

IDENTIFICACIÓN DE LOS NIVELES DE DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES
DE GRADO OCTAVO EN LA REALIZACIÓN DE TAREAS ENMARCADAS EN
EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN

NEIDA JOHANA MORALES
CESIA JUDITH PINEDA COVO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACION MATEMATICA
BOGOTÁ D.C
2016

IDENTIFICACIÓN DE LOS NIVELES DE DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES
DE GRADO OCTAVO EN LA REALIZACIÓN DE TAREAS ENMARCADAS EN
EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN

NEIDA JOHANA MORALES
CESIA JUDITH PINEDA COVO

Trabajo de grado para optar el título de
Especialistas en Educación Matemática

Asesora: Claudia Marcela Vargas Guerrero

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACION MATEMATICA
BOGOTÁ D.C

2016

Nota de aceptación

Jurados

Jurado

Jurado

Bogotá _____

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales se ha requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, damos gracias a Dios por abrirnos las puertas para continuar nuestra formación profesional. Gracias a su ayuda y a nuestro esfuerzo hemos logrado cumplir la meta presupuestada al inscribirnos en la Especialización en educación matemática: logramos ser más integrales en el plano profesional, fortaleciendo las estrategias y didácticas planeadas en nuestro ámbito laboral, para lograr mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de nuestros educandos. Guiando a que nuestros educandos obtengan un mejor aprendizaje a partir de nuevas herramientas en sus procesos académico.

A nuestros esposos e hija, porque siempre nos brindaron su apoyo y comprensión incondicional para que alcanzáramos nuestra meta, sin importar el tiempo que muchas veces los dejamos solos. A nuestras familias, amigos y colegas por la colaboración amable y desinteresadamente que nos brindaron. Para todos ellos, ¡gracias!

Al colegio Colombo- Florida Bilingüe, por permitirnos implementar la propuesta que se reporta en este trabajo de grado. A los estudiantes de grado 8^o de esta institución, por su colaboración y participación en las actividades desarrolladas.

Finalmente, agradecemos a la Universidad Pedagógica Nacional y a nuestras tutoras por encaminarnos a ser cada día mejor, tanto intelectual como profesionalmente, y proporcionarnos diversas experiencias, que nos permitieron fortalecer nuestra práctica docente.

**FORMATO****RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE**

Código: FOR020GIB

Versión: 01

Fecha de Aprobación: -12-2016

Página 6 de 82

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Identificación de los niveles de desempeño de estudiantes de grado octavo en la realización de tareas enmarcadas en el proceso de generalización.
Autor(es)	PINEDA, Cesia, MORALES, Johana
Director	VARGAS, Claudia
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 82p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	DESCRIBIR, FASES, GENERALIZACIÓN, NIVELES DE DESEMPEÑO, REGISTRAR, VER Y VERIFICAR

2. Descripción

Trabajo de grado para optar el título de Especialistas en Educación Matemática en el que se identificaron los niveles de desempeño de diez estudiantes de grado octavo del colegio Colombo Florida Bilingüe, cuando realizan actividades enmarcadas en el proceso de generalización. Para lograr este objetivo se aplicaron dos actividades a las cuales se les realizó el respectivo análisis, identificando cómo fue el proceso de generalización que realizaron los estudiantes; es decir, identificamos cómo ven los estudiantes, cómo describen lo que ven y cómo registran y verifican lo que ven, esto en relación a las fases de generalización.

3. Fuentes

Se consultaron trece documentos entre tesis de pregrado y maestría, libros y artículos de revistas, relacionados con los procesos de generalización. La fuentes consultadas fueron:

Alonso, F., Babero, C., Fuentes, I., Azcarate., Dozagarat, J., Gutiérrez, S. et al. (1993) *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Grupo Azarquiel. Madrid: Síntesis.

Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Un abordaje basado en la geometría. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 16(1), 113-148

Casas. E. (2005) *Álgebra recreativa, procesos básicos para el desarrollo del pensamiento*. Bogotá: Magisterio.

García, Silvia Susana (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años. Tesis Maestría para optar al título de Magister en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Gaitán, L., & Herrera, L. (2013). Ejemplificación de las diferentes fases del proceso de generalización en álgebra en tareas resueltas por estudiantes de aritmética de licenciatura en matemáticas. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1988). *Rutas y raíces hacia el Álgebra (C. Agudelo, Ed. y Trad.)*. Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985)

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN-. (1998), *Lineamientos Curriculares para Colombia*, Bogotá, 1998.

Mora, L. (2012). *Álgebra en primaria*. Documento no publicado, elaborado en el marco del Programa Todos a Aprender del *Ministerio de Educación Nacional*. República de Colombia.

Pérez, J. (2005). La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental. Tesis de maestría, Universidad de Antioquia.

Randford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities*, PNG, 4(2), 37-62.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires. Libros de Zorsal

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NÚMEROS*, (77), 5-34.

Vargas, G. (2013). Modelo de Van Hiele para la Didáctica de la Geometría. *UNICIENCIA*, 27(1), 74-94

4. Contenidos

Este trabajo inicia presentando el planteamiento del problema. Para ello, se delimita la problemática que dio origen a este trabajo de grado, se justifica la pertinencia del estudio realizado y se especifican los objetivos que guiaron a este trabajo.

Luego se presenta el marco teórico que fundamenta este estudio, estructurado de acuerdo a tres aspectos: en el primero se recogen los referentes teóricos que dan cuenta de lo que significa el proceso de generalización, haciendo especial énfasis en las fases del proceso de generalización; en el segundo aspecto se caracterizan las actividades de generalización realizadas con patrones y secuencias, y el último aspecto describe los niveles de desempeño propuestos por García (2011) en relación a las fases de generalización.

En el tercer capítulo se presenta la metodología. Para ello, se efectúa una caracterización de la población y de las actividades desarrolladas y una descripción del proceso de análisis de los resultados obtenidos, con el fin de identificar el nivel de desempeño de los estudiantes en cada una de las etapas de generalización.

Finalmente, el último capítulo presenta las conclusiones que surgieron a partir del análisis realizado en concordancia con los objetivos propuestos inicialmente.

5. Metodología

La metodología se presenta en el tercer capítulo, esta estructurada de acuerdo a cuatro etapas: inicialmente se presenta una descripción de la población con la que se realizaron las actividades propuestas; luego se describe una actividad diagnóstica que se implementó, y que nos permitió mejorar la estructura de las actividades en cuanto al tipo de preguntas que se podían hacer, de tal manera de nos permitieran identificar el proceso realizado por los estudiantes en cada una de las fases de generalización, luego se caracterizan las actividades desarrolladas con sus respectivos propósitos, y finalmente se describe el proceso realizado en el análisis de los resultados obtenidos.

6. Conclusiones

En cuanto al propósito de este trabajo se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- De los cuatro niveles establecidos por García (2011) en el proceso de generalización, se evidenció que los estudiantes de este trabajo, en las dos primeras fases, se encuentran en el nivel III ya que en su mayoría establecen relaciones necesarias entre las partes y describen la forma en que se relacionan las.(ERN, DRP).

- En la tercera fase del proceso de generalización (REGISTRAR) se evidenció que a pesar de que los estudiantes iniciaron en un nivel III, en esta fase predomina el nivel IV, ya que en su mayoría escribieron con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes (ECOS).
- En este estudio solo dos grupos en la fase de VERIFICACION logran comprobar la conjetura manualmente con casos particulares (VCM), no obstante, si bien no se logra la verificación, se habla de la existencia de una generalización.
- Es importante resaltar que en las actividades planteadas, es puesto en manifiesto, la dificultad que tienen los estudiantes para describir y expresar la conjetura observada, tal como lo mencionaron, Cañadas y Susana en sus investigaciones.
- En la primera actividad el 80% de los estudiantes utilizan lenguaje algebraico para escribir sus conjeturas, mientras que en la segunda actividad solo lo expresó el 40%, no obstante, así como se puede hablar de generalización sin verificación, también puede omitirse el uso lenguaje algebraico en la fase REGISTRAR, ya que de acuerdo a la definición que se asumió de generalización no se hace alusión a dicho lenguaje, aunque facilite la expresión de la generalidad.
- De manera general se observó que no necesariamente se debe mantener un mismo nivel de desempeño en cada una de las fases propuestas en el proceso de Generalización.
- En las respuestas suministradas por los estudiantes, se observó que construyen los términos cercanos de las secuencias, sin inconveniente alguno y reportan correctamente la cantidad de cuadros que tenía cada figura en la tabla. Estas acciones enmarcadas en la fase VER propuesta por Mason, son realizadas correctamente e imprescindibles para identificar características entre los elementos de la secuencia.
- Este trabajo nos permitió ampliar nuestro conocimiento en cuanto a los tipos de actividades que se pueden proponer y el tipo de preguntas que se pueden formular a la hora de realizar tareas relacionadas con la generalización, reconociendo la importancia que tienen para dar inicio al álgebra.

Fecha de elaboración del Resumen:	07	12	2016
--	----	----	------

Elaborado por:	PINEDA, Cesia, MORALES, Johana
Revisado por:	VARGAS, Claudia



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadoras

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado **Identificación de los niveles de desempeño de estudiantes de grado octavo en la realización de tareas enmarcadas en el proceso de generalización** presentado por los estudiantes:

Neida Johana Morales Muñoz Cód. 2016182013, C.C. 52.544.506

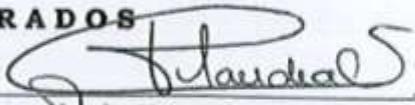
Cesia Judith Pineda Covo Cód. 2016182024, C.C. 1.100.393.235

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con **41** puntos.

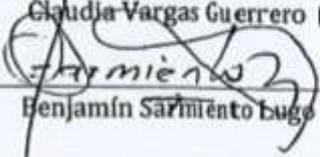
Observaciones:

En constancia se firma a los 21 días del mes de febrero de 2017.

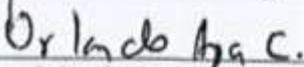
JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: 

Claudia Vargas Guerrero (UPN)

Jurados: Profesor: 

Benjamín Sarmiento Buga (UPN)

Profesor: 

Orlando Aya Corredor (UPN)

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	15
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	17
1.1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA	17
1.2. JUSTIFICACIÓN.....	19
1.3 OBJETIVOS	20
1.3.1 GENERAL	20
1.3.2 ESPECIFICOS.....	20
2. MARCO TEÓRICO	21
2.1 PROCESO DE GENERALIZACIÓN	21
2.1.1 FASES DE GENERALIZACIÓN.....	23
2.1.2 SECUENCIAS Y PATRONES.....	27
2.1.3 NIVELES DE DESEMPEÑO EN LAS FASES DE GENERALIZACIÓN	29
3. METODOLOGÍA	35
3.1 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE LOS ESTUDIANTES	35
3.2 ACTIVIDADES A IMPLEMENTAR	37
3.2.1 UNA ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA.....	37
3.2.2 ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS.....	38
3.3 METODOLOGÍA DE INDAGACIÓN	42
4. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES	43
4.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 1	43
4.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 2	47
4.3 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 3	50
4.4 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 4	53
4.5 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 5	57
5. CONCLUSIONES	60
BIBLIOGRAFÍA.....	62

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: <i>Características de la generalización, tomada de Mora, (2012)</i>	22
Tabla 2: <i>Tipos de secuencias, tomada de Mora, (2012)</i>	29
Tabla 3 <i>Fases en la construcción de una generalización, García (2011)</i>	30
Tabla 4: <i>Propósitos de la actividad 1</i>	41
Tabla 5. <i>Propósitos de la actividad 2</i>	41

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Ver la figura como un todo.....	32
Figura 2: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 1 - actividad 1	44
Figura 3: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 1 - actividad 1.....	45
Figura 4: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 1 - actividad 2	45
Figura 5: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 1 - actividad 2.....	46
Figura 6: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 2 - actividad 1	47
Figura 7: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 2 - actividad 1	48
Figura 8: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 2 - actividad 2	48
Figura 9: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 2 - actividad 2.....	49
Figura 10: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 3 - actividad 1	51
Figura 11: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 3 - actividad 1.....	51
Figura 12: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 3- actividad 2	52
Figura 13: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 3 - actividad 2.....	53
Figura 14: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 4 - actividad 1	54
Figura 15: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 4 - actividad 1	55
Figura 16: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 4 - actividad 2	55
Figura 17: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 4 - actividad 2	56
Figura 18: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 5 - actividad 1	57
Figura 19: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 5 - actividad 1	58
Figura 20: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 5 - actividad 2.....	58
Figura 21: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 5 - actividad 2	59

INDICE DE ANEXOS

Anexo A: Malla curricular del área de matemáticas del colegio Colombo Florida Bilingüe.	64
Anexo B: Evidencias de los cuadernos de los estudiantes sobre las temáticas y actividades trabajadas en clase.	66
Anexo C: Actividad diagnóstica.....	68
Anexo D: Actividades realizadas por el grupo 1.....	73
Anexo E: Actividades realizadas por el grupo 2.....	75
Anexo F: Actividades realizadas por el grupo 3.....	77
Anexo G: Actividades realizadas por el grupo 4.....	79
Anexo H: Actividades realizadas por el grupo 5.....	81

INTRODUCCIÓN

Este documento es el reporte escrito del trabajo de grado realizado para optar por el título de Especialista en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. El propósito de este trabajo fue identificar niveles de desempeño de un grupo de estudiantes de grado octavo cuando desarrollan actividades enmarcadas en el proceso de generalización en álgebra.

En el capítulo 1 de este documento, se realiza un planteamiento del problema, para ello se delimita la problemática que dio origen a este trabajo de grado, se justifica la pertinencia del estudio realizado y se especifican los objetivos que guiaron a la realización del mismo.

En el capítulo 2, se presenta el marco teórico que fundamenta este estudio. Este marco está agrupado en tres aspectos: el primero, recoge los referentes teóricos que dan cuenta de lo que significa el proceso de generalización, haciendo especial énfasis en las fases del proceso de generalización propuestas por Mason (1988); el segundo aspecto, caracteriza las actividades de generalización realizadas con patrones y secuencias; Finalmente, el último aspecto describe los niveles de desempeño propuestos por García (2011) en relación a las fases de generalización.

En el capítulo 3, se presenta la metodología utilizada, para ello, se efectúa una caracterización de la población y de las actividades desarrolladas y una descripción del proceso de análisis de los resultados obtenidos.

En el Capítulo 4, se presenta el análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes describiendo el nivel de desempeño en cada una de las etapas de generalización.

Finalmente, el último capítulo presentan las conclusiones que surgieron a partir del análisis realizado en concordancia con los objetivos propuestos inicialmente.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Este estudio surge al evidenciar desde nuestras prácticas docentes, las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra escolar, sobre todo en el uso de la simbología y en los procesos de generalización

Estas dificultades también se han podido identificar en algunas investigaciones. Por ejemplo, Pérez (2005), quien afirma:

Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza de lo particular a lo general, a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto la utilización del lenguaje simbólico como el grado de abstracción. [...] Estas dificultades se manifiestan, entre otras, en errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operativamente con las expresiones algebraicas, errores de traducción cuando se quiere pasar problemas escritos en lenguaje cotidiano a simbología algebraica, interpretaciones erróneas de expresiones algebraicas, errores de planteamiento de variables y relaciones cuando se quiere pasar de expresiones numéricas, aritméticas y geométricas, a expresiones algebraicas, como en el caso de las fórmulas. (Pérez, 2005, p 12)

Respecto a los procesos de generalización, Alonso, Barbero, Fuentes, Azcárate, Dozagarat, Gutiérrez, Ortiz, Rivière y De Veiga (1993) han identificado dificultades en este proceso relacionadas con:

- Encontrar términos generales para las sucesiones estudiadas y expresarlos de manera simbólica, utilizando un lenguaje matemático apropiado.

