# CONTANDO CARAS, VÉRTICES Y ARISTAS. ELABORACIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER. UN ESTUDIO EXPLORATORIO

## Counting faces, vertices and edges. Elaboration of Euler's formula . An exploratory study

Cristina Pérez[a] y Gregoria Guillén[b]

[a]Universidad de València, [b]Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de València

**Resumen**

*Presentamos un estudio exploratorio desarrollado con estudiantes de 4º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria usando la elaboración y demostración de la fórmula de Euler como situación-contexto para desarrollar diferentes contenidos geométricos de secundaria. Nos fijamos en las estrategias utilizadas al contar las caras, vértices y aristas de diferentes sólidos a partir de diferentes representaciones de los mismos (modelos construidos con material comercializado, sus desarrollos, dibujos en perspectiva) y tratamos también cuestiones referidas al tipo de argumentación, a dificultades y errores y al uso del lenguaje específico. Los datos se han obtenido mediante tests y una entrevista que se han administrado intercalando entre ellos cierta instrucción en la que se han usado los sólidos como contexto y como objeto de estudio.*

**Palabras clave**: *poliedros, fórmula de Euler, descripción y representación de sólidos, demostración.*

**Abstract**

*We present an exploratory study developed with fourth-year students of secondary education using the development and demonstration of Euler's formula as context-situation to develop different geometric contents of secondary education. We attend to the strategies used to count faces, vertices and edges of different solids from different representations (models built with commercialize material, its developments, perspective drawings) and we also deal with the type of argument, difficulties and errors issues and the use of specific language. The data were obtained through an interview and tests that have been administered interspersed among them some instruction in which the solids have been used as a context and as an object of study.*

**Keywords:** *polyhedra, Euler's formula, description and representation of solids, demonstration.*

Pérez, C. y Guillén, G. (2013). Contando caras, vértices y aristas. Elaboración de la fórmula de Euler. Un estudio exploratorio. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 439-448). Bilbao: SEIEM

## PRESENTACIÓN

Encontrar situaciones-contexto desde los que trabajar contenidos geométricos curriculares de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) no resulta sencillo. En este trabajo se utiliza la fórmula de Euler para ello tomando como referente el trabajo de Polya (1966, pp. 65-75) en el que a partir de esta fórmula se trata la inducción en geometría sólida. Este autor, después de hacer notar que un poliedro puede tener muchas caras, vértices y aristas y que ello sugiere distinguir claramente las cantidades envueltas y preguntar por algo definido, cuestiona si es cierto que en un poliedro se incrementa el número de caras cuando se incrementa el número de vértices. Propone examinar y comparar varios cuerpos representándolos "lo bastante claramente para contar las caras vértices y aristas" (pp. 65-66). Los números encontrados se registran en una tabla, se buscan regularidades sobre el aumento de unos elementos en relación con otros y de esta manera se enuncia la fórmula de Euler. En el recorrido de Polya para la justificación y/o refutación de la fórmula resulta también relevante contar los elementos (caras, C, vértices, V, y aristas, A) de diferentes familias de poliedros, de sólidos que no corresponden a poliedros o de formas que no corresponden a poliedros convexos.

El trabajo que presentamos se centra en la problemática de contar elementos de diferentes sólidos. El recorrido por los puntos que Polya (op. cit.) denomina "Poliedros", "Primeros contactos de apoyo", "Más contactos de apoyo", "Una prueba rigurosa" (pp. 65-71), explica que la problemática nos la cuestionemos para los poliedros regulares, para ejemplos de los poliedros arquimedianos, centrando la atención en lo que se mantiene y cambia en el truncamiento de poliedros regulares, y para ejemplos de prismas y pirámides, abordando la problemática de la generalización. Asimismo, al contemplar también la posible refutación de la fórmula de Euler, la cuestión se plantea para los cilindros y otros sólidos que no son convexos. Nos fijamos en las estrategias utilizadas al contar los elementos de los sólidos seleccionados, antes y después de una determinada instrucción, y usando la fórmula de Euler como contexto, además de la elaboración de la fórmula, tratamos cuestiones referidas a la descripción y clasificación de sólidos y representaciones de los mismos, a tipos de argumentación, a dificultades y errores y al uso del lenguaje específico.

