
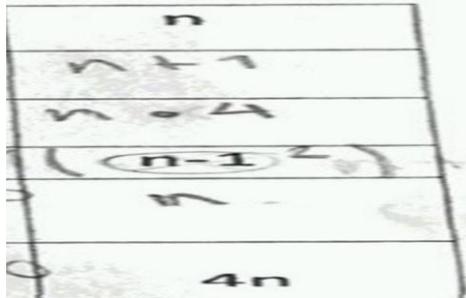
11, 12 y 13.

Evidencia 11: conteo de puntillas.

Éstas fueron tomadas del video realizado durante el transcurso del desarrollo de la actividad piloteada, como un elemento más que comprueba nuestra conclusión.



Evidencia 12: secuencia de cuadrados representada en el Geoplano.



VARIABLE Y: “el espacio encontrado entre cada puntilla es el número inicial de la figura”.

- La actividad piloteada se desarrolló con gran interés y participación total de los estudiantes. Motivados por el uso del material didáctico y la misma presentación de la actividad; se emocionaban al ver que sus conjeturas eran válidas en el momento de demostrarlas y cuando fallaban en estas, persistían volviendo a verificar en el Geoplano los resultados registrados en la tabla que les proponía la actividad. En cuanto al ambiente escolar podemos decir que lo que observamos durante la aplicación de la prueba piloto fue un gran interés en los estudiantes por la clase; el hecho de llevar un material didáctico como el Geoplano Cuadrado para ser usado, la propuesta de la misma actividad y una tabla para consignar los resultados de sus observaciones; nos da pie para decir que este tipo de actividades al ser llevadas al aula, benefician el ambiente escolar de la clase porque sacan a los estudiantes y al maestro de una rutina que se observa en el desarrollo de una clase magistral.
- La prueba piloto nos sirvió para darnos cuenta de errores técnicos y de redacción en la actividad propuesta y corregirlas, nos brindó la oportunidad

también de rediseñar las actividades planeadas y de mejorarlas en su contenido y además poder observar que el docente juega un rol importante e imprescindible como mediador y facilitador del aprendizaje del proceso de generalización en los estudiantes.

2. CONCLUSIONES GENERALES:

- Las actividades realizadas por los estudiantes sobre generalización, posibilitaron el desarrollo de habilidades como la elaboración de conjeturas como predicción de posibles resultados en un determinado problema y la sistematización de datos permitiendo encontrar en forma rápida y eficaz las posibles relaciones en un conjunto de elementos, lo que propicia una visión más global de la situación por parte del estudiante.
- Mediante el proceso metodológico se realizaron actividades en las que fueron consideradas las estrategias que los estudiantes manejaban frente a situaciones específicas y posteriormente se diseñaron otras en las que en forma progresiva y bajo la guía del docente, fue fundamental en el desarrollo de la prueba, accediendo a un lenguaje matemático más formalizado para formular generalizaciones de acuerdo con los elementos planteados, a los objetos construidos.

RECOMENDACIONES PARA EL MAESTRO

Estas recomendaciones surgen de la aplicación de la prueba piloto:

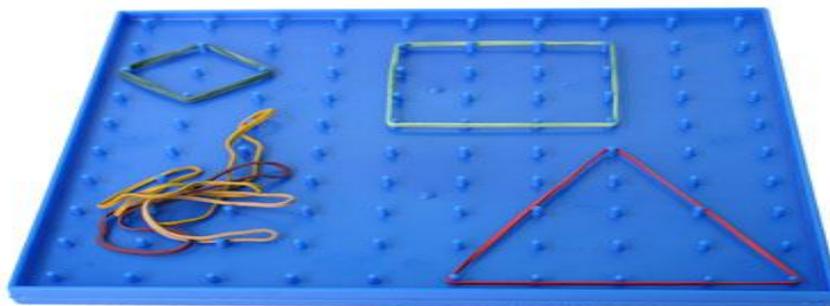
- Incorporación a las prácticas docentes actividades de este tipo, de manera más permanente, es una buena manera para comenzar el álgebra escolar.
- Propiciar el trabajo en equipo, de esta forma es posible fortalecer el intercambio de conocimientos dando las pautas o herramientas para que lograr un buen debate.
- Trabajar esta actividad con tiempos superiores a las dos horas de esta forma se puede lograr el desarrollo en su totalidad de la aplicación de la prueba,

porque del análisis que arrojó la prueba piloto, con menos del tiempo sugerido se hace difícil alcanzar los objetivos de ésta.

- Las actividades diseñadas para esta cartilla como guía al maestro no son las únicas, es posibles rediseñarlas y aplicarlas según el contexto.

USO DEL GEOPLANO CUADRADO EN PROCESOS DE GENERALIZACIÓN

CARTILLA PARA MAESTROS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS



ELABORADA POR:

❖ EDINSON MENA BECERRA

Lic. Matemáticas y Física. UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CHOCO

❖ UBALDO LUQUE OSORIO

Lic. Matemáticas y Computación. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

AÑO 2016

PRESENTACIÓN

Esta cartilla ha sido elaborada con el propósito de aportar material de apoyo de clase para el profesor del área de matemáticas o quien lo requiera. El lenguaje debe ser adaptado por el profesor que use esta cartilla.

Es el resultado del trabajo de grado “La utilidad del Geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas específicamente en el proceso de generalización del Álgebra Escolar”, en la Especialización de Educación Matemática, programa ofrecido por la Universidad Pedagógica Nacional.

Contiene seis actividades sobre procesos de generalización que motivarán al estudiante en el inicio del estudio del Álgebra Escolar. Cada una de las actividades se puede desarrollar en el aula en forma individual o por equipos de trabajo. El profesor puede modificarlas a su parecer o aplicarlas tal como se presentan, si así lo considera pertinente.

El objetivo general consiste en que los estudiantes desarrollen procesos de generalización por medio de habilidades de visualización, argumentación oral y escrita, la verificación de conjeturas de patrones o reglas lógicas de secuencia, usando como material didáctico el Geoplano cuadrado.

Es necesario para el desarrollo de las actividades propuestas en esta cartilla tener varios Geoplanos cuadrados y un paquete de bandas elásticas o cauchos de varios tamaños para cada estudiante o grupo de estudiantes.

Esperamos serles de gran ayuda en el estudio del pre-álgebra.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

1. DIFICULTADES QUE SE PRESENTAN EN LOS ESTUDIANTES AL TRABAJAR PROCESOS DE GENERALIZACIÓN	40
2. RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL MAESTRO	40
3. OTRAS RECOMENDACIONES PARA LOS MAESTROS	41
4. CONCEPTOS PREVIOS.....	42
5. PREGUNTAS Y POSIBLES RESPUESTAS A LOS ESTUDIANTES EN EL DESARROLLO DE LA PRUEBA PILOTO SOBRE LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN USANDO EL GEOPLANO CUADRADO ...	43
6. CÓMO EVALUAR LA ACTIVIDAD.....	45
7. ACTIVIDAD PROPUESTA No. 1 “SECUENCIA DE CUADRADOS”.....	46
8. ACTIVIDAD PROPUESTA No. 2 “SECUENCIA DE ESCUADRAS EN EL GEOPLANO”.....	49
9. ACTIVIDAD PROPUESTA No. 3 “SECUENCIAS EN FORMA DE PIRÁMIDES INVERTIDAS”.....	53
10. ACTIVIDAD PROPUESTA No. 4 “SECUENCIAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS”.....	57
11. ACTIVIDAD PROPUESTA No. 5 “SECUENCIAS DE TRIÁNGULOS Y ROMBOS”.....	60
12. ACTIVIDAD PROPUESTA No. 6 “SECUENCIAS DE TRIÁNGULOS Y CUADRADOS”.....	63

DIFICULTADES QUE SE PRESENTAN EN LOS ESTUDIANTES AL TRABAJAR PROCESOS DE GENERALIZACIÓN

Las siguientes son algunas de las dificultades que se evidenciaron en la aplicación de la prueba piloto en los estudiantes al desarrollar procesos de generalización:

- ❖ No llegar al lenguaje simbólico (sistema de signos con significado) y quedarse en un tipo de lenguaje retórico (natural) o un lenguaje sincopado (con abreviaturas), al tratar de generalizar y formalizar un patrón.
- ❖ Comenzar la primera etapa del proceso de generalización debido a que no han tenido un acercamiento previo al estudio de patrones con representaciones geométricas.
- ❖ La actividad a desarrollar contenga muchos elementos en la presentación de la configuración geométrica y les resulte difícil de relacionar o identificar para poder llegar a generalizar y modelar un patrón.