- Al utilizar configuraciones geométricas, es posible que al observarlas, se encuentre gran variedad de características de tales configuraciones, que pueden resultar difíciles de guardar en la memoria, de relacionar, clasificar o identificar cuáles son las más importantes para disponer de una solución.
- Confundir características necesarias con características suficientes de las sucesiones.
- Naturalmente se presentan dificultades también en la representación simbólica en lenguaje matemático de la expresión general hallada, a pesar de ser totalmente comprendida. Estos son conocidos como errores de traducción (del lenguaje natural o verbal al lenguaje simbólico de las matemáticas)

En concordancia con ello, García (2011) reporta las siguientes dificultades en el proceso de generalización: a) existe gran facilidad para describir un patrón de forma verbal, más no para expresarlo mediante un lenguaje simbólico; y b) la verificación no se considera uno de los pasos en la resolución de problema, especialmente cuando estos están relacionados con la generalización.

Por tanto, la problemática que pretende abordar este estudio está asociada a las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y en particular, en el desarrollo de procesos de generalización. Se tiene como hipótesis que las dificultades que puedan llegar a presentarse durante la generalización, estarán en correspondencia con el nivel de desempeño del sujeto, y por ende, es pertinente identificarlo.

1.2. JUSTIFICACIÓN

La generalización es uno de los procesos esenciales de la actividad matemática (García, 2011), razón por la cual ha sido objeto de estudio de muchos investigadores.

Radford (2010), reconociendo la importancia de la generalización de patrones como una de las rutas de acceso a álgebra en la escuela, pone de manifiesto el hecho de que son las generalizaciones de patrones algebraicos las que proveen una ruta de acceso al álgebra. Su afirmación se basa en el hecho de que las generalizaciones permiten hacer uso del lenguaje algebraico para expresar el patrón y proporcionar una expresión directa para hallar cualquier término.

Desde los referentes curriculares, se menciona que el estudio de la variación puede ser iniciado en el currículo a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios estén relacionados con fenómenos de cambio. Para iniciar el estudio de la variación, el estudio de patrones es una herramienta que permite: a) analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; b) hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; c) expresar oralmente, por escrito, por medio de dibujos y de otras representaciones cualquier término de una secuencia; d) formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (MEN, 1998).

Por los aspectos anteriormente mencionados sobre la importancia de la generalización en la actividad matemática y los objetos de estudio que han sido de interés en las investigaciones frente a las dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje del álgebra, se pretende que al identificar los niveles se pueda contribuir con la comprensión acerca de cómo observan los estudiantes, cómo describen lo que observan y cómo verifican, para evidenciar

cómo los estudiantes abordan los procesos de generalización cuando ya han tenido un acercamiento al proceso de aprendizaje del álgebra.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 GENERAL

Identificar y describir los niveles de desempeño de un grupo de estudiantes de grado octavo de básica secundaria cuando realizan tareas enmarcadas en el proceso de generalización.

1.3.2 ESPECIFICOS

- Adaptar e implementar un conjunto de actividades que involucran secuencias tanto geométricas como numéricas con estudiantes de grado octavo, para indagar sobre niveles de desempeño en cada una de las fases del proceso de generalización.
- Describir y analizar las producciones o actuaciones de los estudiantes en la realización de las actividades implementadas, teniendo en cuenta los niveles de desempeño propuestos por García (2011) en cada una de las fases de generalización.

2. MARCO TEÓRICO

Con respecto al proceso de generalización, nuestro trabajo de grado tiene como propósito identificar y describir los niveles de desempeño de un grupo de estudiantes de grado octavo de básica secundaria cuando realizan tareas enmarcadas en el proceso de generalización. Para lograr esta meta, los referentes teóricos que se describen en este capítulo están direccionados en los tres aspectos.

El primer aspecto, recoge los referentes teóricos que dan cuenta de lo que significa generalizar, teniendo en cuenta las perspectivas de diferentes autores como Polya (1965), Sessa (2005) y Mason (1988). En este apartado, se efectúa un énfasis en la descripción de las fases que se llevan a cabo en el proceso de generalización, en particular las propuestas por Mason (1988). En un segundo aspecto se agrupan los referentes teóricos que muestran la importancia en el proceso de generalización de efectuar actividades con patrones y secuencias. Finalmente, se describen los niveles de desempeño propuestos por García (2011) en relación a las fases de generalización.

2.1 PROCESO DE GENERALIZACIÓN

El proceso de generalización es una actividad de carácter inductivo, entendiendo la inducción como una forma de razonamiento que a partir de la observación de regularidades entre casos particulares, permite descubrir leyes generales (Polya, 1965, citado por Mora, 2012). En concordancia con esta idea, Dreyfus define generalizar como inducir de casos particulares, identificando aspectos en común, para expandir dominios de validez (Dreyfus, 1991, p. 35, traducción libre realizada por Mora, 2012).

La generalización también puede entenderse como encontrar características que unifican, reconocer tipos de objetos y problemas, es decir, es la

consolidación de características comunes de elementos de un conjunto (números, reglas, gráficas, etc.) expresadas de manera sintetizada. (Sessa, 2005).

Para que el proceso de generalización sea posible, las leyes generales que surgen deben indicar qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece ser cierto (una justificación) y dónde parece que es cierto (Mason, 1988). Esta idea es lo que lleva a Mason a establecer las cuatro fases presentes en el proceso de generalización, que más adelante se describen.

Estas definiciones están relacionadas en la medida en que concuerdan que generalizar es inducir características comunes de algunos casos particulares, de tal manera que se pueda establecer algunas leyes generales que permitan describir, justificar y validar esas características comunes.

Para tener mayor claridad, la tabla 1 expresa algunas características de lo que sí se define como generalizar y lo que no.

¿Qué es?	¿Qué no es?
<ul style="list-style-type: none"> Identificar aspectos en común de casos particulares. 	<ul style="list-style-type: none"> Pasar de un caso particular (uno solo) a una expresión general.
<ul style="list-style-type: none"> Buscar una propiedad común en casos particulares, abstraer los invariantes esenciales; a estas propiedades comunes, a las que se les llama regularidades. 	<ul style="list-style-type: none"> Definir un conjunto de objetos a partir de las propiedades de un objeto
<ul style="list-style-type: none"> Conectar varias situaciones a partir de características en común que permiten incluirlas dentro de una determinada clase. 	

Tabla 1: Características de la generalización, tomada de Mora, (2012)

2.1.1 FASES DE GENERALIZACIÓN

Una forma de entender cómo se desarrolla un proceso es identificando las fases que lo componen, en el caso de la generalización, investigadores como el Alonso et. al. (1993) y Mason (1988) han propuesto una división del proceso en fases, que permite describir las diferentes etapas que deben desarrollarse para efectuar dicho proceso.

El grupo Azarquiel (Alonso et. al,1993) afirma que el proceso de generalización permite una división en fases orientadas a distinguir la visión de la regularidad y la expresión correspondiente a la ley general encontrada. Las fases que proponen son:

- *La visión de la regularidad, la diferencia o la relación:* En esta etapa se trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación ejemplo, determinado lo que es común entre todos ellos. Se trata de encontrar lo que se mantienen en cada caso, determinando una regularidad o un patrón.
- *Su exposición verbal:* esta etapa es el proceso de describir la regularidad percibida en la anterior etapa, de comunicar lo que se ha visto.
- *Su expresión escrita, de la manera más concisa posible:* se trata de registrar, preferiblemente con símbolos lo que se indujo en las anteriores fases.

Estas fases del proceso de generalización están en concordancia con las definiciones dadas anteriormente. No obstante, no se tienen en cuenta los dominios de validez que permiten comprobar que la ley general encontrada sea cierta, lo cual si es tenido en cuenta en la propuesta por Mason (1988).

Las fases propuestas por Mason (1988) y por Alonso et. al. (1993) concuerdan en sus tres primeras fases: ver un patrón, describirlo o comunicarlo

verbalmente y escribirlo. No obstante, la propuesta de Mason incluye una cuarta fase relacionada con la comprobación de la ley general hallada.

A continuación describimos las fases de generalización propuestas por Mason.

2.1.1.1 Ver un patrón

Ver un patrón hace referencia al proceso de visualizar, esto incluye identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, entre otros. En palabras de Mason (1988) *“Ver hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación....., y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común...”*. Por tanto, esta fase podemos asociarla con la fase de visión de la regularidad propuesta por el grupo Azarquiél (1993).

Teniendo en cuenta esto, y de acuerdo a lo que se menciona en Mora (2012), hay ciertas preguntas o tareas que se pueden proponer a los estudiantes, en esta etapa, para determinar si los estudiantes realmente ven un patrón dependiendo el tipo de secuencia en el que está inmersa la tarea, estas pueden ser:

- ✓ Dibuje la figura que sigue o escriba el número que sigue
- ✓ Cómo cambia la figura con respecto a la anterior o como se obtiene un número respecto al anterior
- ✓ Cuente de manera diferente
- ✓ ¿Cuántas fichas se necesitan para formar la figura 12, la figura 60, o que número está en la posición 12, en la posición 54?
- ✓ ¿Qué es lo común en estas figuras o números?
- ✓ ¿Cuál es la figura que continua o cuál es el número que continua la secuencia?
- ✓ Y la pregunta general asociada ¿qué ve?

2.1.1.2 Describir

Se refiere a decir con las propias palabras lo que se vio en la anterior fase, expresar lo que se vio, o en palabras de Mason “...*El decir*”, ya sea a uno mismo o alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido...” (Mason, 1988). Por tanto, esta fase podemos asociarla con la fase de exposición verbal propuesta por el grupo Azarquiel.

No importa la manera en cómo se diga eso que se vio en la primera fase, ya sea a uno mismo o a alguien en particular. La fase de describir es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido. Es informar que regularidades encontró, que patrón evidenció y cómo se encontró.

El proceso de pasar de la anterior fase a esta quizás presente muchas dificultades tal como lo menciona Mason (1988, p.21) “Los alumnos con frecuencia encuentran muy difícil el moverse del 'ver' al 'decir', y su esfuerzo para decir lo que ellos ven necesita apoyo en cuanto al tiempo y a la aceptación de sus esfuerzos incompletos”. Por esta razón, se considera importante el dialogo entre compañeros o con el docente, para animarlos a que hablen y expresen sus ideas

Para propiciar el desarrollo de la fase de describir, Mora (2012) sugiere realizar preguntas orientadoras como las siguientes:

- ✓ Describa cómo cambia una figura respecto a la anterior o a la que sigue.
- ✓ Indique qué es lo que observa, qué es lo que cambia, qué es lo que se mantiene igual.

Según Mora (2012) una estrategia recomendada para llevar a cabo esta fase es poner los estudiantes a trabajar por parejas de tal manera que uno le comunique al otro lo que vio y se hagan preguntas entre sí.

2.1.1.3 Registrar

Hace referencia a escribir o representar lo que se observó, mediante un dibujo, un dibujo apoyado con palabras o expresar lo que se observó simbólicamente, en palabras de Mason “...*Registrar es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos)....*” (Mason, 1988). Por tanto, esta fase podemos asociarla con la fase de expresión escrita propuesta por el grupo Azarquiél.

Vale la pena aclarar, que no necesariamente registrar es usar un lenguaje algebraico para expresar por escrito lo que se observó en las anteriores fases. En general, se trata de escribir ya sea con palabras, con símbolos numéricos, con dibujos o con tablas el patrón que se observó.

Según Mora (2012) se pueden realizar algunas preguntas o indicaciones que ayuden a los estudiantes en esta fase, tales como:

- ✓ Escriba lo que vió.
- ✓ Utilice dibujos, tablas, lo que necesite para comunicar lo que se observó en las anteriores fases.

2.1.1.4 Verificar

La última fase propuesta por Mason, tiene que ver con la justificación de la conjetura, que permite justificar porque la regla es correcta. Para esto se debe tener una noción de lo general, ejemplificando lo particular para llegar a ello, reconociendo las características comunes y específicas que continúan en cada ejemplo; en esto, tiene gran importancia lo que se ve porque dependiendo de ello será la declaración general de lo que es común a todos los casos, para ello, se es necesario buscar argumentos, relaciones entre diferentes expresiones, en sí, buscar explicaciones del patrón hallado.

De acuerdo a Mason (1988) hay algunas preguntas que favorecen el trabajo en esta fase, tales como:

- ✓ ¿Cómo crece el patrón?
- ✓ ¿Por qué la regla funciona?
- ✓ ¿Qué hay en común?
- ✓ ¿Por qué se da esta situación?
- ✓ ¿Cómo se está seguro de que la regla siempre funciona?

Hasta el momento se ha visto que el estudio de los procesos de generalización lleva consigo la caracterización de términos importantes, dentro de la teoría de la generalización tales como, patrón y secuencia, y que definitivamente se tendrán en cuenta para el diseño y adaptación de las actividades que se van a implementar, por tal razón a continuación describimos cada uno de estos.

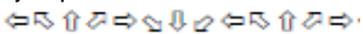
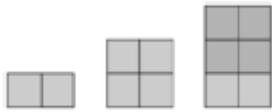
2.1.2 SECUENCIAS Y PATRONES

Es notoria la relación existente entre generalizar y el reconocimiento de patrones, entendiendo estos como esa cualidad en común que se induce a partir de casos particulares de los elementos de una secuencia, sea numérica o geométrica, y que permite ampliar esa característica de los casos particulares para todos los casos posibles que se puedan tener dentro de la secuencia. En otras palabras, un patrón se puede definir como cosas que están ordenadas siguiendo una regla, propiedad, una regularidad, una cualidad en común, que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición, etc.

Los patrones se pueden presentar en diferentes contextos y dominios de las matemáticas, ya sea en lo numérico, geométrico, lo aleatorio, etc, además de que el análisis de patrones o regularidades permite sin duda establecer generalizaciones.

Otro de los términos relacionados con el proceso de generalización, es la secuencia, ya que en ella está presente la generalización. Según Mora (2012) una secuencia se puede entender como un conjunto de signos ordenados, sean orales, gestuales, físicos, gráficos, numéricos, etc. llamados términos, que se constituyen a partir de una regla de repetición de un patrón.

Hay varias formas de representar una secuencia, y por ende se puede clasificar. Según Mora (2012) existen secuencias con el cuerpo, secuencias manipulativas, secuencias figurativas o icónicas, secuencia gráfico numéricas, secuencias numéricas y secuencias por recurrencia, cada una de estos tipos de secuencias se describen en la siguiente tabla.

Secuencias con el cuerpo	Secuencias manipulativas	Secuencias figurativas
<p>Son secuencias donde se utilizan movimientos corporales, ritmos o sonidos, por ejemplo: niños agachados con las manos arriba, niños de pie con las manos a los lados, niños agachados con las manos arriba,...</p>	<p>Son secuencias en las cuales se utilizan materiales manipulativos como tapas, fichas de colores, fichas de formas, palillos, etc. Ejemplo:</p> 	<p>Son secuencias en las cuales se utilizan figuras, pueden constituir la representación gráfica de las secuencias manipulativas previamente presentadas o simplemente imágenes. Ejemplo</p> 
Secuencias gráfico – numéricas	Secuencias numéricas	Secuencias por recurrencia
<p>Son secuencias que se presentan en gráficos y que se pueden representar con números, por ejemplo:</p>  <p>... 2 4 6</p>	<p>Son secuencias que se representan básicamente con números, por ejemplo:</p> $1 + 2 = 3$ $4 + 5 + 6 = 7 + 8$ $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$ <p>...</p>	<p>Son secuencias cuyo términos se pueden hallar con base en el anterior, por ejemplo:</p> <p>1, 1, 2, 3, 5, 8,...</p> <p>Esta secuencia es la famosa sucesión de Fibonacci, cuyos términos, a partir del tercero, se pueden hallar sumando los dos anteriores</p>

Secuencias tabulares					
Son secuencias que se presentan en tablas, por ejemplo:					
1	2	3	4	5	...
2	4	6	8	10	...