La situación actual de la enseñanza/aprendizaje de los sólidos explica que en el estudio se distingan 4 etapas para la toma de datos que se preceden o no con instrucción. Damos cuenta de la instrucción realizada y de los instrumentos diseñados para la toma de datos y se aportan sugerencias para elaborar secuencias de enseñanza basadas en la elaboración y demostración de la Fórmula de Euler.

## REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA. MARCO DE REFERENCIA

En trabajos previos hemos indicado las características de nuestro marco de referencia (Guillén, 2004, 2010) que toma como referente el trabajo de Freudenthal (1973) y otros estudios desarrollados en el Instituto que lleva su nombre (Treffers, 1987). Hemos subrayado el lugar dominante que ocupan los contextos-situaciones en esta línea de investigación. Éstas se pueden considerar en términos de la distancia entre el problema y las matemáticas implicadas (Rico, 2004, p. 94) y la propia resolución de problemas puede considerarse como contenido objeto de estudio y también como contexto para trabajar otros contenidos curriculares (Guillén y Siñériz, 2012). El trabajo que presentamos forma parte del estudio del Trabajo fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas, (Pérez, 2012) y corresponde a parte de la exploración realizada al considerar la elaboración y demostración de la fórmula de Euler en estos dos sentidos.

Esta manera de acercarnos a "conjeturar y demostrar", se ha defendido por diferentes investigadores, quienes han señalado que los estudiantes de secundaria no logran comprender cuál es la finalidad de la demostración (De Villiers, 1993; Hershkowitz, 1998). El aspecto que toma la demostración es más bien como algo añadido a la actividad matemática en lugar de formar parte de ella; en la mayoría de las ocasiones se desatiende el componente visual y los alumnos aprenden a demostrar por imitación, dotando al proceso de demostrar de intranscendencia y distanciándolo del alumno (Hershkowitz, 1998). Los autores mencionados sugieren que se propongan a los alumnos situaciones de debate, en las que tomen partido y conecten con el proceso de demostrar de forma significativa, de modo que se vayan creando nuevas conjeturas y se vaya aumentando el poder de convicción. La demostración no se reduce a la visión de verificación/convicción sino que contempla también otras funciones y papeles, como los enumerados por De Villiers (1993, p. 18): verificación (concerniente a la verdad de una afirmación), explicación (profundizando en por qué es verdad), sistematización (la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas), descubrimiento (el descubrimiento o invención de nuevos resultados) y comunicación (la transmisión del conocimiento matemático).

