

ACTIVIDAD PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN
PRIMARIA

DIEGO HUMBERTO ACOSTA HERNÁNDEZ

IRENE JOHANNA JIMÉNEZ MORENO

BLANCA LILIANA VILLAR OSPINA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ESPECIALIZACIÓN EN DOCENCIA DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2015



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "*Actividad para desarrollar el pensamiento variacional en primaria*", presentado por los estudiantes:

Diego Humberto Acosta Hernández - 2015182001 - 1010182293

Irene Johanna Jiménez Moreno - 2015182010 - 52909408

Blanca Liliana Villar Ospina - 2015182026 - 1075256381

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado**, con **41 Puntos**.

Observaciones:

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2015.

JURADOS

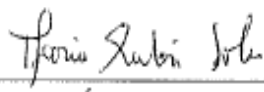
Directora del Trabajo:

Profesor:


EDWIN CARRANZA

Jurados:

Profesora:


MARÍA NUBIA SOLER

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Actividad para desarrollar el pensamiento variacional en primaria.
Autor(es)	Acosta Hernández, Diego Humberto; Jiménez Moreno, Irene Johanna; Villar Ospina, Blanca Liliana.
Director	Carranza Vargas, Edwin Alfredo
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015, 62 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	PENSAMIENTO VARIACIONAL – CONJETURACIÓN – ARGUMENTACIÓN – APPLET - GEOGEBRA

2. Descripción
<p>El presente documento escrito surge a partir de un trabajo descriptivo, en donde se aplicó una actividad “applet” para desarrollar el pensamiento variacional en Básica primaria, específicamente, Grado quinto del colegio Americano de Bogotá. Uno de los objetivos de esta, es aportar una estrategia más a los docentes de matemáticas para la enseñanza del pensamiento en mención, que favorezca el desarrollo de este enfoque en los estudiantes. Además, debido a que este tipo de pensamiento es considerado un proceso que puede implementarse desde los primeros grados de escolaridad. Estos están soportados en los estándares y lineamientos curriculares, según MEN quienes proponen el implementar la variación desde los grados elementales, para fortalecer el análisis, la organización y modelación matemática de problemas o situaciones propias de la diferenciación.</p> <p>Con base en lo anterior se quiere evidenciar, los procesos que pueden presentar los estudiantes en cuanto a la conjeturación y respectiva argumentación al aplicar una actividad didáctica matemática. Es decir, al aplicar un applet elaborado en GeoGebra.</p>

3. Fuentes
<ul style="list-style-type: none">• Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, N. (2014, Marzo) Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. Números. Volumen (85), pp75- pp90. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_05.pdf• García, G., Serrano, C., y Salamanca, J. (Octubre de 2010) Estudio del pensamiento variacional en la educación básica primaria. En P. Rojas (Presidente ASOCOLME), Memorias segundo encuentro colombiano de matemática educativa, Valledupar,

Colombia. Recuperado de http://www.academia.edu/2762675/UNA_APROXIMACION_A_LA_EVALUACION_POR_COMPETENCIAS

- Camargo, L. (2013, Octubre). Uso de GeoGebraPrim para conjeturar y justificar en primaria. Revista científica. Edición especial. Bogotá, Colombia. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/2725/1/UsodeGeoGebraPrimparaconjeturar.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional - MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia. Editorial Magisterio. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Ministerio de Educación Nacional - MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia. Editorial Magisterio. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf
- Toulmin, S. E., Capítulo cuarto: La teoría de la argumentación de Toulmin. En M. Atienza (Ed.), Las razones del derecho. Teorías de la argumentación jurídica (pp. 91-104). Recuperado de <http://biblio.juridicas.unam.mx/libros/libro.htm?l=710>

4. Contenidos

Dentro de los contenidos desarrollados en el marco teórico de este trabajo, se pueden encontrar algunos tipos de conjeturación y la argumentación así como una descripción del trabajo frente a un applet de GeoGebra y el desarrollo de dicha actividad, junto con los soportes de la misma.

5. Metodología

La actividad matemática que desarrollará el pensamiento variacional, es una actividad diseñada para estudiantes de primaria, del nivel quinto donde se realiza una breve descripción de las diferentes formas de argumentar y conjeturar en los procesos de variación en la situación problema. La descripción se segmentará en diferentes etapas: preparación, ejecución con 20 estudiantes de grado Quinto de primaria que pertenecen al grupo de talento matemático del Colegio Americano de Bogotá y su respectiva descripción.

6. Conclusiones

- Se concluye que todos los estudiantes desarrollan y exponen ideas del pensamiento variacional a partir del applet trabajado.
- La mayoría de estudiantes realizaron conjeturas asociadas a la visualización y a partir de la misma, algunos de ellos se arriesgaron a formular conjeturas, e intrínsecamente un par de estudiantes lograron validar sus conjeturas y argumentarlas de forma sustancial.
- Ya que en este trabajo solo se desarrolló un applet, y como soporte audiovisual de este momento se tomaron dos videos, uno que registraba la clase, y otro video que registraba a los estudiantes en las afirmaciones que lograban hacer. Se puede concluir que en las grabaciones de los grupos se dificultó la captación de todos los momentos, siendo difícil tomar la decisión sobre a quien se debe grabar y a quien no, pues mientras unos argumentos fueron muy objetivos, otros fueron algo carentes de sentido. Se recomienda tener más personal para grabar esos momentos o hacer entrevistas de manera individual, para obtener una mayor calidad en los datos suministrados por los estudiantes.
- Se puede concluir que los estudiantes de grado quinto de primaria del grupo de talento matemático del colegio Americano de Bogotá, por medio de la visualización, descubrieron en el applet regularidades frente a la variación, obteniendo en la mayoría de ellos conjeturas y en algunos casos en particular utilizando la validación de las conjeturas

planteadas, lograron realizar argumentos de forma sustancial.

- Se puede inferir también que el diseño del applet fue acertado frente a su objetivo, el cual consistía en desarrollar procesos de pensamiento variacional, y este permitió a su vez encontrar los diferentes procesos de conjeturación y argumentación.
-

Elaborado por:	Acosta Hernández, Diego Humberto; Jiménez Moreno, Irene Johanna; Villar Ospina, Blanca Liliana.
Revisado por:	Carranza Vargas, Edwin Alfredo

Fecha de elaboración del Resumen:	17	10	2015
--	----	----	------

Tabla de contenido

Justificación.....	2
Objetivos	3
Objetivo General	3
Objetivo Específico	3
Introducción	4
Marco de Referencia	7
Proceso de Conjeturación.....	7
Proceso de Argumentación	9
Tipos de Argumento	11
Pensamiento Variacional.....	12
Metodología	14
Descripción	18
Transcripciones	18
Matriz de Descripción	38
Descripción de fondo	48
Conclusiones	52
Referentes Teóricos	55
Anexos	57

JUSTIFICACIÓN

«Una de las nociones básicas para desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes de la educación básica es el estudio del cambio y su medición.» (García, 2000, p36).

Debido a que primaria se enfoca en el pensamiento numérico y no tanto en el variacional, es importante atender este pensamiento junto al desarrollo de la competencia matemática en la conjeturación y argumentación desde los primeros años de escolaridad.

De tal manera que si este es un reto propuesto por el Ministerio, se convierte en uno de nuestros principales sustentos para realizar esta práctica en el aula, que nos lleve a comprender los procesos de conjeturación y argumentación que los niños de quinto de primaria del Colegio Americano de Bogotá desarrollan frente a la variación presentada en una actividad diseñada en un “applet” como herramienta tecnológica dinámica que conlleva a un proceso de pensamiento variacional.

OBJETIVOS

General

Describir e implementar una actividad en la que se desarrolle el pensamiento variacional en primaria, mirando los procesos de conjeturación y argumentación de los estudiantes bajo dicha actividad.

Específicos

Elaborar un applet que será aplicado a los estudiantes de grado quinto de primaria.

Diseñar los instrumentos de aplicación.

Aplicar el applet y registrar las conjeturas y argumentaciones que los estudiantes arrojen al manipular el applet.

Describir los datos arrojados en la implementación de los applets.

INTRODUCCIÓN

El presente documento escrito surge a partir de un trabajo descriptivo, en donde se aplicó una actividad “applet” para desarrollar el pensamiento variacional en Básica primaria, específicamente, Grado quinto del colegio Americano de Bogotá. Uno de los objetivos de esta, es aportar una estrategia más a los docentes de matemáticas para la enseñanza del pensamiento en mención, que favorezca el desarrollo de este enfoque en los estudiantes. Además, debido a que este tipo de pensamiento es considerado un proceso que puede implementarse desde los primeros grados de escolaridad. Estos están soportados en los estándares y lineamientos curriculares, según MEN quienes proponen el implementar la variación desde los grados elementales, para fortalecer el análisis, la organización y modelación matemática de problemas o situaciones propias de la diferenciación.

Con base en lo anterior se quiere evidenciar, los procesos que pueden presentar los estudiantes en cuanto a la conjeturación y respectiva argumentación al aplicar una actividad didáctica matemática. Es decir, al aplicar un applet elaborado en GeoGebra.

Esta actividad tiene como referentes teóricos los aportes de:

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, N. (2014).

“Con el fin de brindar algunos elementos adicionales para la transformación de la práctica educativa, se presentan descripciones detalladas de algunos procesos fundamentales de la

actividad matemática: conjeturar y argumentar. En términos generales, conjeturar corresponde al proceso de formular y validar conjeturas, y argumentar al proceso de hacer inferencias que se deducen de una información inicial. Conjeturar se apoya en la visualización y en la argumentación; visualizar hace referencia al proceso de creación de representaciones gráficas de objetos matemáticos y permite identificar aquello que es relevante y que puede llevar a la formulación de una conjetura, mientras que argumentar busca justificar o validar afirmaciones que se hagan en este proceso”. García, G., Serrano, C., y Salamanca, J. (2010).

“La lectura y escritura de diferentes formas de solución es también parte esencial de este ambiente, puesto que a través de ellas el estudiante procede a cuestiones más fuertes del estudio de la variación como es el inicio de la construcción de la variable, y el estudio de patrones de variación.

La enseñanza que busque desarrollar el pensamiento variacional requiere un determinado enfoque por parte del profesor”.

Camargo, L. (2013)

“Proponemos un taller para ilustrar cómo diseñar una secuencia de actividades que conlleven a la demostración de un teorema con niños de cuarto de primaria, con el que estudiantes en formación y profesores en ejercicio tengan un acercamiento experimental de cómo se utiliza un programa de geometría dinámica en prácticas de justificar y conjeturar en geometría plana a edades tempranas”.

Ministerio de Educación Nacional - MEN. (2006).

Toulmin, S. E., Capítulo cuarto. (1958)

“El modelo de Toulmin, se relaciona con las reglas de una argumentación en pasos que pueden ser precisados en cualquier tipo de disciplina o espacio abierto a la disertación, al debate. Mediante este modelo, los docentes pueden motivar a los estudiantes a encontrar la evidencia que fundamenta una aseveración. Se aprende que la excelencia de una argumentación depende de un conjunto de relaciones que pueden ser precisadas y examinadas y que el lenguaje de la razón está presente en todo tipo de discurso”.

De acuerdo con del diagnóstico realizado a partir de los referentes que se abordan para la enseñanza del pensamiento variacional y a la revisión de los resultados arrojados con la aplicación del applet implementado en GeoGebra, se pretende brindar una herramienta que propendan por el desarrollo de las competencias matemáticas y contribuyan a fortalecer el trabajo de los docentes en aras de potenciar en los estudiantes dichas competencias.

MARCO DE REFERENCIA

El campo de estudio de la conjeturación y la argumentación es amplio y diverso. Coexiste en perspectivas diferentes -que en muchos casos- revelan diversos enfoques, por lo que abordar el tema en la breve dimensión de un artículo se hace necesario recurrir a algún criterio de organización. En este sentido, es necesario evidenciar las distintas etapas de conjeturación y si se da la argumentación, que pueden presentar los estudiantes durante el proceso de análisis y descripción, según Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, N. (2014) estas son:

Proceso de conjeturación

El proceso de conjeturar en matemáticas se constituye en el mecanismo por medio del cual se formulan afirmaciones acerca de las propiedades de determinados objetos o las relaciones que se dan entre éstos, a partir de ciertas observaciones, exploraciones, ensayos o experimentos sobre dichos objetos, que permiten identificar información para plantear conjeturas a través de tales afirmaciones.

Visualizar.

Dentro del proceso de conjeturar, la visualización no se hace de forma descontextualizada o al azar, sino que ésta, de manera previa a través de la tarea formulada, persigue el objetivo específico de identificar elementos necesarios para poder formular una conjetura. Así,

dependiendo del tipo de conjetura se busca visualizar: un patrón, una propiedad invariante, una característica a partir de las representaciones, entre otras.

Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades.

En esta etapa los estudiantes a partir del estudio de los datos iniciales, identifican aquello que es relevante y común, lo cual, dependiendo del contexto de la situación propuesta, puede corresponder a patrones, regularidades, relaciones entre objetos, propiedades, semejanzas, entre otros.

Formular conjeturas.

Un proceso importante después de visualizar e identificar las características, propiedades, patrones, reglas, regularidades o propiedades de un objeto, es comunicarlas ya sea verbal, simbólica o gráficamente con el fin de tener un registro que permita organizar, clasificar e identificar la información útil para formular la conjetura de forma clara.

En esta etapa de la actividad matemática no es necesario hacer uso de un lenguaje especializado, pero sí se considera pertinente escribir las observaciones o la conjetura en un lenguaje que sea compartido por la comunidad académica en la que se encuentra inmersa la persona que está enfrentándose a la tarea.

Verificar conjeturas.

Después de que ha emergido la conjetura que permite consolidar las observaciones hechas, es pertinente llevar a cabo el proceso de verificación, el cual tiene como objetivo que la persona se convenza e intente convencer a otros de que tal afirmación tiene una alta probabilidad de

ser verdadera en el contexto estudiado, en cuyo caso debe buscar, en la medida de las posibilidades, validar la conjetura formulada.