Tabla 2: Tipos de secuencias, tomada de Mora, (2012)

Vale la pena aclarar que las actividades implementadas están relacionadas con las secuencias tabulares y gráfico numéricas. Estas actividades se describen en el tercer capítulo.

2.1.3 NIVELES DE DESEMPEÑO EN LAS FASES DE GENERALIZACIÓN

García (2011), en su tesis de maestría, propone cuatro niveles de desempeño en cada una de las fases de generalización anteriormente mencionadas. Ella establece estos niveles de acuerdo con las estrategias propuestas por los estudiantes durante el proceso de generalizar. Los distintos niveles de desempeño propuestas por García se muestran en la tabla 3.

ESTRATEGIAS DE NIVEL	FASE EN LA CONTRUCCION DE UNA GENERALIZACION			
	VER	DECIR	ESCRIBIR	VERIFICAR
I	OI: Observar la imagen como un todo	DIT: Describir características de la imagen como un todo	Escribir las propiedades comunes entre los casos	
			EPCP: Escribir con palabras las características de la imagen	
			EPCM: Escribir con palabras y símbolos las características de la imagen	
			EPCS: Escribir con símbolos las características de la imagen	
II	AI: Analizar la imagen como un todo	DPC: Describir las propiedades comunes entre los casos particulares	Escribir las características de las partes en el todo	
			ECPP: Escribir con palabras las	

			propiedades comunes entre los casos particulares	
			ECPM: Escribir con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares	
			ECPS: Escribir con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares	
III	Establecer relaciones entre las partes de la imagen	DRP: Describir la forma en que se relacionan las partes	Escribir la forma en que se relacionan las partes	
	ERN: Establecer relaciones necesarias		EFRP: Escribir con palabras la forma en que se relacionan las partes	
	ERS: Establecer relaciones suficientes		EFRM: Escribir con palabras y símbolos la forma en que se relacionan las partes	
			EFRS: Escribir con símbolos la forma en que se relacionan las partes	
IV	CRP: Conjeturar acerca de las relaciones éntrelas partes de la imagen	DCR: Describir la conjetura observada de relaciones entre las partes	Escribir las conjeturas observadas de las relaciones entre las partes	VCTC: Verifica su conjetura construyendo un término cercano
			ECOP: Escribir con palabras la conjetura observada de las relaciones entre las partes	VCC: Verifica su conjetura haciendo uso de la calculadora
			ECOM: : Escribir con palabras y símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes	VCM: Verifica su conjetura manualmente
			ECOS: Escribir con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes	NVC: NO Verifica su conjetura

Tabla 3 Fases en la construcción de una generalización, García (2011)

Vale la pena aclarar que las fases a las que hace referencia García son las mismas propuestas por Mason, difieren únicamente en sus nombres, en este sentido la fase *decir* está relacionada con la fase de *describir*, la fase *escribir*,

relacionada con la *registrar* y la última se relaciona con la fase de *comprobación*.

La categorización que propone García en cuanto al nivel de desempeño en cada una de las fases de generalización se evidenciaron en la investigación y análisis de las actividades que ella realiza en su tesis. En este sentido, tal como se muestran en la anterior tabla, se establecen cuatro niveles. Los niveles I y II correspondiente al nivel bajo y básico, respectivamente. Están relacionados con las estrategias utilizadas en las fases de ver, analizar y describir la imagen como un todo, y en la fase de escribir, se escriben las características comunes entre los casos y las partes del todo. En el nivel III, correspondiente a un nivel alto, se agrupan aquellas acciones que se dan cuando se relacionan las partes del todo entre sí. Por último, en el nivel IV, correspondiente al nivel superior, se conjetura acerca de las relaciones observadas entre las partes, permitiendo así su descripción y verificación.

Es importante, de acuerdo al contenido de la tabla 3, describir que significa ver la imagen como un todo u observar las relaciones entre sus partes. También se evidencia la importancia que tiene el lenguaje con el que se expresan las ideas sobre todo en la segunda y tercera fase, en las que los estudiantes deben describir y registrar lo que observaron en la primera, ya sea con palabras, con palabras y símbolos o únicamente símbolos. A continuación se describen cada uno de estos aspectos.

Cuando se habla de observar la imagen como un todo, se hace referencia a:

- Percibir la imagen en su totalidad, describiendo de manera global lo que observan, sin diferenciar atributos y componentes en la descripción realizada.
- Perciben la secuencia como objetos individuales no reconociendo características relevantes.
- Se limitan a describir aspectos físicos de las figuras, mediante descripciones netamente visuales.

Por ejemplo, cuando al estudiante se le pregunta cuantos palillos son necesarios para construir la segunda figura de la secuencia propuesta en la Figura 1, el estudiante puede responder que se necesitan 8 palillos, porque una y dos figuras iniciales, y no da cuenta que el palillo de la mitad lo comparten. En este sentido se está observando la imagen como un todo y no relaciona las partes que la componen.

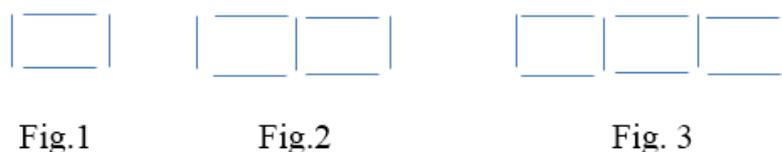


Figura 1: Ver la figura como un todo

Por el contrario, cuando cada elemento de la secuencia se descompone en partes, el estudiante reconoce que esa secuencia gráfica posee propiedades y es capaz de establecer relaciones entre las partes de la imagen. Por ejemplo, en la secuencia de la Figura 1 indicar que la tercera figura de la secuencia está formada por dos filas horizontales de tres palillos cada una y cuatro palillos verticales, es evidencia de observar la figura por parte.

Damos cuenta que también se es necesario hablar de que significa establecer relaciones necesarias y suficientes, y conjeturar acerca de las relaciones entre las partes de la imagen.

Establecer relaciones necesarias significa:

- Percibir los componentes y propiedades de las figuras que componen la secuencia gráfica.
- Describir una figura por sus propiedades, pero no relacionarlas con otras.

Establecer relaciones suficientes implica:

- Reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de describir esas implicaciones o adquirir la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la secuencia gráfica.
- Conectar propiedades está señalando condiciones necesarias y suficientes que se generan en la secuencia.

Conjeturar acerca de las relaciones entre las partes de la imagen significa que:

- El estudiante sea capaz, no solo de comprender y manejar las relaciones entre las propiedades observadas en la secuencia, si no también asimilarlas en su globalidad, es decir, llegar a una expresión general.

Como ya se mencionó anteriormente es importante el lenguaje utilizado para comunicar nuestras ideas y más si estamos en un proceso de generalización, en este sentido y teniendo en cuenta las acciones que se deben realizar en la segunda y tercera fase en el proceso de generalización, DECIR y REGISTRAR, se encuentran tres maneras de expresar nuestras ideas.

Una de ellas es el uso del lenguaje verbal, que en otras palabras es hacer uso únicamente del lenguaje natural, expresar nuestras ideas con palabras.

Continuando con el ejemplo mostrado anteriormente, el de los palillos, el uso del lenguaje verbal se evidencia cuando al expresar la regularidad hallada se encuentran cosas como “para hallar la cantidad de palillos utilizados para cualquier figura se multiplica la posición de la figura por tres más uno”.

Otro de los lenguajes es el sincopado que correspondiente a la utilización de un lenguaje que mezcla expresiones verbales con signos matemático, pero no necesariamente con el rigor de un lenguaje matemático, para el ejemplo que se está considerando, en una expresión como la siguiente, « para hallar la

cantidad de palillos utilizados para cualquier figura se multiplica la posición de la figura $\times 2$ y luego sumarle $+1$ ” se hace uso del lenguaje sincopado.

El otro lenguaje es el matemático que corresponde a la utilización de un simbolismo matemático con el rigor y el tecnicismo que corresponde al uso de un lenguaje matemático, para el ejemplo que se está considerando, en una expresión como la siguiente, « la cantidad de palillos utilizados para la n -ésima figura se halla como $3n + 1$ ”, se hace uso del lenguaje matemático.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta, en primera instancia, la descripción del contexto de los estudiantes a los cuales se implementó las actividades, teniendo en cuenta las temáticas que han desarrollado a lo largo del año escolar, y si estas temáticas han estado relacionadas con el proceso de generalización. También se presentan y se describen las actividades implementadas y la forma cómo se efectuó el análisis de los niveles de desempeño en cada una de las fases de generalización.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE LOS ESTUDIANTES

Las actividades se llevaron a cabo en el Colegio Colombo-Florida Bilingüe, el cual es una institución de carácter privado ubicado en el barrio Restrepo de la localidad San Cristóbal, en la ciudad de Bogotá. La institución es mixta con una jornada única entre las 7:30 am y 3:30 pm. Los estudiantes de la institución son niños y adolescentes cuyas viviendas se encuentran ubicadas en barrios de los estratos tres y cuatro cerca de la misma institución. El colegio presenta un énfasis en lenguas extranjeras, pues se enseñan tres idiomas diferentes al español.

En particular, el estudio se desarrolló con estudiantes de grado octavo, en un curso que cuenta con diez estudiantes, cuatro niños y seis niñas, cuyas edades oscilan entre los 13 y 15 años. En este curso, ninguna de las dos autoras es profesora titular de matemáticas.

De acuerdo con la apreciación del docente encargado del curso, poco menos de la mitad de los estudiantes presenta un desempeño alto en el área de las matemáticas, aunque en general se evidencia comprensión de las temáticas desarrolladas en lo que se ha estudiado en el transcurso del año escolar. Para

identificar qué tipo de actividades se proponen en este curso, si están o no relacionadas con procesos de generalización, con qué recursos se cuenta, entre otros aspectos, se realizó una revisión de la malla curricular del área, libros y cuadernos de los estudiantes, para mirar que tipo de actividades se proponen y que temáticas se han desarrollado.

Una vez realizada la revisión de textos, cuadernos, malla curricular y otros aspectos (Ver anexos A y B), se logró describir el contexto del curso de la siguiente manera:

- De acuerdo a lo que menciona por el docente a cargo de los procesos académicos de matemáticas del curso en cuestión nos menciona que es un curso que mantiene un nivel de desempeño básico en área, sin embargo, menciono que son estudiantes que muestran interés en área, además son activos en su proceso de aprendizaje; también nos menciona que en lo que se llevaba del año escolar no se realizaron actividades relacionadas con el proceso de generalización.
- En cuanto a lo observado en los cuadernos de los estudiantes y la malla curricular, se evidenció que la metodología de clase está enfocada inicialmente en una exposición magistral por parte del profesor, el trabajo en clase de las actividades propuestas en el libro y la realización de quices de acuerdo al desarrollo de la temática.
- En las temáticas propuestas tanto en la malla curricular y en lo que se evidenció en la revisión de los cuadernos, se observaron algunas como: productos notables, factorización, operaciones de polinomios, expresiones algebraicas racionales, entre otros. Sin embargo, no se evidenciaron actividades, desde el inicio del año, relacionadas con la generalización.

3.2 ACTIVIDADES A IMPLEMENTAR

Las actividades que se deciden implementar, en su mayoría, son el resultado de la selección, desarrollo y análisis de diferentes problemas de generalización encontrados en la literatura matemática, en particular de Casas (2005); García (2011).

3.2.1 UNA ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

Inicialmente se decidió implementar una actividad diagnóstica porque según lo planteado por el docente y lo observado en los cuadernos de los estudiantes, no se ha tenido como tal un acercamiento en el proceso de generalización. Se decidió realizar esta actividad tal como se encontró en el libro “Álgebra Recreativa” (anexo C) para determinar si las preguntas que allí se proponían plantear si eran claras y nos permitían evidenciar las acciones que realizaban los estudiantes en cada una de las fases de la generalización y de esta manera categorizarlos en un nivel de desempeño.

Luego de realizar esta actividad se observó la necesidad de realizar algunos cambios en las actividades tales como:

- Proponer preguntas más abiertas que permitieran al estudiante realizar la actividad por diferentes caminos, como lo es hecho de no obligar al estudiante a dar una fórmula como tal, ya que se evidenció que esto confundían a los estudiantes en el proceso.
- Proponer preguntas específicas que nos permitieran evidenciar las acciones realizadas en cada una de las fases de generalización.

3.2.2 ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS

Las dos actividades implementadas son el resultado de la selección y análisis de diferentes actividades relacionadas con secuencias gráficas tomadas de la distinta literatura matemática, en particular del libro de Casas (2005), las cuales fueron modificadas en su forma para aplicarlas y buscar con ellas una solución no rutinaria, ni de forma inmediata que permitiera el uso de diferentes estrategias para lograr los objetivos propuestos.

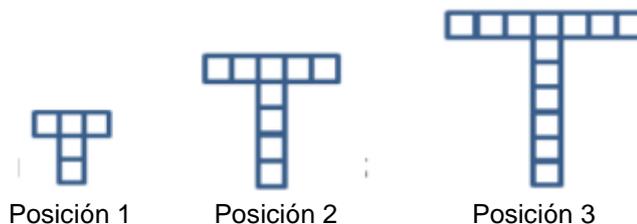
Para determinar si las actividades que se proponen en la distinta literatura matemática eran pertinentes o no con el propósito que nosotros tenemos con este trabajo, se tuvo en cuenta los siguientes aspectos.

- ✓ Que las actividades permitieran el uso de diferentes secuencias tanto numéricas como geométricas y nos permitieran observar detalladamente las fases que propone Mason (1988)
- ✓ Que las preguntas a realizar en las actividades previeran respuestas que nos permitieran identificar las estrategias utilizadas en las cuatro fases de generalización, y de esta manera identificar el nivel de desempeño asociado.

Teniendo en cuenta estos aspectos y el propósito de este trabajo, fue necesario adaptar algunas de las preguntas propuestas en las actividades. De esta manera, las actividades fueron las siguientes:

ACTIVIDAD 1: Contando cuadrados

Observa la siguiente secuencia gráfica:



1. Dibuja la posición 4,5 y 6 de la secuencia gráfica.
2. Completa la tabla indicando la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura en cada posición.

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Cuadrados	5					

3. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para formar la figura de la posición 10? ¿Explica cómo lo realizaste?

4. Si encontraste alguna relación entre la cantidad de cuadrados necesarios para construir cada figura con su posición, descríbela a continuación

5. Calcule el número de cuadrados que se pueden formar para las figuras de las posiciones 20 y 35.

6. Sin efectuar el dibujo,

a) ¿cómo calcularías la cantidad de cuadrados necesarios para construir cualquier figura de la secuencia?

b) cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

ACTIVIDAD 2: Contando baldosas

Observa la siguiente secuencia gráfica:

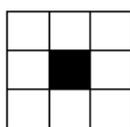


Figura 1

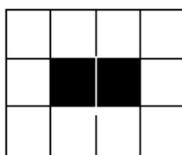


Figura 2

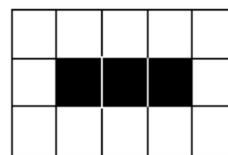


Figura 3

1. Dibuja las figuras 4 y 5 de la secuencia gráfica.
2. Registra en la siguiente tabla la cantidad de baldosas blancas que se necesita para rodear completamente la cantidad de baldosas negras indicadas.