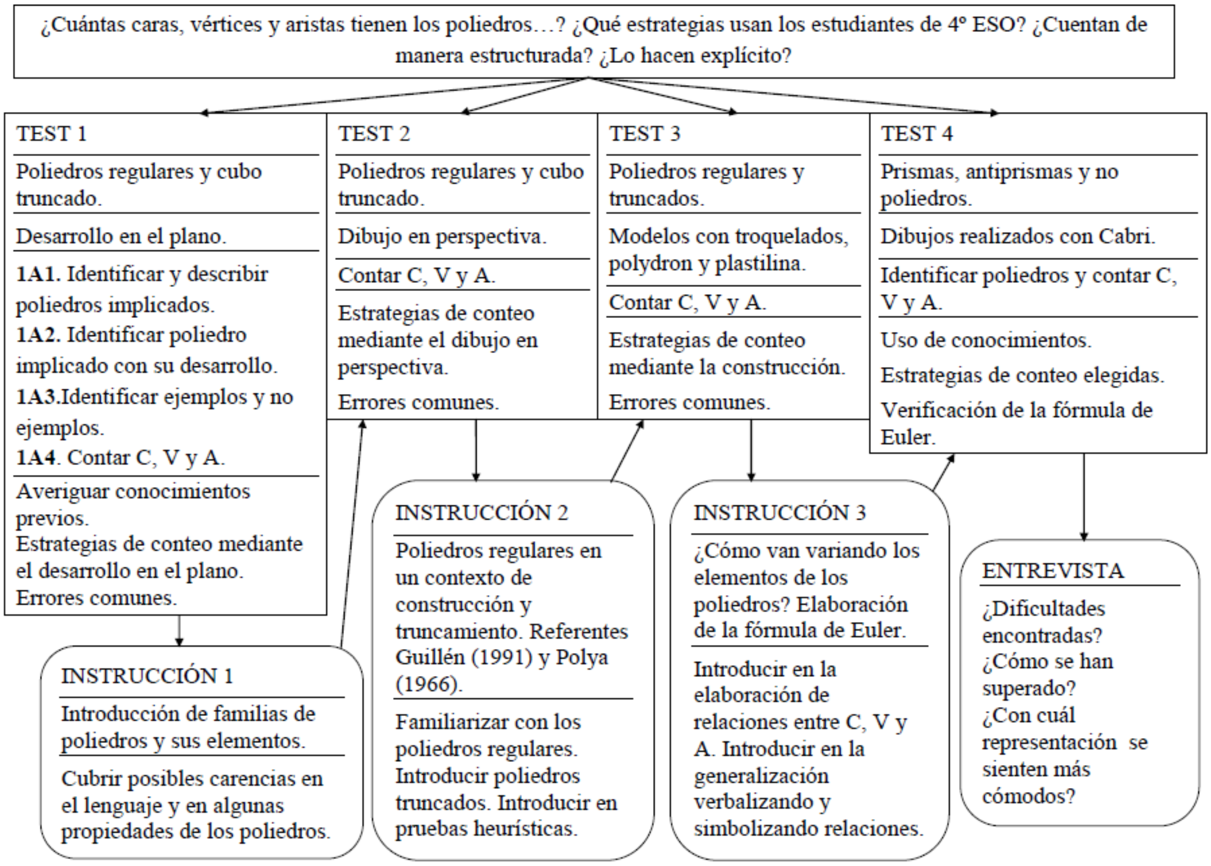
Como referentes del estudio cabe señalar otros trabajos desarrollados por una de nosotras que han puesto de manifiesto algunos errores que cometen los estudiantes referidos a la descripción y/o clasificación de sólidos (Guillén, 2000); comparan respuestas que utilizan razonamientos de diferente nivel de Van Hiele en relación con la tarea de determinar el número de caras, vértices y aristas de los prismas (Guillén, 2004, pp. 86-88), o centran la atención en las características numéricas de los prismas y de las pirámides relativas al número de elementos para mostrar que hay una gran variedad de tópicos geométricos que pueden entenderse por alumnos de diferentes niveles y a niveles diferentes (Guillén, 2010, pp. 32-33). Asimismo, desde Guillén (1991) se explica en parte la instrucción desarrollada para introducir los poliedros regulares y arquimedianos en un contexto de construcción, trabajar la descripción de los mismos e introducir a los alumnos en diferentes tipos de pruebas.

## METODOLOGÍA. CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN E INSTRUMENTOS PARA LA TOMA DE DATOS

La experimentación se desarrolló en 3 sesiones consecutivas, en Mayo de 2012, y una sesión realizada al cabo de mes y medio. Por el carácter voluntario de la participación, la duración de las sesiones osciló entre 50 y 70 minutos y participaron entre 24 y 30 estudiantes. Éstos reconocieron tener pocas nociones sobre poliedros y su tutora consideró que su nivel era bajo en general.

El Cuadro 1 muestra el desarrollo de la investigación. En él se han integrado los instrumentos para la toma de datos (tests y entrevista) y la instrucción que tuvo lugar, reflejando a su vez la secuencia del trabajo realizado. Permite vislumbrar el trabajo realizado en las diferentes sesiones pues la numeración de los test y de las instrucciones se corresponde con la sesión en la que se implementaron y su colocación refleja que la entrevista se realizó en la sesión 4. Desde éste también se vislumbran los poliedros implicados en cada test, las representaciones de los mismos con las que se trabaja y la actividad matemática en la que se centra la atención ligada a los propósitos del estudio. Cabe señalar que el primer test (T1) ha funcionado como pretest y el T4 como un postest, de ahí que en los objetivos del primero se contemple “Averiguar conocimientos previos” y en el T4, “Obtener información sobre el uso que se hace de los conocimientos adquiridos en las sesiones previas”. Ambos contienen tareas de identificación y de conteo de elementos pero cambian los sólidos implicados y éstos se presentan con diferentes representaciones.