Generalizar conjeturas.

Lo importante es poder llegar a convencer a otros, con argumentos fuertes, de que la conjetura es válida a nivel general, a partir del convencimiento propio de quién la plantea. Generalizada la conjetura, el último paso en el proceso de conjeturar consiste en validar la conjetura generalizada.

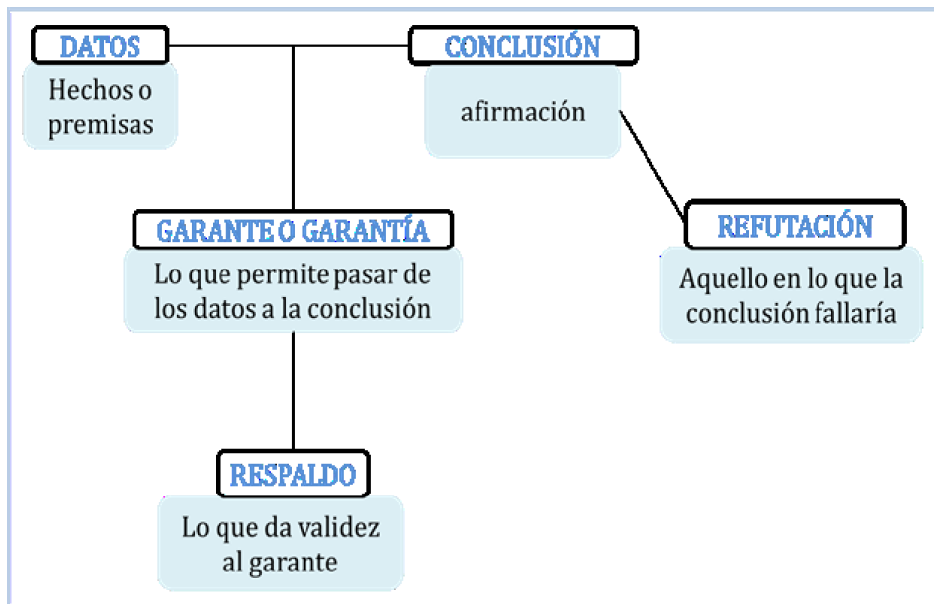
Proceso de argumentación

El proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones. Argumentar, es decir, el proceso de generar argumentos, tiene un carácter social y cobra sentido cuando surge la necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha. En este sentido, el valor de verdad de una afirmación depende del contexto en el que se esté desarrollando la actividad matemática.

En términos generales, conjeturar corresponde al proceso de formular y validar conjeturas, y argumentar al proceso de hacer inferencias que se deducen de una información inicial.

Para Toulmin (2003, pp. 92) un argumento tiene lugar cuando a partir de unos hechos o datos se elabora una afirmación (conclusión). En el capítulo cuarto, acerca de la teoría de la argumentación, considera que el análisis lógico formal es incapaz de descubrir cómo funciona la argumentación y la discusión crítica en el marco de las interacciones

comunicativas cotidianas. Su modelo analítico para comprender el paradigma retórico-dialéctico que sirve de fundamento a la argumentación y la discusión, nos presenta un esquema genérico del razonamiento con seis elementos. El primer elemento es la demanda o conclusión (C) que alguien intenta justificar con una argumentación en el marco de una discusión. El segundo elemento son los fundamentos (G), que funcionan como premisa menor o datos de partida que sirven de base o fundamento inicial para la argumentación. El tercer elemento es la autorización o garantía (W) que determina si la demanda es o no legítima, plausible o infundada, y funciona como una regla general o premisa mayor. El cuarto elemento son los respaldos (B) que sirven de apoyo a las garantías, funcionan como reglas, leyes, formulas o principios que le dan solidez o sirven de soporte al garante. La distinción entre W y B es problemática y difícil de establecer en casos concretos. Las garantías relevantes para autorizar argumentos en campos diferentes de razonamiento requieren tipos diferentes de apoyo o respaldo. Los calificadores modales o modalizadores (Q) son el quinto elemento. Indican la fuerza que modaliza el tránsito de los datos a la autorización. No todos los argumentos apoyan sus demandas o conclusiones con el mismo grado de certeza. Algunas garantías llevan necesariamente a la conclusión propuesta, otras lo hacen frecuentemente, pero no totalmente, otras probablemente, o posiblemente, etc. El sexto elemento de la argumentación son las refutaciones, reservas o críticas (R), es decir, el conjunto de posibles objeciones, restricciones, ajustes y contraejemplos que debilitan o colocan en duda el paso de la argumentación hasta la conclusión propuesta.



Álvarez, I., Ángel, L., Carranza E., y Soler, N. (2014) *Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar*. [Figura]. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_05.pdf

Tipo de argumento

Sustancial

Proporciona datos o evidencia empírica para apoyar la conclusión del argumento. Quienes utilizan estos argumentos fundamentan sus conclusiones en el contexto de una situación particular, antes que en principios universales. Son los argumentos prácticos de la vida social. Dependiente del contexto.

Es con base a lo anterior, que se quiere realizar un análisis del proceso de conjeturar y si se presenta, del proceso de argumentar, de los niños de grado quinto pertenecientes al grupo de “Talento matemático” del colegio Americano de Bogotá. Es allí donde los docentes de la Universidad Pedagógica Nacional Gloria García, Celly Serrano y José M. Salamanca, en su

estudio “*Del pensamiento variacional en la educación básica primaria*”, brinda una de las nociones para desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes de la educación básica es el estudio del cambio y su medición. Pero la comprensión y desarrollo de lo que significa una propuesta como la descrita en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) exige anotar las diferencias radicales que presupone el giro de organizar un currículo por tareas, contenidos o enfoque de sistemas al pensamiento matemático con las especificidades propuestas en dicho documento.

Por su parte, el pensamiento matemático hace referencia a todas las prácticas que se realizan en una cultura con las matemáticas, como las actividades de contar, medir, representaciones artísticas, inferir, modelar, que realiza una comunidad y por tanto hacen parte de las representaciones culturales de la misma. Estas prácticas son, entonces, prácticas sociales, por lo tanto el pensamiento matemático no se refiere exclusivamente a “las matemáticas como saber disciplinario” sino que incluye las prácticas sociales con matemáticas (Chevellard, 1997).

Con estos argumentos sobre el pensamiento matemático, se puede entender que el pensamiento variacional, se encuentra en prácticas de la vida cotidiana de un ciudadano, es herramienta necesaria en la toma de decisiones y permite comprender el mundo circundante que cada vez se nos muestra como un mundo cambiante.

En el terreno específico del saber matemático, el estudio de la variación y el cambio, son los ejes rectores desde los cuales se desprenden las ideas, nociones, conceptos de una de las áreas más importantes de la matemática como es el cálculo.

Para concluir, se tiene que el proceso de pensamiento variacional: “ Tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en

distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”.

MEN (2006) Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Pág. 67

Con base a lo que proponen los docentes Jenny Andrea Escobar, Fredy Alejandro Barbosa y la Dra. Leonor Camargo Uribe, en su investigación del “Uso de GeoGebra Prim para conjeturar y justificar en primaria”, mencionan el uso de GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas, ya que esta herramienta tecnológica permite realizar construcciones dinámicas, fácilmente exportables a aplicaciones web, en las que podemos manipular las expresiones (geométricas, numéricas, algebraicas o tabulares) y observar la naturaleza de las relaciones y propiedades matemáticas a partir de las variaciones producidas por nuestras propias acciones, así mismo tiene como objetivo diseñar una secuencia de actividades que conllevan a la práctica del proceso de conjeturación, con el fin que estudiantes en formación y profesores en ejercicio tengan un acercamiento experimental de cómo se utiliza un programa de geometría dinámica en particular GeoGebra en prácticas de justificar, conjeturar y argumentar en la variación a edades tempranas.

METODOLOGÍA

La actividad matemática que busca desarrollar el pensamiento variacional, es una actividad diseñada para estudiantes de quinto de primaria, donde se pretende realizar una breve descripción de las diferentes formas de argumentar y conjeturar en los procesos de variación frente a una situación problema. La descripción se segmentará en tres etapas: preparación, ejecución y descripción de los momentos donde se presenta argumentación y conjeturación.

La primera etapa es de preparación; en esta etapa se quiere desarrollar e implementar una actividad matemática de variación en un *applet*, que fue diseñado en el software *GeoGebra*, (ver imagen1 a continuación).

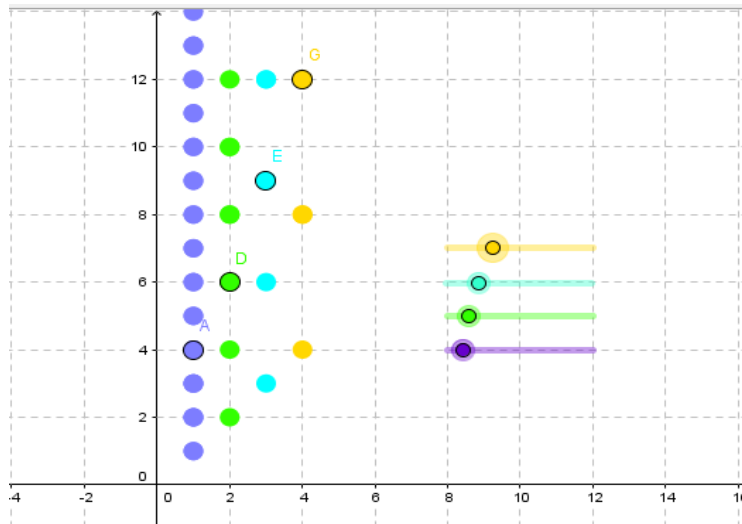


Imagen 1

El *applet* se basa en una construcción de una serie de puntos (morado, verde, azul y amarillo) ubicados en las coordenadas $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ y $(4,4)$ respectivamente. Existen unos deslizadores de los mismos colores que asocian los puntos mencionado y que tienen como tarea, deslizar los puntos sobre el plano de manera ascendente sobre la ordenada, es decir cada punto se mueve de la forma $(1, y_1)$, $(2, y_2)$, $(3, y_3)$ y $(4, y_4)$ para cada y_n entero en el cual se haya programado.

Lo que se pretende con el *applet* es que los estudiantes encuentre un patrón y la variación de cómo se desplaza los puntos sobre el plano, así como la relación que existe en cada coordenada en que se encuentren ubicados los puntos o cada y_n en donde se ubican los puntos. Con lo anterior se busca que los estudiantes arrojen los diferentes tipos de argumentos y conjeturas teniendo en cuenta los datos que obtengan en la situación del *applet*. Para ello se diseñan una serie de preguntas (ver imagen 2 a continuación) que conduzcan a los estudiantes a la argumentación y conjeturación entorno a la situación problema de variación que se está proponiendo.

APPLET UNO

- Completar la siguiente tabla.

	DESlizADOR MORADO										
PUNTO A	1			4							12
	DESlizADOR VERDE										
PUNTO D	2		6			12				20	
	DESlizADOR AZUL										
PUNTO E	3		9		15				27		36
	DESlizADOR AMARILLO										
PUNTO G	4			16				32			

Teniendo en cuenta la tabla anterior contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasaría si existiera otra columna? ¿Cuáles serían los valores de los puntos PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G? ¿Por qué toman esos valores? ¿Se repiten valores en algunos de los puntos, o por el contrario no se repite valores en ningún punto? ¿Por qué?
- Si existiera otro punto, por decir el PUNTO H, ¿Qué valores tomaría ese punto? ¿Por qué toma esos valores? ¿Se repite valores con otro punto? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el PUNTO D?
- Observando todos los resultados de la tabla, puedes decir que existe algún valor que se repita en todos los puntos (PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G - PUNTO H) ¿Cuál es ese valor?
- ¿Por qué crees que se repite ese valor en todos los puntos? ¿existe algún otro valor? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el PUNTO E y PUNTO G?
- ¿Qué valores tomaría cada uno de los puntos (PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G - PUNTO H) en la columna 20? ¿Cuáles serían esos valores? ¿Se repiten en algunos de los puntos mencionados? ¿En cuales no se repiten valores?
- ¿En que valores varían el PUNTO A?
- Qué conclusiones puedes dar del ejercicio anterior.

Imagen 2

En la siguiente fase, “Ejecución”, se aplica el *applet* a los estudiantes de grado quinto del grupo de “Talento matemático” del Colegio Americano de Bogotá. Para esta etapa se tiene en cuenta una sesión de clase con 20 estudiantes del grupo previamente mencionado. Los 20 estudiantes son distribuidos en 10 grupos de trabajo (por parejas) a los cuales, se les entrega un iPad que está a su disposición para realizar la actividad (IPad: dispositivo electrónico con los que cuenta el colegio); esta sesión es grabada para tener una mayor apreciación de la clase

a nivel grupal. A través de un código QR diseñado por el docente; los estudiantes descargan el *applet* que se encuentra en la plataforma de GeoGebra y comienza el desarrollo de la actividad. Para el desarrollo cuentan con un taller que permite orientar los momentos a seguir durante el *applet* y así para poder hacer un registro del paso a paso que los estudiantes realizan para argumentar o conjeturar de acuerdo a la actividad de variación visualizada.

En esta fase los estudiantes ponen a prueba sus saberes matemáticos de acuerdo al currículo del grado quinto, desarrollan habilidades y destrezas en el proceso del desarrollo del pensamiento variacional y aplican los conocimientos adquiridos en momentos previos de trabajo con el software dinámico GeoGebra.

Para la última parte de la metodología, la etapa de la descripción, se tiene un apartado donde se relata con detalle todo lo relacionado con la descripción de la información recolectada.

En la compilación de la información, se realizan las transcripciones de los videos tomados en la sesión realizada con los estudiantes, y así capturar los momentos de argumentación y conjeturación que los estudiantes aportan frente a la actividad de variación propuesta.

Al tener esta información, se clasifica de acuerdo a los tipos de conjeturación o argumentación en torno a la variación que los estudiantes encuentran en el *applet*.