Cantidad de baldosas negras	1	2	3	4	5
Cantidad de baldosas blancas	8				

3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 15 baldosas negras alineadas? _____

4. Describe a continuación cómo hallaste la respuesta del ítem anterior

5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.

a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?

b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?

Cada una de las preguntas que se componen las actividades, tienen unos propósitos específicos que nos permitían evidenciar cada una de las fases de generalización, estos propósitos se muestran en las tablas 4 y 5.

ACTIVIDAD 1	
PREGUNTAS	PROPÓSITO
Preguntas 1, 2 y 5	Estas preguntas están relacionadas con la fase “VER” la regularidad gráfica y numérica de la secuencia.
Pregunta 3	Hace referencia a “VER” y “DESCRIBIR” la regularidad.
Pregunta 4	Hace referencia a la fase “DESCRIBIR” ya que debe expresar la regularidad encontrada.
Pregunta 5 ^a	Es orientada a que el estudiante “REGISTRE” la regularidad encontrada en forma escrita, ya sea usando un lenguaje verbal, sincopado o simbólico.

Pregunta 5b	Relaciona con la fase de verificación ya que el estudiante debe decir por qué esa regla encontrada funciona.
-------------	--

Tabla 4: Propósitos de la actividad 1

ACTIVIDAD 2	
PREGUNTAS	PROPÓSITO
Las preguntas 1,2 y 3	Estas preguntas están orientadas a determinar si los estudiantes perciben o “ven” la regularidad o el patrón en la secuencia gráfica como numérica.
Pregunta 4	Está orientada a que el estudiante exprese con sus palabras y discuta con su compañero sobre el proceso que utilizaron para hallar la cantidad de baldosas blancas, necesarias para cubrir las baldosas negras.
Pregunta 4	Hace referencia a la fase “DESCRIBIR” ya que debe expresar la regularidad encontrada.
Pregunta 5 ^a	La pregunta 5a hace referencia a la fase “VER”.
Pregunta 5b	La pregunta 5b hace referencia a la fase de “registrar” ya que está dirigida a que el estudiante registre utilizando un lenguaje natural (palabras) o combine palabras con símbolos o solo utilice símbolos.
Pregunta 6	Está dirigida a que el estudiante verifique si la regularidad encontrada funciona.

Tabla 5. Propósitos de la actividad 2

Para la implementación y análisis de estas actividades, se decidió realizar la actividad por parejas y de esta manera realizar el análisis por grupos. En total fueron 5 grupos.

3.3 METODOLOGÍA DE INDAGACIÓN

Luego de pilotear el instrumento propuesto a los 10 estudiantes, se procedió al análisis de las respuestas de los estudiantes. Para realizar el respectivo análisis, se tomaron como categorías de análisis las fases del proceso de generalización propuestas por Mason (1988) y los niveles de desempeño propuestos por García (2011). Dichos niveles se reportan en el marco teórico. (Tabla 3).

En cada uno de los grupos se tomaron las respuestas escritas de los grupos de estudiantes a las actividades 1 y 2. Luego, se realizó una descripción general de lo que realizó cada grupo en dichas actividades y se caracterizó sus respuestas de acuerdo con los niveles de desempeño de cada grupo.

4. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

Tal como se mencionó en anterior capítulo, las actividades se decidieron realizar por parejas, y de esta manera se realizó el análisis por grupos, que en su totalidad fueron 5.

Para cada uno de los grupos, inicialmente se presenta una descripción general de lo que realizaron en las actividades, y de acuerdo a sus respuestas se analizó y determinó en nivel de desempeño, que se describe a continuación.

4.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 1

Actividad 1:

En el reporte del grupo 1 a la primera actividad (anexo D) los estudiantes lograron construir las figuras correspondientes a los elementos 4, 5 y 6 de la figura sin inconveniente alguno y reportar correctamente la cantidad de cuadros que tenían cada figura en la tabla. Estas acciones están enmarcadas en la fase Ver propuesta por Mason, puesto que para realizar esta tarea correctamente era imprescindible identificar una característica común entre los elementos de la secuencia.

En general, todos los grupos lograron construir las figuras 4, 5 y 6 y el instrumento no permite evidenciar otra característica diferente respecto a la actividad realizada por los estudiantes. Por tanto en adelante no analizaremos las preguntas 2 y 3 en las actividades de los otros grupos.

Retomando el análisis del grupo 1, solamente cuando se le pide a los estudiantes identificar cuántos cuadrados tendría la figura 10 de la secuencia, el estudiante escribe el patrón identificado (figura 2), lo cual corresponde a la fase de Describir. En este caso, la característica común identificada es una

relación entre dos figuras consecutivas de la secuencia, en la que cada figura de la misma está conformada por la anterior más cuatro cuadrados: dos que se ubican en los extremos derecho e izquierdo, y dos que se ubican en la parte inferior.

Para este grupo en particular cada figura estaba conformada por dos partes, las cuales son la figura anterior y los cuatro cuadrados adicionales (figura 2). Esta relación es una condición que es necesaria para caracterizar cada figura, pero no suficiente para determinarla (ERN) y en la fase describir su nivel corresponde a (DRP).

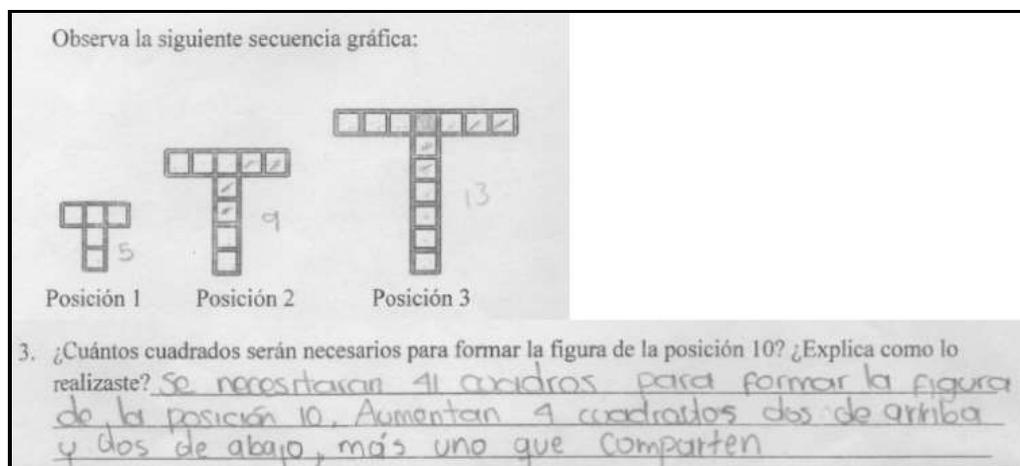


Figura 2: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 1 - actividad 1

La expresión “más uno que comparten” (figura2) lleva a pensar que el grupo pudo identificar una relación común relacionada con el cuadrado que se ubica en la intersección de la fila y la columna que conforman cada figura. No obstante, su reporte escrito no permite identificar cuál fue esa relación.

Al momento de REGISTRAR, el grupo utiliza palabras para plantear la conjetura: “la figura se multiplica por 4 y se suma 1”. Esta conjetura se utiliza para deducir la cantidad de cuadrados que tendría las figuras 20 y 35 de la secuencia. Estas respuestas parecen indicar que dicha conjetura resulta de relacionar partes de la figura (EFRP). El uso de la palabra “parece” se debe a que la información suministrada por el instrumento no es suficiente para tener

certeza de que las partes vistas por los estudiantes al plantear la conjetura son las mismas que evidenció al responder las primeras preguntas.

En la fase de VERIFICACIÓN, el grupo establece un camino que podría permitirle efectuar una verificación, pero no lo realiza (figura 3).

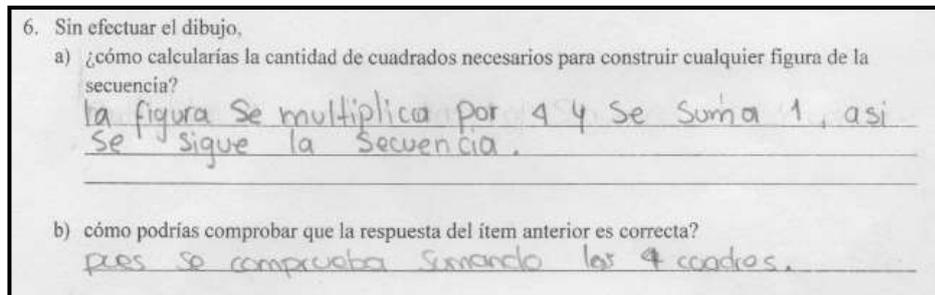


Figura 3: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 1 - actividad 1

Actividad 2:

El grupo realizó en las tres primeras figuras marcas sobre las tres baldosas blancas que se encuentran en la parte derecha e izquierda de la figura. Las marcas demuestran que ellos identificaron una regularidad acerca lo que permanece constante y que esto es el resultado de identificar partes comunes en cada una de las figuras de la secuencia (figura 4).

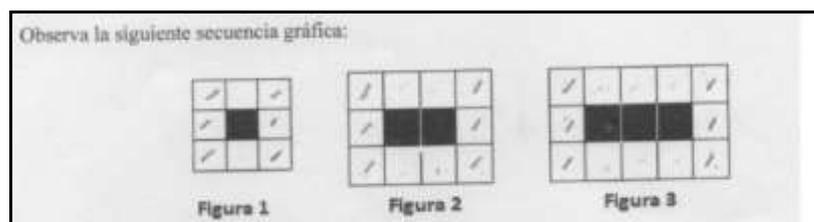


Figura 4: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 1 - actividad 2

Para establecer cuántas baldosas blancas tiene la figura 15, ellos reportan la siguiente estrategia: “fuimos aumentando de dos en dos hasta llegar a 15 baldosas negras y contar las tres baldosas de cada lado”. Su respuesta da indicios de que el grupo reconoce la figura compuesta por partes: la primera, corresponde a dos baldosas blancas que hay por cada negra y la segunda, las baldosas blancas que identificó constantes a cada lado de la figura. Las dos

partes que identificó son suficientes para construir cualquier otra figura de la secuencia. Por tal motivo, en la fase VER el nivel de desempeño del grupo es (ERS) y en la fase DESCRIBIR su nivel corresponde a (DRP).

La fase REGISTRAR se observa en la explicación suministrada por el grupo a la pregunta 5b, en la cual registran con palabras la forma en que se relacionan las partes (EFRP). En la fase VERIFICAR, este grupo muy a pesar de haber encontrado una regularidad no verifica (NVC), tal como lo muestra la figura 5, ya que solo se limita a describir la conjetura.

5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.
a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?
por se necesitan 48 baldosas blancas

b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?
Por porque van aumentando de a dos baldosas blancas por cada baldosa negra y se le aumentan las 3 de cada lado para rodearla completamente

6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?
Se necesitan 76 baldosas para rodear 35 baldosas Negras, Porque Aumentamos de dos baldosas blancas más seis

Figura 5: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 1 - actividad 2

De acuerdo a lo descrito anteriormente, podemos evidenciar lo siguiente:

- Este grupo, en las dos actividades planteadas mantiene un nivel III, en las tres primeras fases en el proceso de generalización.
- No se evidencia la fase de VERIFICACIÓN, ya que este grupo a pesar de haber encontrado la regularidad, no ve la necesidad de verificarla después de que tiene certeza de ella.

- En ambas actividades los estudiantes se apoyan en las gráficas de las secuencias y realizan marcas en ellas para encontrar la regularidad e identificar que cambia y que permanece constante.

4.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 2

Actividad 1:

La actividad realizada por el grupo 2 se encuentra en el anexo E. Al observar las respuestas de este grupo, se observa que ellos logran expresar el patrón identificado cuando explican cómo determinaron la cantidad de cuadros de la figura 10 (figura 6), lo cual corresponde a la fase de Describir.

El patrón identificado por este grupo es el aumento de cuatro cuadrados entre las figuras consecutivas (figura 5). Esta relación es una condición que es necesaria para caracterizar la figura, pero no suficiente para determinarla (ERN). Una evidencia de ello es que posteriormente el grupo utilizará este número para la formulación de su conjetura.

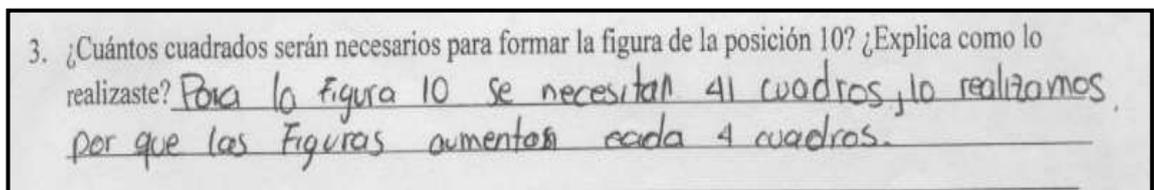


Figura 6: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 2 - actividad 1

Al DESCRIBIR la forma de encontrar los cuadrados que forman una figura, escriben que “la relación que hay entre la cantidad de cuadrados y el número de la figura es que cada 4 cuadros la figura cambia”. Con esta respuesta no hay claridad en lo que observan, aunque inferimos que están evidenciando que cada figura con respecto a la anterior aumenta 4 cuadrados, siendo las dos figuras consecutivas dos casos particulares. Por tanto, el nivel de desempeño corresponde a DPC.

Al momento de REGISTRAR, el grupo es capaces de encontrar una expresión matemática que generaliza la secuencia gráfica (figura 7), a pesar de que el

patrón identificado anteriormente no incluía todas las condiciones suficientes para llegar a una ley general. En esta expresión matemática utilizan símbolos para escribir la conjetura (ECOS).

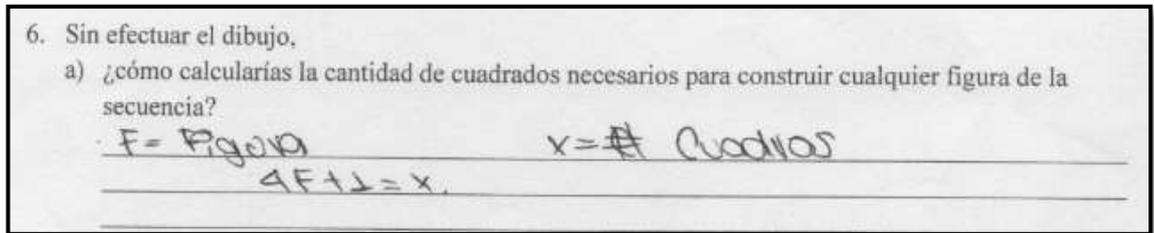


Figura 7: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 2 - actividad 1

Para finalizar, el grupo a pesar de haber encontrado una regularidad, no verifican su conjetura (NVC). Queda la inquietud si verificó mentalmente con los casos particulares expuestos, ya que su respuesta es “podemos realizar la comprobación con una que ya sabemos que es correcta”.

Actividad 2:

Al igual que el grupo 1, este grupo realizó en las tres primeras figuras marcas sobre las tres baldosas blancas que se encuentran en la parte derecha e izquierda de la figura (figura 8). Las marcas demuestran que en la fase VER, identificaron una regularidad acerca de lo que permanece constante y que esto es el resultado de identificar parte comunes en cada una de las figuras de la secuencia. Esta relación es una condición que es necesaria para caracterizar cada figura (ERN).