El T1 consta de 4 actividades en las que se han de identificar dibujos en perspectiva con el nombre del poliedro y describir la forma de sus caras (1A1), el poliedro implicado con su desarrollo (1A2), ejemplos y no ejemplos de desarrollos con el poliedro correspondiente (1A3) o se pide rellenar una tabla con las características numéricas de los poliedros implicados, describiendo su manera de contar (1A4). El Cuadro 1 muestra que el T1 y el T2 contienen una misma tarea (la 1A4) pero cambiando el modo de representación y que en el T3 se amplían los poliedros arquimedianos implicados. Al comparar el T4 y el T1 puede notarse que se han ampliado los poliedros implicados y también el tipo de tareas; el T4 consta de 11 figuras en perspectiva realizadas con Cabri correspondientes a prismas cóncavos y convexos, antiprismas y algún cuerpo que no corresponde a un poliedro (entre ellos el cilindro) y se cuestiona también sobre si verifican o no la fórmula de Euler. El trabajo está ya orientado a la continuación del estudio en el que la fórmula de Euler no sólo se va a verificar con ejemplos concretos sino también con los ejemplos generales de estas familias infinitas y además nos introducimos en la problemática de acotar el mundo de los sólidos para poder mantener la veracidad de la fórmula.




Cuadro 1: Desarrollo de la investigación

La instrucción en la sesión 1 (I1) se centró en la identificación de sólidos y sus elementos y en la manera de "comunicarlos". En la I2 se descubrieron los 5 poliedros regulares en un contexto de construcción con material comercializado y se demostró que no pueden haber más (Guillén, 1991, pp. 43-47); además, se introdujeron los poliedros truncados por el truncamiento de tipo 2 (véase Guillén, 1991, pp. 117-121) centrando la atención en el efecto que produce este tipo de transformación en el aumento del número de caras, vértices y aristas que supone en el sólido este tipo de truncamiento (Polya, 1966, pp. 70-71). En la I3, siguiendo a Polya (1966, pp. 65-68), se elaboró la fórmula de Euler a nivel verbal. Se cuestionó a los estudiantes sobre si pensaban que la fórmula sería cierta para todos los poliedros y se les pidió que intentaran escribir en general la relación encontrada.

## REGISTRO Y ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

Los datos se han obtenido de las respuestas a los test, de las entrevistas grabadas en audio que se realizaron con los 5 alumnos que mayor interés mostraron en las sesiones y de las notas que registraron los estudiantes en un cuaderno durante las instrucciones. El carácter voluntario de la participación explica que el número de respuestas analizadas no sea constante.

El proceso seguido en el análisis ha sido: i) Leer y transcribir las respuestas diferentes, ii) organizarlas en categorías, iii) analizarlas según el tipo de razonamiento que requieren, iv) Crear una base de datos tomando cada ítem como variable cuyo valor es la categoría de respuesta y contabilizar cada respuesta de cada alumno, v) hallar tablas de contingencia y gráficos de frecuencia.

Las categorías que se delimitaron para la actividad 1A3 se indican en el Cuadro 2 junto con algunos ejemplos y la frecuencia. Se contabilizaron las respuestas correctas e incorrectas para cada poliedro y se observó que las respuestas de cada categoría implican razonamientos de diferente tipo (Guillén, 2004): visuales y apoyándose en propiedades.

| Categoría | Ejemplos | Frecuencia |
|---|---|---|
| No se justifica o se hace de manera imprecisa. | 'Porque la figura no es la misma'<br>'Sí, es el tetraedro' | 115 |
| Se basan en atributos visuales. | 'Porque lleva esquinas en los bordes'<br>'No lo es porque no encaja al montarlo' | 225 |
| Se basan en algún atributo de algún elemento (C, V o A) que tiene un fuerte componente visual. | 'Porque una de sus caras es desigual'<br>'No es porque uno de los lados está a un mismo lado' | 109 |
| Se basan en alguna propiedad del sólido relativa a algún elemento. | 'Porque tiene 20 caras de forma triangular'<br>'Porque tiene una base y 3 caras laterales' | 80 |

Cuadro 2: Tipos de respuesta para identificar ejemplos y no ejemplos.