RECOMENDACIONES GENERALES PARA ÉL MAESTRO:

Apoyados en la experiencia de la actividad piloteada y el uso del Geoplano Cuadrado; hacemos unas recomendaciones que pueden ser importantes a la hora de trabajar en el aula procesos de generalización:

- ❖ No trabajar el proceso de generalización de manera individual; pues al no poder interactuar saberes con otros compañeros, se le puede bloquear y desmotivar para realizar la actividad.
- ❖ Tampoco es conveniente formar grupos de más de cuatro estudiantes porque se distraen fácilmente y les es más difícil ponerse de acuerdo en sus conjeturas.
- ❖ Tomar desde el inicio el control de la clase, dando pautas de disciplina y respeto. No permitir que los estudiantes usen el Geoplano cuadrado y las bandas elásticas en cosas ajenas a las que propone la actividad; pues se pierde tiempo valioso y no se logran los objetivos de la clase.

OTRAS RECOMENDACIONES PARA EL MAESTRO:

- ❖ El docente debe ser innovador en sus clases, apoye la experimentación y el uso del Geoplano para fortalecer los conocimientos de la enseñanza del álgebra escolar.
- ❖ Planificar los tiempos de la clase para que el aprendizaje sea más efectivo.
- ❖ Planear las actividades lo suficientemente interesantes, acordes a las capacidades de los estudiantes, con un buen soporte pedagógico y didáctico.
- ❖ El docente no debe ser un informador del saber sino en un orientador, facilitador y animador del proceso de generalización en los estudiantes.

CONCEPTOS PREVIOS A TENER EN CUENTA

FIGURA: Las figuras son elementos geométricos que ocupan cierto espacio y que podrían definirse esencialmente como un conjunto de puntos confluyentes en el mismo lugar. Las figuras siempre son determinadas por su límite natural y eso es lo que señala el espacio que ocupan además de señalar el espacio donde una nueva figura puede aparecer.

REGULARIDAD: Regularidad es la condición de aquello que es regular lo cual se ajusta a un cierto orden, mantiene una determinada frecuencia o resulta de calidad media o no tan buena.

SECUENCIA: Se denomina secuencia a un determinado conjunto de elementos que se ordenan en una determinada sucesión, esto es, uno detrás de otros o uno delante de otros

PATRÓN: El término patrón se refiere a algo que se repite constantemente. En Matemáticas, se habla de patrón como algo que puede ser descrito con la formalidad que la Matemáticas requiere.

FÓRMULA: Expresión (alfanumérica) compuesta por letras y en otras casos dotada de letras y números convenida, breve, precisa y exacta, con la que se dice una cosa o se realiza un acto social o de comunicación.

NÚMERO CUADRADO: Un número cuadrado en Matemáticas es un entero que es el cuadrado de algún otro; dicho de otro modo, es un número cuya raíz cuadrada es un número natural. Un número entero positivo que no tiene divisores cuadrados.

CONSTANTE: En general, una constante es un valor de tipo permanente, ya que no puede modificarse, al menos no dentro del contexto o situación para el cual está.

VARIABLE: En matemáticas y en lógica, una variable es un símbolo constituyente de un predicado, fórmula, algoritmo o de una proposición. El término «variable» se utiliza aun fuera del ámbito matemático para designar una cantidad susceptible de tomar distintos valores numéricos dentro de un conjunto de números especificado.

PREGUNTAS Y POSIBLES RESPUESTAS A LOS ESTUDIANTES EN EL DESARROLLO DE LA PRUEBA PILOTO SOBRE LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN USANDO EL GEOPLANO CUADRADO

Desde el análisis que arrojó el desarrollo de la prueba piloto titulada “Secuencia de Cuadrados”, expresamos:

La aplicación de esta prueba nos brindó herramientas necesarias para sacar algunas conclusiones y anticiparnos a algunas posibles respuestas que manifiestan los estudiantes cuando se les cuestiona sobre alguna práctica. Hemos notado que los estudiantes cuando no han estudiado cierto tema y no cuentan con los recursos necesarios para dar una respuesta lógica sobre lo que trabajamos que fue generalización de patrones a partir de secuencias de cuadrados representadas en el geoplano cuadrado, constantemente recurrían a lo que nombramos razonamiento inductivo.

El razonamiento inductivo, es una técnica que usamos a partir de nuestras experiencias y observaciones para sacar conclusiones sobre lo que sucederá en el futuro. Las primeras veces que dimos la secuencia de cuadrados y pedíamos cual era la secuencia siguiente en la tabla ver página 20, eventualmente, decidimos que este patrón continuaría es una manera importante de descubrir cosas nuevas en matemáticas.

Además de evidenciar las etapas de generalización, otro aspecto que nos propusimos fue que los estudiantes a través del material logran generalizar, es decir, de forma simbólica y de tipo enunciado para poder extraer lo que los niños habían comprendido de la actividad; realizamos algunas preguntas con el fin de observar si en verdad asimilaron y entendieron la actividad entre las respuestas que recibimos transcribimos algunas de ellas.

Preguntas y respuestas por parte de los estudiantes:

- Profesor Edinson: *“¿una pregunta cuando ustedes llenaron las casillas en donde no están representadas en el geoplano es importante tener el geoplano para poder llenar esa tabla?”*
- Estudiante 1: *“pues yo creo que para los primeros ejercicios nos podemos dar cuenta que se trata de una secuencia”*
- Profesor Edinson: *“¿entonces no es importante tener el geoplano?”*

- Estudiante 2: *“es importante tener las primeras, guiarnos y hacer las siguientes secuencias”.*
- Estudiante 1: *“para conocer la secuencia de las primeras figuras sí. Como para guiarnos”.*
- Estudiante 2: *“pues es necesario como para verificar o estar seguro si la fórmula está funcionando o funciona para eso creo que es necesario”.*
- Estudiante 2: *“¿cómo sería la fórmula?”* ver página 20 fila 5
- Estudiante 3: *“sería restar una”.*
- Estudiante 2: *“La fórmula sería n minúscula”*
- Profesor Edinson: *“listo entonces que fue lo que hicieron para concluir en la variable y”* ver página 20 fila 5.
- Estudiante 2: *“bueno nosotros lo que hicimos fue observar la cantidad de puntillas inicial, es el valor de la figura donde termina la puntilla inicia otro espacio entonces sería un espacio menos y quedaría el mismo valor inicial.”*

Estas preguntas y formas de respuestas fueron tomadas de los anexos del trabajo con la finalidad de evidenciar que los estudiantes en muchos casos si generalizaron, en ocasiones de forma inductiva.

Para poder generalizar los estudiantes aplicaron básicamente tres pasos como se detallan a continuación:

- 1.) Observa las secuencias de cuadrados buscando similitudes y diferencias por su forma y tamaño.
- 2.) Luego, generalizaron estas observaciones, tomando apuntes sobre algunos ejemplos y suponiendo que todos los demás ejercicios funcionarían de la misma manera. En este caso, generalizar significa que asumieron que los patrones se repetían.
- 3.) Finalmente formaron algunas conjeturas, es básicamente un intento de obtener una conclusión sobre los ejemplos basados en su generalización. Las conjeturas no han sido probadas como correctas o incorrectas, y mientras que no sólo estemos adivinando, todas las conjeturas valen la pena tenerlas en cuenta.

En la socialización de la prueba piloto, se desecharon algunas conjeturas planteadas por parte de los estudiantes.

COMO EVALUAR LA ACTIVIDAD

La actividad se realiza individualmente o en grupos, siendo necesario guiar a los estudiantes en todo momento, resolviendo dudas y cuestionando respuestas; podría ser una forma efectiva de evaluar la actividad.

Al final de la aplicación de la prueba, se propone una socialización en común de las soluciones, de las construcciones y la realización colectiva de la tabla en la pizarra; a partir de los aportes del alumnado, permitiendo las discusiones y las críticas constructivas entre los participantes; esta sería otra forma distinta de evaluar la tarea trabajada en clase.

Como actividad final, los diferentes equipos podrán intercambiar los trabajos y con la orientación del maestro, los estudiantes pueden evaluar las pruebas entre sí. Otra forma de evaluar la tarea sería autonomía del maestro.

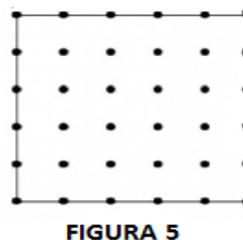
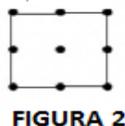
ACTIVIDAD PROPUESTA No. 1

“SECUENCIA DE CUADRADOS”

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el Geoplano Cuadrado.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.

PROCEDIMIENTO: Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el Geoplano Cuadrado las siguientes figuras correspondientes a una secuencia de cuadrados.