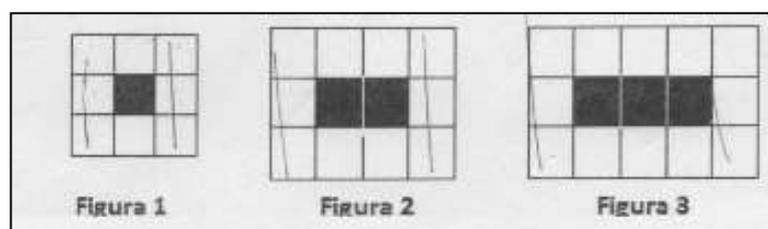


Figura 8: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 2 - actividad 2

Para establecer cuántas baldosas blancas tiene la figura 15, ellos reportan la siguiente estrategia: “fuimos aumentando de 2 en 2 hasta llegar a 15 baldosas

negras y así saber el número de baldosas blancas”. Con esto se evidencia que los estudiantes van formando la figura por partes, ya que por cada baldosa negra van aumentando dos baldosas blancas en cada figura. Esta relación identificada corresponde a DRP.

En cuanto a la fase REGISTRAR, el grupo escribe con símbolos la conjetura que ha observado y descrito de las relaciones entre las partes (ECOS). Esta conjetura relaciona tanto las marcas (6 cuadrados constantes a los lados de la figura), como el aumento detectado en la fase anterior. Para verificar la conjetura observada el grupo justifica manualmente con un caso en particular (VCM), mostrando así la validez de la expresión matemática encontrada (figura 9).

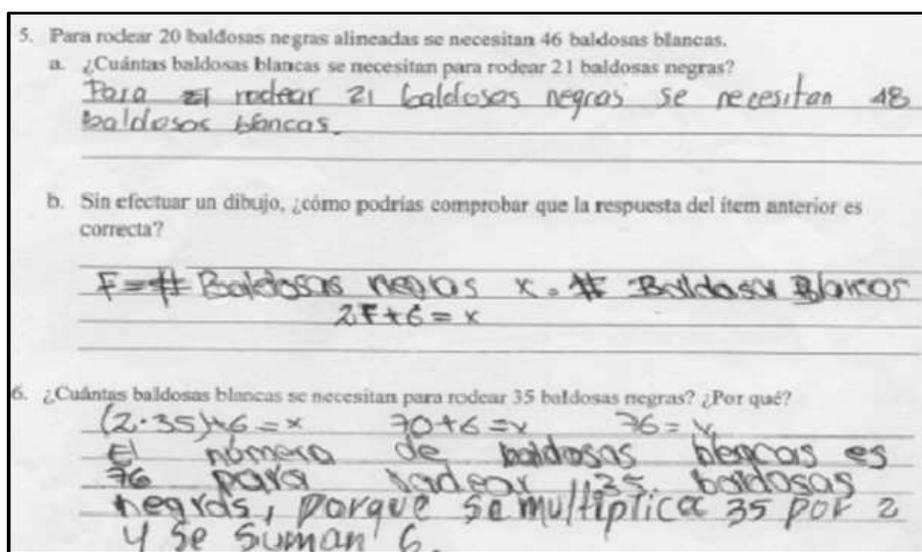


Figura 9: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 2 - actividad 2

De acuerdo a lo descrito anteriormente, podemos evidenciar lo siguiente:

- Este grupo en particular, en las dos actividades establece relaciones necesarias entre las partes de la imagen para la fase VER, ubicándose así en un nivel III en esta fase.
- En la actividad 2, se evidencia la fase de VERIFICACIÓN dado que el grupo realiza una comprobación con un caso en particular.

- En la actividad 1, los estudiantes inician en un nivel III, estableciendo relaciones necesarias (ERN). Luego al DESCRIBIR lo que observa se ubica en nivel II, ya que describe las propiedades comunes entre los casos particulares (DPC). En la fase REGISTRAR, se ubica en un nivel IV, describiendo con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes, lo que muestra un cambio de niveles en el proceso de generalización.
- En la actividad 2, este grupo pasa de tener un nivel III en las dos primeras fases, es decir, VER Y DESCRIBIR y finaliza en un nivel IV, realizando un registro simbólico y verificando manualmente su conjetura con un caso en particular.

4.3 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 3

Actividad 1:

En este grupo, cuando se les pide identificar cuántos cuadrados tendría la figura de la secuencia 10, los estudiantes describen relaciones necesarias y suficientes entre las partes de la imagen, reconociendo que para formar la posición 10, es necesario multiplicar 10 por cuatro y aumentar uno. Además, establecen una expresión que permite determinar la cantidad de cuadrados necesarios para construir la figura 10, lo cual corresponde a conjeturar acerca de las relaciones entre las partes de la imagen (CRP) y describir dicha conjetura (DCR) (figura 10). No obstante, en la respuesta suministrada no se evidencia cómo llegan a esa conjetura.

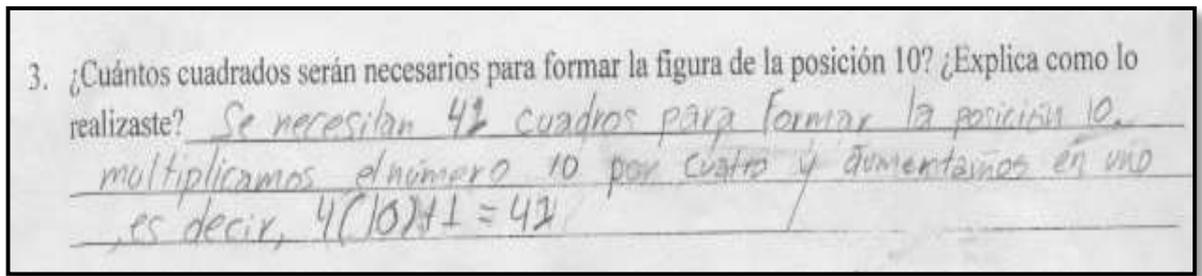


Figura 10: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 3 - actividad 1

Al momento de REGISTRAR, el grupo escribe “ $4F + 1 = X$ ”, donde F significa el número de figura a calcular y “X” el número de cuadrados necesarios para formarla (figura 11). Como se puede observar utilizan una simbología para expresar la conjetura observada (ECOS). Esta conjetura se utiliza para deducir la cantidad de cuadrados que tendría las figuras 20 y 35 de la secuencia.

En la fase de VERIFICACIÓN, el grupo verifica su conjetura manualmente (VCM) con casos particulares descritos anteriormente, comprobando así que dicha expresión es válida para cualquier caso en particular.

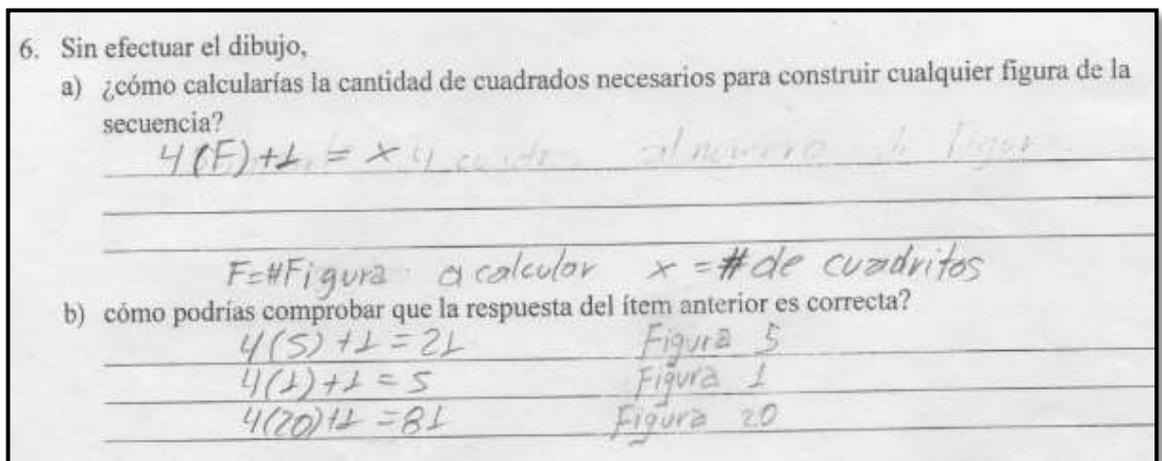


Figura 11: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 3 - actividad 1

Actividad 2:

En esta actividad el grupo realizó marcas sobre las figuras de la secuencia en las 3 baldosas blancas que están a lado y lado de figura. Las marcas demuestran que ellos identificaron una regularidad acerca lo que permanece

constante y que esto es el resultado de identificar parte comunes en cada una de las figuras de la secuencia.

Para establecer cuántas baldosas blancas tiene la figura 15, ellos reportan la siguiente estrategia: “por cada baldosa negra se deben sumar dos blancas y las tres baldosas blancas que en cada lado” (figura 12). Su respuesta da indicios de que el grupo reconoce la figura compuesta por partes: la primera, corresponde a dos baldosas blancas que hay por cada negra y la segunda, las baldosas blancas que identificó constantes a cada lado de la figura. Las dos partes que identificó son suficientes para construir cualquier otra figura de la secuencia. Por tal motivo, en la fase VER el nivel de desempeño del grupo es (ERS) y en la fase DESCRIBIR su nivel corresponde a (DRP).

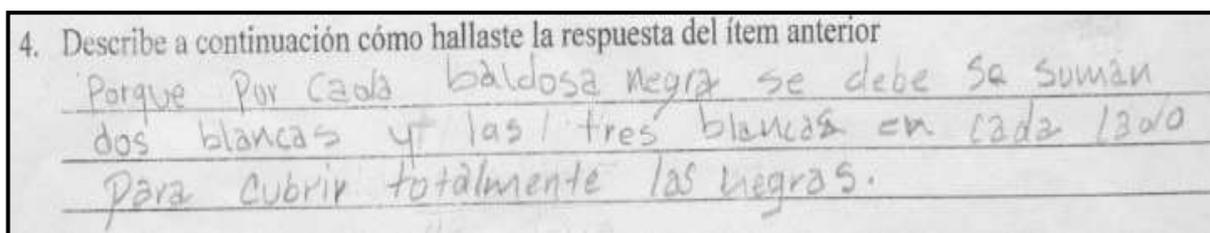


Figura 12: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 3- actividad 2

En cuanto a la fase de REGISTRAR, se observa por su respuesta suministrada que este grupo escribe con símbolos la conjetura observada entre las partes (ECOS), estableciendo una expresión matemática y además la utiliza para verificar su conjetura manualmente con un ejemplo en particular (VCM), mostrando tener claridad sobre la conjetura observada en la secuencia gráfica (figura 13).

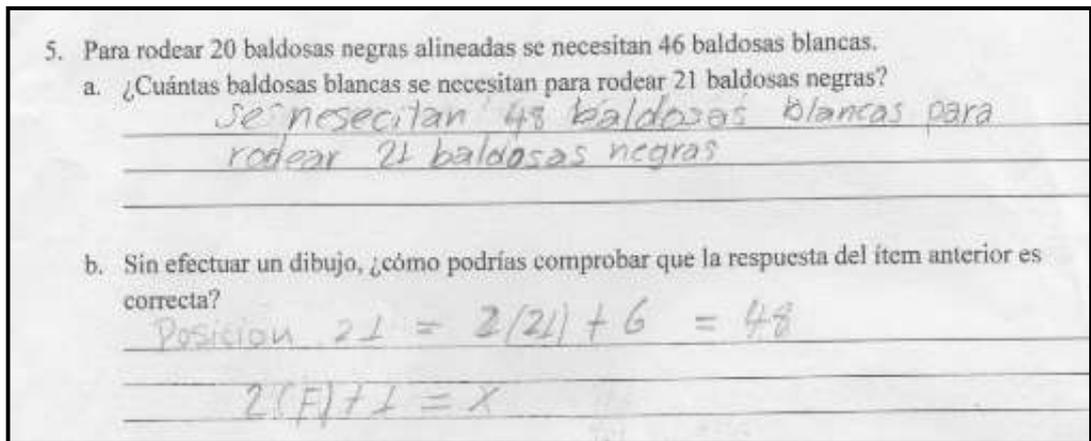


Figura 13: Fase REGISTRAR Y VERIFICAR, grupo 3 - actividad 2

De acuerdo a lo descrito anteriormente, podemos evidenciar lo siguiente:

- Este grupo en particular, en la actividad uno, mantiene un nivel IV en las fases del proceso de generalización.
- En la segunda actividad el grupo inicia con un nivel III en las dos primeras fases y finaliza en un nivel IV, cuando ESCRIBE y VERIFICA su conjetura.
- En las dos actividades planteadas la conjetura observada se verifica manualmente, mostrando con casos particulares que la expresión encontrada es válida.

4.4 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 4

Actividad 1:

Este grupo, explica cómo encontraron la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura 10 de la secuencia, de la siguiente forma: “que la frecuencia es sumar 4 cuadros, dos en la línea horizontal, uno en cada extremo y dos de forma vertical” (figura 14). En este caso, la característica común identificada es una relación entre dos figuras consecutivas de la secuencia, en

la que cada figura de la misma está conformada por la anterior más cuatro cuadrados: dos que se ubican en los extremos derecho e izquierdo, y dos que se ubican en la parte inferior.

Esta relación es una condición que es necesaria para caracterizar cada figura, pero no suficiente para determinarla (ERN) y en la fase DESCRIBIR su nivel corresponde a (DRP).

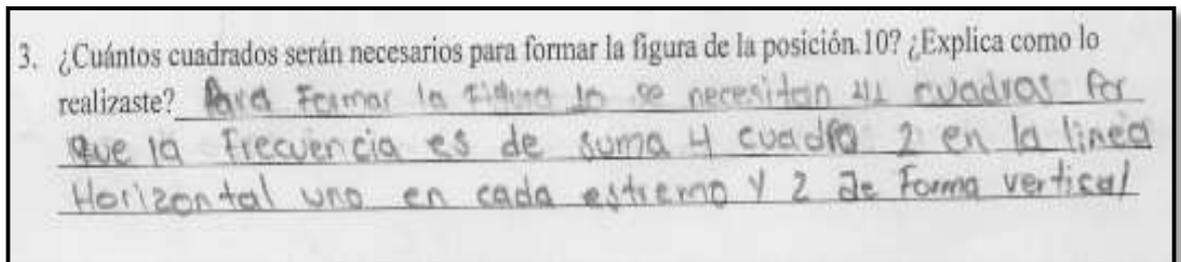


Figura 14: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 4 - actividad 1

En cuanto a la fase de REGISTRAR el grupo describe y escribe con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes (ECOS) y utiliza dicha expresión para hallar el número de cuadrados que forman las figuras de las posiciones 20 y 35.

En la fase de VERIFICACIÓN, su conjetura la verifican manualmente (VCM) utilizando un caso particular, demostrando de esta forma que la regularidad hallada funciona para cualquier caso en particular (figura 15).

