CARACTERISTICAS DE LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Characteristics of the thematized schema of limit of function

Joan Pons Tomàs[a], Julia Valls[b] y Salvador Llinares[b]

[a]I.E.S Mutxamel (Alicante), [b]Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación estudia las diferentes estructuras subyacentes en el esquema de límite de una función observadas en 23 estudiantes de Bachillerato situados en el nivel Trans del desarrollo del esquema de límite de una función. El esquema de límite de una función se caracterizó en términos de la habilidad que los estudiantes manifestaron en la construcción de la concepción dinámica del límite mediante la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, diferenciando aquellas en las que las aproximaciones laterales coinciden de las que no coinciden. Nuestros resultados sugieren que los estudiantes construyen diferentes estructuras subyacentes al esquema debido a las relaciones que establecen entre el límite de una función en un punto y su representación gráfica que permiten identificar características del esquema tematizado del límite de una función.

Palabras clave. Esquema de límite de una función, abstracción reflexiva, tematización.

Abstract

The goal of this research was to study the different underlying structures of the scheme the limit of a function schema of 23 post-secondary students with a trans level of development of the limit of a function schema. The schema of the limit of a function was characterized in terms of the students' dynamic conception of the limit by coordinating the approaches in the domain and in the range, distinguishing those in which lateral approaches match of mismatches. Furthermore, our results suggest that students *generate* different underlying structures in the scheme *in relation to* the relationships established between the limit of a function at a point and its graphical representation.

Key Words. Limit of a function schema, reflective abstraction, thematization.

INTRODUCCIÓN

La teoría APOS es una interpretación piagetiana de la teoría constructivista fundamentada sobre el concepto de abstracción reflexiva. En esta aproximación teórica un esquema es una colección de formas de conocer las ideas matemáticas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que se usan en la resolución de los problemas (Trigueros, 2005). Por otra parte, García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2010) sugieren que la construcción de nuevas estructuras matemáticas (como lo son los esquemas) vienen determinadas por las relaciones que los estudiantes de forma consciente son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que configuran el concepto matemático. En la caracterización de este proceso, Piaget y García (1989) plantearon tres etapas (intra, inter, y trans) del desarrollo de los esquemas que no siempre se dan de forma lineal. La característica que diferencia las tres etapas es la capacidad de establecer relaciones entre los elementos matemáticos que configuran la noción matemática. Para estos autores, el mecanismo cognitivo que permite este desarrollo es la abstracción reflexiva que se lleva a cabo mediante actividades que tienen un doble sentido: la

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2013).Características de la tematización del esquema de límite de una función. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 449-457). Bilbao: SEIEM.

proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento, y la reorganización y reconstrucción de ese conocimiento con la finalidad de establecer nuevas estructuras.

Las investigaciones relativas a la construcción del significado de límite de una función han aportado información sobre algunas características de estos procesos (Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas, 2006; Espinosa y Azcarate, 2000; Vidal y Salinas, 2011; Roh, 2010; Sierra, González y López, 2000; Valls, Pons y Llinares, 2011; Williams, 2001). Cottril et al. (1996) indican que la concepción dinámica del límite cuando se consideran los valores de la función aproximándose al valor límite mientras los valores en el dominio se aproximan a un número no es un simple proceso sino que la coordinación de los dos procesos es de hecho un esquema. Valls et al. (2011) señalan que la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades se apoya en que el estudiante sea capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden aunque no sea capaz de determinar esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. Este resultado previo permite caracterizar las producciones de los estudiantes que podían situarse en un nivel Trans de desarrollo del esquema de límite de una función (Piaget y Garcia, 1989). Sin embargo, la manera en la que estos estudiantes usaban los diferentes modos de representación cuando se coordinan las aproximaciones en el dominio y en el rango parecía indicar que existen diferentes estructuras cognitivas que podían aportar características de la tematización del esquema de límite de una función (Cooley, Trigueros y Baker, 2009). La tematización de un esquema se caracteriza porque puede ser tratado como un objeto (Asila, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996). Como consecuencia de esta situación nos planteamos como objetivo caracterizar los procesos de resolución de estudiantes situados en el nivel T*rans* de desarrollo del esquema de límite de una función para identificar características de la tematización del esquema de límite de una función.

