



COMPRESIÓN DE LOS CONCEPTOS DE PERÍMETRO Y ÁREA Y LA INDEPENDENCIA DE SUS MEDIDAS, EN EL CONTEXTO DE LA AGRICULTURA DEL CAFÉ



JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA**

2014



COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE PERÍMETRO Y ÁREA Y LA INDEPENDENCIA DE SUS MEDIDAS, EN EL CONTEXTO DE LA AGRICULTURA DEL CAFÉ



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**
1803

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación, en la
línea de Educación Matemática

JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA

Asesores.

Mg. Zaida Margot Santa Ramírez

Dr. René Alejandro Londoño Cano

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

2014



*“No se le puede enseñar nada a un hombre;
únicamente se le ayuda a encontrar la
respuesta dentro de
sí mismo”.*
Galileo.

A mi madre, Beatriz Helena, que me enseñó a no claudicar.
*A mi hermano, Andrés Alfonso, porque su entereza me mostró
que de las adversidades se obtiene la grandeza.*
A mi abuela, que alimentó mi curiosidad infantil.
*A Leydi Viviana, porque su presencia en mi vida ha sido mi
inspiración.*
*A Johana, por salvar mi alegría, devolverme la vida y ser el
aliento de cada día.*
A las matemáticas, que me seducen y me retan.



AGRADECIMIENTOS

Dar los agradecimientos es una tarea riesgosa, primero, porque si no se nombran todas las personas y se tiene alguna ausencia, se lastima por olvido indebido y, segundo, si no se hacen, se pasa a la historia como un no grato.

A los que me ayudaron desde el comienzo y hoy no están, y a quienes desde lejos me alientan para triunfar.

A los compañeros de maestría: Fredy por su constante interés y oportunas ayudas; Dora, por sus acertadas correcciones y a todos los demás por las invaluable contribuciones a mi trabajo.

Al grupo de investigación Educación Matemática e Historia, por exigir siempre lo mejor en los trabajos y no pasar por alto ni el más agazapado de los errores.

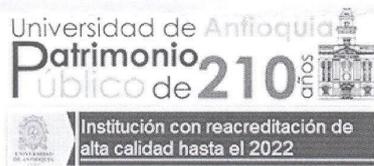
A Carlos Mario Jaramillo, por demostrar siempre interés en la calidad académica de las investigaciones, por las orientaciones y valiosos aportes. A René Londoño, por las acertadas recomendaciones y sana exigencia para dar cumplimiento con las entregas.

A Zaida Santa, mi ángel académico. Por su inagotable dedicación y compromiso hasta con los más mínimos detalles. Gracias por la insistencia para la culminación y buen término de este arduo trabajo y, por encima de todo, por su ternura y asertividad en las recomendaciones y en las infaltables correcciones.

A Josefina Molina, *La Tía*, porque su apoyo decidido me animó a continuar y a superar los reveses de la vida.



PÁGINA DE ACEPTACIÓN



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores Zaida Margot Santa Ramírez (Presidenta del jurado), Diana Patricia Acevedo Vélez y Edison Darío Vasco Agudelo en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación intitulado: **“Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café”**, presentado por el estudiante **JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA**, de la I Cohorte de la Maestría en Educación, Seccional Suroeste, Línea de Formación “Educación Matemática”, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (según el artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de **APROBADO** por unanimidad, luego el profesor René Alejandro Londoño Cano, Coordinador de la Línea en mención, delegado por el Comité de Maestría para esta función, según Acta 0114 de 2014 de dicho Comité, dio a conocer el resultado.

Atendiendo a lo estipulado en el parágrafo 1 y 2, Artículo 46 del Capítulo IX del Acuerdo Superior 122 de julio de 1997, para el presente trabajo de investigación no procede recomendación de distinción.

Para constancia se firma en Medellín, a los 28 días del mes de julio del año 2014.

ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ
Presidenta del Jurado

DIANA PATRICIA ACEVEDO VÉLEZ

Jurado

EDISON DARÍO VASCO AGUDELO

Jurado

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO
Coordinador de la Línea de Formación
“Educación Matemática”



TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1	20
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	20
1.1. ANTECEDENTES	20
1.1.1. El concepto de área y la delimitación de superficies en los orígenes de la geometría	21
1.1.2. El concepto de área y la delimitación de superficies en la vida cotidiana y la actividad académica	31
1.1.3. Dificultades en la comprensión de los conceptos de área y perímetro	36
1.1.4. La contextualización en el aprendizaje	41
1.1.5. Teorías de la comprensión	46
1.1.6. Otras investigaciones llevadas a cabo en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión	62
1.1.7. Recomendaciones para la evaluación	68
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	74
1.3. OBJETIVOS	78
1.3.1. General	78
1.3.2. Específicos	78
CAPÍTULO 2	80
2. MARCO CONCEPTUAL: ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN	80
2.1. ¿QUÉ ES LA COMPRENSIÓN?	81
2.2. ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN (EPC)	83
2.2.1. Elementos de la Comprensión	83
2.2.2. Cualidades de la Comprensión	94



