

COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE ESPACIO MUESTRAL

Pre-Service Teachers' Knowledge in relation to sample space

Juan J. Ortiz, Nordin Mohamed y Luis Serrano

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo es evaluar algunos componentes del conocimiento de 283 futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de conceptos probabilísticos elementales, involucrados en una tarea en la que deben identificar el suceso seguro en un experimento aleatorio y el posterior análisis didáctico de la tarea trabajando en grupos. En nuestro estudio nos centraremos en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes. Los resultados sugieren la necesidad de reforzar tanto los conocimientos matemáticos como los conocimientos didácticos de los futuros profesores.

Palabras clave: conocimiento del profesor, probabilidad, espacio muestral.

Abstract

The aim of this paper is to assess some components in the probabilistic knowledge for teaching of 283 pre-service primary school teachers. These teachers were given a task in which they must identify the certain event in a random experiment and subsequently they analysed the task working in groups. In our study we focus on the common and specialized knowledge of content and knowledge of content and students. Results suggest the need to reinforce the training of pre-service teachers both in the mathematical and the didactic knowledge.

Keywords: teachers' knowledge, probability, sample space.

INTRODUCCIÓN

Aunque son numerosas las investigaciones en educación matemática sobre formación de profesores, sólo recientemente estos trabajos se centran en los conocimientos de los futuros profesores respecto a la estadística (Batanero, Burrill y Reading, 2011), debido a la inclusión de la estadística y la probabilidad en la Educación Primaria (MEC, 2006; NCTM, 2000). Dichos programas sugieren transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la educación primaria a calcular algunas probabilidades sencillas. La consecución de estos objetivos requiere una formación adecuada del futuro profesor de educación primaria, siendo un requisito previo la evaluación de sus necesidades formativas.

El objetivo de este trabajo es evaluar algunos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de futuros profesores de educación primaria sobre conceptos probabilísticos elementales, involucrados en una tarea en la que deben identificar el suceso seguro en un experimento aleatorio y el posterior análisis didáctico de la tarea trabajando en grupos. Este estudio se centra en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes, en la terminología de Hill, Ball y Schilling (2008).

FUNDAMENTOS

Comprensión del suceso seguro

Entre las ideas fundamentales de la probabilidad, Heitele (1975) incluye la de suceso seguro o espacio muestral. Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) indican que el origen de concepciones incorrectas en los estudiantes, sobre los experimentos aleatorios y el espacio muestral, puede ser debido a que no se presta suficiente atención a la enseñanza de estos dos conceptos.

Numerosas investigaciones con niños y adolescentes, sobre la comprensión del espacio muestral, indican que aunque manifiestan cierta intuición para determinar el espacio muestral y para calcular la probabilidad de un suceso compuesto, cometen errores de orden (edad 9-14 años) (Fischbein, Nello y Marino, 1991) o errores de orden y de repetición (edad 14-15 años) (Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997). Otros estudiantes (edad 8-9 años) no creían que todos los resultados podrían ocurrir en un experimento aleatorio simple (Jones, Langrall, Thornton y Mogill, 1999). Para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre el espacio muestral se puede utilizar la simulación (Shaugnessy y Cincetta, 2002)

Formación de profesores para enseñar probabilidad

Azcárate (1995) evaluó el conocimiento matemático de 57 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad, encontrando que pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios, o consideraron que no es posible el estudio matemático de los mismos. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y escasa competencia de cálculo de probabilidades, cuantificando las probabilidades de un suceso desde criterios personales.

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006), analizaron las estrategias que 102 futuros profesores de educación primaria utilizaron en la resolución de problemas de comparación de probabilidades. Observaron que, en general, hacían uso de estrategias correctas (multiplicativas y de correspondencia), que indicaba un buen nivel de razonamiento proporcional, aunque todavía había un grupo importante que utilizaba estrategias incorrectas o mostraba sesgos de razonamiento. Para mejorar el razonamiento probabilístico de los futuros profesores de educación primaria, Batanero, Godino y Cañizares (2005) proponen utilizar actividades de simulación.

Respecto al espacio muestral, Azcárate (1995) propuso dos problemas a futuros profesores de educación primaria, obteniendo muy pocas respuestas correctas. Los participantes mostraron mucha dificultad para enumerar todos los casos posibles, aportando tan solo una estimación global basada en justificaciones aritméticas o en razonamientos combinatorios incompletos o incorrectos.