METODO

Participantes y contexto

En esta investigación se utilizan las respuestas de 23 estudiantes de una muestra de 129 de primero y de segundo de bachillerato (16-18 años) (Pons, Valls, y Llinares, 2012) que habían contestado a un cuestionario con 10 tareas sobre límites. Este cuestionario tenía como objetivo caracterizar el papel de la coordinación de los procesos de aproximación vinculados a la comprensión del límite de una función. En la resolución de las tareas 23 estudiantes usaron los elementos matemáticos (Tabla 1) relacionados con la concepción dinámica y métrica de límite de una función mostrando evidencias de estar en el nivel Trans del desarrollo del esquema de límite de una función al ser capaces de coordinar, en el dominio y en el rango, las aproximaciones laterales coincidentes en tres modos de representación, y las no coincidentes en dos o tres modos; manifestar formalmente el límite al menos en dos modos de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden, y (algunos) establecer la coordinación métrica en términos de desigualdades (Pons, Valls, y Llinares, 2012).

Sin embargo, el comportamiento de los estudiantes en las tareas que requerían obtener información sobre la gráfica de la función conociendo los límites de la función en dos puntos presentaba diferencias en la manera en la que habían encapsulado el proceso de coordinación.

Tabla 1. Elementos matemáticos considerados en el concepto de límite

El *valor de la función* f en x = xo, f(xo) (f es una función y xo un número real
Idea de *aproximación*: x se aproxima a *a* y f(x) se aproxima a *L* *Coordinación dinámica*: cuando x se aproxima a *a*, f(x) se aproxima a *L*
Formalización como una manifestación de ser consciente de la existencia del límite L de la función f(x) en el punto a, escrito como lím f(x) = L
Coordinación métrica: es posible encontrar un x suficientemente próximo a *a*, tal que f(x) esté tan próximo a L tanto como se quiera

Instrumento

Los datos provienen de las respuestas escritas a las Tareas 5 y 10 del cuestionario y de las entrevistas clínicas. Las tareas 5 y 10 (Figura 1) tenían como objetivo determinar si los estudiantes habían encapsulado la coordinación de los procesos de aproximación, es decir, si eran capaces de invertir (Dubinsky, 1991) esta coordinación.

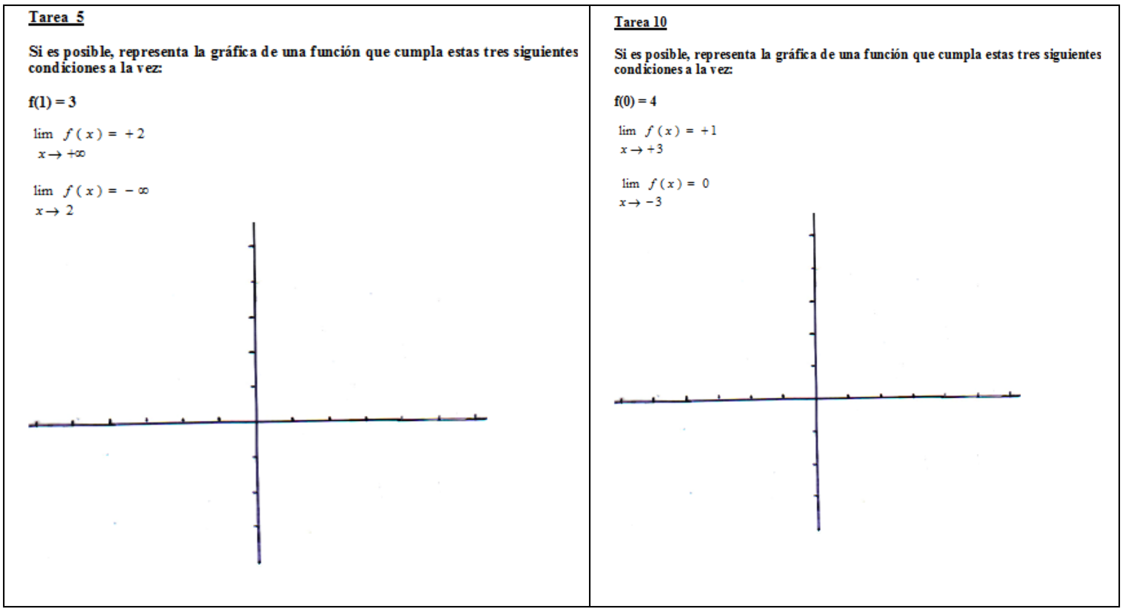


Figura 1. Tareas 5 y 10

En la tarea 5 se pide la gráfica de una función de la que se conocen tres condiciones: que pasa por el punto f(1) = 3; que $\underset{x\to+\infty}{lím} f(x) = +2$ (lo que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x tiende a + ∞ con la aproximación en el rango cuando la función se aproxima a 2); y $\underset{x\to 2}{lím} f(x) = -\infty$ (que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x se aproxima a 2, con la aproximación en el rango cuando la función tiende a – ∞).