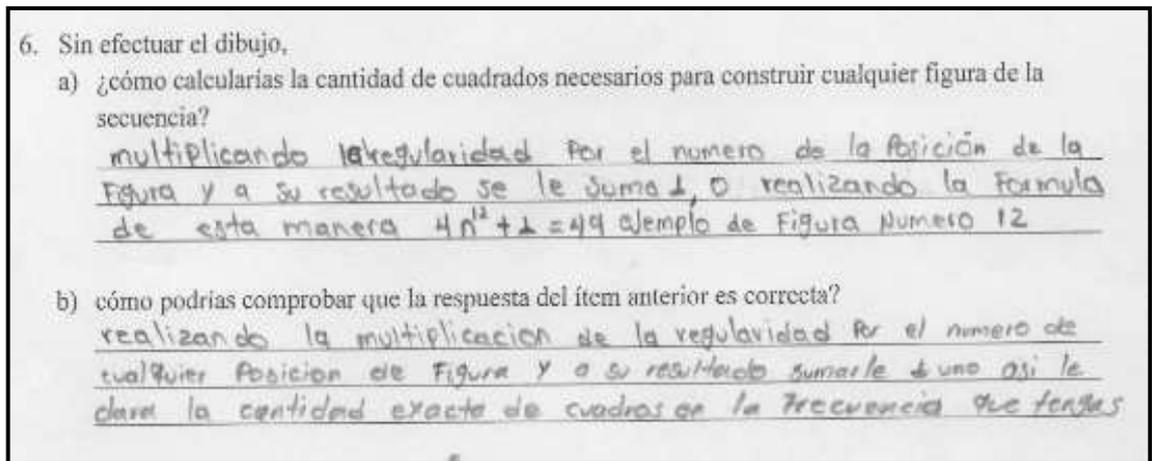


Figura 15: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 4 - actividad 1

Actividad 2:

Para establecer cuántas baldosas blancas tiene la figura 15, los estudiantes reportan que se deben aumentar dos baldosas blancas por cada baldosa negra. Su respuesta da indicios de que el grupo reconoce la figura compuesta por partes, estableciendo una relación entre las baldosas negras y las blancas, la cual es una condición necesaria (ERN) pero no suficiente para determinar casos particulares.

De este modo en la fase DESCRIBIR, describe la forma en que se relacionan las partes (DRP), teniendo en cuenta la relación que hay entre las baldosas blancas y las negras (figura 16).

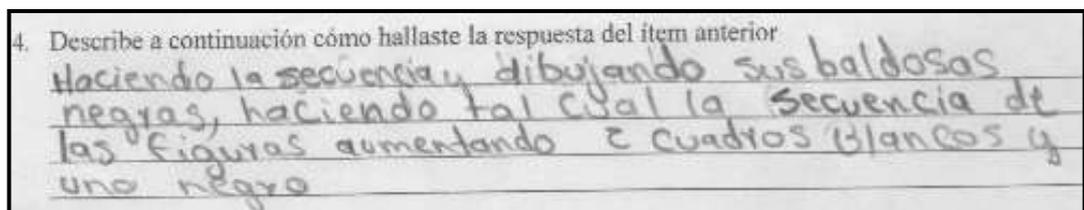


Figura 16: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 4 - actividad 2

En cuanto a la fase de REGISTRAR, este grupo escribe con palabras la forma en que se relacionan las partes (EFRP), mostrando tener claridad con respecto a la regla establecida para cualquier caso en particular, además tienen en

cuenta las tres baldosas que permanecen constantes en los extremos de cada figura.

Para finalizar este grupo no verifica su conjetura (NVC), aunque previamente estableció un camino que podría permitirle efectuar una verificación (figura 17).

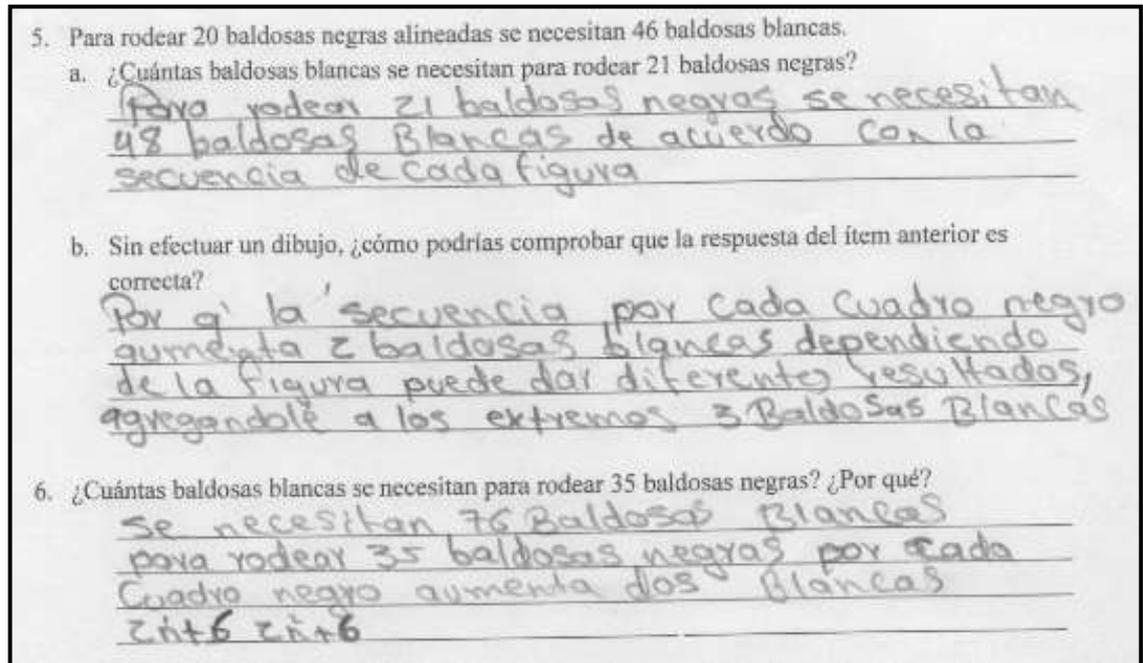


Figura 17: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 4 - actividad 2

De acuerdo a lo descrito anteriormente, podemos evidenciar lo siguiente:

- Este grupo en particular, en la actividad uno, mantiene en las dos primeras fases del proceso de generalización un nivel III, pero al momento de REGISTRAR el grupo se categoriza en un nivel IV, ya que la escribe con símbolos la conjetura observada.
- En la segunda actividad este grupo mantiene un nivel III, en las tres primeras fases del proceso de generalización.

- En las actividades realizadas no se evidencia el alcance de la fase de VERIFICACIÓN, muy a pesar de haber encontrado una regularidad en las secuencias propuestas.

4.5 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRUPO 5

Actividad 1:

Para este grupo en particular cada figura estaba conformada por dos partes, las cuales son la figura anterior y los cuatro cuadrados adicionales: dos que se ubican en los extremos derecho e izquierdo, y dos que se ubican en la parte inferior (figura 18). Esta relación es una condición que es necesaria para caracterizar cada figura, pero no suficiente para determinarla (ERN) y en la fase describir su nivel corresponde a (DRP).

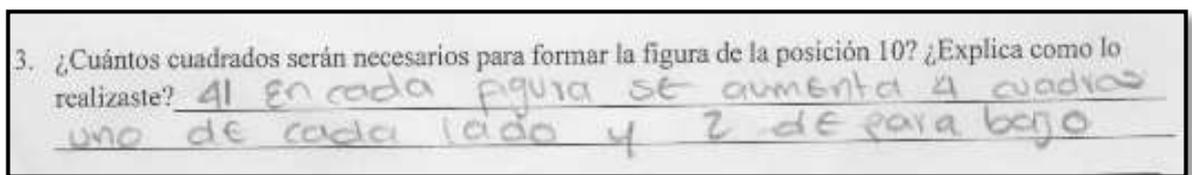


Figura 18: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 5 - actividad 1

En cuanto a la fase de REGISTRAR, se consideró que este grupo logra escribir con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes (ECOS) “ $4N + 1$ ”, estableciendo que 4 es la cantidad de cuadros que se aumentan por cada posición y N es la posición, no obstante en la explicación no hay claridad con respecto al uno que se suma en la expresión.

En la fase de VERIFICACIÓN, el grupo establece un camino que podría permitirle efectuar una verificación, pero no lo realiza. Sin embargo queda la duda si lo realizaron mentalmente, ya que establecen la regla para determinarlo (figura 19).

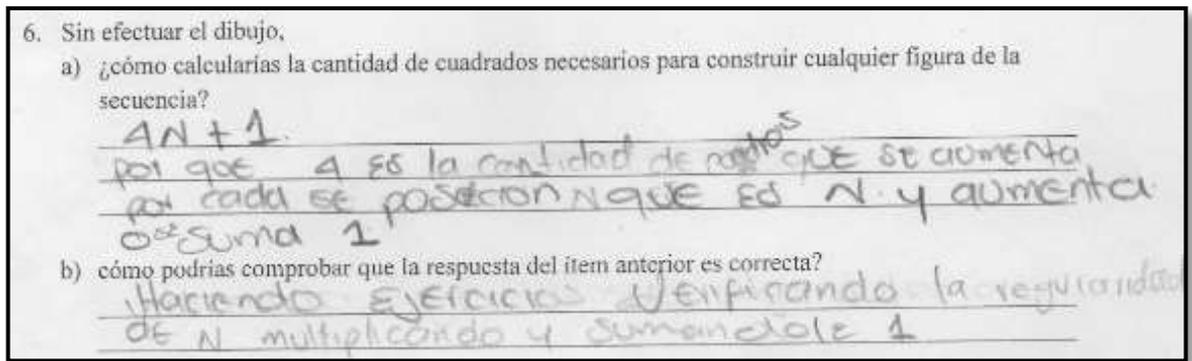


Figura 19: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 5 - actividad 1

Actividad 2:

Para establecer cuántas baldosas blancas tiene la figura 15, ellos reportan la siguiente estrategia: “encerrando los 15 cuadrados negros y aumentando tres cuadros en cada lado”. Esta relación es una condición que es necesaria para caracterizar cada figura, pero no suficiente para determinarla (ERN). Este grupo tiene en cuenta las partes que permanecen constantes en la figura, es decir los cuadros blancos en cada lado, pero no registra la regularidad entre baldosas negras y blancas (figura 20).

Para la fase DESCRIBIR, se podría decir que relaciona las parte constante con lo que varía en cada figura (DRP).

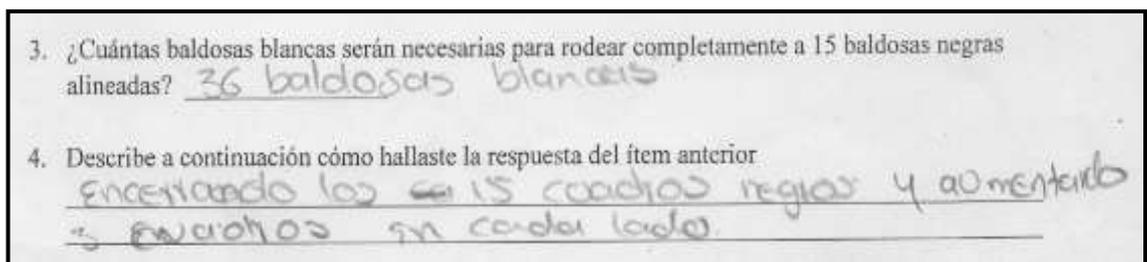


Figura 20: Fase VER y DESCRIBIR, grupo 5 - actividad 2

En cuanto a la fase de REGISTRAR, se observa en la explicación suministrada por el grupo a la pregunta 5b, en la cual registran con palabras la forma en que se relacionan las partes (EFRP).

En la fase VERIFICAR, este grupo muy a pesar de haber encontrado una regularidad no verifica (NVC), tal como lo muestra la figura 21.

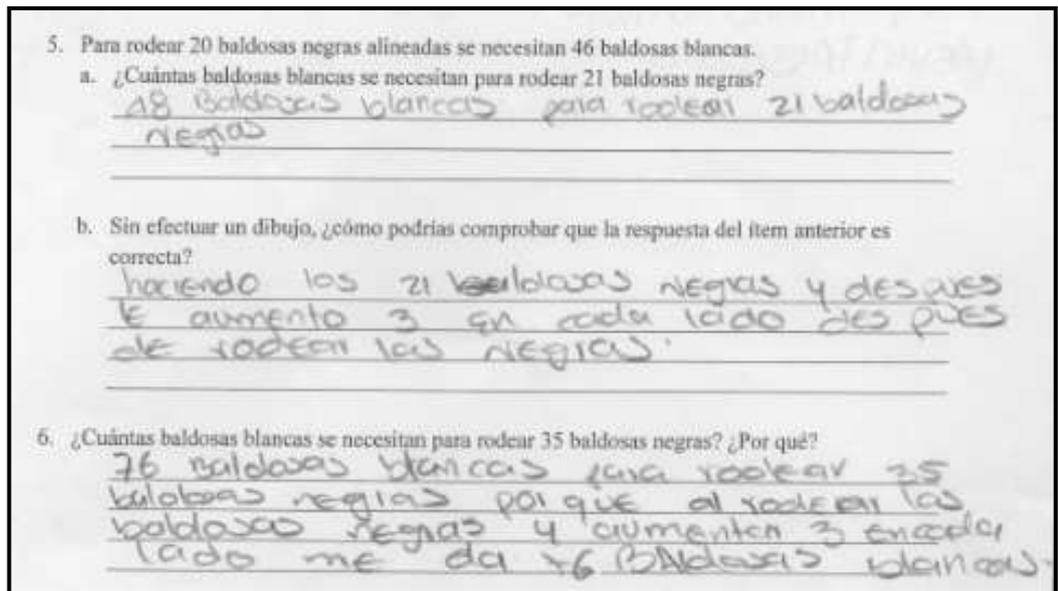


Figura 21: Fase REGISTRAR y VERIFICAR, grupo 5 - actividad 2

De acuerdo a lo descrito anteriormente, podemos evidenciar lo siguiente:

- Este grupo en particular, en la actividad uno, mantiene en las dos primeras fases del proceso de generalización un nivel III, pero al momento de REGISTRAR, es decir en la tercera fase del proceso, el grupo se categoriza en un nivel IV.
- En la segunda actividad el grupo mantiene un nivel III en las tres primeras fases del proceso de generalización.
- En las actividades realizadas no se evidencia el alcance de la fase de VERIFICACIÓN, muy a pesar de haber encontrado una regularidad en las secuencias propuestas.

5. CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que el propósito de este trabajo es identificar y describir los niveles de desempeño de un grupo de estudiantes de grado octavo de básica secundaria cuando realizan tareas enmarcadas en el proceso de generalización, el análisis realizado permite plantear las siguientes conclusiones:

- De los cuatro niveles establecidos por García (2011) en el proceso de generalización, se evidenció que los estudiantes de este trabajo en particular en las dos primeras fases, se encuentran en el nivel III ya que en su mayoría establecen relaciones necesarias entre las partes y describen la forma en que se relacionan las partes.(ERN, DRP).
- En la tercera fase del proceso de generalización (REGISTRAR), se evidenció que a pesar de que los estudiantes iniciaron en un nivel III, en esta fase en particular predomina el nivel IV, ya que en su mayoría escribieron con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes (ECOS).
- En este estudio en particular solo dos grupos para la fase de VERIFICACION, logran comprobar la conjetura manualmente con casos en particular (VCM). No obstante, si bien no se logra la verificación, se habla de la existencia de una generalización.
- Es importante resaltar que en las actividades planteadas, es puesto en manifiesto, la dificultad que tienen los estudiantes para describir y expresar la conjetura observada, tal como lo mencionaron García (2011) en su investigación.