Con base en la anterior clasificación, y teniendo en cuenta tanto las ideas particulares como las generales dadas en el grupo de estudiantes, se realizan las conclusiones para determinar los diferentes procesos en los que exista conjeturación o argumentación frente al pensamiento variacional.

DESCRIPCIÓN

Como está indicado en la metodología, la última etapa es la de descripción. Para esta fase se utilizan técnicas para clasificar, describir los datos recogidos como diagramas de flujo, matriz de descripción y realizar las conclusiones. La descripción de datos encierra tres procedimientos: la transcripción de los momentos de la clase donde se capturan segmentos de argumentación y conjeturación sobre los procesos de variación en el *applet*, la matriz de descripción de los momentos de argumentación y conjeturación, y los diagramas de flujo donde se evidencia el proceso de argumentación (Toulmin 1958).

A continuación se encuentran las transcripciones, donde se evidencia algunos momentos de argumentación y conjeturación en la sesión de clase desarrollada

Transcripciones

Las transcripciones son los momentos evidenciados en la sesión, donde se tendrá en cuenta, cómo a través del desarrollo del pensamiento variacional, los estudiantes en la mayoría de los casos llegan a la argumentación y conjeturación. A continuación la transcripción de toda la sesión.

- Estudiante1: Profe, ya nos dimos cuenta de que... que uno, son treinta... son
- Profesor: ¿Son cómo? ¡Cuéntame!
- Estudiante 1: Son treinta puntos, todos. Entonces salen treinta puntos. Pero el morado es del uno, otro es múltiplo del dos, el otro es múltiplo de tres y el otro es múltiplo de cuatro. Entonces se van llenando... se van llenando. (El estudiante hace la descripción pero sólo realiza al principio un movimiento sobre los deslizadores del applet)
- Profesor: Se van llenando, ok, vale.

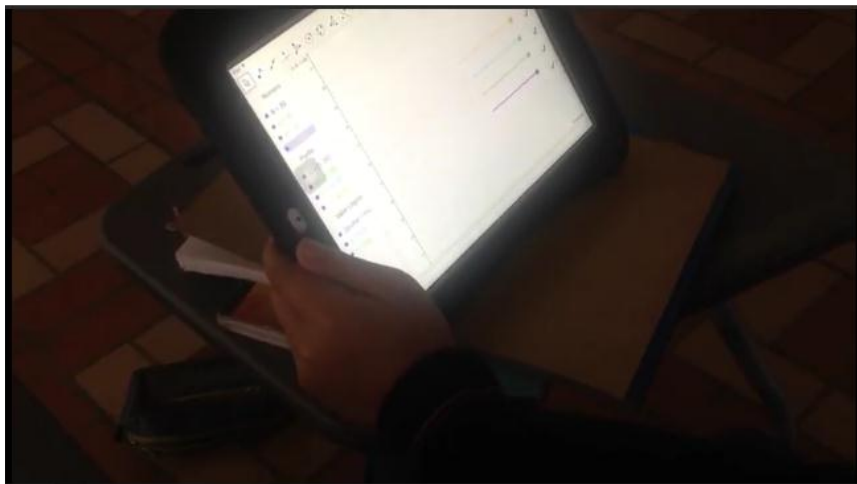


Ilustración 1.IMG_0113. El estudiante muestra los puntos obtenidos en el applet sin señalarlos.

- Profesor: (El profesor se dirige a otro grupo) aquí que sucedió, que encontraste así de raro.
- Estudiante 2: eh, los puntos están puestos de diferente manera, por ejemplo, aquí están en, en... en cada número separados. Y aquí por ejemplo ya no hay acá ni un punto, ni aquí tampoco, aquí tampoco y aquí tampoco. (Mientras el estudiante refiere que “aquí no hay puntos”, señala los espacios en blanco que se encuentran en la tableta en donde no están los puntos).
- Profesor: Vale. ¡Listo!



Ilustración 2.IMG_0113. La estudiante señala los espacios donde no hay puntos, en comparación con el primer deslizador.

- Profesor: (El profesor va al siguiente grupo) cuéntenos aquí que pasó... déjame ver el IPAD, ¡gracias!
- Estudiante 3: Esta mueve el deslizador como si fuera una secuencia, entonces el punto a tiene el uno en uno, el dos en dos, el tres en tres y el cuatro en cuatro. Entonces... (Mientras la estudiante hace referencia verbal, no hace movimientos sobre el IPAD, simplemente al final abarca con sus manos el espacio que describió)
- Profesor: Vale. ¡Listo! Ok...

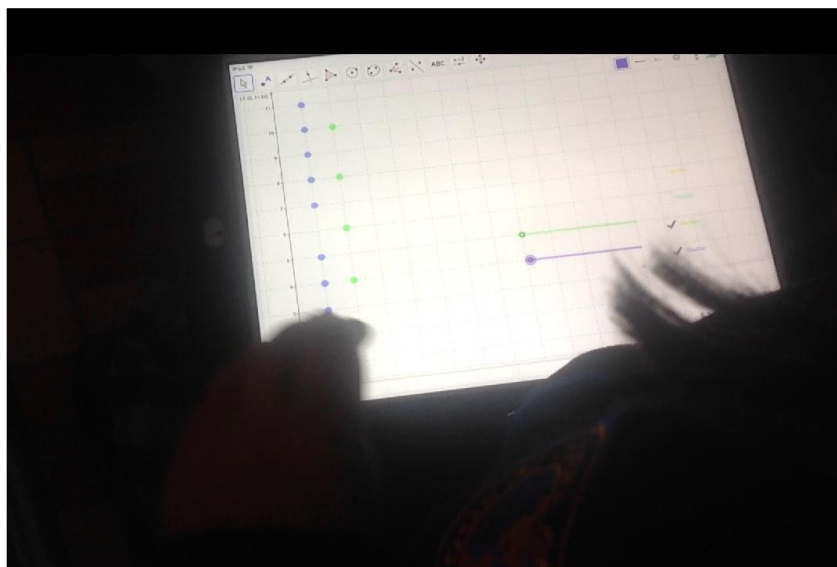


Ilustración 3.IMG_0113. El estudiante al final muestra los resultados obtenidos en el applet.

- Profesor: (se dirige a otro grupo y pregunta) cuéntame... cuéntame acá... cuéntame ahí ¿Qué está sucediendo?

- Estudiante 4: Ah. Pues según como movemos el deslizador que se ve aquí, seee van... aparecen más puntos, pero con, pero de diferentes ma... órdenes en cada deslizador. Por ejemplo en ese deslizador morado se movía de un cuadro a otro así, en el otro se movía de dos cuadros, cada dos cuadro, el siguiente que es el azul de a tres y el amarillo de a cuatro. (El estudiante realiza movimientos con sus manos y mueve el deslizador,

- Profesor: Ok. ¡Listo! Gracias.

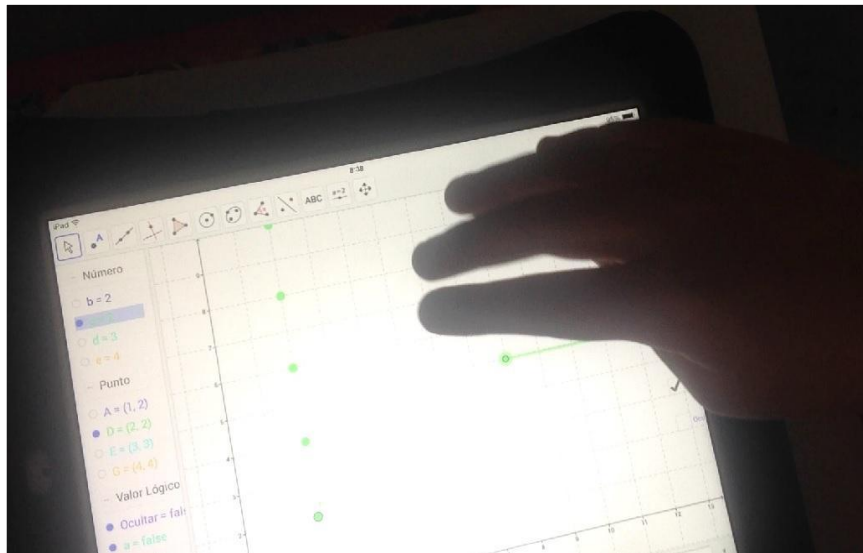


Ilustración 4.IMG_0113. El estudiante al final muestra los resultados obtenidos en el applet.

- Profesor: Por favor cuéntanos ¿Qué está pasando con el... ahí?

- Estudiante 4: Pues acá entre más se mueva el deslizador, más puntos van apareciendo. Aparecen más puntos

- Profesor: ok

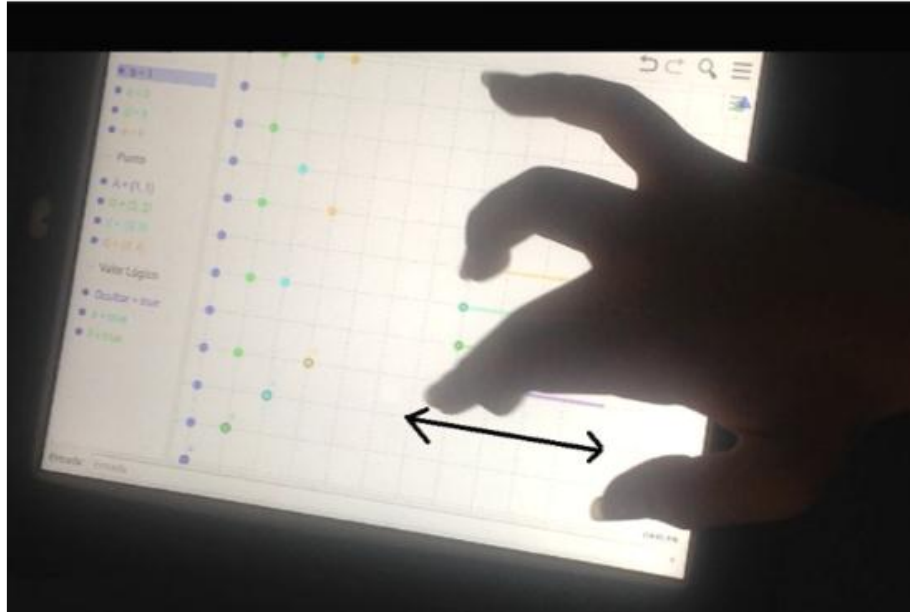


Ilustración 5.IMG_0113. La estudiante mueve el deslizador varias veces, demostrando que con su movimiento aparecen más puntos. Al final afirma que si da la opción ocultar, se ocultan los puntos de la pantalla.

- Estudiante 5: Y pues si se pone ocultar se oculta esta (toca la pantalla y señala los deslizadores) se mueve la pantalla y hace desaparecer todo.

- Profesor: Vale gracias

- Profesor: (Se dirige a otro grupo de trabajo) Que encontraron ustedes

- Estudiante 6: Pues que cada vez que uno movía un deslizador, iban apareciendo puntos, iban apareciendo más puntos; entonces, eh, cada deslizador es un cuadrado, entonces el morado es uno, dos, tres, y así de uno en uno... el verde también dentro del dos. (La estudiante muestra el deslizador y lo asocia con los puntos obtenidos del mismo color, así lo hace con el morado, con el verde, luego el azul y por último el amarillo, y explica la variación en cada uno de ellos)

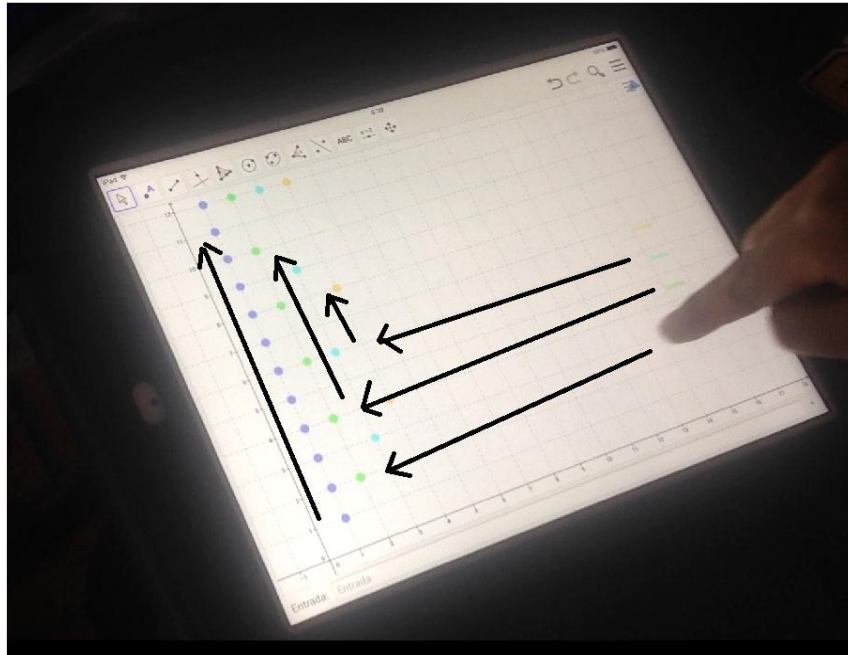


Ilustración 6.IMG_0113. La estudiante asocia el deslizador con los puntos obtenidos por el mismo, lo hace con el morado, luego el verde, el azul y el amarillo en su respectivo orden.

- Profesor: ¿Qué fue lo que encontraste?