Sobre el conocimiento didáctico de los profesores, Contreras (2011) detectó carencias en los conocimientos de 183 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad condicional, respecto a las componentes conocimiento especializado y conocimiento del contenido y la enseñanza. López (2006) mostró la gran dificultad de los profesores de primaria cuando diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad.

Respecto al conocimiento del contenido y los estudiantes, Watson (2001) informó que los profesores de primaria y secundaria, aunque son capaces de identificar los problemas de los alumnos, en general, se centran en aspectos procedimentales. Contreras (2011) encontró que algunos profesores de secundaria fueron capaces de identificar correctamente conflictos de sus estudiantes al resolver un problema de probabilidad, pero otros señalaron dificultades que no aparecen en la situación o que no eran importantes.

MÉTODO

Los participantes fueron 283 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, en su primer año de estudios. Siguiendo la metodología propuesta por Godino (2009), se eligió una tarea cuya solución ponga en juego los principales aspectos a evaluar del suceso seguro y los conceptos probabilísticos relacionados, y se formulan cuestiones para evaluar las distintas componentes del conocimiento del profesor.

En la Figura 1 se muestra el cuestionario utilizado con un problema tomado de Cañizares (1997), quien lo utilizó con niños de 10 a 14 años. El espacio muestral consta de tres sucesos elementales no equiprobables por razón de la composición de la urna. En los sucesivos experimentos la composición de la urna se modifica, por lo que cambian las probabilidades de los sucesos elementales. En esta situación hay que sacar ocho bolas para estar seguro de que habrá una bola de cada color, pues en el peor de los casos, con ocho bolas sacas todas menos una blanca. Las respuestas incluidas en la segunda parte de la tarea (Alumnos 1 a 6), las proporcionaron algunos niños participantes en dicha investigación. Los datos se recogieron en la asignatura de *Matemáticas y su Didáctica*, a lo largo de dos sesiones. En la primera, se pidió a los futuros profesores que resolvieran por escrito el apartado (a), para evaluar su conocimiento común del contenido matemático. En la segunda sesión, trabajando en pequeños grupos (31 grupos en total), se pidió que resolvieran por escrito el apartado (b), para evaluar el conocimiento especializado del contenido, y los apartados (c) y (d), para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes. Los grupos eran de dos o tres estudiantes, que mostraron su disposición a participar en la segunda sesión,

En lo que sigue presentamos un problema sobre probabilidad, junto con algunas de las respuestas proporcionadas por estudiantes.

- a. Resuelve el problema.
- b. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta.
- c. Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por alumnos son correctas.
- d. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea.

Problema. En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. Se sacan sucesivamente bolas sin mirar, sin devolver la bola a la caja una vez sacada. ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá

una bola de cada color?
Respuestas de los alumnos
A1. <i>“Tres, porque hay tres tipos de colores”</i>
A2. <i>“Debe sacar tres bolas, a lo mejor le toca una roja, una verde y una blanca”</i>
A3. <i>“Si se sacan primero las rojas y verdes son siete, pero como hace falta una de cada color, pues ocho”</i>
A4. <i>“Nunca se puede estar seguro, porque a lo mejor sacas dos rojas y dos verdes”</i>
A5. <i>“Debe sacar nueve, es decir todas, y así estará lo más seguro posible”</i>
A6. <i>“Debe mirar en la caja y así estará seguro de sacar una de cada color”</i> .

Figura 1. Tarea propuesta a los futuros profesores

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Conocimiento común del contenido

En la Tabla 1 se presenta la frecuencia de las categorías obtenidas a partir del análisis de contenido de las respuestas de los futuros profesores al primer apartado del problema, teniendo en cuenta las establecidas en el estudio de Cañizares (1997). En ella se observa que la categoría mayoritaria es “8 bolas” (46.3%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente. Un ejemplo es el siguiente: *“El total es nueve se le resta el número de bolas que vamos a sacar. A la cuarta rojo, a la séptima verde, a la octava blanco”* (alumno 24).