El Cuadro 3 registra las categorías para el resto de cuestiones de los test. Puesto que el T4 tiene como objeto evidenciar la adquisición de conocimientos aplicados a nuevos poliedros, las categorías de estrategias se restringen a aquellas que caracterizan los distintos tipos razonamiento (Guillén, 2004). Para la realización de los gráficos se subdividió cada categoría en 3 niveles según que los datos se refieran a las caras, vértices o aristas y se crearon bases de datos para las variables categoría y nivel, contabilizando cada respuesta.

| Estrategias al contar C, V y A | T1, T2, T3 | T4 |
|---|---|---|
| 1. Contando uno a uno: Se dice que se ha contado a mano desde el desarrollo, la figura o imaginando el poliedro mentalmente. | X | |
| 2. Contando y marcando: Se indica que se ha señalado el elemento en el desarrollo o figura. | X | |
| 1 ò 2 Contando a mano, señalando o no. | | X |
| 3. Conllevan algún análisis del poliedro: Se analiza la disposición de los elementos en el espacio, se divide en partes el poliedro o se apoyan en un dibujo para construir. | X | X |
| 4. Se relacionan los elementos con el nombre del sólido y/o entre ellos usando argumentos que pueden ser imprecisos: Se deduce el número de caras por el nombre del poliedro; se usa la forma de la cara, los elementos que se comparten para deducir el número de otros elementos; o se deducen los elementos de un poliedro truncado a través del regular. | X | X |
| 5. Se verbalizan fórmulas que expresan relaciones entre los elementos: Se hace explícita alguna fórmula pero de forma verbal. Por ejemplo: A=Cxnº de lados de las caras/2. | X | X |
| 6. Se expresan expresiones aritméticas correspondientes a fórmulas que relacionan los elementos: Aparece alguna fórmula de la anterior pero escrita con números. | X | |
| 7. Se cambia la operación que se tiene que realizar o el número de algún elemento: Conllevan alguna relación numérica entre los elementos con error en la operación o en alguno de los números. | X | |

Cuadro 3: Categorías de respuesta relativas a estrategias de conteo.

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Por la brevedad de este informe sólo vamos a dar breves pinceladas sobre los datos obtenidos. Los agrupamos como sigue:

**Conocimientos previos sobre poliedros.** En relación con las respuestas al ítem 1A1 cabe señalar: Todos los alumnos (25) identificaron correctamente el cubo, un 80% el dodecaedro, un 48% el octaedro y un 40% el tetraedro y el icosaedro. Sin embargo, un 26% identificó las caras del tetraedro como triángulos isósceles y un 37% identificó las caras octogonales del cubo truncado obviando las triangulares. Las respuestas obtenidas a partir del T1 tienen un gran componente visual y aunque en algunas respuestas se utilizan propiedades geométricas, éstas son incorrectas y/o no se expresan con precisión. Se reflejan ideas erróneas que se indican en Guillén (2000). Parece que desplegar poliedros y plegar desarrollos mentalmente conlleva dificultades y también el uso del lenguaje específico.

**Estrategias de conteo.** Las Figuras 1 a 3, construidas a partir de 210, 243 y 231 respuestas respectivamente, muestran el uso que se ha hecho de estrategias que se enumeran en el cuadro 3 cuando los sólidos se han "comunicado" mediante un desarrollo (T1), un dibujo (T2) y mediante la construcción de modelos (T3). Las respuestas que incluimos en el cuadro 4 del anexo 1, que nombramos como E1, E2,… aclaran los comentarios que indicamos a continuación.

*A partir de desarrollos planos* (T1) la estrategia más usada ha sido el conteo, aunque algunos alumnos ya marcan los elementos contados, tratan de descomponer el poliedro en casquetes (E1), imaginarse la disposición de los elementos en el espacio (E2) y elaborar algunas relaciones numéricas entre los elementos (E3). El error más común se refiere al número de aristas o vértices que se comparten (E4).