- Estudiante 7: Que se multiplica cada vez, digamos, uno, se multiplica por uno, este se multiplica por dos, por tres, por cuatro, por cinco, por seis bueno y así sucesivamente. (El estudiante muestra en la guía los números obtenidos y su relación con la tabla de multiplicación, evidenciando la variación en cada uno de ellos)

- Profesor: Listo

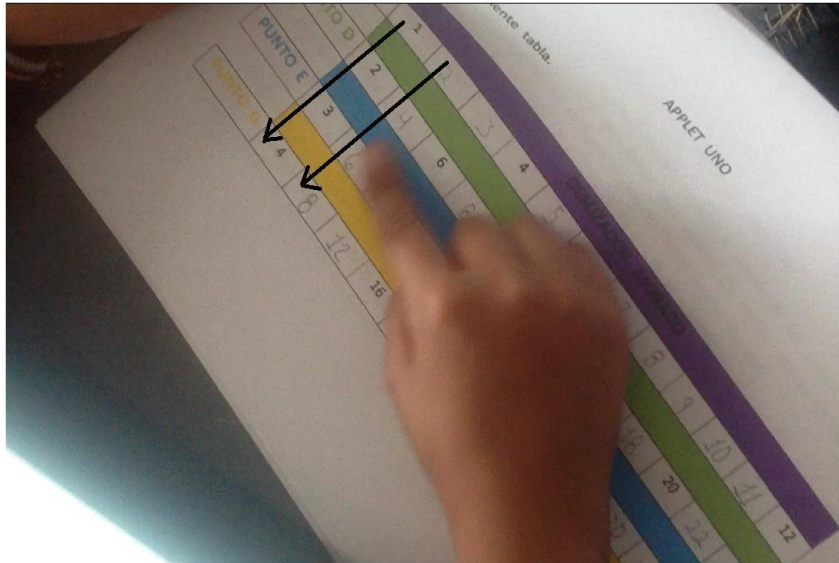


Ilustración 7.IMG_0113. El estudiante mueve en forma vertical su dedo, apuntando los datos que obtuvo mientras los explica verbalmente.

- Profesor: (Pasa a indagar en otro grupo) Y acá que encontraron de diferente, o algo así diferente que me puedas decir ya...
- Estudiante 8: Acá que por todos los múltiplos, eh, todos los múltiplos del uno, todos los múltiplos del dos y la tabla.
- Profesor: Ah, ok Listo.

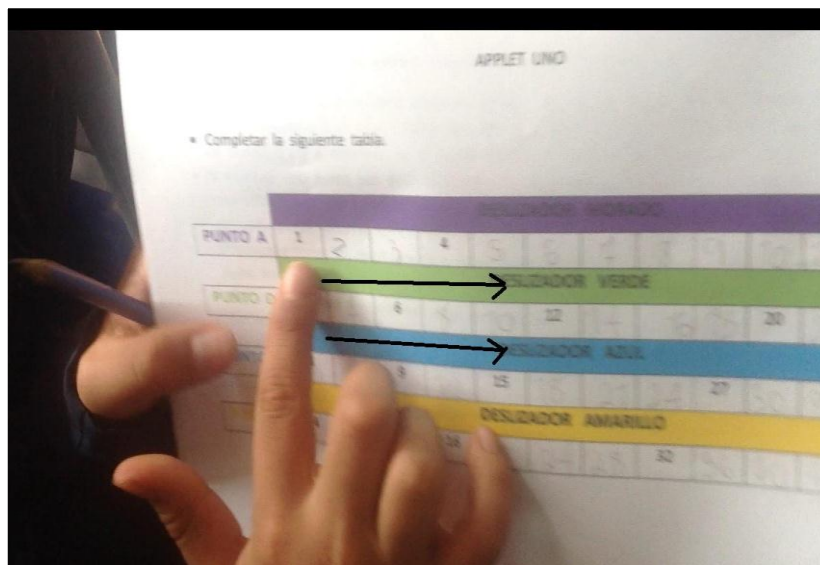


Ilustración 8.IMG_0113. El estudiante mueve en forma horizontal su dedo, apuntando los datos que obtuvo mientras los explica verbalmente.

- Profesor: (Dirigiéndose al grupo restante) Y por último, cuéntame
- Estudiante 9: Profe obtuvimos algo sobrenatural. (Los estudiantes mientras tanto, mueven muchas veces y rápidamente los deslizadores para corroborar que no les falte ningún punto por aparecer).
- Profesor: Cuéntame
- Estudiante 10: Ahora a nosotros nos mas ¡!!...

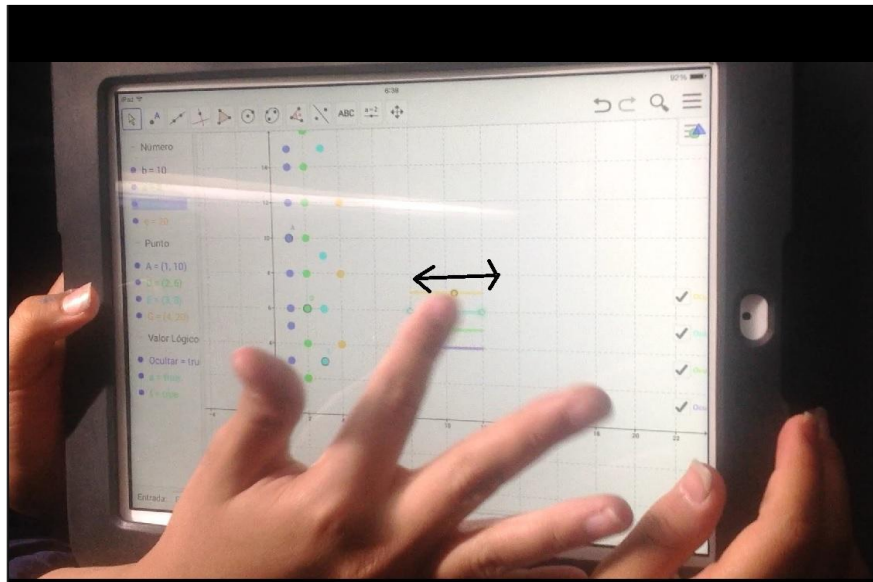


Ilustración 9.IMG_0113. Uno de los estudiantes del grupo mueve en forma rápida y en repetidas ocasiones el deslizador, para evitar que falte alguno de los puntos.

- Estudiante 9: Cuando agrandamos la cosa
- Profesor: Ok listo

(Otro momento de clase)

Estudiante 11: Están dando los números en forma de múltiplos (Enumera los números obtenidos y hace un movimiento de forma vertical de arriba hacia abajo de acuerdo a los resultados que menciona) uno, dos, tres, cuatro. Dos, cuatro, seis, ocho. Tres, seis, nueve, doce.

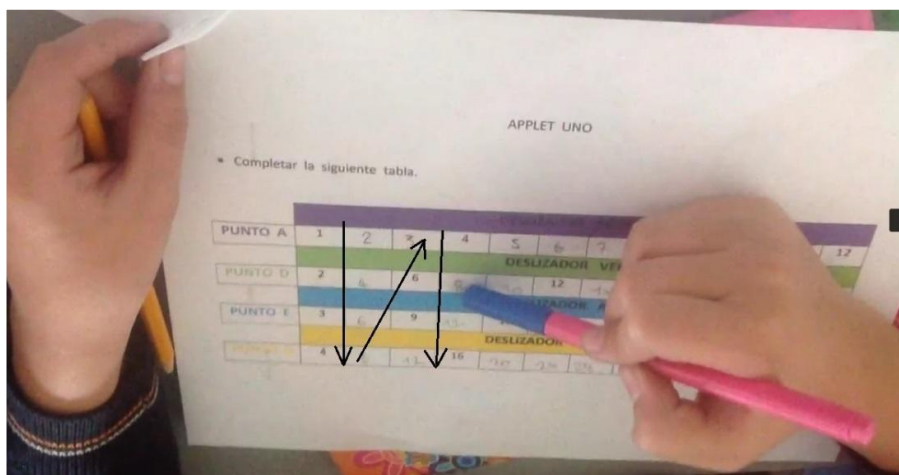


Ilustración 1.IMG_0115. La estudiante hace un movimiento vertical de arriba hacia abajo, señalando los resultados mencionados.

- Profesor: Ah, hacia abajo.

- Estudiante 11: (Pese a que el docente hace el comentario, el niño no para su conteo) Cuatro, ocho, doce, dieciséis. Cinco, diez, quince, veinte. Seis, doce, dieciocho, veinticuatro. Siete, catorce, veintiuno, veintiocho.

- Profesor: O sea que hacia abajo ¿qué está sucediendo?

- Estudiante 11: Hacia abajo se están multiplicando los múltiplos del deslizador morado. (Paralelo al comentario, el estudiante mueve un marcador que tiene en la mano y con el cual señala los números a los cuales hace referencia)

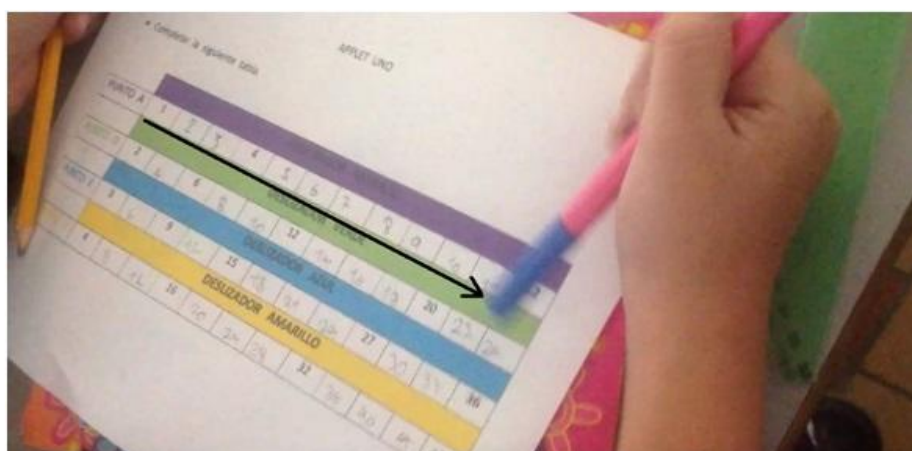


Ilustración 2-IMG_0115. La estudiante señala en forma horizontal los números obtenidos del deslizador morado, lo cual coincide con su argumento.

- Estudiante 4: (Se escucha un murmullo de otro estudiante del grupo) Una serie...
- Profesor: Listo, puede ser...eh, ah bueno, listo. Eso es importante mirar que está sucediendo eso, listo, muy bien.
- Estudiante 4: ¿Cómo nos quedó?
- Profesor: bien, hasta ahí estamos explorando todos, está bien, ¡listo!
- Estudiante 4: profe a mí me gusta mucho este tema, está divertido.
- Profesor: ¿sí? Eso es chévere, listo. Vamos.

(Otro momento de clase)

- Profesor: Cuéntame... que fue sucedió
- Estudiante 7- Los punticos coinciden en los múltiplos de 12... 12, 24, 32 y así sucesivamente porque ahí, aparecen todos los punticos.

(El estudiante señala en iPad con su mano, los puntos que van apareciendo, y su coincidencia)

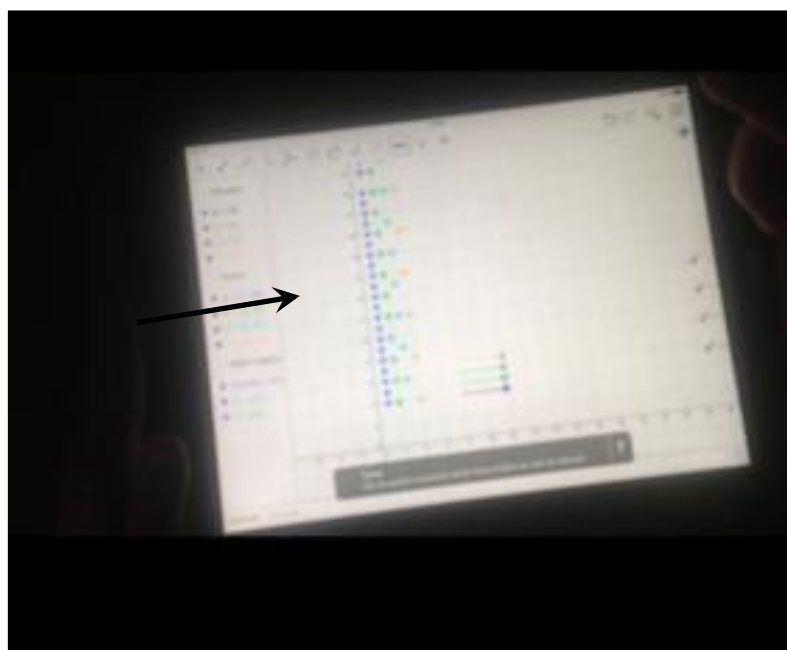


Ilustración 1.IMG_0116. El estudiante muestra los puntos obtenidos en el applet.

- Profesor: Ósea, dices que cada 12 puntos te coinciden todos, ¿sí?, listo gracias

El profesor se retira de ese grupo y se dirige a otro que quiera compartir y pregunta:

-Profesor: Alguien más me quiere compartir, por acá, listo, por acá

- Profesor: Cuéntame

-Profesor ¿Cuál era la pregunta? Por favor

- Estudiante 1 ¿Que... donde los puntos se encuentran todos? ¿Por qué se encuentran allí?

-Profesor: ¿Que hicieron?

(Los estudiantes muestran el iPad, los puntos encontrados para verificar las coincidencias)

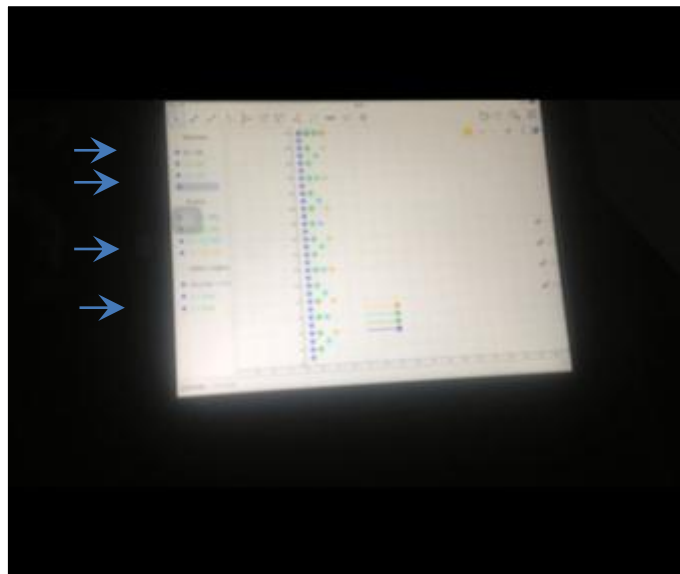


Ilustración 2.IMG_0116. El estudiante muestra los puntos que coinciden.