1. Los cuadrados anteriores se construyeron siguiendo un patrón. Como pueden ver no aparece la **FIGURA 3** y la **FIGURA 4**. Ustedes deben de acuerdo a sus observaciones, construirlas en el geoplano, de acuerdo a la regularidad presentada.
2. Completen las cantidades numéricas para cada una de las casillas vacías de cada fila en la **TABLA No. 1**, de acuerdo a lo que observen y puedan deducir en las diferentes construcciones de la secuencia de cuadrados.
3. En la última columna, donde aparece la letra n , cada equipo deberá encontrar para cada fila de la tabla, una fórmula o término general, que funcione para conocer el resultado en cualquier posición que se desee hallar; en caso que no lo puedan realizar continúen con la actividad e inténtenlo más tarde con la asesoría del profesor.

Nota: Los ejemplos mostrados en la tabla, les serán de gran ayuda para contestar este punto

LETRAS \ FIGURA		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
									...				
u	NÚMERO DE PUNTILLAS EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	2	3	4						11			n + 1
v	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8		16							400	
w	NUMERO DE LADOS EN EL CUADRADO	4	4										
x	NÚMERO DE PUNTILLAS AL INTERIOR DEL CUADRADO	0	1	4				36					
y	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	1	2										
z	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8										4n

TABLA No. 1 - GENALIZACIÓN PARA SECUENCIAS DE CUADRADOS

4. Escriban al frente de cada letra, con sus propias palabras, el patrón o regularidad que encontraron, para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas vacías para cada fila de la tabla anterior; de acuerdo a la secuencia de los cuadrados.

u: _____

v: _____

w: _____

x: _____

y: _____

z: _____

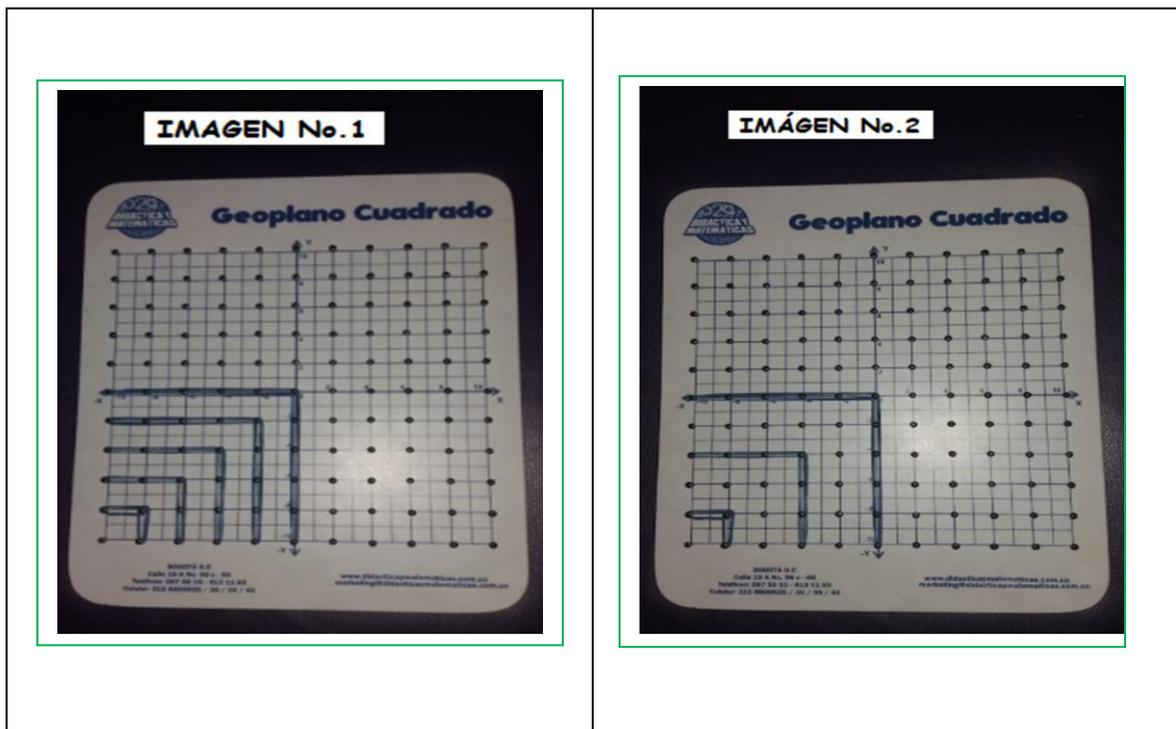
ACTIVIDAD PROPUESTA No. 2

“SECUENCIA DE ESCUADRAS EN EL GEOPLANO”

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el Geoplano cuadrado.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.

PROCEDIMIENTO: Observen las dos imágenes siguientes detallando sus similitudes y diferencias.



1. Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano la secuencia de escuadras (\rightarrow) de la **IMAGEN No. 1**.
2. Completen las casillas vacías de la fila correspondiente a la letra “p” en la tabla No. 2, con las cantidades numéricas, de acuerdo a las apreciaciones observadas en las escuadras construidas sobre el geoplano.

Nota: Tengan en cuenta que la figura 1 en la tabla, corresponde en la **IMAGEN No. 1**, a la primera escuadra (\neg) que aparece abajo y a la izquierda del geoplano. La figura 2 es la escuadra que le sigue, y así sucesivamente.

3. Utilizando de nuevo la **IMAGEN No. 1**, comiencen a sumar la primera puntilla suelta con el número de puntillas que forman la primera escuadra; en este caso, $1 + 3 = 4$. Luego, este resultado lo suman con el número de puntillas de la siguiente escuadra, en este caso $4 + 5 = 9$; y así sucesivamente. Vayan escribiendo el resultado en cada una de las casillas vacías de la tabla No. 2, correspondientes a la fila de la letra “q”.
4. Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano la secuencia de escuadras (\neg) de la **IMAGEN No. 2**.
5. Escriban en las casillas vacías de la fila correspondiente a la letra “r” de la tabla No. 2, las cantidades numéricas correspondientes a lo que la variable “r” indica y ustedes observan sobre el geoplano.

Nota: Tengan en cuenta que la figura 1 en la tabla, corresponde en la **IMAGEN No. 2**, a la primera escuadra (\neg) que aparece abajo y a la izquierda del geoplano. La figura 2 es la escuadra que le sigue, y así sucesivamente.

6. Utilizando el esquema de escuadras de la **IMAGEN No. 2**, encuentren los resultados de contar el número de puntillas que forman cada escuadra y escriban el dato en las casillas vacías correspondientes a la fila de la variable “s”.
7. En la última columna de la tabla No. 2, donde aparece la letra n, cada equipo deberá encontrar para cada fila de la tabla, una fórmula o término general, que funcione para conocer el resultado en cualquier posición que se desee hallar; en caso que no lo puedan realizar continúen con la actividad e inténtelo más tarde con la asesoría del profesor.
8. Escriban al frente de cada letra: **p, q, r, s**, con sus propias palabras, el patrón o regularidad que encontraron, para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas vacías para cada fila de la tabla No. 2. “Generalización para secuencia de escuadras en el geoplano”

p: _____

q: _____

r: _____

s: _____

LETRAS \ FIGURA		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
									...				
p	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA EN LA IMÁGEN NO. 1	3	5	7							41		$2n + 1$
q	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS PARA LA SUMA ENTRE LA PRIMERA PUNTILLA SUELTA Y EL NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN LA PRIMERA ESCUADRA, LUEGO ÉSTE RESULTADO SUMADO CON EL NÚMERO DE PUNTILLAS DE LA SEGUNDA ESCUADRA Y ASÍ SUCESIVAMENTE, EN LA IMAGEN No. 1	1	4	9	16			49		100			
r	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE SE ENCUENTRAN ENTRE DOS ESCUADRAS CONSECUTIVAS. EN LA IMAGEN No. 2	5	9	13						41			
s	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA, EN LA IMAGEN No. 2	3	7	11								399	