*Con figuras en perspectiva* (T2), después de la instrucción I1, no se muestra mejora en las estrategias de conteo utilizadas, si bien parece que se cambia la estrategia según los elementos que se cuentan (C, V y A). Se ha evidenciado con frecuencia la estrategia de contar *lo que se ve* y multiplicar por 2 (E5), lo que con frecuencia ha llevado a resultados incorrectos. Al comparar las respuestas con las del test 1, las expresiones son más pobres y muestran menos recursos para elaborar relaciones entre los elementos (E6); suelen aparecer errores al cambiar la operación o algún número, referido a forma de las caras o al nº de elementos (E7).

*Mediante la construcción de modelos* (T3), se observan cambios considerables en las estrategias elegidas y una mayor consistencia en las estrategias seguidas para hallar el número de los diferentes elementos (C, V y A). Predominan las estrategias que conllevan un análisis (E8) o deducción (E9). Las respuestas son más estructuradas y detalladas; en ellas se usa más vocabulario específico (E10) y los razonamientos se apoyan más en relaciones entre diferentes sólidos y en las propiedades de éstos (E11); requieren de razonamiento de mayor nivel.

Observando la Figura 3 puede notarse el aumento de las estrategias de deducción para contar el nº de caras. Ello se explica por haber incorporado más poliedros arquimedianos en el test. Se puede concluir que para contar el número de caras de un poliedro, sólo si se trata de un poliedro truncado se prefiere utilizar argumentos deductivos, apoyándose en el número de elementos del poliedro regular correspondiente. El nombre del poliedro regular sugiere su número de caras y, para el resto, se prefiere contar para determinar ese número, sin importar el tipo de representación. Es al contar vértices y aristas cuando surgen con más frecuencia las estrategias que expresan relaciones entre diferentes elementos y propiedades de los sólidos, aunque no sean correctas, y, como hemos señalado, en ello influye el tipo de representación.

En la entrevista se expresó que si bien el desarrollo en el plano era lo que se prefería para contar las caras de un poliedro, la construcción había sido muy clarificadora para después poder contar los otros elementos de diferentes maneras. Ningún alumno optó por la figura en perspectiva añadiendo que ‘no conocían suficientemente la figura’.

**Sobre cómo se usan los conocimientos.** La Figura 4 muestra las estrategias usadas en las respuestas al T4. Cuando se considera ‘sencilla’ la figura se prefiere contar desde ella. Cuando es un prisma de base regular se determinan sus elementos en función del polígono de la base (E12). En otros casos se cuenta de manera estructurada (E13). Los argumentos deductivos casi siempre conllevan alguna relación numérica de forma bastante precisa, decidiendo qué elemento se elegía como primer elemento para poder contar los otros (E14). Comparando con las respuestas de T2 ha habido una evolución muy evidente.