- Estudiante 1 Primero buscamos donde se encuentra todos, después, miramos en la tabla y miramos donde coincidían y seguimos continuando mirando (señalan la tabla realizando un recorrido sobre las filas de color, para verificar la información visualizada en el applet) – Como acá esta 12, 24 36, 48, 60,92 y así va consiguiendo la programación. Lo que coincide es que todos son múltiplos de 12 y del 10.

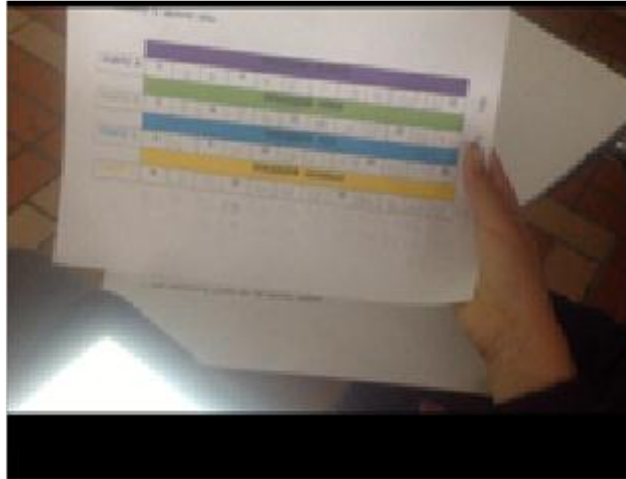


Ilustración 3.IMG_0116. El estudiante muestra los resultados obtenidos en la tabla.

-Profesor: del 12 y del 10?

- Estudiante 12: No, todos son múltiplos del 12

-Profesor: Ok, gracias

El profesor se dirige a otro espacio del salón preguntando:

Profesor: Alguien más me quiere compartir

Estudiante 13: Es que cuando todos los puntos coincide, es en los múltiplos del 12, porque en todos, algún punto está en el 12, 24, y 36.

(Señalan en la tabla, de manera que hacen un barrido vertical en la tabla indicando los números)

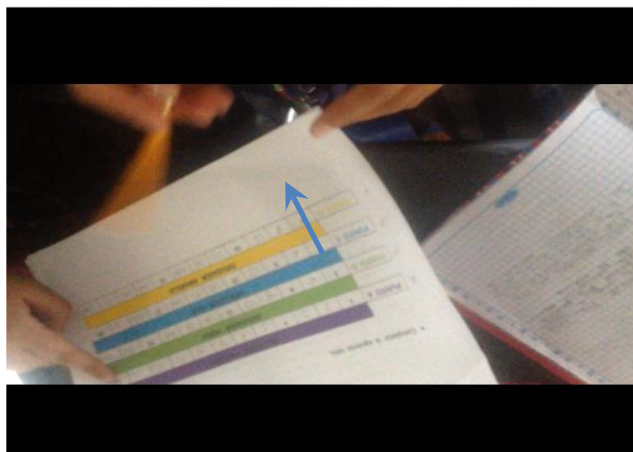


Ilustración 4.IMG_0116. El estudiante muestra los resultados que se obtiene en vertical.

Profesor ¿Cómo hicieron para saber eso?

Estudiante 3: Cuando estábamos mirando en el iPad, estaban en 12, y mirando la tabla también estaba 12,24, y el próximo número donde se encontraría sería el 36 porque 12 x3 es 36.

Profesor: Listo ok

El profesor se retira y busca un último grupo:

Profesor: ¡Cuéntame!

Estudiante 6: Se repite en el 12 y el 24, y como en tabla va cambiando de orden así (la estudiante señala la tabla de orden vertical) Entonces son múltiplos, porque el 12 y el 24 son múltiplos de todos estos números. Entonces yo propongo... esto porque se repite en los deslizadores. Y si siguiera así se repite en 36, 48, 60 y 72.

(Señala en la tabla, de manera vertical el proceso que coincide)

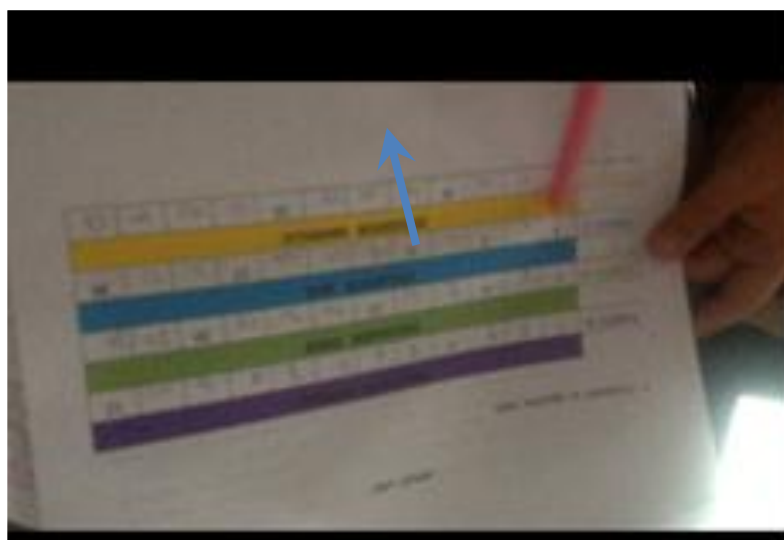


Ilustración 5.IMG_0116. El estudiante muestra los resultados que se coinciden en vertical.

Profesor Ok listo.

(Otro momento de clase)

Estudiante 5: Acá hay un triángulo chiquito.

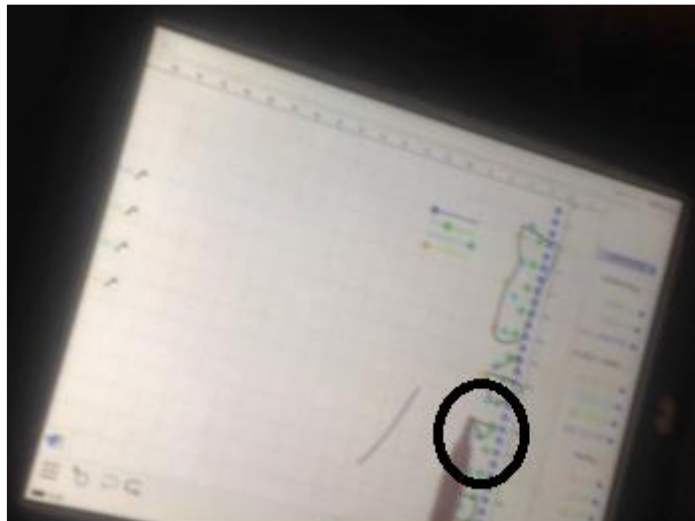


Ilustración 1. IMG_0117. El estudiante señala el triángulo que se forma con algunos puntos obtenidos en el applet.

- Estudiante 5: Entonces después volvemos armar otro grande pero este no se alcanzó a centrar

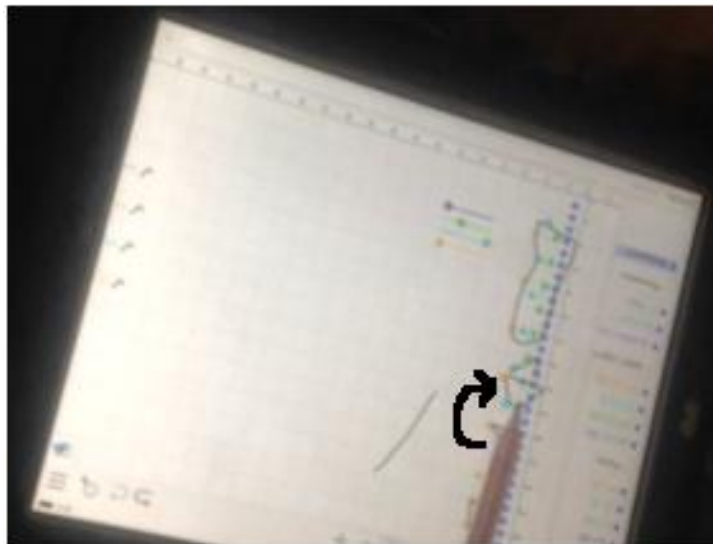


Ilustración 2. IMG_0117. El estudiante señala el triángulo hacia arriba que le sigue al triángulo pequeño en el applet.

-Estudiante 5: Y acá había un cuadradito.



Ilustración 3. IMG_0117. El estudiante señala el cuadrado que se forma entre los puntos que están variando.

- Profesor: O sea ¿hay cuadrados y hay triángulos?
- Estudiante 5: Si.
- Profesor: Okey, listo
- Estudiante 5: y una línea aquí que divide.



Ilustración 4. IMG_0117. El estudiante señala en la iPad el segmento de línea que divide las figuras.

- Profesor: y una línea que divide (Afirmando lo que dice la estudiante 1)... ¿No supongo que es esa raya?



Ilustración 5. IMG_0117. El estudiante señala en la iPad el segmento de línea que no hace parte.

- Estudiantes del grupo número 11: No esa raya no es.

- Profesor: Ah okey.

Luego el profesor en voz alta dice:

- Profesor: ¿Alguien encontró otra figura?

En ese momento un segundo grupo interviene.

- Estudiante 11: Juntándolos todos parece un tren.

- Profesor: ¿Qué?

- Estudiante 11: Parece un tren por que mira entra pencil y los juntamos desde acá.



Ilustración 6. IMG_0117. El estudiante señala en el iPad el orden en que formo las figuras para armar el tren.

-Estudiante 11: El rectángulo, juntándolo así desde el 12 y el 24, aquí juntando así.

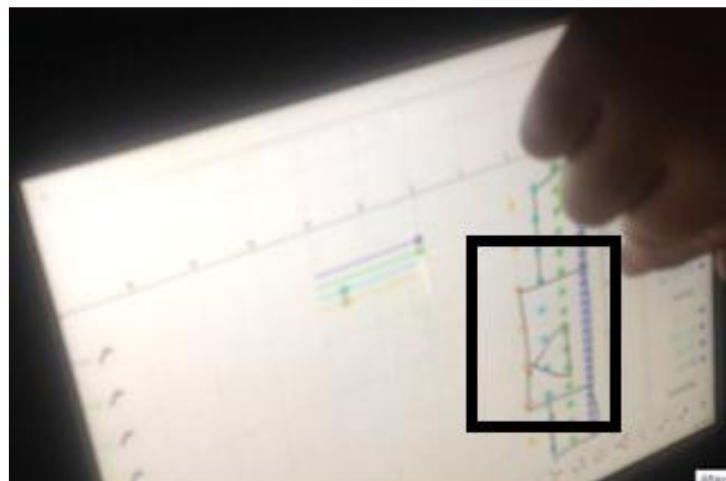


Ilustración 7. IMG_0117. En esta imagen el estudiante explica de qué punto a qué punto unió de tal manera que se formara un rectángulo.

-Profesor: y ¿Por qué decidieron unirlos así?

-Estudiante 11: No sé.

-Profesor: Listo gracias.

Luego el profesor se retira del grupo y se dirige a un nuevo grupo, el grupo y les pregunta:

-Profesor: ¿Que encontraron por acá?

-Estudiante 2: ¿Quiénes? ¿Nosotros?

El profesor les dice que si moviendo su cabeza.

-Estudiante 2: Nosotros vemos como un montón de triángulos ahí, y vamos a tratar de usar los polígonos para ver que sacamos con ellos.

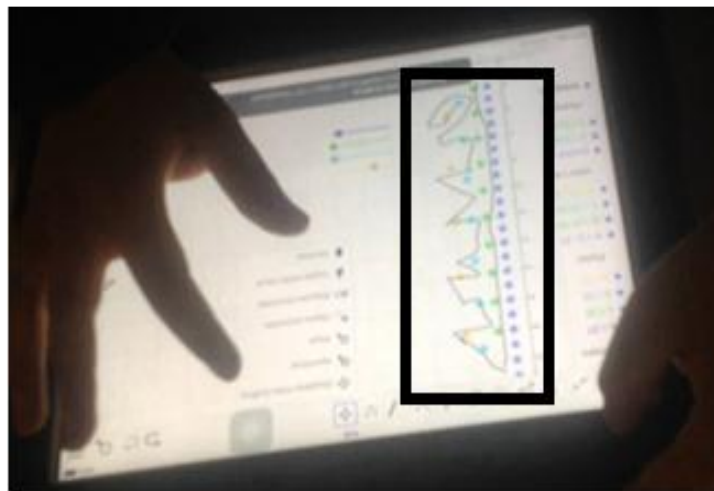


Ilustración 8. IMG_0117. En esta imagen el estudiante explica la manera en que unió los puntos para formar una serie de triángulos y polígonos.

-Profesor: Ah! bueno, miren a ver si pueden sacar un polígono.

A continuación el profesor se va caminando y se dirige al grupo 4 que está comentando lo siguiente:

- Estudiante 1: Y naranja con verde da otro digito.

- Estudiante 2: Tú unes amarillo con verde...

- Profesor: Naranja con verde ¿Qué da?... cuéntame.

- Estudiante 1: No amarillo con verde mira:

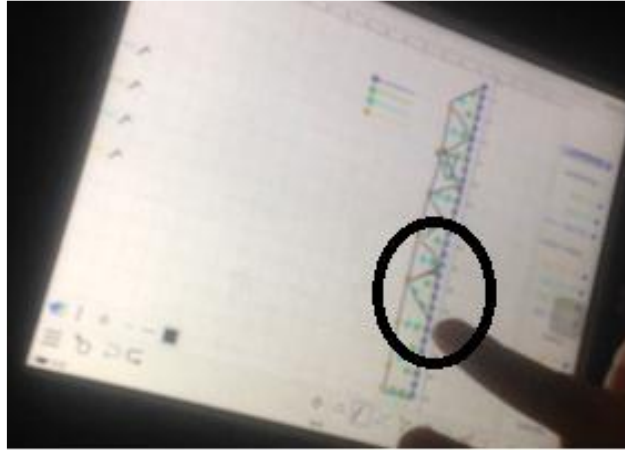


Ilustración 8. IMG_0117. En esta imagen el estudiante explica como al unir los puntos amarillos y verdes surge un dígito.