TABLA No. 2 – GENERALIZACIÓN PARA SECUENCIA DE ESCUADRAS EN EL GEOPLANO

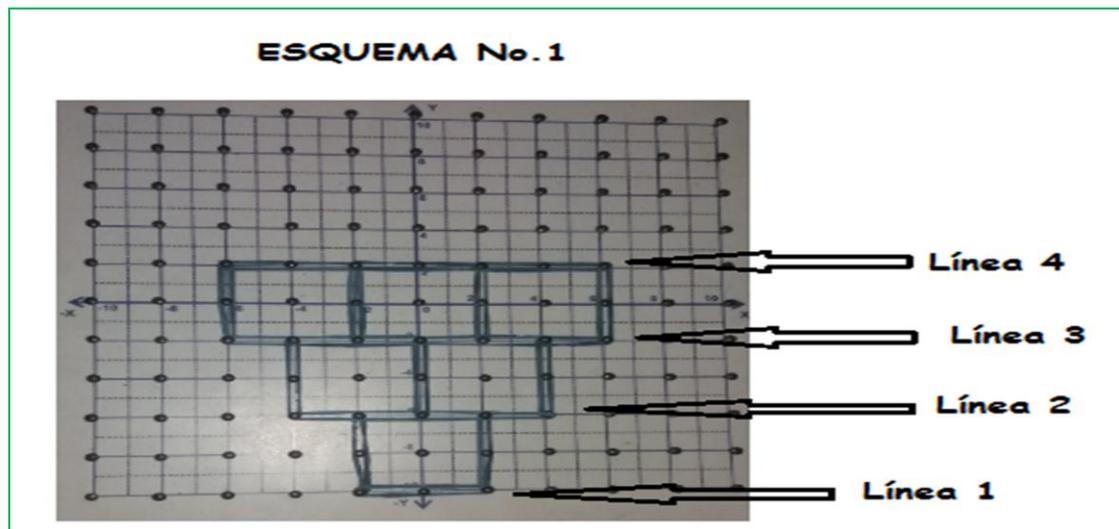
ACTIVIDAD PROPUESTA No. 3

“SECUENCIAS EN FORMA DE PIRÁMIDES INVERTIDAS”

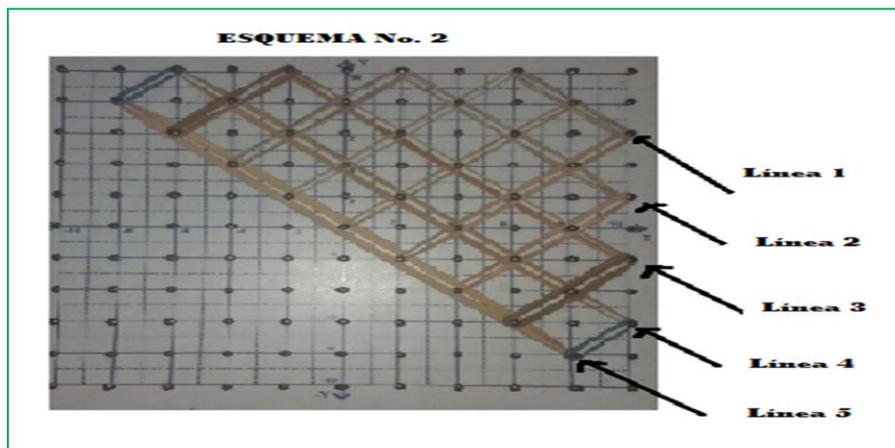
OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el geoplano cuadrado.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.

PROCEDIMIENTO:



1. Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano, la secuencia en forma de pirámides invertidas, que se observa en el **ESQUEMA No. 1**
2. En la tabla No. 3, escriban en cada casilla vacía para la fila de la letra “g”, el número de puntillas que se encuentran dentro de los cuadrados que se forman, sobre cada una de las líneas numeradas en orden ascendente, del **ESQUEMA No. 1**.
3. En el **ESQUEMA No. 1**, cuenten el número de lados verticales, en los cuadrados formados sobre cada línea numerada consecutivamente y escriban el dato, en la tabla No. 3, en las casillas vacías de la fila de la letra “h”.
4. Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano, la figura que se observa en el **ESQUEMA No. 2**



5. En la tabla No. 3, escriban en cada casilla vacía para la fila de la letra **t**, el número de puntillas que se encuentran dentro de los cuadrados que se forman debajo de cada línea diagonal numerada consecutivamente, **en el ESQUEMA No. 2**

6. Encuentren las fórmulas para el término enésimo o general (se ubican en las casillas de la última columna de la tabla N. 3), de tal manera que funcionen para poder conocer el resultado en cualquier posición que se desee hallar, en caso que no lo puedan resolver continúen con la actividad e inténtelo más tarde con la ayuda del profesor.

Escriban con sus propias palabras, al frente de cada una de las letras **g, h y t** la manera como encontraron el patrón o regularidad para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas para cada fila de la tabla N. 3, secuencia en forma de pirámides invertidas.

g : _____

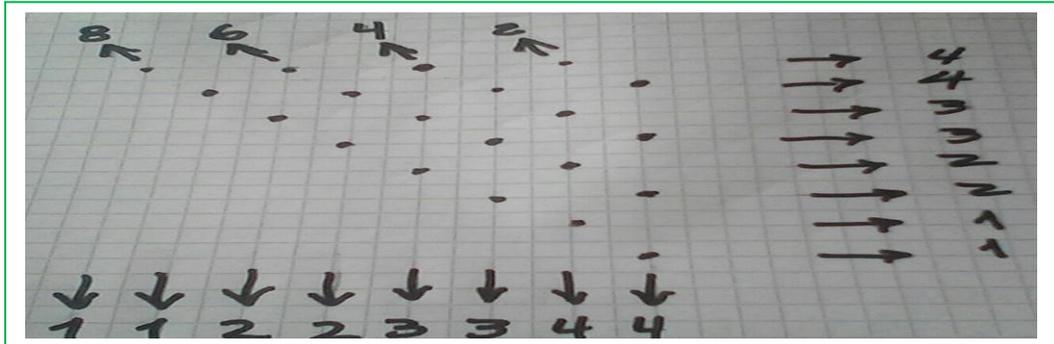
h : _____

i : _____

LETRAS \ FIGURA		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
									...				
g	NÚMERO DE PUNTILLAS DENTRO DE LOS CUADRADOS FORMADOS SOBRE CADA LÍNEA NUMERADA CONSECUTIVAMENTE. (Esquema .1)	1	2						8				
h	NÚMERO DE LADOS VERTUCALES VERTICALES PARA LOS CUADRADOS FORMADOS SOBRE CADA LÍNEA CONSECUTIVA. (Esquema .1)	2	3						8				
i	NÚMERO DE PUNTILLAS DENTRO DE LOS CUADRADOS FORMADOS DEBAJO DE CADA LÍNEA DIAGONAL. (Esquema .2)	2	4						16				

TABLA N.3, GENERALIZACIÓN SECUENCIAS EN FORMA DE PIRÁMIDES INVERTIDAS.

CURIOSIDADES DEL ESQUEMA N. 2



Al sumar el número de puntillas vertical y horizontal Y hacer el siguiente análisis podemos llegar a la tabla del dos, así.

1	1	2	2	3	3	4	4
.	2 veces 1	=	2 x 1 = 2				
.	2 veces 2	=	2 x 2 = 4				
.	2 veces 3	=	2 x 3 = 6				
.	2 veces 4	=	2 x 4 = 8				

Otra curiosidad que se puede ver si al tomar los resultados: 1 1 2 2 3 3 4 4 y sumamos por parejas de dígitos iguales y después los multiplicamos de la misma forma, obtenemos resultados para los números pares y los números cuadrados. Veamos.

1+1=2	1x1=1
2+2=4	2x2=4
3+3=6	3x3=9
4+4=8	4x4=16
.	.
.	.
.	.
NÚMEROS PARES	NÚMEROS CUADRADOS
2n para $n \in \mathbb{Z}^+$	n^2 para $n \in \mathbb{Z}^+$

ACTIVIDAD PROPUESTA No. 4

“SECUENCIAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS”

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el geoplano cuadrado.

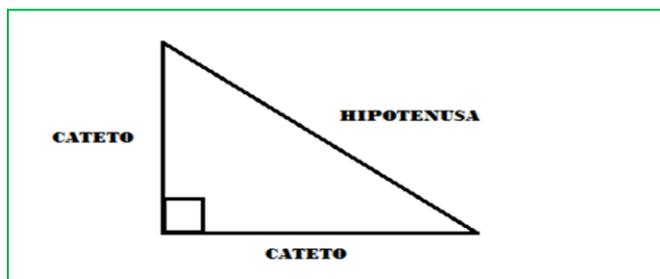
OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.

PROCEDIMIENTO:

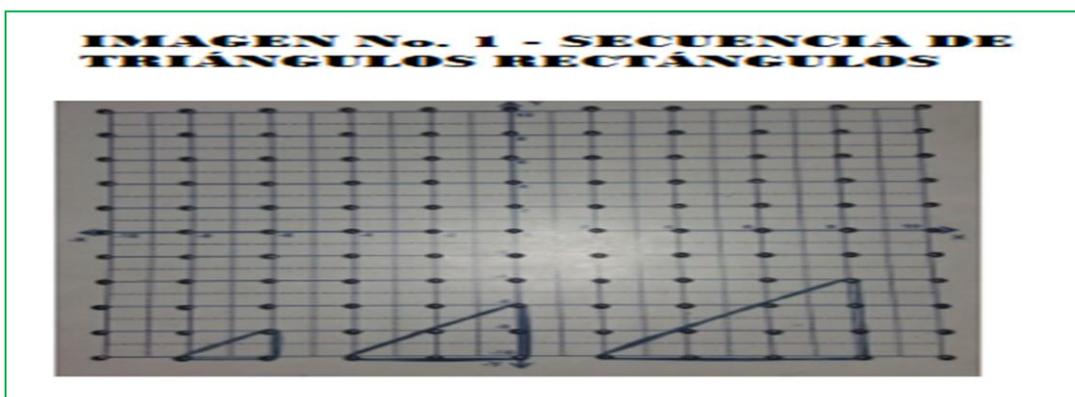
Para esta actividad se debe tener claro el concepto de cateto e hipotenusa.