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de respuestas

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
2 bolas	3	1.1		
3 bolas	27	9.5	48	33.6
4-5 bolas	20	7.1		
6 bolas	24	8.5	37	25.8
7 bolas	8	2.8		
8 bolas (*)	132	46.3	19	13.3
9 bolas	23	8.1	18	12.6
Otras	13	4.6	17	11.9
No contesta	33	11.7	4	2.8

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “3 bolas”, donde están los futuros profesores que han respondido que es necesario extraer tres bolas, que muestran confusión entre los conceptos de suceso seguro y suceso posible, seguidas de las categorías “6 bolas” (8.5%) y “9 bolas” (8.1%). Con porcentajes menores aparecen una gran variedad de categorías, donde hemos incluido los futuros profesores que por falta de capacidad combinatoria no estiman bien el número de bolas, dando respuestas diferentes. En la categoría “Otras” hemos incluido a los futuros

profesores que aportan respuestas incoherentes, o indican que no comprenden bien el enunciado “¿se vuelven a meter las que se sacan? No lo tengo muy claro este ejercicio (alumno 33), que muestra una confusión entre muestreo con reemplazamiento y sin reemplazamiento.

Los resultados revelan que la mayor parte de los futuros profesores de educación primaria muestra un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al suceso seguro y a los conceptos probabilísticos relacionados, ya que solo el 46% de los futuros profesores responde correctamente a la cuestión planteada. Estos resultados son mejores que los obtenidos por Azcárate (1995), que fueron solo del 3 y el 14 % en dos problemas sobre el espacio muestral. Entre las dificultades destacan la confusión entre suceso seguro y suceso posible, la falta de razonamiento combinatorio, que se manifiesta en los que responden que hay que extraer todas las bolas (8.1%), descrita también por Azcárate (1995). En otros casos, como indican Hawkins et als. (1992), se ha podido producir una interpretación incorrecta del experimento aleatorio que ha llevado a los futuros profesores a considerar un espacio muestral incorrecto.

Aunque los futuros profesores han obtenido un porcentaje mucho mayor de respuestas correctas que los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), todavía existe una proporción muy importante de ellos que incurre en errores (42%), en algunos casos, similares a los que cometen los estudiantes a los que han de formar.

Conocimiento especializado del contenido

El análisis de las respuestas de los futuros profesores al apartado b) muestra que el contenido matemático mejor identificado por ellos fue el concepto de probabilidad (16 grupos). El azar y la aleatoriedad son citados por pocos grupos (10 grupos). Un ejemplo es el siguiente: “*El alumno deberá ser capaz de estimar la mayor o menor frecuencia con la que ocurren los fenómenos y para resolver el problema planteado debe tener claro la ‘intuición del azar’*” (grupo 4). Es también escasa la mención al razonamiento combinatorio (4 grupos), como la siguiente: “*Este es un caso de razonamiento combinatorio ya que tenemos que enumerar todos los casos en un experimento aleatorio*” (grupo 21). Hicieron referencia a porcentajes y a diagrama de árbol (2 grupos), en ambos casos. Destacar que hay siete grupos que no contestan.

Han sido incorrectamente identificados como contenidos matemáticos necesarios para la resolución de este problema los relacionados con la estadística (5 grupos) y el enfoque frecuencial de la probabilidad (3 grupos), ya que en este problema no se utilizan. Por ello, se considera que el conocimiento especializado del contenido mostrado por los futuros profesores es muy escaso, lo que apoya las conclusiones del estudio de Chick y Pierce (2008), que indica que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica relacionada con la estadística.

Conocimiento del contenido y los estudiantes

El análisis de las respuestas de los futuros profesores al apartado c) muestra que la mayor parte de los grupos fue capaz de discriminar las respuestas correctas e incorrectas a este problema. La única respuesta correcta del alumno A3 fue identificada como tal por 26 grupos. Los casos más difíciles de discriminar fueron las respuestas A4 y A5, donde respectivamente siete y seis grupos de futuros profesores consideran que son correctas, debido a que no han sabido distinguir entre suceso seguro y suceso posible o debido a que piensan que no se puede saber el resultado al ser un experimento aleatorio. Un ejemplo, la respuesta sobre el alumno A4: “*El niño descubre que el ejercicio se basa en el azar y que existen multitud de posibilidades y variarán los colores y no se podrá estar seguro de los colores que sacarán*” (grupo 25). Otro caso con cierta dificultad fue la respuesta A6, que cuatro grupos consideran correcta, debido posiblemente a que no comprenden el enunciado del problema que prohíbe explícitamente mirar cuando se sacan las bolas de la caja.