Cuando el grupo 4 está terminando su intervención, aparece el grupo 5, en el cual un estudiante en voz alta dice lo siguiente:

- Estudiante 2: Profe hay un montón de triangulitos.

Al escuchar del estudiante esa afirmación el profesor se dirige hacia ellos.

- Estudiante 1: ¡Ay! Una escalera.

- Estudiante 2: ¡Ay! sí.

- Profesor: ¿Una escalera?

- Estudiante 1: Una escalera rara.



Ilustración 9. IMG_0117. En esta imagen el estudiante muestra como formo la escalera con triángulos.

Profesor: Si quieren ha bueno ok...

Se finaliza el video.

Una vez recopiladas las transcripciones, se seleccionan aquellos momentos donde los estudiantes argumentan y/o conjeturan frente al pensamiento variacional y con estos se realiza una matriz descriptiva que permita encontrar, diferenciar e identificar aquellos estudiantes que de una u otra manera dieron a conocer sus conjeturas de una forma clara y coherente.

MATRIZ DE DESCRIPCIÓN

La matriz de descripción se enfoca en los momentos en que se da la conjeturación y/o argumentación de los estudiantes frente al pensamiento variacional, esta permite clasificar las diferentes afirmaciones arrojadas, que se tomaran ya sea como conjeturaciones o argumentaciones vistas en el momento de desarrollar el applet.

Segmento	Descripción del segmento	Pensamiento variacional	Conjeturación	Argumentación.
Estudiante 1: Son treinta puntos, todos. Entonces salen treinta puntos. Pero el morado es del uno, otro es múltiplo del dos, el otro es múltiplo de tres y el otro es múltiplo de cuatro. Entonces se van llenando... se van llenando. (El estudiante hace la descripción	El estudiante obtiene un número total de puntos, pero diferencia que un grupo es múltiplo de uno, otro de múltiplo de dos, otro es del tres y el último es del cuatro.	El estudiante al obtener un número total de puntos, y diferenciar cuatro grupos de puntos, encuentra una regularidad entre cada deslizador y los puntos obtenidos por el mismo y los asocia a las tablas de multiplicar del 1 al 4.	Conjetura de manera visual los puntos obtenidos con las tablas de multiplicar y a su vez las asocian con los colores de cada deslizador.	En este primer momento, se evidencia un intento de argumentación cuando el estudiante busca asociar que los puntos obtenidos son los múltiplos de las tablas del 1 al 4.

<p>pero sólo realiza al principio un movimiento sobre los deslizadores del applet).</p>				
<p>De acuerdo con lo anterior, el estudiante 1 relaciona la variación que encontró al mover los puntos en el applet con la formulación de una conjetura. Esta conjetura no llega a ser argumento porque el traspaso del dato a la conclusión no evidencia un garante tan convincente.</p>				
<p>- Estudiante 2: eh, los puntos están puestos de diferente manera, por ejemplo, aquí están en, en... en cada número separados. Y aquí por ejemplo ya no hay acá ni un punto, ni aquí tampoco, aquí tampoco y aquí tampoco. (Mientras el estudiante refiere que “aquí no hay puntos”,</p>	<p>El estudiante nota el cambio de los puntos de acuerdo a la comparación que hace de los mismos frente a los que no aparecen.</p>	<p>Al comparar cuando aparecen los puntos y cuando no, se establece una variación. El estudiante no obtiene una conjetura frente a lo que obtuvo, sino frente a los puntos que le faltan.</p>	<p>Es una afirmación, pues aunque su aporte es muy valioso frente al cambio que nota de los puntos que hacen falta, no da una justificación del motivo por el cual estos faltan.</p>	<p>Es necesario que el estudiante sustente frente al porque hacen falta los puntos para que al realizar este soporte, se pueda llegar al proceso completo de argumentación.</p>

<p>señala los espacios en blanco que se encuentran en la tableta en donde no están los puntos).</p>				
<p>Teniendo en cuenta que los aportes que da el estudiante 2 son valiosos, son simplemente afirmaciones, frente a lo visualizado. Existe evidencia por parte del estudiante que hay un desarrollo de una pequeña conjetura en la variación que se presenta, pero esta conjetura es "inconclusa". Frente a la argumentación de este segmento, no se ve un garante sólido para que la argumentación sea más fuerte.</p>				
<p>Estudiante 3: Esta mueve el deslizador como si fuera una secuencia, entonces el punto a tiene el uno en uno, el dos en dos, el tres en tres y el cuatro en cuatro. Entonces... (Mientras la estudiante hace referencia verbal, no hace movimientos sobre el IPAD, simplemente al</p>	<p>La estudiante indica que cada deslizador corresponde a una serie, del uno al cuatro. Y mientras lo afirma, soporta su argumento con los puntos que obtuvo en el applet.</p>	<p>La estudiante encuentra una variación, la cual concluye que son series de uno al cuatro y la diferencia por los puntos que obtiene frente a los deslizadores.</p>	<p>Identifica una regularidad entre los puntos y su respectivo deslizador, pero no alcanza a comprobar la conjetura del cambio que ocurre entre ellos.</p>	<p>La estudiante descubrió el cambio, pero no realiza una conjeturación y por consecuencia no logra argumentar frente a la razón de cambio.</p>

<p>final abarca con sus manos el espacio que describió)</p>				
<p>En este segmento, los estudiantes realizan una conjetura e intentan comprobarla en aras de la visualización, y aunque la conjetura toma fuerza, lo que resta es verificarla para que la conjeturación tenga un argumento sólido.</p>				
<p>- Estudiante 7: Pues que cada vez que uno movía un deslizador, iban apareciendo puntos, iban apareciendo más puntos; entonces, eh, cada deslizador es un cuadrito, entonces el morado es uno, dos, tres, y así de uno en uno... el verde también dentro del dos. (La estudiante muestra el deslizador y lo asocia con los</p>	<p>La estudiante logra asociar la tabla de multiplicar de los números de 1 a 4 con los datos que obtiene del applet y los diferentes colores con los que estos van asociados a los deslizadores respectivamente.</p>	<p>La estudiante encuentra una variación y la asocia a las tablas de multiplicar.</p>	<p>En cuanto a la conjeturación, la soporta de un apoyo visual utilizando el applet y la relación que encuentra entre los puntos y el deslizador del correspondiente color.</p>	<p>La estudiante genera la conjetura que van de uno en uno, y esta se consideraría una argumentación sustancial pues valida y demuestra con los datos la variación obtenida.</p>

<p>puntos obtenidos del mismo color, así lo hace con el morado, con el verde, luego el azul y por último el amarillo, y explica la variación en cada uno de ellos).</p>				
<p>Se puede decir que en este fragmento se evidencia con más detalle una conjeturación y una argumentación. Una conjeturación ya que establece criterios de visualización y a través de la visualización del iPad se corrobora esa conjetura; y con respecto a la argumentación se da una especie de argumento sustancial, puesto que existe un paso más claro del dato a la conclusión con un garante sólido.</p>				
<p>- Estudiante 7: Que se multiplica cada vez, digamos, uno, se multiplica por uno, este se multiplica por dos, por tres, por cuatro, por cinco, por seis bueno y así sucesivamente.</p>	<p>El estudiante también asocia los datos obtenidos con la tabla de multiplicar.</p>	<p>Es interesante como el estudiante no solo asocia los datos a las tablas de multiplicar, sino que puede generalizar frente a cómo podría continuar esta secuencia numérica.</p>	<p>El estudiante conjetura visualmente, pero logra obtener también una generalización, el estudiante al decir “sucesivamente” esté generalizando.</p>	<p>Se encuentra un argumento sustancial, ya que asocia las variaciones a las tablas de multiplicar y generaliza un patrón.</p>

(el estudiante muestra en la guía los números obtenidos y su relación con la tabla de multiplicación, evidenciando la variación en cada uno de ellos)				
Se infiere que a partir de la variación que observa el estudiante, logra establecer una relación directa entre los puntos y las tablas de multiplicar, adicionalmente, proyecta el patrón de variación y lo generaliza, dando no sólo una conjetura, sino la generalización de la misma como un argumento sustancial sólido.				

Segmento	Descripción del segmento	Pensamiento variacional	Conjeturación	Argumentación.
Estudiante 11: Están dando los números en forma de múltiplos (Enumera los números obtenidos y hace un movimiento de forma vertical de arriba hacia	El estudiante concluye que los números obtenidos en forma vertical son múltiplos del primer número de la tabla dada en el taller.	Es evidente que el estudiante identifica una variación tomando la multiplicación como base del cambio.	El estudiante visualiza que de manera vertical, se encuentran los múltiplos del primer número de la tabla. Por otro lado, identifica la regularidad presentada y la asocia a una multiplicación.	En este primer momento se podría decir que no se realizó argumentación, puesto que el estudiante no pretendió demostrar las conjeturas realizadas.

<p>abajo de acuerdo a los resultados que menciona) uno, dos, tres, cuatro. Dos, cuatro, seis, ocho. Tres, seis, nueve, doce.</p>				
<p>De acuerdo a la experiencia de ese momento, existe una correlación de los puntos vistos y algunas tablas de multiplicación, es decir, que los estudiantes están arrojando una conjetura, esta es verificada por el applet, pero aún carece de afirmaciones que la respalden para que se solidifique aún más el argumento.</p>				

Segmento	Descripción del segmento	Pensamiento variacional	Conjeturación	Argumentación.
<p>Estudiante 13: Es que cuando todos los puntos coinciden, es en los múltiplos del 12, porque en todos, algún punto está en el 12, 24, y 36. (Señala en la</p>	<p>Los estudiantes verifican que los números que aparecen en el applet coinciden con los múltiplos de 12. Es decir, 12, 24, 36...</p>	<p>Se evidencia una razón de cambio, una magnitud directamente proporcional.</p>	<p>Se está visualizando en el IPAD, se está identificando relaciones, regularidades y patrones. Verifican la conjetura.</p>	<p>Los datos que se tiene es que se ven todos los puntos en 12, 24, 36. Concluyen que son múltiplos de 12 y como garante utilizan la visualización que les da el <i>applet</i>.</p>

<p>tabla, con un barrido vertical de sus dedos, indicando los números)</p>				
<p>En este apartado se puede evidenciar que la actividad de pensamiento variacional permitió que los estudiantes arrojaran conjeturas, y al verificar las conjeturas; estas se convirtieran en argumentos sólidos y concretos de carácter sustancial. También se puede afirmar que los estudiantes están dando pequeños pasos hacia la estructura de un argumento por medio de preguntas problematizadoras.</p>				
<p>Estudiante 6: Se repite en el 12 y el 24, y como en tabla va cambiando de orden así (la estudiante señala la tabla de orden vertical) Entonces son múltiplos, porque el 12 y el 24 son múltiplos de todos estos números. Entonces yo propongo... esto porque se repite en los deslizadores. Y si siguiera</p>	<p>Los estudiantes verifican una coincidencia que se da en las filas verticales de puntos de colores. La coincidencia ocurre en el punto 12, 24, 48, 60 y 72 si continúa la programación.</p>	<p>Se evidencia una razón de cambio, una magnitud directamente proporcional.</p>	<p>Se está visualizando en el IPAD, permitiendo la identificación, la relación de regularidades y patrones. Formulación de conjeturas porque se evidencia de manera verbal ese razonamiento. Verifican la conjetura.</p>	<p>Los datos que se tiene es que se ven todos los puntos en 12, 24, 36, etc. Como garante, los estudiantes utilizan la visualización que les da el <i>applet</i> y la posible programación que tenga el mismo. Donde concluyen que son múltiplos de 12.</p>

así se repite en 36, 48, 60 y 72.				
En este momento la variación que los estudiantes encontraron les permitió inferir además que existe otro tipo de variación sin tener en cuenta la programación del applet, es decir, llegan a suponer una especie de continuidad al infinito de los puntos de manera lineal de 12 en 12.				