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene en su interior un ángulo con una amplitud igual a 90 grados (90°); llamado ángulo recto.

Los lados del triángulo que forman el ángulo recto, se llaman catetos, y el lado de mayor longitud opuesto al ángulo recto, se denomina hipotenusa, como podemos apreciarlo en la siguiente figura:



Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en su geoplano cuadrado las siguientes figuras correspondientes a una secuencia de triángulos rectángulos.



1. E
|
orde
n de
los
trián
gulo
s
para
llena
r la
tabl

a No. 4 es de menor a mayor tamaño. Escriban las cantidades numéricas

para cada una de las casillas vacías, en las filas correspondientes a las letras **f, h, j, k**; de acuerdo a lo que cada letra solicita conocer, lo que observen y puedan deducir, en las diferentes construcciones en el geoplano para la “Secuencia de Triángulos Rectángulos”.

2. En la última columna de la tabla No. 4, cada equipo de estudiantes deberá encontrar una fórmula o término general que funcione para conocer el resultado de cualquier posición que se desee hallar, de acuerdo a lo que cada letra solicita conocer. En caso de no poderlo hallar, deberán intentarlo de nuevo con la asesoría del profesor.
3. Escriban con sus propias palabras al frente de cada letra: **f, h, j, k**; la manera como descubrieron el patrón para cada una de las secuencias:

f: _____

h: _____

j: _____

k: _____

4. A los resultados obtenidos en el ejercicio propuesto para la letra **j**, se les conoce como sucesión de los números triangulares. Queda como propuesta para que el maestro trabaje con los estudiantes en el geoplano, el análisis de una de las propiedades de los números triangulares: **“La suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado perfecto”**.

LETRAS \ TRIÁNGULOS		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
									...				
f	NÚMERO DE PUNTILLAS EN UN SOLO CATETO DEL TRIÁNGULO	2	3	4									n + 1
h	NÚMERO DE PUNTILLAS EN LOS DOS CATETOS DEL TRIÁNGULO	3	5			11							
j	NÚMERO DE PUNTILLAS EN LOS TRES LADOS DEL TRIÁNGULO	3	6	9									
k	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS EN LOS TRES LADOS Y AL INTERIOR DEL TRIÁNGULO	3	6	10			28				231		$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

TABLA No. 4 – GENERALIZACIÓN DE SECUENCIAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

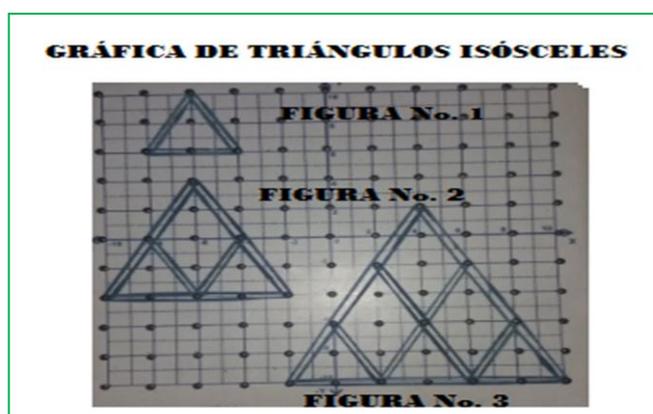
ACTIVIDAD PROPUESTA No. 5

“SECUENCIAS DE TRIÁNGULOS Y ROMBOS”

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el geoplano cuadrado.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.

PROCEDIMIENTO: Observe de manera cuidadosa cada uno de los detalles de las tres figuras correspondientes a la secuencia de triángulos isósceles



1. Construyan en el geoplano de manera similar, cada una de las tres figuras mostradas en la gráfica anterior, usando las bandas elásticas.
2. Completen la tabla No. 5, escribiendo los valores en las casillas vacías para cada fila, correspondientes a las indicaciones propias de cada letra: **a**, **b**, **c**, **d** y **m**.

Encuentren las fórmulas para el término enésimo o general (se ubican en las casillas vacías de la última columna de la tabla No. 5), de tal manera que funcionen, para poder conocer el resultado en cualquier posición que se desee hallar; en caso que no lo puedan resolver continúen con la actividad e inténtelo más tarde con la asesoría del profesor.

3. Expliquen en forma escrita y de manera concisa, como encontraron cada una de las reglas de generalización o patrones, para poder conocer las cantidades correspondientes a las indicaciones propias de cada letra:

a : _____

b : _____

c : _____

d : _____

m : _____

LETRAS \ FIGURAS		1	2	3	4	5	6	7	8...	10	20	100	n
		a	NÚMERO DE PUNTILLAS EN LOS TRES LADOS DEL TRIÁNGULO MAYOR.	4	8					28			
b	NÚMERO DE TRIÁNGULOS PEQUEÑOS DENTRO DE CADA TRIÁNGULO MAYOR	0	2	3									
c	NÚMERO DE ROMBOS DENTRO DE CADA TRIÁNGULO MAYOR	0	2	3									
d	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS SUeltas AL INTERIOR DEL TRIÁNGULO MAYOR	1	5	12									
m	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS SUeltas AL INTERIOR DE LOS ROMBOS DE CADA TRIÁNGULO MAYOR	0	3										

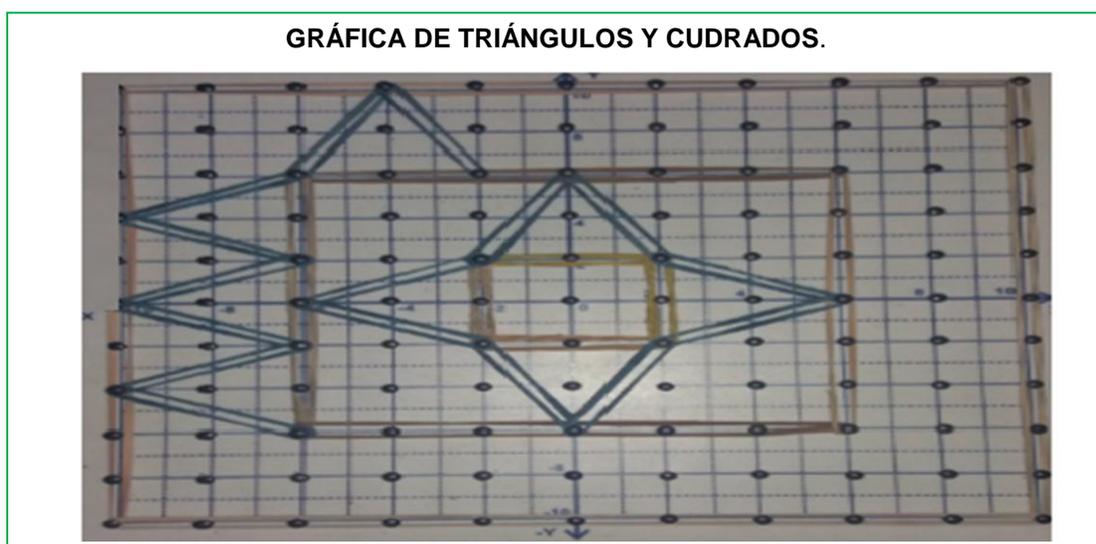
TABLA No. 5 - GENERALIZACIÓN SECUENCIAS DE TRIÁNGULOS Y ROMBOS.

ACTIVIDAD PROPUESTA No. 6

“SECUENCIAS DE TRIÁNGULOS Y CUADRADOS”

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el geoplano cuadrado.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.



PROCEDIMIENTO:

1. Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano cuadrado, la gráfica anterior compuesta de triángulos y cuadrados.
2. Complete las casillas vacías de cada fila de la **TABLA No. 6**, escribiendo la cantidad correspondiente para las indicaciones propias de cada letra i, j, ñ, g.

Nota: El orden comienza desde adentro hacia afuera; se inicia por los triángulos construidos sobre los lados del cuadrado más pequeño hacia los triángulos construidos sobre los lados del cuadrado que le sigue en mayor tamaño y así sucesivamente.