- En la primera actividad el 80% de los estudiantes, utilizaron lenguaje algebraico para escribir sus conjeturas, mientras que en la segunda actividad solo lo expreso el 40%. No obstante, así como se puede hablar de generalización sin verificación, también puede omitirse el uso lenguaje algebraico en la fase REGISTRAR, ya que de acuerdo a la definición que se asumió de generalización no se hace alusión a dicho lenguaje, aunque facilite la expresión de la generalidad.
- De manera general se observó que no necesariamente se debe mantener un mismo nivel de desempeño en cada una de las fases propuestas en el proceso de Generalización.
- En las respuestas suministradas por los estudiantes, se observó que construyen los términos cercanos de las secuencias, sin inconveniente alguno y reportar correctamente la cantidad de cuadros que tenían cada figura en la tabla. Estas acciones enmarcadas en la fase VER propuesta por Mason, son realizadas correctamente e imprescindibles para identificar características entre los elementos de la secuencia.
- Este trabajo nos permitió ampliar nuestro conocimiento en cuanto a los tipos de actividades que se pueden proponer y el tipo de preguntas que se pueden formular a la hora de realizar tareas relacionadas con la generalización, reconociendo la importancia que tienen para dar inicio al algebra.

BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, F., Babero, C., Fuentes, I., Azcarate., Dozagarat, J., Gutiérrez, S. et al. (1993) *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Grupo Azarquiel. Madrid: Síntesis.
- Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Un abordaje basado en la geometría. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 16(1), 113-148
- Casas. E. (2005) *Álgebra recreativa, procesos básicos para el desarrollo del pensamiento*. Bogotá: Magisterio.
- García, Silvia Susana (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años. Tesis Maestría para optar al título de Magister en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.
- Gaitán, L., & Herrera, L. (2013). Ejemplificación de las diferentes fases del proceso de generalización en álgebra en tareas resueltas por estudiantes de aritmética de licenciatura en matemáticas. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1988). *Rutas y raíces hacia el Álgebra* (C. Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985)
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN-. (1998), *Lineamientos Curriculares para Colombia*, Bogotá, 1998.

- Mora, L. (2012). *Algebra en primaria*. Documento no publicado, elaborado en el marco del Programa Todos a Aprender del *Ministerio de Educación Nacional*. República de Colombia.
- ´Pérez, J. (2005). La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental. Tesis de maestría, Universidad de Antioquia.
- Randford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities*, PNG, 4(2), 37-62.
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires. Libros de Zorsal
- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la Educación Obligatoria. *Aportaciones de la investigación*. NÚMEROS, (77), 5-34.
- Vargas, G. (2013). Modelo de Van Hiele para la Didáctica de la Geometría. *UNICIENCIA*, 27(1), 74 - 94

ANEXOS

Anexo A: Malla curricular del área de matemáticas del colegio Colombo Florida Bilingüe.

DEPARTAMENTO	Matemáticas	Año	2016
ASIGNATURA	Algebra I	PERIODO	Primero
JEFE DE DEPARTAMENTO	Henry Palma C	GRADO	Octavo
PROFESOR	Henry Palma C	I. HORARIA	30

PROPOSITO DE ÁREA

Fomentar aptitudes en el educando para emplear las matemáticas en el estudio de otras disciplinas, interpretar relaciones entre los modelos matemáticos y la realidad, y solucionar problemas de orden teórico-práctico.

PROPOSITO DE ASIGNATURA

Reconocer el álgebra como un conjunto de procesos que está presente en cualquier situación donde se modele situaciones reales mediante algoritmos matemáticos.

PROPOSITO DEL PERIODO

Reconocer y aplicar las relaciones y operaciones que existe entre los conjuntos numéricos y expresiones algebraicas.

EVALUACIÓN (Indicadores de Logro)

- Identifica las características de un número dado.
- Identifica las relaciones de contención entre los conjuntos numéricos.
- Realiza operaciones entre distintos conjuntos numéricos.
- Realiza operaciones aditivas con expresiones algebraicas.
- Clasifica expresiones algébricas de acuerdo con el número de términos.

ENSEÑANZAS PRIMER PERIODO

- Números naturales
- Números enteros
- Números racionales
- Expresiones decimales
- Números irracionales
- Números reales
- Operaciones con los números reales

- Adición y sustracción de polinomios
- Signos de agrupación
- Multiplicación de polinomios
- productos notables
- producto de suma por la diferencia de dos expresiones

ENSEÑANZAS SEGUNDO PERIODO

- producto de expresiones de la forma $(a + a)(x + b)$
- cubo de un binomio y Triangulo de pascal
- Factor común
- Factor común por agrupación de términos
- Trinomio cuadrado perfecto
- Diferencia de cuadrados perfectos
- Trinomios cuadrados perfectos por adición y sustracción
- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
- Cubo perfecto de binomios
- Suma o diferencia de cubos perfectos
- Suma o diferencia de dos potencias iguales

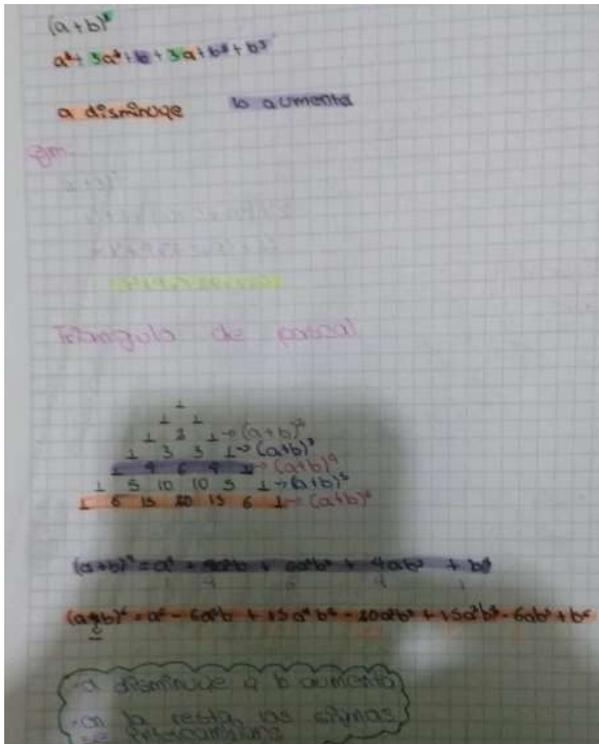
ENSEÑANZAS TERCER PERIODO

- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo
- Expresiones algebraicas racionales
- Simplificación de fracciones algebraicas
- Adición y sustracción de fracciones algebraicas
- Multiplicación de y división de fracciones algebraicas
- Fracciones algebraicas complejas

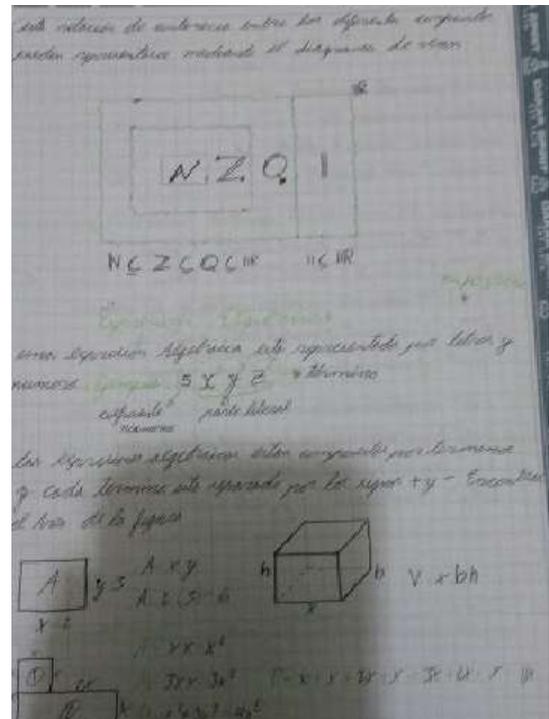
ENSEÑANZAS CUARTO PERIODO

- Ecuación y sus partes
- Resolución de ecuaciones
- Ecuaciones con paréntesis
- Ecuaciones con denominadores
- Ecuaciones racionales
- Ecuaciones con coeficientes literales
- Planteamiento y resolución de problemas
- Desigualdades e inecuaciones
- Función y su representación
- Función lineal y función a fin
- Pendiente y ecuación de la recta

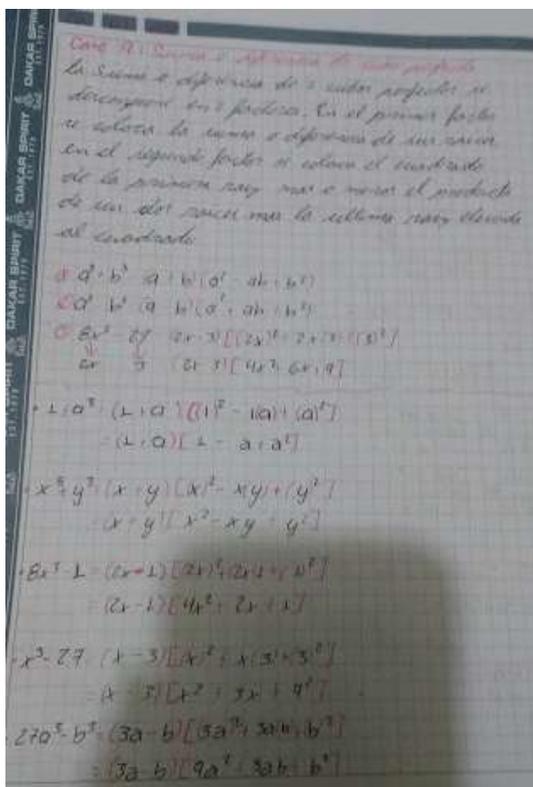
Anexo B: Evidencias de los cuadernos de los estudiantes sobre las temáticas y actividades trabajadas en clase.



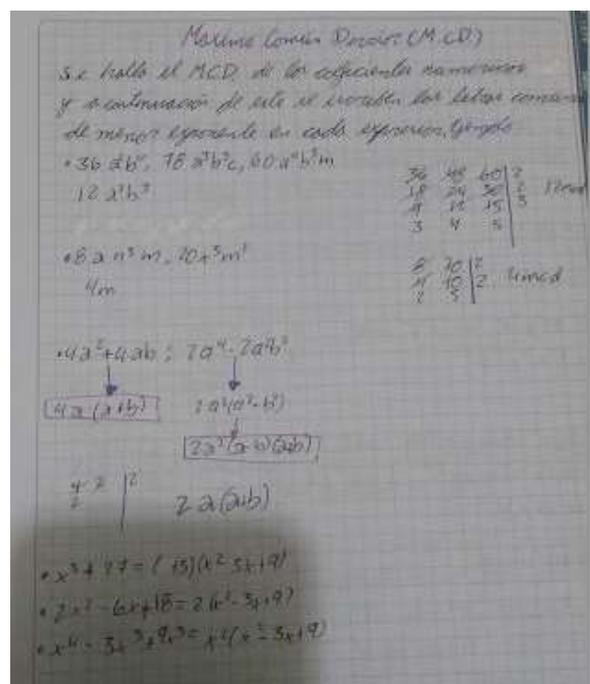
Evidencia de cuaderno 1



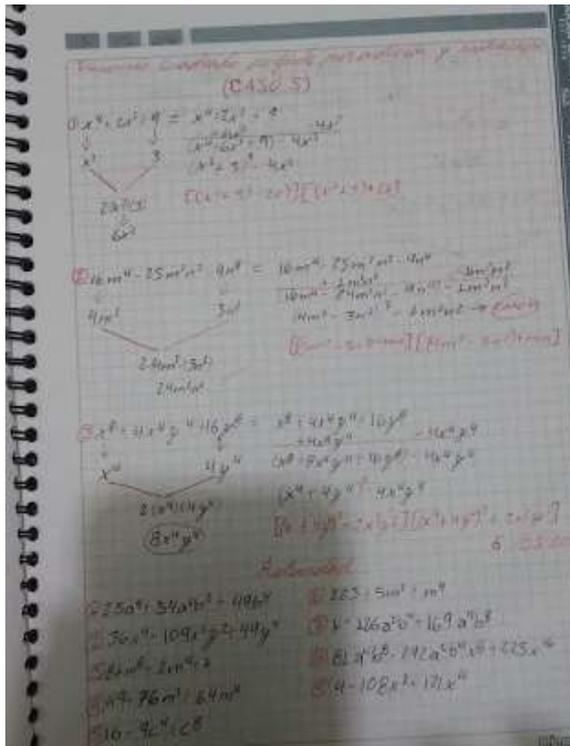
Evidencia de cuaderno 2



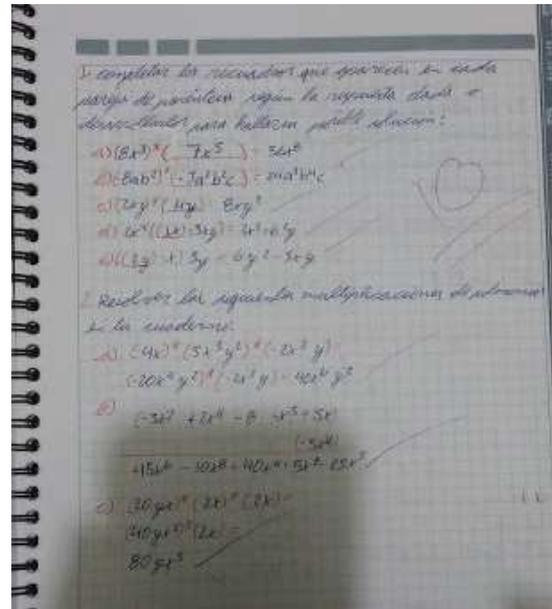
Evidencia de cuaderno 3



Evidencia de cuaderno 4



Evidencia de cuaderno 5



Evidencia de cuaderno 6

Anexo C: Actividad diagnóstica



Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Especialización en Educación Matemática
2016

Nombres: _____ Fecha: _____

ACTIVIDAD: Los palillos

Observa la siguiente secuencia gráfica, construida con palillos.



Fig.1

Fig.2

Fig. 3

2. Dibuja las figuras 4, 5 y 6 de la secuencia.

3. Complete la siguiente tabla

FIGURA	1	2	3	4	10
CANTIDAD DE PALILLOS	4				

4. ¿Cuántos palillos se necesitan para construir la figura 15 y la figura 20? ¿Por qué?

5. ¿Podrías descubrir la regularidad que tiene esta secuencia de figuras? Escribe y explica tu respuesta?

6. Escribe una fórmula que relacione la cantidad de palillos de cada figura con su posición.

Anexo D: Actividades implementadas

Actividad 1

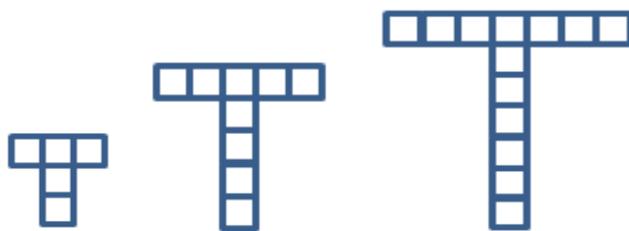


Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Especialización en Educación Matemática
2016

Nombres: _____ Fecha: _____

ACTIVIDAD 1: Contando cuadrados

Observa la siguiente secuencia gráfica:



Posición 1

Posición 2

Posición 3

7. dibuja la posición 4,5 y 6 de la secuencia gráfica.

8. Completa la tabla indicando la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura en cada posición.

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Cuadrados	5					

9. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para formar la figura de la posición 10? ¿Explica cómo lo realizaste?