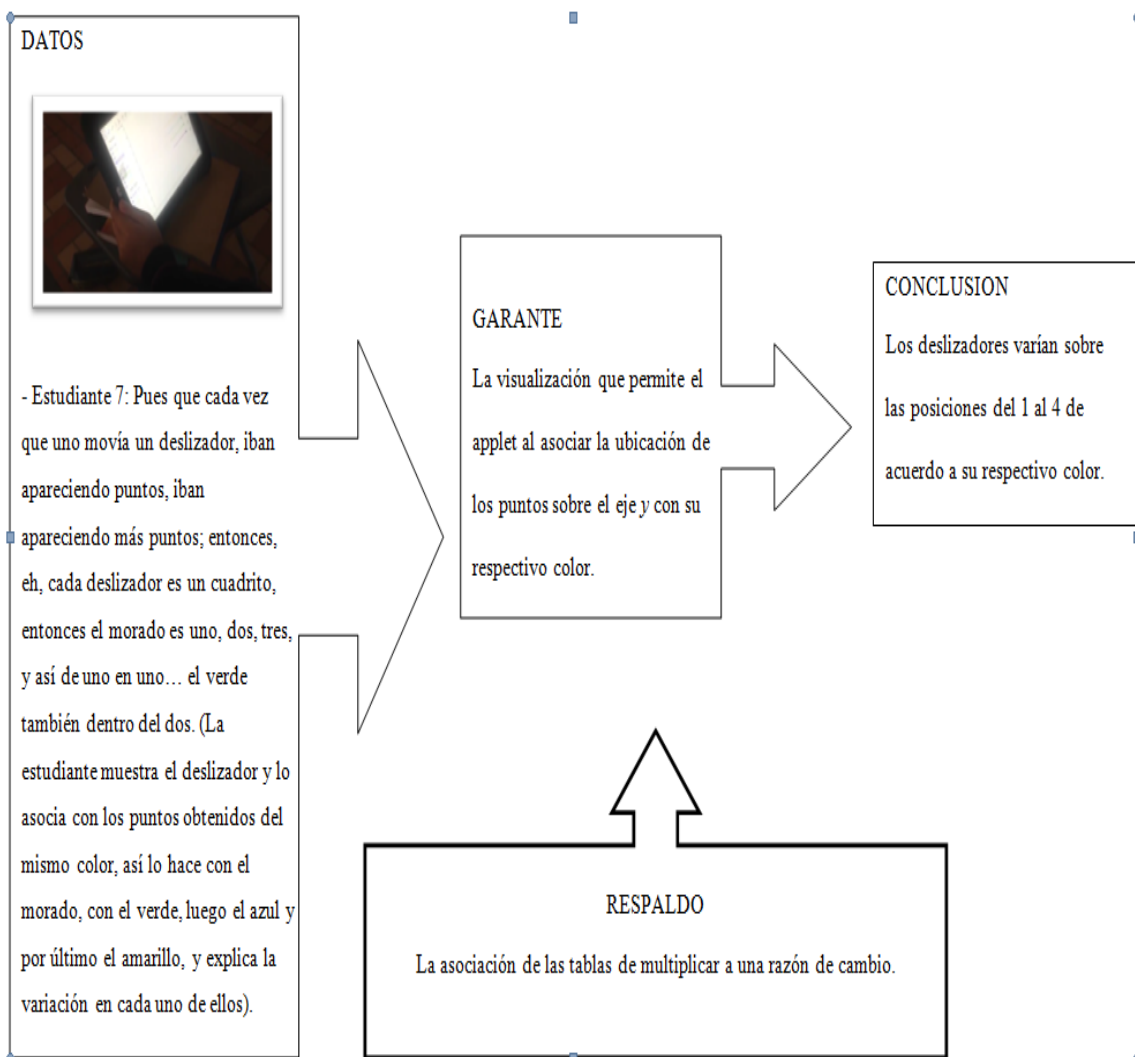
Segmento	Descripción del segmento	Pensamiento variacional	Conjeturación	Argumentación.
Estudiante 2: Nosotros vemos como un montón de triángulos ahí, y vamos a tratar de usar los polígonos para ver que sacamos con ellos.	El estudiante observa cómo se forman triángulos, cuadrados y polígonos al unir los puntos que surgen en la variación de cada uno de los deslizadores.	Se evidencia en el momento que ellos unen los puntos para formar ya sea los triángulos, los cuadrados o los rectángulos, ya que surgen de distintos tamaños dependiendo los múltiplos que unen.	Se da la etapa de visualización y a la vez identifican un patrón, que en este caso son los puntos que surgen a partir de la variación y la unión de estos puntos para formar los polígonos mencionados.	Se da un argumento de tipo sustancial, en donde el dato se presenta por medio de la observación para apoyar a la conclusión: “con los distintos múltiplos se forman triángulos, cuadrados y rectángulos de distintos tamaños”.

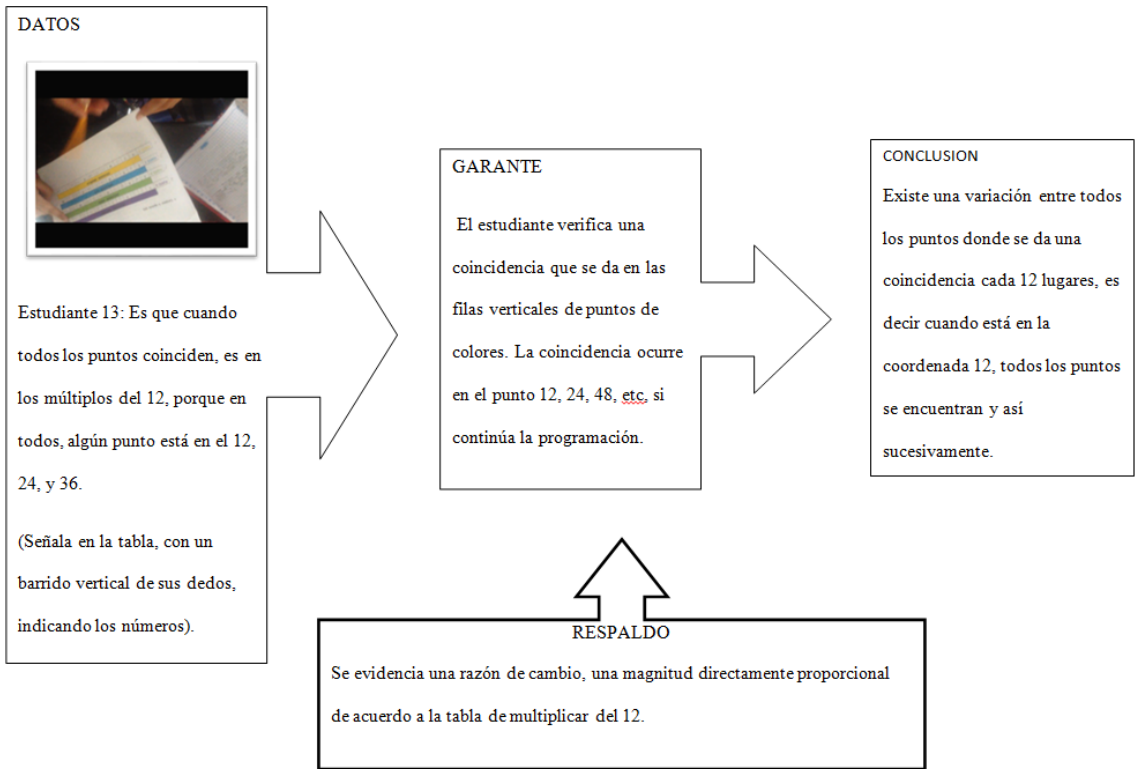
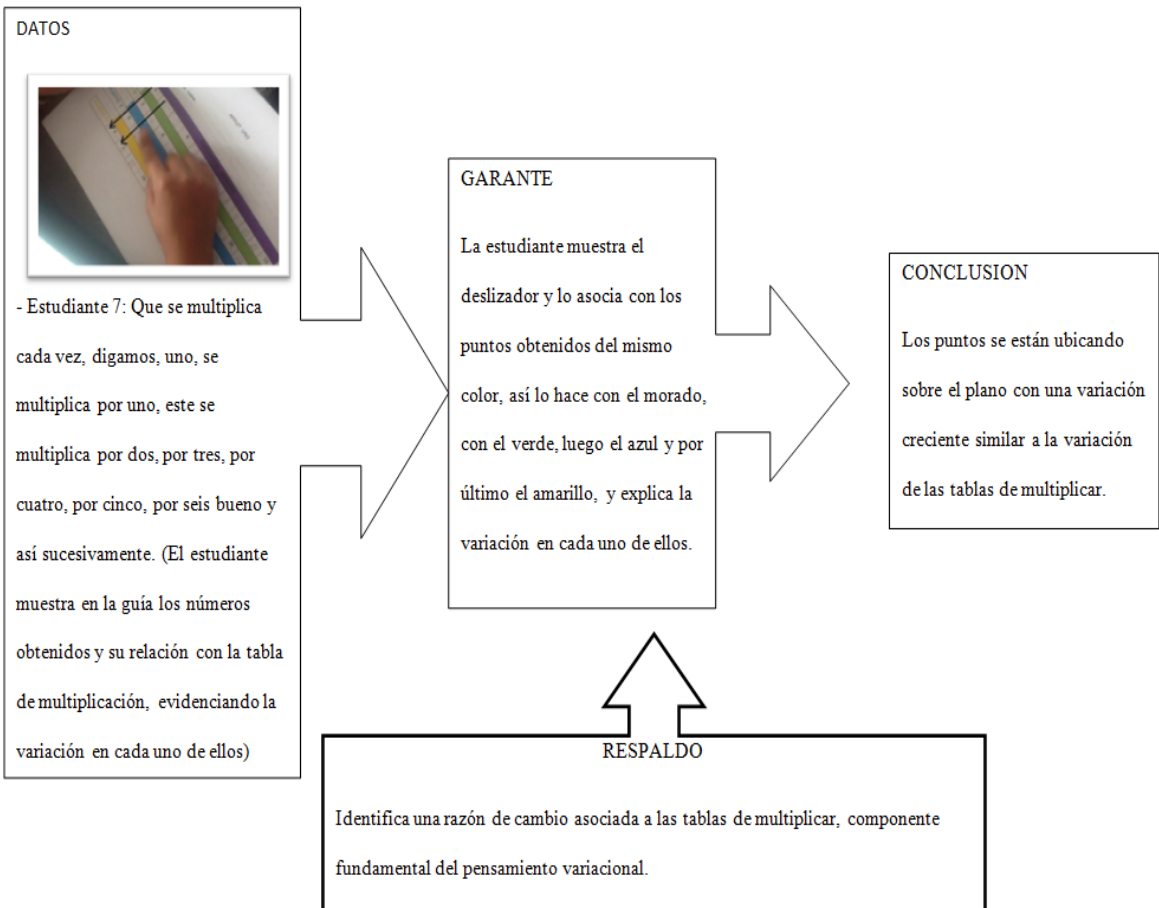
A partir de este momento se puede ver que los estudiantes encontraron otro tipo de variación que no fue contemplada al momento de la creación del applet. Dicha variación se construye de manera geométrica, donde a partir de la ubicación de los números encuentran regularidades que al unirlos forman distintos polígonos, entre ellos triángulos, cuadrados y rectángulos.

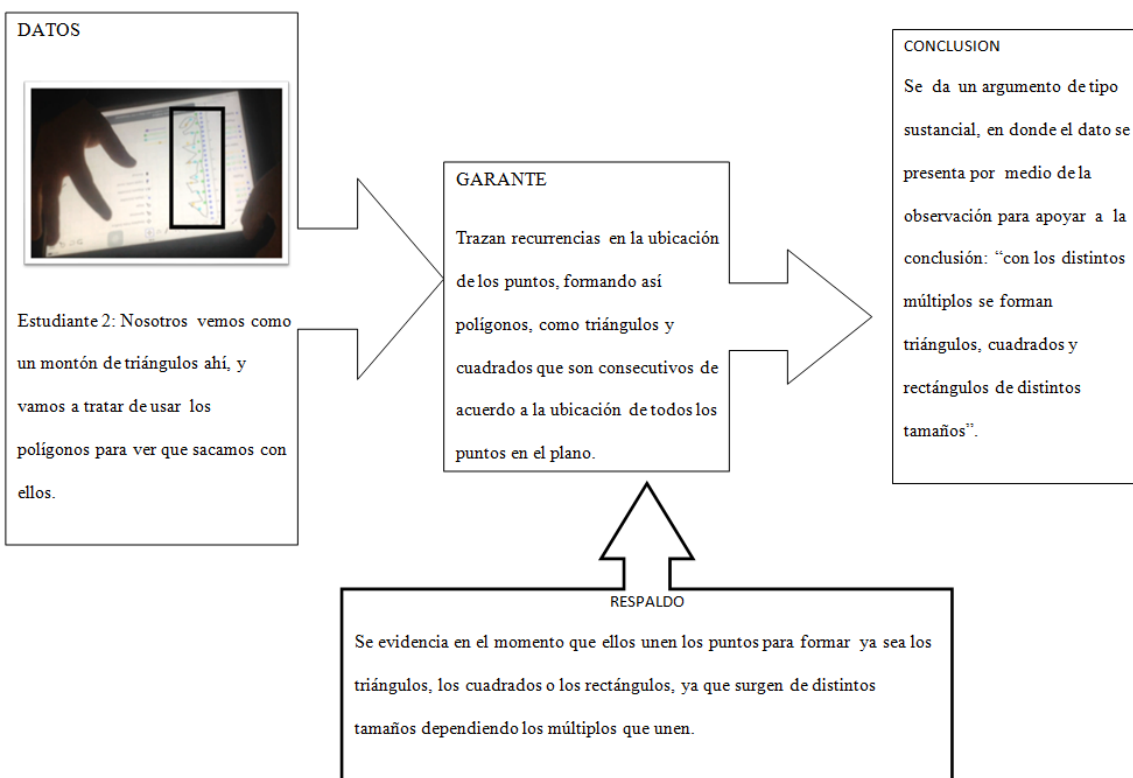
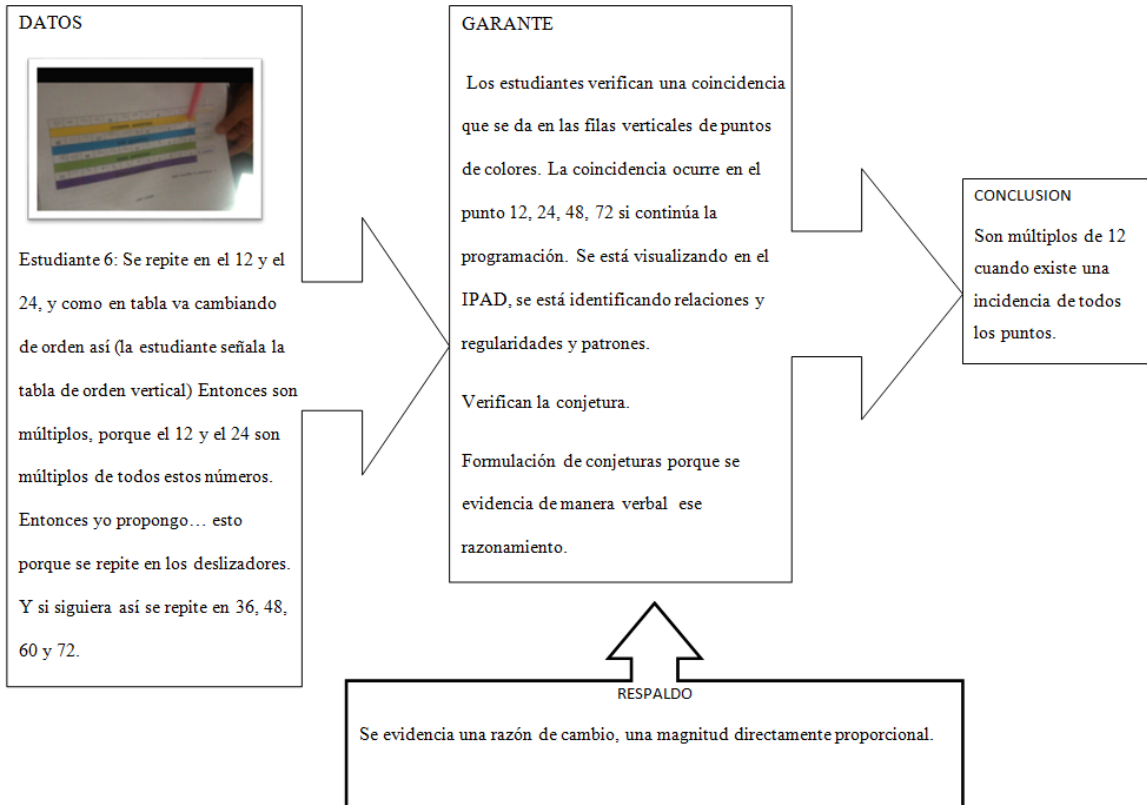
A partir del esquema anterior, se toman aquellos momentos que se acercaron al proceso de argumentación y se detallarán en las siguientes descripciones de fondo.