Además tengan en cuenta que para contabilizar un triángulo; es esencial que uno de los lados de éste, debe ser un lado o parte del lado del cuadrado.

LETRAS \ TRIÁNGULOS O CUADRADOS		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
									...				
i	NÚMERO DE PUNTILLAS ALREDEDOR DE CADA CUADRADO.	8		40									
j	NÚMERO DE PUNTILLAS SUELTAS AL INTERIOR DE CADA CUADRADO.	1	17										
ñ	NÚMERO DE TRIÁNGULOS EN UN LADO DEL CUADRADO.	1	3										
g	NÚMERO DE TRIÁNGULOS ALREDEDOR DE LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO.	4	12										

TABLA No. 6 – GENERALIZACIÓN DE TRIÁNGULOS Y CUADRADOS

3. Expliquen en forma escrita y de manera concisa como encontraron cada una de las reglas de secuencias o patrones para poder conocer las cantidades correspondientes a las indicaciones propias de cada letra:

i : _____

j : _____

ñ : _____

g : _____

EJERCICIOS ADICIONALES A LOS PROCESO DE GENERALIZACIÓN

1. Encierre en un círculo la opción correspondiente a la respuesta correcta. El término general para los números primos, $A = \{1,3,5,7,9,11,13,\dots\}$ es:
 - A. $2n + 1$
 - B. $2n - 1$
 - C. $3n - 2$
 - D. $2n + 3$
2. Encierre en un círculo la opción correspondiente a la respuesta correcta:
 - A. La sumatoria de números impares consecutivos producen números cuadrados.
 - B. La sumatoria de números impares consecutivos producen números pares.
 - C. La sumatoria de números impares consecutivos producen números primos.
 - D. La sumatoria de números impares consecutivos producen números de potencias de diez
3. Encierre en un círculo la opción correspondiente a la respuesta correcta. El conjunto para los cinco primeros términos de la sucesión n^2 es:
 - A. $n^2 = \{2,4,6,8,10\}$
 - B. $n^2 = \{1,4,9,16,25\}$
 - C. $n^2 = \{4,9,16,25,36\}$
 - D. $n^2 = \{0, 2, 4, 9, 16\}$.

“El geoplano cuadrado es un excelente material didáctico para desarrollar procesos de generalización en nuestros estudiantes, sin importar su edad.”

ANEXOS

A continuación se presentará el libreto sobre las diferentes intervenciones que se presentaron durante la aplicación de la prueba piloto. Para realizar la siguiente transcripción se analizaron cuatro videos con contenido de audio e imágenes; de los cuales se tomó registro durante el transcurso de la prueba. Las frases manifestadas por los estudiantes y profesores no se parafrasearon se transcribieron sin cambio alguno.

Las intervenciones que se registraron en los videos corresponden a:

participantes	Observaciones
Estudiante 1:	Es la niña que manipuló por más tiempo el Geoplano.
Estudiante 2:	Es la niña encargada de escribir en el grupo.
Estudiante 3:	Es el único integrante hombre del grupo.
Profesor Edinson:	Es el encargado de tomar registro de los videos.
Profesor Ubaldo:	Es el maestro que generalmente trabaja con los niños.

- Estudiante 1: *“¿cómo encontramos la figura anteriormente como las encontramos o sea.....?”*
- Profesor Edinson: *“no entiendo la pregunta léela nuevamente”*
- Estudiante 1: *“O sea es que nos están dando la figura 1,2 y 5 nos toca encontrar la 3 y 4. O sea que la 3 sería de 4 y la figura 4 sería de 5”*
- Profesor Edinson: *“tienen que seguir la secuencia. Tienen que mirar la secuencia por ejemplo, contar los lados, sí.”*
- Estudiante 1 y estudiante 2: *“ en coro, por eso 1,2,3, 4 y esto es 5”*
- Profesor Edinson: *“ háganle”*
- Estudiante 1: *“desarma esto”*
- Estudiante 2: *“entonces sería así: finca 1, finca 2, finca 3, finca 4 y finca 5”*
- Estudiante 2: *“encierre en un círculo la respuesta correcta, de acuerdo a los dos conceptos anteriores; para la secuencia de cuadrados se podría deducir entonces que: primero una constante sería: ”*
 - a.) *“El número de puntillas en un lado de los diferentes cuadrados”*
 - b.) *“El número de puntillas al interior de los diferentes cuadrados”*
 - c.) *“El número de lado de cada uno de los cuadrados”*

- d.) *“El número total de puntillas alrededor de cada uno de los cuadrados”*
- Estudiante 1: *“yo creería que es la c), porque dice el número de lados en cada uno de los cuadrados”*
 - Estudiante 2: *“el número de los lados de los cuadrados varía”*
 - Profesor Edinson: *“¿qué no entienden, la pregunta o la palabra? ¿Qué no entienden?”*
 - Estudiante 2: *“la pregunta”*
 - Estudiante 1: *“no la pregunta es que nos están pidiendo que busquemos la constante. Entonces pues esta dice: es el número de puntillas en un lado de los diferentes cuadrados y si varía porque acá hay 1, 2,3 acá hay 4x4 entonces necesitamos algo que sea constante.”*
 - Profesor Edinson: *“aja”*
 - Estudiante1: *“sería, esta no”*
 - Profesor Edinson: *“recuerden que los lados son estos, no.”*
 - Profesor Edinson: *¿qué dice el inciso b.)?. El número de puntillas al interior de los diferentes cuadrados ¿qué pasa con las puntillas al interior de los cuadrados varía o no varía? ”*
 - Estudiante 1: *“varía ”*
 - Estudiante 2: *“varía”*
 - Profesor Edinson: *“ah, ah o sea que varía. Sigamos leyendo”*
 - Estudiante 2: *“el número de lado de cada uno de los cuadrados varía porque acá hay 1, acá hay 2, acá hay 3, acá hay 4”*
 - Profesor Edinson: *“aja y el d.)”*
 - Estudiante 2: *“el número total de puntillas alrededor de cada uno de los cuadrados”*
 - Profesor Edinson: *“esa pregunta d.) ¿con quién se parece? ”*
 - Coro estudiante 1 y 2: *“a la A.)”*
 - Profesor Edinson : *“el número de puntillas en un lado de los diferentes cuadrados”*
 - Profesor Edinson: *“¿en fin qué es lo que preguntan?”*
 - Estudiante 2: *“¿qué es una constante?”*
 - Profesor Edinson: *“¿para ustedes de esas 4 respuestas cuál es la correcta o cuál es la que más se acerca?”*
 - Estudiante1: *“la a.)”*
 - Estudiante1: *“la a) porque dice que el número de puntillas en un lado de los diferentes cuadrados”*
 - Estudiante 2: *“si yo creo que sería la a.)”*
 - Estudiante 2: *“completa las cantidades numéricas para cada una de las casillas vacías de la siguiente tabla, de acuerdo a lo que observen y puedan deducir en las diferentes construcciones de cuadrados.”*
 - Profesor Edinson: *“¿entienden qué es lo que van hacer?”*
 - Estudiante 1: *“no”*
 - Profesor Edinson: *“aquí lo que van hacer es básicamente lo siguiente; completa las cantidades numéricas para cada una de las casillas vacías de la siguiente*

tabla, de acuerdo a lo que observen y puedan deducir en las diferentes construcciones de cuadrados.”