10. Si encontraste alguna relación entre la cantidad de cuadrados necesarios para construir cada figura con su posición, descríbela a continuación

11. Calcule el número de cuadrados que se pueden formar para las figuras de las posiciones 20 y 35.

12. Sin efectuar el dibujo,

c) ¿cómo calcularías la cantidad de cuadrados necesarios para construir cualquier figura de la secuencia?

d) cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

Actividad 2



Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Especialización en Educación Matemática
2016

Nombres: _____ Fecha: _____

ACTIVIDAD 2: Contando baldosas

Observa la siguiente secuencia gráfica:

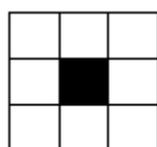


Figura 1

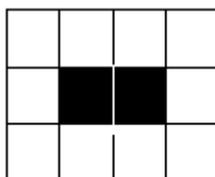


Figura 2

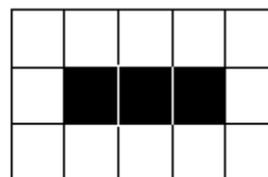


Figura 3

1. Dibuja las figuras 4 y 5 de la secuencia gráfica.
2. Registra en la siguiente tabla la cantidad de baldosas blancas que se necesita para rodear completamente la cantidad de baldosas negras indicadas.

Cantidad de baldosas negras	1	2	3	4	5
Cantidad de baldosas blancas	8				

3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 15 baldosas negras alineadas? _____
4. Describe a continuación cómo hallaste la respuesta del ítem anterior

5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.

a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?

b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?

Anexo D: Actividades realizadas por el grupo 1

Actividad 1

Observa la siguiente secuencia gráfica:

Posición 1 Posición 2 Posición 3

1. dibuja la posición 4,5 y 6 de la secuencia gráfica.

Posición 4 Posición 5 Posición 6

2. Completa la tabla indicando la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura en cada posición.

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Cuadrados	5	9	13	17	21	25

3. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para formar la figura de la posición 10? ¿Explica como lo realizaste? Se necesitan 41 cuadrados para formar la figura de la posición 10. Aumentan 4 cuadrados dos de arriba y dos de abajo, más uno que comparten.

4. Si encontraste alguna relación entre la cantidad de cuadrados necesarios para construir cada figura con su posición, descríbela a continuación.
A todas las secuencias se multiplica por 4 y se suma 1.

5. Calcule el número de cuadrados que se pueden formar para las figuras de las posiciones 20 y 35.
Para formar la figura de la posición 20 se necesitan 81 cuadrados y para formar la figura de la posición 35 se necesitan 141 cuadrados.

6. Sin efectuar el dibujo.

a) ¿cómo calcularías la cantidad de cuadrados necesarios para construir cualquier figura de la secuencia?
la figura se multiplica por 4 y se suma 1, así se sigue la secuencia.

b) cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?
por se comprueba sumando los 4 cuadrados.

Actividad 2.

Observa la siguiente secuencia gráfica:

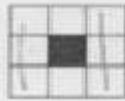


Figura 1

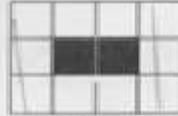


Figura 2

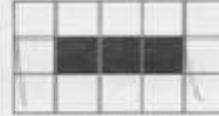


Figura 3

1. Dibuja las figuras 4 y 5 de la secuencia gráfica.



Fig 4



Fig 5

2. Registra en la siguiente tabla la cantidad de baldosas blancas que se necesitan para rodear completamente la cantidad de baldosas negras indicadas.

Cantidad de baldosas negras	1	2	3	4	5
Cantidad de baldosas blancas	8	10	12	14	16

3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 15 baldosas negras alineadas? 36
4. Describe a continuación cómo hallaste la respuesta del ítem anterior
Fuimos contando de 2 en 2 hasta llegar a los 12 baldosas negras y así saber el número de baldosas blancas

5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.

- a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?

Para rodear 21 baldosas negras se necesitan 48 baldosas blancas.

- b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

$$F = \# \text{ Baldosas negras} \times 2 + 6 = x$$

$$21 \times 2 + 6 = x$$

6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?

$(2 \cdot 35) + 6 = x$ $70 + 6 = x$ $76 = x$
El número de baldosas blancas es 76 para rodear 35 baldosas negras, porque se multiplica 35 por 2 y se suman 6.

Anexo E: Actividades realizadas por el grupo 2

ACTIVIDAD 1

Observa la siguiente secuencia gráfica:

Posición 1 Posición 2 Posición 3

1. dibuja la posición 4,5 y 6 de la secuencia gráfica.

2. Completa la tabla indicando la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura en cada posición.

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Cuadrados	5	9	13	17	21	25

3. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para formar la figura de la posición 10? ¿Explica como lo realizaste? Para la figura 10 se necesitan 41 cuadrados, lo realizamos por que las figuras aumentan cada 4 cuadrados.

4. Si encontraste alguna relación entre la cantidad de cuadrados necesarios para construir cada figura con su posición, descríbela a continuación:
la relación que hay entre la cantidad de cuadrados y el número de la figura es que cada 4 cuadrados la figura cambia.

5. Calcule el número de cuadrados que se pueden formar para las figuras de las posiciones 20 y 35.
la figura veinte tiene 81 cuadrados y la figura 35 tiene 141 cuadrados, los sacamos contando de 4 en 4, y sumando 1.

6. Sin efectuar el dibujo.

a) ¿cómo calcularías la cantidad de cuadrados necesarios para construir cualquier figura de la secuencia?
F = Figura x = # Cuadrados
 $4F + 1 = x$

b) ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?
Podemos realizarla con una que ha salido que es correcta.

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia gráfica:

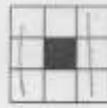


Figura 1

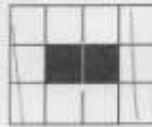


Figura 2

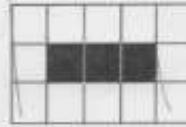
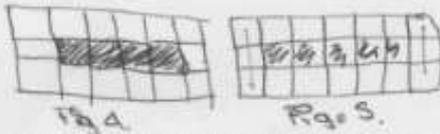


Figura 3

1. Dibuja las figuras 4 y 5 de la secuencia gráfica.



2. Registra en la siguiente tabla la cantidad de baldosas blancas que se necesita para rodear completamente la cantidad de baldosas negras indicadas.

Cantidad de baldosas negras	1.	2.	3.	4.	5.
Cantidad de baldosas blancas	8.	10.	12.	14.	16.

3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 15 baldosas negras alineadas? 36.

4. Describe a continuación cómo hallaste la respuesta del ítem anterior

Fuimos aumentando de 2 en 2 hasta llegar a los 15 baldosas negras y así saber el número de baldosas blancas.

5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.

- a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?

Para rodear 21 baldosas negras se necesitan 48 baldosas blancas.

- b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

$$F = \# \text{ Baldosas negras} \times 2 = \# \text{ Baldosas blancas} + 6$$

$$2F + 6 = x$$

6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?

$(2 \cdot 35) + 6 = x$ $70 + 6 = x$ $76 = x$
El número de baldosas blancas es 76 para rodear 35 baldosas negras, porque se multiplica 35 por 2 y se suman 6.

Anexo F: Actividades realizadas por el grupo 3

Actividad 1

ACTIVIDAD Contando cuadrados

Observa la siguiente secuencia gráfica:

Posición 1 Posición 2 Posición 3

1. Dibuja la posición 4, 5 y 6 de la secuencia gráfica.

2. Completa la tabla indicando la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura en cada posición.

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Cuadrados	5	9	13	17	21	25

3. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para formar la figura de la posición 10? ¿Explica como lo realizaste? *Se necesitan 42 cuadrados para formar la posición 10. Multiplicamos el número 10 por cuatro y aumentamos en uno es decir, $4(10)+1=41$.*

4. Si encontraste alguna relación entre la cantidad de cuadrados necesarios para construir cada figura con su posición, descríbela a continuación.
Se aumentan 4 cuadrados para construir la siguiente figura, 2 a cada esquina de arriba y 2 cuadrados debajo.

5. Calcule el número de cuadrados que se pueden formar para las figuras de las posiciones 20 y 35.
*Posición 20 = $4(20)+1=81$
Posición 35 = $4(35)+1=141$*

6. Sin efectuar el dibujo.

a) ¿cómo calcularías la cantidad de cuadrados necesarios para construir cualquier figura de la secuencia?
 $4(F)+1 = x$

b) ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?
F=#Figura es calcular x=#de cuadrados
 $4(5)+1=21$ Figura 5
 $4(1)+1=5$ Figura 1
 $4(20)+1=81$ Figura 20

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia gráfica:

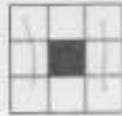


Figura 1

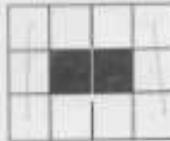


Figura 2



Figura 3

1. Dibuja las figuras 4 y 5 de la secuencia gráfica.



2. Registra en la siguiente tabla la cantidad de baldosas blancas que se necesita para rodear completamente la cantidad de baldosas negras indicadas.

Cantidad de baldosas negras	1	2	3	4	5
Cantidad de baldosas blancas	8	10	12	14	16

3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 15 baldosas negras alineadas? 36 baldosas

4. Describe a continuación cómo hallaste la respuesta del ítem anterior

Porque por cada baldosa negra se debe sumar dos blancas y los tres blancos en cada lado para cubrir totalmente las negras.

5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.

- a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?

Se necesitan 48 baldosas blancas para rodear 21 baldosas negras

- b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

$$\text{Posición } 21 = 2(21) + 6 = 48$$

$$2(F) + 6 = X$$

6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?

Se necesitan 76 baldosas para este caso.

Anexo G: Actividades realizadas por el grupo 4

Actividad 1

Observa la siguiente secuencia gráfica:

Posición 1 Posición 2 Posición 3

1. dibuja la posición 4, 5 y 6 de la secuencia gráfica.

Posición 4 Posición 5 Posición 6

2. Completa la tabla indicando la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura en cada posición.

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Cuadrados	5	9	13	17	21	25

3. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para formar la figura de la posición 10? ¿Explica como lo realizaste?

Para formar la figura se necesitan 41 cuadrados por que la frecuencia es de suma 4 cuadros 2 en la línea horizontal uno en cada extremo y 2 de forma vertical.

Si encontraste alguna relación entre la cantidad de cuadrados necesarios para construir cada figura con su posición, descríbela a continuación.

Sumando de 4 cuadros por figura ordenándolos dos horizontales uno a cada extremo y dos en forma vertical para que su forma aumente ordenada y correctamente.

Calcule el número de cuadrados que se pueden formar para las figuras de las posiciones 20 y 35.

el número de cuadros de la figura de la posición 20 es 82 porque $4 \cdot 20 + 2 = 82$ y la figura de posición 35 es 142 cuadros porque $4 \cdot 35 + 2 = 142$.

Sin efectuar el dibujo.

a) ¿cómo calcularías la cantidad de cuadrados necesarios para construir cualquier figura de la secuencia?

multiplicando la regularidad por el número de la posición de la figura y a su resultado se le suma 2, o realizando la fórmula de esta manera $4n^2 + 2 = 49$ ejemplo de figura número 12.

b) cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?

realizando la multiplicación de la regularidad por el número de cualquier posición de figura y a su resultado sumarle 2 uno así la da la cantidad exacta de cuadros en la frecuencia que tengas.

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia gráfica:

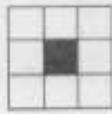


Figura 1

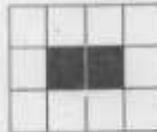


Figura 2

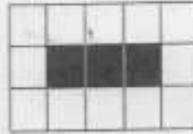


Figura 3

1. Dibuja las figuras 4 y 5 de la secuencia gráfica.



2. Registra en la siguiente tabla la cantidad de baldosas blancas que se necesita para rodear completamente la cantidad de baldosas negras indicadas.

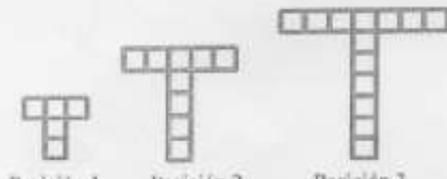
Cantidad de baldosas negras	1	2	3	4	5
Cantidad de baldosas blancas	8	10	12	14	16

3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 15 baldosas negras alineadas? Se necesitan 36 Baldosas Blancas
4. Describe a continuación cómo hallaste la respuesta del ítem anterior
Haciendo la secuencia, dibujando sus baldosas negras, haciendo tal cual la secuencia de las figuras aumentando 2 Cuadros Blancos y uno negro
5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.
- a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?
Para rodear 21 baldosas negras se necesitan 48 baldosas Blancas de acuerdo con la secuencia de cada figura
- b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?
Por q' la secuencia por cada cuadro negro aumenta 2 baldosas blancas dependiendo de la figura puede dar diferentes resultados, agregándole a los extremos 3 Baldosas Blancas
6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?
Se necesitan 76 Baldosas Blancas para rodear 35 baldosas negras por cada Cuadro negro aumenta dos Blancas 2+6=8

Anexo H: Actividades realizadas por el grupo 5

Actividad 1

Observa la siguiente secuencia gráfica:



Posición 1 Posición 2 Posición 3

1. dibuja la posición 4, 5 y 6 de la secuencia gráfica.



2. Completa la tabla indicando la cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura en cada posición.

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Cuadrados	5	9	13	17	21	25

3. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para formar la figura de la posición 10? ¿Explica como lo realizaste? 41 en cada figura se aumenta 4 cuadros uno de cada lado y 2 de para abajo

4. Si encontraste alguna relación entre la cantidad de cuadrados necesarios para construir cada figura con su posición, descríbela a continuación se encontró que en cada figura se aumentan 4 cuadros de cada lado 1 y 2 para abajo

5. Calcule el número de cuadrados que se pueden formar para las figuras de las posiciones 20 y 35. se necesitan 81 cuadros para la figura # 20 y para la 35 se necesitan 141 cuadros

6. Sin efectuar el dibujo,

a) ¿cómo calcularías la cantidad de cuadrados necesarios para construir cualquier figura de la secuencia? $4N + 1$ por que 4 es la cantidad de lados que se aumenta por cada posición que es N y aumenta constante 1

b) cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta? haciendo ejercicios verificando la regularidad de N multiplicando y sumándole 1

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia gráfica:



Figura 1

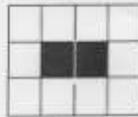


Figura 2

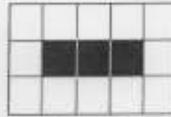


Figura 3

1. Dibuja las figuras 4 y 5 de la secuencia gráfica.



2. Registra en la siguiente tabla la cantidad de baldosas blancas que se necesita para rodear completamente la cantidad de baldosas negras indicadas.

Cantidad de baldosas negras	1	2	3	4	5
Cantidad de baldosas blancas	8	10	12	14	16

3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 15 baldosas negras alineadas? 36 baldosas blancas
4. Describe a continuación cómo hallaste la respuesta del ítem anterior
Entendiendo los 15 cuadrados negros y aumentándolos 2 en cada lado
5. Para rodear 20 baldosas negras alineadas se necesitan 46 baldosas blancas.
- a. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 21 baldosas negras?
48 baldosas blancas para rodear 21 baldosas negras
- b. Sin efectuar un dibujo, ¿cómo podrías comprobar que la respuesta del ítem anterior es correcta?
haciendo los 21 baldosas negras y después le aumento 2 en cada lado de los pues de rodear las negras.
6. ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para rodear 35 baldosas negras? ¿Por qué?
76 baldosas blancas para rodear 35 baldosas negras por que al rodear las baldosas negras y aumentan 2 en cada lado me da 76 baldosas blancas.

$$2n + 6$$

n es la cantidad de la figura. 2 aumento de cada figura y 6 suman para que la operación de exacta.