La tarea 10 solicita la gráfica de una función de la que se conocen tres condiciones: que pasa por el punto f(0) = 4; que $\underset{x\to+3}{lím} f(x) = +1$ (lo que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x se aproxima a 3, con la aproximación en el rango cuando la función se aproxima a 1); y finalmente, que $\underset{x\to-3}{lím} f(x) = 0$ (que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x se aproxima a – 3, con la aproximación en el rango cuando la función se aproxima a 0).

Las entrevistas se llevaron a cabo después de analizar las respuestas del cuestionario, y después de caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función en un punto. Para preparar el guión de la entrevista, analizamos las respuestas escritas y nos centramos en la forma en la que parecía que los estudiantes invertían la coordinación de los procesos de aproximación, y en la forma en la que parecía que coordinaban estas inversiones.

Análisis

El análisis se centró en la identificación de los elementos matemáticos usados (Tabla 1) y en las relaciones que los estudiantes construían para resolver las tareas y la clase de justificaciones que daban.

Hemos identificado los elementos matemáticos que usaron los estudiantes y las relaciones que establecieron entre estos elementos para generar nueva información. Además, hemos utilizado las justificaciones que los estudiantes parece ser que procesan cuando analizan sus producciones. El análisis realizado nos ha permitido identificar diferencias en la manera en la que estos estudiantes, situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de límite de una función, identificaban gráficas de una función a partir de la información del comportamiento del límite alrededor de un punto o del infinito de la función. La resolución de estas tareas muestra dos características de la tematización del esquema de límite que se describen en la sección de resultados.

RESULTADOS

Las características que evidencian la tematización del esquema serán descritas a partir de la manera en la que los estudiantes resolvieron las tareas que les exigían identificar la gráfica de una función a partir de la información dada por los comportamientos en los límites.

Del nivel Trans de desarrollo al esquema tematizado de límite

En la solución de la tarea 10 (Figura 2) el estudiante EST58 no es capaz de coordinar la información analítica del límite de una función en los puntos $x = -3$ y $x = +3$, y la correspondiente al valor de la función en el punto $x = 0$, por lo que no es capaz de representar la gráfica de una función que cumple las tres condiciones dadas.

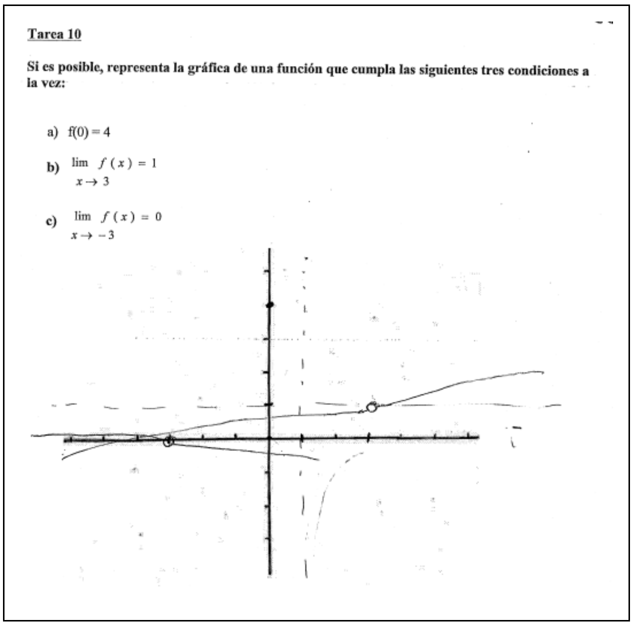


Figura 2. Respuesta de EST58 a la Tarea 10 del cuestionario

Durante la entrevista EST58 (Figura 3) reconoció que no fue capaz de coordinar las tres condiciones, aunque sí era capaz de distinguirlas. Por ejemplo, al indicar mediante una flecha la idea de tendencia (cuando x tiende a 3, la función tiende a 1) sin llegar al punto, de ahí que no los marque. Las flechas dibujadas parecen indicar que reconoce explícitamente la lateralidad en el sentido de aproximaciones laterales coincidentes.