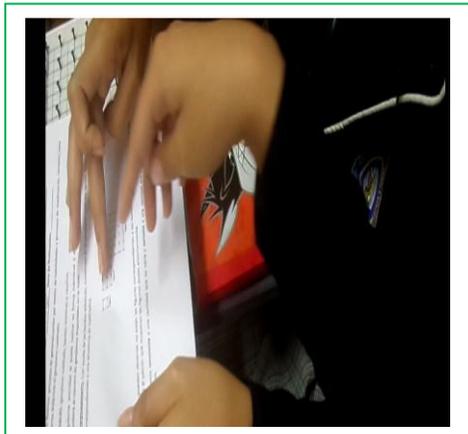
- Estudiante 2: *“serían 4”*
- Profesor Edinson: *“eso es lo que van hacer”*
- Estudiante 2: *“para la cuarta serían 5”*
- Estudiante 1: *“el 7 va con el 8 el 8 con el 9”*
- Estudiante 2: *“¿para la 10 sería...? 11; para la 15 serían 16, para la 100 serían 101”*
- Profesor Edinson: *una pregunta: “¿cuándo ustedes llenaron las casillas, era importante tener el geoplano para poder llenar esa tabla?”*
- Estudiante 1: *“pues yo creo que para los primeros ejercicios nos podemos dar cuenta que se trata de una secuencia”*
- Profesor Edinson: *“aja, entonces no es importante tener el geoplano?”*
- Estudiante 2: *“es importante tener las primeras, guarnos y hacer las siguientes secuencias”*
- Profesor Edinson: *“ya les entendí la idea, entonces ¿entienden en la última casilla que es lo que tienen que hacer?”*
- Estudiante 2: *“¿cómo hallar...?”*
- Profesor Edinson: *“el termino genérico es básicamente buscar un término el cual represente esta secuencia, así como esta acá”*
- Estudiante 1: *“sería uno n porque estamos sumando uno acá”*
- Estudiante 2: *“yo creo que sería n más uno; porque si tu vez acá, la secuencia siempre va uno más n”*
- Profesor Edinson: *“entonces verifiquemos la primera 2+1 tres”*
- Estudiante 1: *“3+1 cuatro; 4+1 cinco, 5+1 seis. 6+1 siete”*
- Profesor Edinson: *“¿ahora en la segunda casilla, qué hay que hacer?”*
- Estudiante 2: *número total de puntillas alrededor del cuadrado”*
- Estudiante 1: *“o sea alrededor”*
- Estudiante 2: *“serían la suma total”*
- Estudiante 2: *“entonces la uno tiene cuatro (4). 1,2,3,4”*
- Estudiante 1: *“la que sigue o sea segunda tiene 8.”*
- Estudiante 2: *“Dos (2) por cuatro (4) ocho (8).”*
- Estudiante 2: *“es como decir, 2x2 cuatro, cuatro por dos, ocho; la tercera 4x3 doce; 4x4 dieciséis”*
- Estudiante 1: *“4x5 da veinte”*
- Estudiante 2: *“4x6 veinte cuatro”*
- Profesor Ubaldo: *“¿y ustedes como van en este? ¿Ya encontraron acá la regularidad?, esa es la fórmula e igual también deben escribirla acá con sus palabras, que representa esa fórmula, ¿de acuerdo? ”*
- Profesor Ubaldo: *“¿están haciendo este ejercicio? dice el número total de puntillas alrededor del cuadrado; la figura uno nos dice que es cuatro; ¿ya verificaron que es 4? ”*
- Estudiante1 y 2: *“sí”*

- Profesor Ubaldo: “¿la figura dos, 8?”
- Estudiante 1: *ya encontramos la fórmula, sería multiplicación*”
- Profesor Ubaldo: *pero bueno hay que llenar las otras casillas que están desocupadas*”
- Profesor Ubaldo: “¿para la 10?”
- Estudiante 1: “*cuarenta*”
- Estudiante Ubaldo: “*está mal la figura 8...*”
- Profesor Ubaldo: “*recuerda que ahí se saltó, si estábamos en el 8 nos saltamos el 9*”
- Estudiante 1: “*es 32*”
- Profesor Ubaldo: “*pues como ustedes ya tienen el patrón pueden decir si verdaderamente era 28. Ojo en el 7 que es la figura 8*”
- Profesor 2: “*¿si está bien esa o les quedo mal?*”
- Estudiante 1: “*está mal*”
- Profesor Ubaldo: “*entonces borran y colocan la que es*”
- Profesor Ubaldo: “*hay que tener mucho cuidado cual es la que se está preguntando*”
- Estudiante 1 y 2: “*En coro: la fórmula es n por cuatro*”
- Estudiante 2: “*¿es n por cuatro?; ¿Le hago el por y le escribo el cuatro?*”
- Profesor Ubaldo: “*¿y en palabras como sería? Es la variable w si ves*”
- Estudiante 2: “*pues encontramos el patrón que sería $nx4$* ”
- Profesor Ubaldo: “*¿tienen que escribir eso para encontrar qué?*”
- Estudiante 2: “*para encontrar la cantidad de puntillas que hay alrededor de la figura*”
- Profesor Ubaldo: “*eso hay que escribirlo para que se vea bien la fórmula*”
- Estudiante 2: “*la fórmula de la secuencia para encontrar la cantidad de puntillas alrededor de cada figura es la multiplicación del valor de la figura inicial de la figura por cuatro (4)*”
- Estudiante 1: “*cuatro por el número de las puntillas*”
- Estudiante 1: “*entonces hagamos la variable x*”
- Profesor Edinson: “*una preguntica: ¿sí verificaron que para esa fórmula se cumple cada una de las casillas?*”
- Estudiante 1 y 2: “*sí*”
- Profesor Edinson: “*bueno continuemos con la que sigue...*”
- Estudiante 2: “*¿en la primera sería...?*”
- Estudiante 1: “*sería sumándole uno*”
- Estudiante 2: “*según la secuencia siempre va uno más adelante; o sea el número de la figura*”
- Estudiante 2: “*si la figura es uno el número más adelante sería dos*”
- Profesor Edinson: “*toca escribir eso*”
- Estudiante 1: “*según la figura va un número más adelante*”
- Estudiante 2: “*la cantidad de puntillas por lados va uno más adelante*”

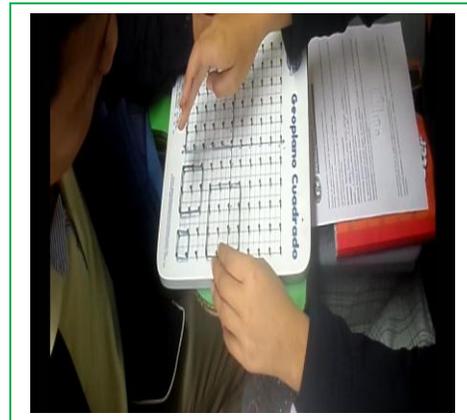
- Profesor Edinson: *“otra cosita, si la idea que ustedes van a escribir no les cabe ahí en el espacio pueden hacerlo al respaldo de la hoja; porque es importante que ustedes escriban todo lo que piensan para el trabajo de análisis que nosotros después vamos a analizar.”*
- Estudiante 2: *“varía el número de puntillas menos el n cuadrado”*
- Estudiante 1: *“¿en la 1 va cero, en la 2 es uno, en la 3 va cuatro, en la 5 son ocho...? No es dieciséis”*
- Estudiante 3: *“en la 4 va nueve”*
- Profesor Ubaldo: *“¿la figura seis?, no la tiene en el geoplano; para eso ustedes tienen el geoplano, si miran lo de acá, ustedes lo pueden hacer, pero si necesitan el geoplano...”*
- Estudiante 1: *“le resta uno”*
- Profesor Edinson: *“pero, pueden hacer miren pueden hacer algo si les da muy difícil encontrar el número pueden representar la figura en el geoplano”*
- Profesor Ubaldo: *“número de puntillas al interior del cuadrado, vamos a ver si es cierto eso. La figura uno le resto uno me da cero, la figura dos le resto uno me da uno, la tres le resto me daría dos, ¿me está dando cuatro está quiere decir, que está bien? No ese no corresponde a la fórmula”*
- Profesor Ubaldo: *“ustedes van hacer esta...”*
- Profesor Ubaldo: *“hagan un cuadrado de 9”*
- Profesor: Ubaldo: *“¿ya tienen 9?”*
- Estudiante 1: *“no ¿nueve u ocho? Y ahí, ¿qué hacemos?, vamos a contar ”*
- Estudiante 1: *“1,2,3,4,5,6,7,8,9, 1,2,3,4,5,6,7,8,9”*
- Estudiante 1: *“8x7 cuarenta y dos (42) ”*
- Estudiante 2: *“entonces sería nueve”*
- Estudiante 1: *“pero se le resta dos a los lados”*
- Estudiante 2: *“serían once, pero se le restan dos a los lados y eso se multiplica”*
- Estudiante 1: *“haber, te explico serían diez, no once, pero se le restan dos serían nueve, entonces, 9x9 ochenta y uno (81) ”*
- Estudiante 2: *“miremos el de ocho”*
- Estudiante 2: *“cuatro menos dos da dos y dos por dos es cuatro, entonces está bien.”*
- Estudiante 2: *“allá, 9x9... ochenta y uno”*
- Estudiante 2: *“quince menos dos trece...trece por trece ciento....”*
- Profesor Edinson: *“la pueden hacer en la parte de atrás para verificar la multiplicación”*
- Profesor Edinson: *“parece como que la encontraron; cuéntenme como hicieron para descubrir esa...”*
- Estudiante 1: *“pues por lógica”*
- Profesor Edinson: *“ por lógica, muy bien me gusta esa palabra”*
- Estudiante 1: *“pues por si nos damos cuenta seis menos dos cuatro por cuatro, dieciséis; siete menos dos cinco 5x5 veinte cinco”*
- Profesor Edinson: *“aja”*