DESCRIPCIÓN DE FONDO

En estas descripciones de fondo, se comentan aspectos minuciosos a partir de la matriz de descripción de los diferentes momentos donde existe proceso de argumentación a través del desarrollo del pensamiento variacional, empleando un diagrama de flujo que permita entender “La teoría de la argumentación de Toulmin”.







Frente a la descripción de fondo de 5 segmentos, en los que cada uno tiene como participante uno o dos estudiantes del grupo, es notoria la forma en cómo la mayoría de ellos coinciden en una conjetura frente a la comparación de los puntos obtenidos del applet, como múltiplos de los números dados en el taller, por medio de la visualización, y en la mayoría realizando una formulación de conjeturas, no obstante una gran parte del grupo pudo hacer generalización. En los casos que se puede afirmar que existe argumentación, es porque esta se ubica en un argumento sustancial, valiéndose del lenguaje corporal (indicación con sus manos en el applet) o verbal como garante de sus conjeturas o afirmaciones.

Frente al desarrollo del pensamiento variacional, los estudiantes comprenden el cambio de proporción de los puntos y logran concebir que la distancia en donde coinciden todos los puntos es 12.

A través de la visualización y la identificación de patrones que logran ubicar los estudiantes dentro del applet, arrojan una conjetura (donde coinciden los puntos es cada 12... es decir son múltiplos de 12) la cual es argumentada, a través de la visualización del applet en el iPad. Este tipo de argumento es sustancial porque permite evidenciar un traspaso de dato a conclusión intrínsecamente, porque el garante está inmerso dentro de la conclusión.

Se observa como los estudiantes presentan proceso de conjeturación en la resolución de la actividad propuesta "applet". Este proceso se evidencia cuando por medio de la visualización el estudiante llega a formular la conjetura que por medio de la unión sucesiva de los distintos múltiplos se forman tanto triángulos, cuadrados, rectángulos, es decir, polígonos de distintos tamaños. De igual manera se visualiza un argumento de tipo sustancial ya que los garantes que se dan son de tipo visual.

CONCLUSIONES

Las conclusiones se basan de la experiencia de la aplicación del applet, el cuerpo del trabajo y algunas recomendaciones para quien a futuro pretenda aplicar esta misma estrategia:

- Se concluye que todos los estudiantes desarrollan y exponer ideas del pensamiento variacional a partir del applet trabajado.
- La mayoría de estudiantes realizaron conjeturas asociadas a la visualización y a partir de la misma, algunos de ellos se arriesgaron a formular conjeturas, e intrínsecamente un par de estudiantes lograron validar sus conjeturas y argumentarlas de forma sustancial.
- Es grato para los docentes que realizaron el presente trabajo de grado, que el objetivo esperado del proceso de conjeturación y/o argumentación de los estudiantes frente al pensamiento variacional se logró, aunque no en un 100% de los estudiantes, sí en la mayor parte de ellos.
- En la experiencia de clase donde se aplicó el applet, se evidenció que los estudiantes del grupo de “Talento matemático” del Colegio Americano de Bogotá; son muy receptivos y propositivos frente a diferentes situaciones problema orientadas a través de un dispositivo electrónico. Se logra ver también una buena aprehensión de las herramientas de GeoGebra vistas como una aplicación del trabajo desarrollado en las clases de matemáticas. Dichos estudiantes tienen una habilidad para la comunicación de forma oral y no verbal, puesto que cuando explican un punto de vista, lo hacen con

la precisión y claridad que se ajustan a las expectativas propuestas al inicio de este trabajo de grado, pero su habilidad escritora no es muy fina por decirlo así, se les dificulta redactar sus propias ideas y compartirlas en un texto.

- Ya que en este trabajo solo se desarrolló un applet, y como soporte audiovisual de este momento se tomaron dos videos, uno que registraba la clase, y otro video que registraba a los estudiantes en las afirmaciones que lograban hacer. Se puede concluir que en las grabaciones de los grupos se dificultó la captación de todos los momentos, siendo difícil tomar la decisión sobre a quien se debe grabar y a quien no, pues mientras unos argumentos fueron muy objetivos, otros fueron algo carentes de sentido. Se recomienda tener más personal para grabar esos momentos o hacer entrevistas de manera individual, para obtener una mayor calidad en los datos suministrados por los estudiantes.
- Se puede concluir que los estudiantes de grado quinto de primaria del grupo de talento matemático del colegio Americano de Bogotá, por medio de la visualización, descubrieron en el applet regularidades frente a la variación, obteniendo en la mayoría de ellos conjeturas y en algunos casos en particular utilizando la validación de las conjeturas planteadas, lograron realizar argumentos de forma sustancial.
- Se puede inferir también que el diseño del applet fue acertado frente a su objetivo, el cual consistía en desarrollar procesos de pensamiento variacional, y este permitió a su vez encontrar los diferentes procesos de conjeturación y argumentación.

- Durante la experiencia vivida en con el trabajo de grado, se había presupuestado realizar dos applets, para así tener una aproximación más exacta hasta la argumentación y conjeturación mediante el desarrollo de actividades con fines en el pensamiento variacional. En un momento de clase, se aplicó el segundo applet que no tuvo apreciación en este trabajo; pero se pudo observar más interés y curiosidad por parte de los estudiantes, en cuanto al descubrimiento de patrones, variaciones y demás; que este applet desarrollaba. Se puede decir que el segundo applet tuvo más acogida, y mejores resultados ya que para esta vez, los estudiantes escribieron, lograron desarrollar mayores nociones de variación y más gusto hacia la matemática.

REFERENTES TEÓRICOS

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, N. (2014, Marzo) Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números. Volumen (85)*, pp75- pp90. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_05.pdf

García, G., Serrano, C., y Salamanca, J. (Octubre de 2010) Estudio del pensamiento variacional en la educación básica primaria. En P. Rojas (Presidente ASOCOLME), *Memorias segundo encuentro colombiano de matemática educativa*, Valledupar, Colombia. Recuperado de http://www.academia.edu/2762675/UNA_APROXIMACION_A_LA_EVALUACION_POR_COMPETENCIAS

Camargo, L. (2013, Octubre). Uso de GeoGebra Prim para conjeturar y justificar en primaria. *Revista científica*. Edición especial. Bogotá, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2725/1/Uso_de_GeoGebraPrim_para_conjeturar.pdf

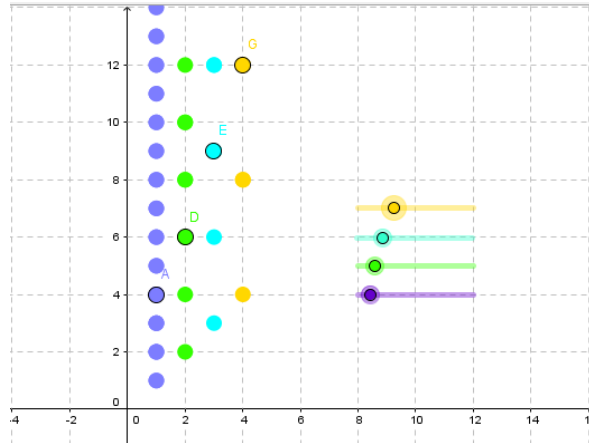
Ministerio de Educación Nacional - MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia. Editorial Magisterio. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional - MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia. Editorial Magisterio. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf

Toulmin, S. E., Capítulo cuarto: La teoría de la argumentación de Toulmin. En M. Atienza (Ed.), *Las razones del derecho. Teorías de la argumentación jurídica* (pp. 91-104). Recuperado de <http://biblio.juridicas.unam.mx/libros/libro.htm?l=710>

ANEXOS

Anexo 1. Imágenes del applet.



Anexo 2. Imágenes del taller.

APPLET UNO

- Completar la siguiente tabla.

DESILIZADOR MORADO										
PUNTO A	1			4						12
DESILIZADOR VERDE										
PUNTO D	2		6			12				20
DESILIZADOR AZUL										
PUNTO E	3		9		15				27	36
DESILIZADOR AMARILLO										
PUNTO G	4			16					32	

Teniendo en cuenta la tabla anterior contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasaría si existiera otra columna? ¿Cuáles serían los valores de los puntos **PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G**? ¿Por qué toman esos valores? ¿Se repiten valores en algunos de los puntos, o por el contrario no se repiten valores en ningún punto? ¿Por qué?
- Si existiera otro punto, por decir el **PUNTO H**, ¿Qué valores tomaría ese punto? ¿Por qué toma esos valores? ¿Se repiten valores con otro punto? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el **PUNTO D**?
- Observando todos los resultados de la tabla, puedes decir que existe **algún valor** que se repite en todos los puntos (**PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G - PUNTO H**) ¿Cuál es ese valor?
- ¿Por qué crees que se repite ese valor en todos los puntos? ¿existe algún otro valor? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el **PUNTO E** y **PUNTO G**?
- ¿Qué valores tomaría cada uno de los puntos (**PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G - PUNTO H**) en la columna **20**? ¿Cuáles serían esos valores? ¿Se repiten en algunos de los puntos mencionados? ¿En cuáles no se repiten valores?
- ¿En qué valores varían el **PUNTO A**?
- ¿Qué conclusiones puedes dar del ejercicio anterior.

Anexos de algunos momentos de la sesión con el taller

APPLET UNO

• Completar la siguiente tabla.

	DESILIZADOR MORADO											
PUNTO A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	DESILIZADOR VERDE											
PUNTO D	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
	DESILIZADOR AZUL											
PUNTO E	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
	DESILIZADOR AMARILLO											
PUNTO G	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48

Juan Mateo Escobar Ortega
Juan Felipe Hernández

Ocurría que cada columna contenía de
múltiplos
considerando cuanto son tienen un "múltiplo" igual
en cada color.

Teniendo en cuenta la tabla anterior contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasaría si existiera otra columna? ¿Cuáles serían los valores de los puntos PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G? ¿Por que toman esos valores? ¿Se repiten valores en algunos de los puntos, o por el contrario no se repite valores en ningún punto? ¿Por qué?
- Si existiera otro punto, por decir el PUNTO H, ¿Qué valores tomaría ese punto? ¿Por qué toma esos valores? ¿Se repite valores con otro punto? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el PUNTO D?
- Observando todos los resultados de la tabla, puedes decir que existe algún valor que se repita en todos los puntos (PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G - PUNTO H) ¿Cuál es ese valor?
- ¿Por qué crees que se repite ese valor en todos los puntos? ¿existe algún otro valor? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el PUNTO E y PUNTO G?
- ¿Qué valores tomaría cada uno de los puntos (PUNTO A - PUNTO D- PUNTO E- PUNTO G - PUNTO H) en la columna 20? ¿Cuáles serían esos valores? ¿Se repiten en algunos de los puntos mencionados? ¿En cuales no se repiten valores?
- ¿En que valores varían el PUNTO A?
- Qué conclusiones puedes dar del ejercicio anterior.

APPLET UNO

- Completar la siguiente tabla.

	DESILIZADOR MORADO											
PUNTO A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	DESILIZADOR VERDE											
PUNTO D	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
	DESILIZADOR AZUL											
PUNTO E	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
	DESILIZADOR AMARILLO											
PUNTO G	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48

Sergio Alejandro Reyes Martínez 503 Daniel Felipe Fajardo Torres 503

Coinciden en los múltiplos del 12 porque todos se alinean ahí.

Teniendo en cuenta la tabla anterior contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasaría si existiera otra columna? ¿Cuáles serían los valores de los puntos PUNTO A - PUNTO D - PUNTO E - PUNTO G? ^{También más valor la columna fechada.} ^{Porque se sigue multiplicando.} ¿Por qué toman esos valores? ¿Se repiten valores en algunos de los puntos, o por el contrario no se repite valores en ningún punto? ¿Por qué? ^{Si se repiten porque todos se conectan con los 5000.}
- Si existiera otro punto, por decir el PUNTO H, ¿Qué valores tomaría ese punto? ¿Por qué toma esos valores? ¿Se repite valores con otro punto? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el PUNTO D?
- Observando todos los resultados de la tabla, puedes decir que existe algún valor que se repita en todos los puntos (PUNTO A - PUNTO D - PUNTO E - PUNTO G - PUNTO H) ¿Cuál es ese valor?
- ¿Por qué crees que se repite ese valor en todos los puntos? ¿Existe algún otro valor? ¿Por qué?
- ¿En qué valores varían el PUNTO E y PUNTO G?
- ¿Qué valores tomaría cada uno de los puntos (PUNTO A - PUNTO D - PUNTO E - PUNTO G - PUNTO H) en la columna 20? ¿Cuáles serían esos valores? ¿Se repiten en algunos de los puntos mencionados? ¿En cuáles no se repiten valores?
- ¿En qué valores varían el PUNTO A?
- Qué conclusiones puedes dar del ejercicio anterior.