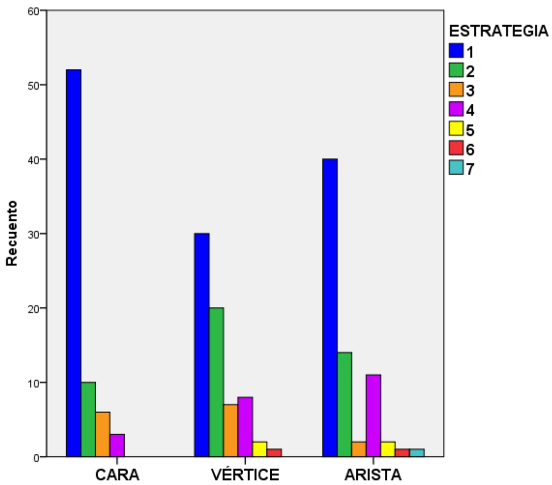



Figura 1: Estrategias de conteo en Test 1

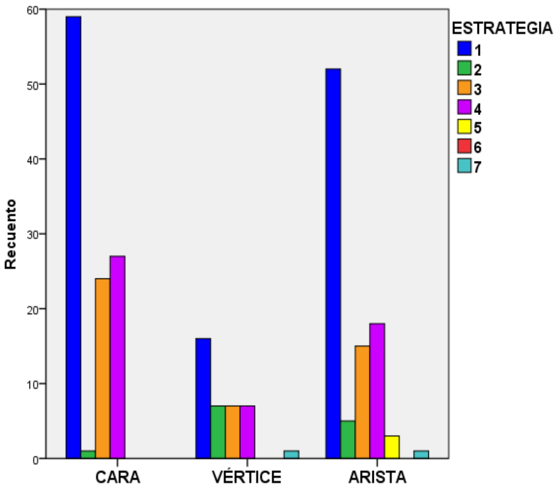



Figura 2: Estrategias de conteo en Test 2

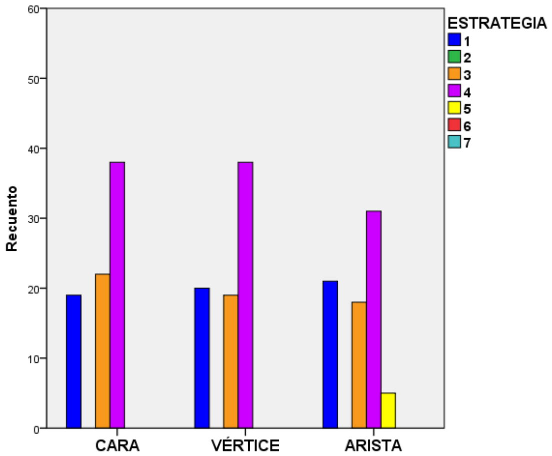



Figura 3: Estrategias de conteo en Test 3

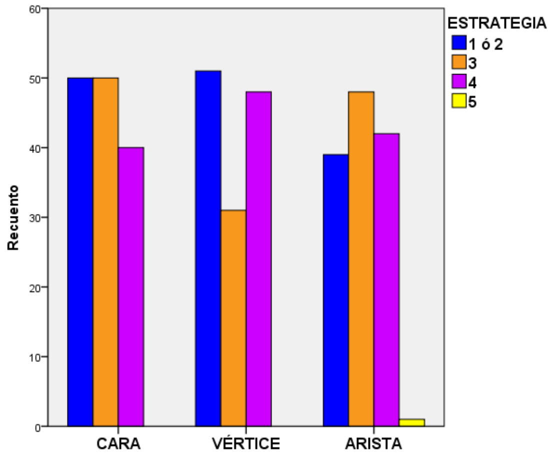



Figura 4: Estrategias de conteo en Test 4

**Sobre la fórmula de Euler.** Los estudiantes no estaban familiarizados con cuestiones sobre cómo varían los elementos de los poliedros unos en relación con los otros. Les ha resultado sorprendente ordenar los datos en una tabla de diferentes maneras al hacerlo desde el aumento del número de caras, vértices o aristas. Las relaciones de igualdad que existen entre elementos de poliedros regulares duales surgieron de inmediato; sin embargo los estudiantes precisaron de bastante orientación, referida a la variación conjunta de caras y vértices, para llegar a conjeturar la fórmula de Euler. Además mostraron dificultad para generalizar. Pocos estudiantes pudieron establecer la relación $C + V = A + 2$.

## CONCLUSIONES FINALES

Con el estudio realizado se ha constatado la riqueza que ofrece el proceso de elaboración de la fórmula de Euler como situación-contexto. Aún centrándonos especialmente en el contar los elementos de los sólidos implicados, ha proporcionado oportunidades para que los estudiantes, por un lado, describan, clasifiquen y "comuniquen" de diferentes maneras sólidos de distintas familias; por otro, establezcan relaciones de diferente tipo, entre diferentes sólidos, sus representaciones y entre sus elementos, elaboren conjeturas que relacionan distintos elementos de los poliedros, introduciéndonos además en la generalización y particularización. Asimismo, el álgebra ha surgido de forma natural para expresar las relaciones establecidas, y también nos hemos adentrado en tipos de argumentación y en la demostración, bien al analizar los tipos de respuesta dados o al cuestionar sobre las relaciones encontradas al realizar la instrucción; la demostración ha formado parte de la actividad matemática y en ella se ha prestado atención especial a los aspectos visuales y analíticos (Guillén, 2004, Hershkowitz, 1998) y a otros aspectos de la prueba que se han delimitado en la investigación (De Villiers, 1993).