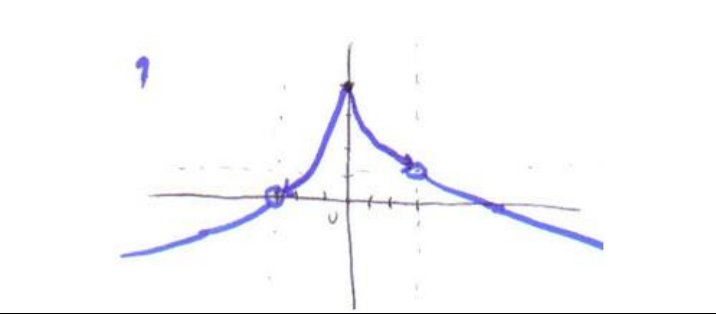


Figura 3. Extracto de entrevista a EST58 vinculada a la Tarea 10

Cuando se le sugiere que busque otra solución (Figura 4) y como en la tarea no se especifica la forma de la función, EST58 termina dibujando lo que podría ser una parábola. Después de hacer esta segunda gráfica, se le pide si podría dar otra solución, y en esta ocasión piensa en una recta (Figura 5).

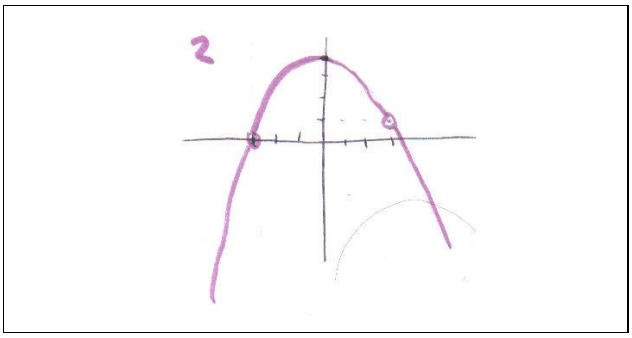
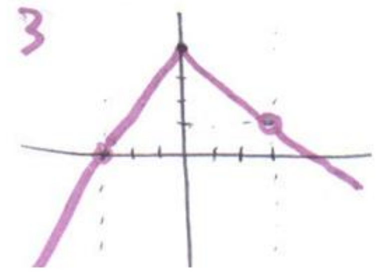


Figura 4. Extracto de entrevista a EST58 vinculada a la Tarea 10



Inv: En todas las gráficas estás poniendo el círculo, ¿qué indica el círculo?

EST58: El círculo indica que no está incluido.

Inv: Es decir, se aproxima.

EST58: Se aproxima, pero no llega.

Inv: Esa es tu idea de límite, porque lo estas marcando en todos los sitios.

EST58: Sí,...

Inv: ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

EST58: Podría haber infinitas, creo, lo que yo he puesto son diferentes formas. Hay unas condiciones que determinan la función, bien, pero aquí estamos utilizando diferentes formas, y si continuamos así, hacemos infinitas formas con las mismas condiciones.

Figura 5. Extracto de entrevista a EST58 vinculada a la Tarea 10

Estas respuestas indican que el estudiante EST58 es capaz de coordinar, después de las intervenciones del entrevistador, los procesos de aproximación en el dominio y en el rango trasladando la información desde la expresión analítica a la gráfica lo que puede ser interpretado como la proyección del conocimiento de límite de una función en un punto a un plano superior del pensamiento. Sin embargo, otros estudiantes fueron capaces de representar la función desde el primer momento cuando la información procedía del modo analítico al incorporar al proceso de resolución la idea de asíntota. Por ejemplo, la manera en la que el estudiante EST117 resuelve la tarea 5 muestra como al coordinar las tres condiciones puede representar la gráfica de la función lo que evidencia la tematización del esquema de límite (Figura 6). Las inferencias realizadas desde la representación gráfica son confirmadas mediante la entrevista. En ella EST117 justifica cada una de las condiciones que ha representado en la solución que dio al resolver el cuestionario.