- Estudiante 1: *“nueve menos dos... siete por siete, cuarenta y nueve”*
- Estudiante 1: *“once menos dos nueve, nueve por nueve, ochenta y uno”*
- Estudiante 2: *“creo que la fórmula sería n menos dos elevado a la dos.”*
- Profesor Edinson: *“eso, vayan seguro, a la fija, háganla”*
- Profesor Edinson: *“verifiquen la fórmula a ver si se cumple con la figura uno”*
- Estudiante 1: *“la fórmula sería n menos dos por dos...es que hay algo que no me cuadra allá...”*
- Estudiante 1: *“por lógica, no tendría que haber más puntillas adentro que afuera, tiene que haber más adentro”*
- Estudiante 2: *“qué tal si las contamos 1, 2, 3, 4, 5, 6...”*
- Profesor Edinson: *“¿están verificando la fórmula?”*
- Profesor Edinson: *“¿cómo sería la generalización con palabras?, según lo que hicieron”*
- Estudiante 2: *“el número de la fórmula se le resta dos y la cantidad se multiplica dos veces”*
- Profesor Edinson: *“si no les cabe todo eso pueden escribir en la parte de atrás”*
- Profesor Edinson: *“¿se multiplica dos veces o al cuadrado?”*
- Profesor Edinson: *“otra pregunta, ¿será que para contar el número de puntillas al interior de la figura es importante tener el geoplano?”*
- Estudiante Edinson: *“para conocer la secuencia de las primeras figuras, sí, para guiarnos”*
- Estudiante 2: *“pues es necesario para verificar o estar seguro si la fórmula está funcionando, para eso creo que es necesario”*
- Profesor Edinson: *“o sea que como para conocer la secuencia de las primeras figuras y también para verificar que la fórmula funciona y para lo demás ustedes ya la generalizan ¿eso es lo que me quieren decir?”*
- Estudiante 1: *“aja”*
- Estudiante 2: *“sí”*
- Estudiante 2: *“ahora número de espacio entre una puntilla y otra en un solo lado del cuadrado”*
- Profesor Edinson: *“¿no entienden la pregunta?”*
- Estudiante 2: *“que, ¿cuál es espacio entre cada puntilla?”*
- Estudiante 2: *“acá hay tres”*
- Estudiante 2: *“acá hay uno, dos, tres, y cuatro, allá hay siete”*
- Estudiante 3: *“hay siete”*
- Profesor Edinson: *“aja ¿y esos números que están consiguiendo como los están encontrando, cuéntenme?”*
- Estudiante 2: *“estas puntillas, digamos de la figura cuatro que son cinco puntillas por lados esta puntilla ya no se cuenta por lado más porque es ahí en donde se cierra la figura; entonces como son cinco ya sería un espacio menos quedaría la cantidad de espacio del número de la figura”*
- Profesor Edinson : *“ya”*
- Estudiante 2: *“¿cómo sería la fórmula?”*

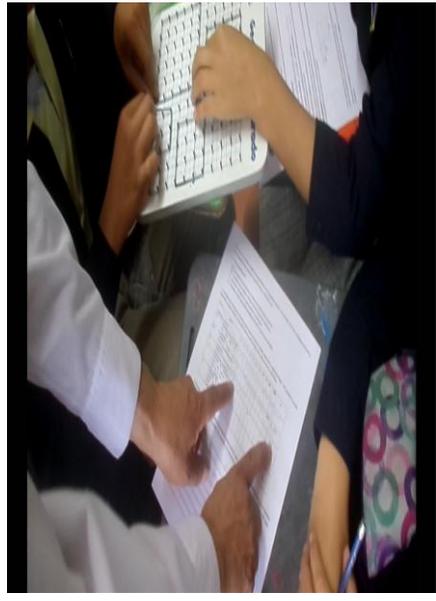
- Profesor Edinson: *“Escríbanla y verifican, pero ahí les dio, eso está bien”*
- Estudiante 2: *“es que no sé cómo escribirla”*
- Profesor Edinson: *“miren los números”*
- Profesor 2: *“voy a recoger ya los trabajo hasta aquí, lo que acabaron de hacer, se acabó la clase”*
- Estudiante 3: *“sería restar una”*
- Estudiante 2: *“La fórmula sería n minúscula”*
- Profesor Ubaldo: *“muchas gracias por trabajar, entréguenme y vamos a socializar.”*
- Profesor Edinson: *“listo, entonces ¿qué fue lo que hicieron para concluir en la variable y?”*
- Estudiante 2: *“bueno nosotros lo que hicimos fue observar la cantidad de puntillas inicial, es el valor de la figura donde termina la puntilla, inicia otro espacio entonces sería un espacio menos y quedaría el mismo valor inicial.”*



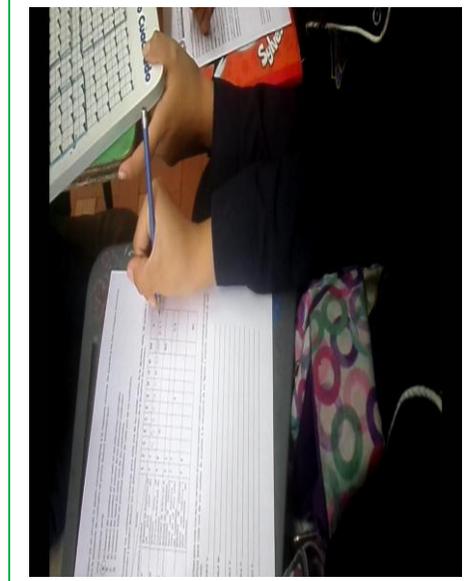
Evidencia 14: reconocimiento de la regularidad Geométrica.



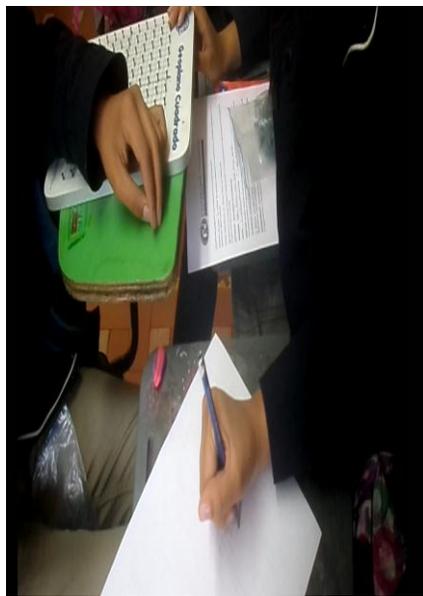
Evidencia 15: construcción de la regularidad en el Geoplano.



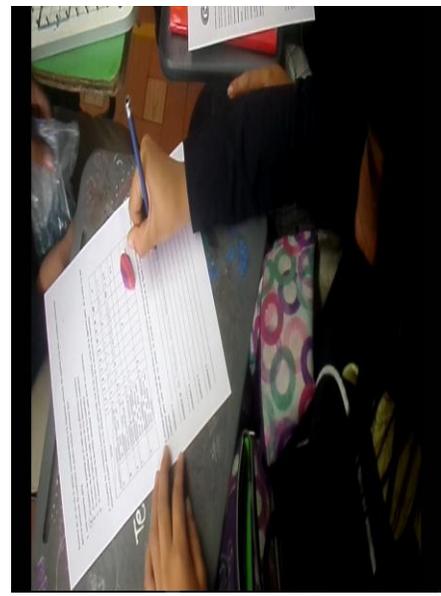
Evidencia 16: comprobando hipótesis.



Evidencia 17: registro de datos.



Evidencia 18: registro de generalización.



Evidencia 19: registro de generalización.

BIBLIOGRAFÍA

- Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1990). *El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría*. Madrid.
- Álvarez, A. (1996). *Actividades Matemáticas con materiales didácticos*. Madrid.
- Esquinas, A. (2008). *Tesis para optar el título de doctor titulada dificultades del aprendizaje algebraico: del simbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. Madrid.
- Godino, J. D. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros*. Granada.
- María, E. C. (2012). *Estrategias usadas por un grupo de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización*. España.
- Mariño, A. (2000). *El Geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la Geometría*. Venezuela.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá, C. (s.f.).
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencia en matemáticas*. Bogotá, C. E.-1. (s.f.).
- Mora, L. (2012). *Generalización en Primaria*. Bogotá D.C.
- Pérez, J (2005). *Tesis para optar el título de magister en educación con énfasis en docencia de las matemáticas la generalización como proceso de pensamiento*. Universidad de Antioquia. Medellín.
- Radford, L. (2003). *Generalización de patrones y formas de pensamiento temprano*.
- Solano, U. y. (2009). *El proceso de Objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde artefactos*.
- Trujillo, P. (2008). *Tesis de grado titulada proceso de generalización que realizan futuros maestros*. Granada España.
- Van, H. (1955). *el geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría*. Venezuela.