En la Tabla 2 se presenta la frecuencia de las categorías obtenidas, a partir del análisis de las respuestas de los futuros profesores al apartado d), en modo cíclico e inductivo. En ella se observa que pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos, dando explicaciones alternativas. La estrategia errónea de confundir el número mínimo de bolas que debe extraer, para obtener tres colores diferentes, con el suceso seguro (alumno A1) fue la más reconocida (20 grupos). Un ejemplo es el siguiente: “*Tres es el número mínimo de bolas que se pueden sacar, pero para estar seguro de sacar una de cada color hay que sacar como máximo 8 bolas*” (grupo 18). Le siguen las estrategias erróneas de confundir el suceso seguro con el suceso posible (alumno A2), identificada por 18 grupos y la de no comprender el enunciado del problema (alumno A6), reconocida por 17 grupos. Entre las explicaciones alternativas están las que indican que los alumnos de primaria han respondido de forma incorrecta debido a que no tienen conocimiento de probabilidad, o que no comprenden el azar o la aleatoriedad, sin explicitar la causa del posible error. Por ello, se considera que los futuros profesores muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes, al reconocer las respuestas erróneas, pero la habilidad para explicar los errores de los alumnos es insuficiente, lo que coincide con el estudio de Watson (2001).

Tabla 2. Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en respuestas erróneas (n= 31).

Explicación dada al error del alumno ficticio	A1 Confunde seguro nº mínimo bolas	A2 Confunde Seguro posible	A4 Nunca seguro	A5 Fallo raz combinat (Sacar todas)	A6 No comprende enunciado (Debe mirar caja)
Explicación correcta	20	18	4	5	17
El futuro profesor no lo explica bien		2	5	4	3
Respuesta del alumno no adecuada			1	7	2
El alumno piensa en el azar		3	2		
El alumno no comprende el azar/aleatoriedad	3	1		2	1
El alumno no justifica la respuesta			2		
El alumno no tiene conocimiento de probabilidad	3	1	4	2	1
El alumno no realiza un razonamiento matemático	1	2	1	1	
El alumno no entiende el problema	1		2		1
El alumno no contesta	1	1	1	1	4
Nunca estamos seguros por ser un juego aleatorio	1	1		1	1

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES EDUCATIVAS

Más de la mitad de los futuros profesores de educación primaria participantes en este estudio muestra un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al suceso seguro y a conceptos probabilísticos relacionados, ya que responden incorrectamente a la cuestión planteada. Entre las dificultades destacan la confusión entre suceso seguro y suceso posible y la falta de razonamiento combinatorio.

El conocimiento especializado del contenido en los participantes es claramente insuficiente, ya que la idea de probabilidad solo ha sido reconocida por la mitad de los grupos de futuros profesores y la de aleatoriedad por la tercera parte. Los futuros profesores muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes, pero la habilidad para explicar los errores de los alumnos es insuficiente. Para mejorar la formación en estos aspectos, se les debería dar a conocer los resultados de investigaciones sobre didáctica de la probabilidad. Subrayar que estas conclusiones solo se refieren al conocimiento de los participantes sobre los conceptos involucrados en este problema.

Una implicación de interés es la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de educación primaria en las diferentes componentes del conocimiento para la enseñanza de la probabilidad. Respecto a la metodología, se sugiere proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del suceso seguro y los conceptos probabilísticos relacionados. Para prepararlos en la componente didáctica se pueden utilizar situaciones como la usada en este trabajo. Las nuevas tecnologías y los foros de discusión pueden ser también un vehículo formativo a tener en cuenta (Viseu y Ponte, 2009).

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20; Proyecto EDU2010-14947 y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.
- Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* [CD ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.
- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Chick, H. L., & Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children in adolescence. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Hawkins, A., Jolliffe, F., & Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. London: Longman.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in*

Mathematics Education, 4 (39), 372-400.

- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 487-519.
- López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD-ROM]. Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute.
- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.
- N. C. T. M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA, NCTM.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C.; Serrano, L., & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca, España: SEIEM.
- Shaugnessy, & Cincetta (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Philips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* [CD ROM]. Cape Town, South Africa: International Statistical Institute.
- Viseu, F., & Ponte, J. P. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didático do futuro professor de Matemática com apoio das TIC's. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 383-413.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(4), 305-337.