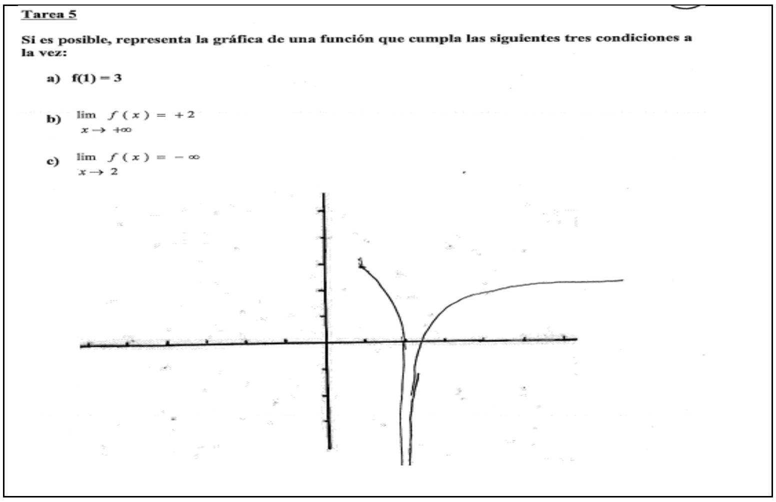


Figura 6. Respuesta de EST117 a la Tarea 5 del cuestionario

EST117: Mira, yo creo que… Este punto está claro que es cuando la función es 1, bueno cuando la x es 1, la y es 3. Cuando x tiende a 2… la función tiende a menos infinito. Es una asíntota vertical, y esta parte de la función está clara. Cuando la x tiende a más infinito, podría ser que viniese desde arriba, no lo sé, tampoco estoy seguro, es que no me acuerdo muy bien de lo que vimos el año pasado...

Las respuestas de EST117 muestran indicios de establecer relaciones con otras ideas matemáticas usadas para resolver la tarea. El uso de la idea de asíntota para dibujar una nueva gráfica puede ser entendido como indicios de reorganización y reconstrucción de su conocimiento (relacionar de manera explícita el significado de asíntota y límite) que genera una nueva estructura cognitiva. Después de justificar de forma explícita la representación gráfica que realizó en el cuestionario y esbozarla con el dedo, se le pidió si podría representar otra función que cumpliera las tres condiciones (Figura 7). EST117 indica que podría haber más asíntotas, y que con esas condiciones podría haber muchas gráficas. Al representar la función en la que introduce una asíntota vertical, que no está en las condiciones iniciales, no explícita en qué valor de la x la está representando. Al preguntarle en qué valor de la x está poniendo la asíntota, EST117 indica expresamente que eso daría igual por lo que no ha puesto ningún número, y que podría hacer lo mismo en el otro lado. El concepto de asíntota vertical que EST117 introduce no está en el enunciado de la tarea y es la misma idea que ya había utilizado en la resolución de la tarea 10. Esta manera de resolver la tarea puede ser interpretado como una evidencia de la relación que EST117 ha establecido de manera explícita entre el significado de límite y de asíntota.

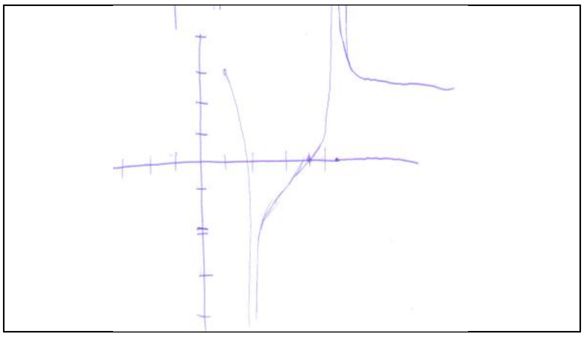


Figura 7. Extracto de entrevista a EST117 vinculada a la Tareas 5

Finalizada la explicación de la segunda gráfica, el entrevistador sugiere a EST117 hacer una nueva representación (Figura 8). El estudiante hace una nueva representación a partir de la anterior (Figura 7) y remarca en las ramas correspondientes, a petición del investigador, que “aço està clar” (esto está claro), indicando expresamente que se cumplen las condiciones requeridas en la tarea y que además puede haber más asíntotas, por lo que pone una asíntota vertical en un valor indeterminado entre el – 1 y el – 2 de las x. EST117 señala que el problema tiene infinitas soluciones. La comprensión de la lateralidad tanto por la izquierda como por la derecha, queda justificada en la representación gráfica y en la forma en que el estudiante la usa.