Cabe destacarse también las dificultades y errores que se han detectado en el estudio señaladas en otros estudios (Guillén, 2000), especialmente relativas al uso del lenguaje específico. Al estudio de la geometría de los sólidos se le tiene que dedicar más atención. Es importante trabajarla en un contexto de construcción. En el poco tiempo que duró la experimentación los estudiantes mostraron una clara evolución; aún usando el mismo tipo de representación para los sólidos (el dibujo en perspectiva), desde respuestas con gran componente visual, que se apoyaban claramente en la figura, pasaron a otras más precisas y estructuradas que se apoyaban en el análisis y propiedades de los sólidos y en las transformaciones que tenían lugar en ellos.

Cabe destacarse que la participación activa de los alumnos en las sesiones, quienes se implicaron de manera clara en la construcción, permitió revisar ideas erróneas, relacionar conceptos de la geometría plana y de los poliedros y crear nuevas relaciones entre los elementos de éstos en las que era usual considerar las características de los poliedros, como por ejemplo el orden de los vértices, para establecerlas.

## REFERENCIAS

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. [Trad. Álvarez, J.M.]. *Epsilon, 26,* pp.15-30.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, *18* (1), 35-53.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, *16* (3), 103-125.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. Moreno, M; A. Estrada; J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIV* (pp. 21- 68). Lleida: SEIEM.

Guillén, G. y Siñeriz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de Magisterio. En A. Estepa; A. Contreras; J. Deulofeu; M.C. Penalva; F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 331-340). Jaén: SEIEM.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, An ICMI Study* (pp. 29-37). Dordrecht: Kluwer.

Pérez, C. (2012). *Contando caras, vértices y aristas*. *La fórmula de Euler*. Memoria del Proyecto fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas. Universitat de València. Valencia.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos [Versión orig. *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954].

Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), (2004). *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 89-102). A Coruña: SEIEM.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel.

## ANEXO 1

**E.1.** *Dodecaedro – Vértice:* Sabiendo que hay una base inferior y otra superior que suman 10 y después las 10 caras restantes suman en total 10 vértices más.

**E.2.** *Cubo – Vértices:* Sabiendo que hay 4 vértices en la cara de arriba también habrá 4 en la de abajo.

**E.3.** *Dodecaedro – Aristas:* He contado los hexágonos[1] y para saber las aristas he multiplicado por los 12 hexágonos por sus 6 aristas y lo he dividido entre 2 ya que comparten arista.

**E.4.** *Tetraedro – Aristas:* Como cada triángulo tiene 3 aristas he multiplicado 3 por el nº de aristas

**E.5.** *Icosaedro – Caras:* Contar las caras que se ven y multiplicar por 2.

**E.6.** *Octaedro – Vértices:* Cuento los extremos y luego los del medio.

**E.7.** *Cubo truncado – Arista:* Cuento como si fuesen 6 pentágonos (6x5) y los 8 triángulos (8x3): 30+24=54.

**E.8.** *Octaedro – Caras:* Parto el octaedro en dos tetraedros, cada uno tiene 5 vértices y 5 caras. Una de las caras, la base, desaparece al juntar las dos partes y se queda en un octaedro de 8 caras.

**E.9.** *Tetraedro truncado – Vértices:* Por cada corte nos salen 2 vértices más de los que teníamos: 2x4=8+4=12.

**E.10.** *Tetraedro truncado – Caras:* Un tetraedro tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Si hacemos un corte a cada uno de sus vértices salen 4 caras. Por cada corte nos sale 1 cara más: 4x1=4+4=8.

**E.11.** *Dodecaedro – Aristas:* De cada vértice salen 3 aristas y hay 20 vértices pero la mitad los comparte así que tiene 30 aristas.

**E.12.** *Prisma oblicuo de base pentagonal regular – Caras:* Tiene base pentagonal por tanto 7 caras.

**E.13.** *Prisma decagonal de base regular – Vértices:* La figura tiene 20 vértices que hemos ido contando los 10 de la parte de arriba más 10 de la parte de abajo.

**E.14.** *Prisma cóncavo recto de base con forma de C – Aristas:* 2 caras de 8 vértices, por lo tanto hay 8 aristas por cada cara superior e inferior y de cada vértice sale una arista que se une al mismo vértice de la cara opuesta 2x8+8=16+8=24.

Cuadro 4: Ejemplos de estrategias de conteo de caras, vértices o aristas de algunos poliedros.

[1] Aunque el alumno se ha equivocado de polígono la estrategia seguida es la adecuada.