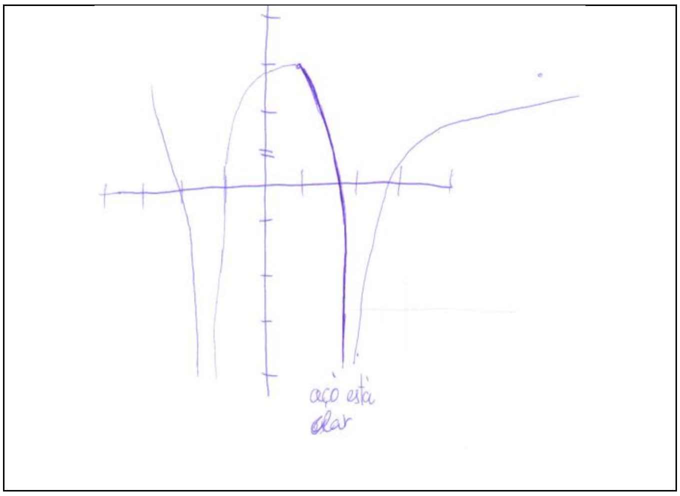


Figura 8. Extracto de entrevista a EST117 vinculada a la Tareas 5

El comportamiento de EST117 ilustra una característica del esquema tematizado de límite puesta de manifiesto por el hecho de establecer de manera explícita relaciones entre el significado de límite (comportamientos alrededor de un punto y en el infinito) y el significado de asíntota como una manifestación de reorganización y reconstrucción de su conocimiento lo que permite generar nuevas estructuras cognitivas. En particular al relacionar los significados de límite lateral con la idea de asíntota vertical sin necesidad de concretizar, poniendo de manifiesto que no importa el valor concreto una vez que ha marcado expresamente las condiciones iniciales de la tarea propuesta.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación era caracterizar los procesos de resolución de estudiantes situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de límite de una función para identificar características de la tematización del esquema de límite de una función.

Nuestros resultados indican que los estudiantes con un nivel Trans de desarrollo del esquema pueden establecer vínculos entre los diferentes elementos matemáticos cuando resuelven tareas con límites de funciones mostrando diferentes características del proceso de tematización del esquema.

En particular, las características identificadas proceden de tener en cuenta las dos ideas de lo que constituye la abstracción reflexiva. Estas ideas las hemos usado en la caracterización de la tematización (proyección del conocimiento a un nuevo plano entendida como establecer relaciones entre los significados del límite en situaciones particulares para dibujar gráficas) y la construcción de nuevas estructuras matemáticas (al establecerse relaciones entre diferentes ideas matemáticas como límite y asíntota). Es decir, la tematización del esquema viene determinada por las relaciones que los estudiantes de forma consciente son capaces de establecer entre los elementos matemáticos (García, Sánchez-matamoros, Llinares, 2010).

Los resultados obtenidos muestran tres características de los estudiantes situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de limite de una función en relación a la tematización del esquema: (i) comprensión del significado de límite en un punto y en el infinito pero sin establecer relaciones entre los casos particulares y por tanto no pudiendo considerar conjuntamente los significados de los límites particulares, (ii) establecimiento de relaciones entre el significado de los límites particulares (lo que permite resolver la tarea), como una manifestación del inicio de la proyección del conocimiento existente a un plano superior, y (iii) incorporación de nuevas ideas (relación entre asíntotas y lateralidad de los límites) como una manifestación de la reorganización y reconstrucción del conocimiento que se posee con la finalidad de establecer nuevas estructuras. Esto ocurre cuando los estudiantes usan el límite de una función al coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y las relaciones de la coincidencia o no de las aproximaciones laterales. Nosotros argumentamos que el uso consciente de la relación del límite de una función en un punto con la representación gráfica de la función al coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango es una evidencia de las diferentes estructuras subyacentes del esquema de límite de una función y una evidencia de su tematización.

Agradecimientos. A los profesores: Fernando Arenas, Isabel Buigues, Salvador Caballero, Vicente Carratalá, Jesús García, Paco García, Teresa Grande, Elsa Jordà, Caterina Martínez, Josep Antoni Miquel, Fidel Pastor y Cesar Rodenas. Y a los estudiantes de primer y segundo curso que respondieron a las tareas del cuestionario. Este trabajo no hubiese sido posible sin su inestimable ayuda.

REFERENCIAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld & E. Dubinsly (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* II, 1 – 32.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de Análisis Matemático en la Universidad. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(*2), 189-209.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2009). Schema Tematization: A Framework and a Exemple. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (4), 370 – 392.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning whit a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167 – 192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95 – 126). Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.

Espinosa, L. y Azcarate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de función»: Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), pp. 355-368.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematitaized derivative schema by the underlying emergent structures. *International of Journal of Science and Mathematics Education*. 9, pp. 1023-1045

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores, S.A.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). *La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punt*o. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez /Eds.) Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 435 – 445). Jaén: SEIEM.

Roh, K.H. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 263-279

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre el Límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), pp. 71-85.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*(1), 5-31.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338.

Vidal, L.A. y Salinas, M. J. (2011) *Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional*. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV (pp. 587-597). Ciudad Real: SEIEM.

Williams, S.R. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32* (4), 341-367.