2.3. RELACIÓN ENTRE LAS DIMENSIONES Y LOS NIVELES DE LA COMPRENSIÓN	102
CAPÍTULO 3	112
3. METODOLOGÍA PROPUESTA	112
3.1. PARADIGMA	112
3.2. TIPO DE ESTUDIO	115
3.3. PARTICIPANTES	117
3.4. RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	118
3.4.1. Entrevista	119
3.4.2. Observación	120
3.4.3. Medios tecnológicos	120
3.4.4. Encuesta	120
3.5. VALIDACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	120
3.6. RUTA METODOLÓGICA	121
3.6.1 Fase de exploración	122
3.6.2. Fase de investigación guiada	123
3.6.3. Proyecto final de síntesis	125
CAPÍTULO 4	127
4. UNIDAD CURRICULAR Y ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN	127
4.1. GUÍA CURRICULAR	128
4.1.1. Tópico generativo	128
4.1.2. Metas de comprensión	128
4.1.3. Actividades y desempeños	129
4.1.4. Descriptores de categorías por nivel	149
4.1.5. Evaluación diagnóstica continua	155



4.2. ANÁLISIS DEL PROCESO DE COMPRENSIÓN DE LOS PARTICIPANTES	158
4.2.1. Messi	158
4.2.2. Isis	189
4.2.3. Minerva	211
CAPÍTULO 5	233
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	233
5.1. CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS	233
5.1.1. Consecución del objetivo general	233
5.1.2. Consecución de los objetivos específicos	236
5.1.3. Respuesta a la pregunta de investigación	237
5.1.4. Ubicación final de los estudiantes por nivel	240
5.1.5. Contribuciones a la Educación Matemática	241
5.1.6. Recomendaciones	245
5.1.7. Futuras líneas de investigación	245
BIBLIOGRAFÍA	248
ANEXOS	254
Anexo A: Carta de aceptación al V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Universidad de Medellín	254
Anexo B: Carta de aceptación al 14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	255
Anexo C: Carta de aceptación al VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Universidad de Medellín	256
Anexo D: Artículo publicado en la edición especial de la Revista Científica, octubre 2013	257
Anexo E: Artículo publicado en la revista Unipluriversidad, 2013	262
Anexo F: Invitación a publicar en la Revista Latinoamericana de Etnomatemática Barranquilla, Colombia, 14 de octubre Del 2013.	272



Anexo G: Consentimiento informado, Messi	278
Anexo H: Entrevista Messi	279
Anexo I: Consentimiento informado, Isis	287
Anexo J: Entrevista Isis	288
Anexo K: Consentimiento informado, Minerva	294
Anexo L: Entrevista Minerva	295



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Relación función - gráfica. (Larson y Hostetler, 1990, p 302).	33
Tabla 2: Densidad de siembra	35
Tabla 3: Las cuatro dimensiones de la comprensión y sus rasgos (Boix y Gardner, 1999, pp. 244 – 245).....	103
Tabla 4: La dimensión del conocimiento: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 246 – 247).	104
Tabla 5: La dimensión de los métodos: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 248 – 250).....	105
Tabla 6: La dimensión de los propósitos: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 251 – 253).	107
Tabla 7: La dimensión de las formas de comunicación: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 254 – 256).	109
Tabla 8: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Contenido.....	150
Tabla 9: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Método.....	151
Tabla 10: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Propósitos.	153
Tabla 11: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Formas de Comunicación	154
Tabla 12: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Contenido....	163
Tabla 13: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Métodos.....	164
Tabla 14: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Propósitos....	164
Tabla 15: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Formas de Comunicacion.....	164
Tabla 16: Messi, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Contenidos.....	180



Tabla 17: Messi, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Métodos.....	180
Tabla 18: Messi, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Propósitos.....	181
Tabla 19: Messi, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Formas de Comunicación.....	181
Tabla 20: Messi, caracterización, dimensión de contenido.....	184
Tabla 21: Messi , caracterización, dimensión de Método.	185
Tabla 22: Messi, caracterización dimensión de Propósito	187
Tabla 23: Messi, caracterización, dimensión de Formas de comunicación.	188
Tabla 24: Isis, caracterización parcial. Fase de exploración. Dimensión de Contenido.....	192
Tabla 25: Isis, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Métodos.....	193
Tabla 26: Isis, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Propósitos.....	193
Tabla 27: Isis, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Formas de Comunicacion.....	193
Tabla 28: Isis, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Contenido.....	204
Tabla 29: Isis, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Métodos.....	204
Tabla 30: Isis, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Propósitos.....	205
Tabla 31: Isis, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Formas de Comunicación.....	205
Tabla 32: Isis, caracterización, dimensión de Contenido.....	208
Tabla 33: Isis, caracterización, dimensión de Método.	209



Tabla 34: Isis, caracterización, dimensión de Propósitos	210
Tabla 35: Isis, caracterización, dimensión de Formas de Comunicación	210
Tabla 36: Minerva, caracterización parcial. Fase de exploración. Dimensión de Contenido.	214
Tabla 37: Minerva, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Métodos...	215
Tabla 38: Minerva, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Propósitos.	215
Tabla 39: Minerva, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Formas de Comunicación.....	216
Tabla 40: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Contenido.	225
Tabla 41: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Métodos.....	225
Tabla 42: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Propósitos.....	226
Tabla 43: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Formas de Comunicación.....	226
Tabla 44: Minerva, caracterización, dimensión de Contenido.....	228
Tabla 45: Minerva, caracterización, dimensión de Método.	229
Tabla 46: Minerva, caracterización, dimensión de Propósitos.....	231
Tabla 47: Minerva, caracterización, dimensión de Formas de Comunicación	231
Tabla 48: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Contenido.....	240
Tabla 49: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Método.....	240
Tabla 50: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Propósitos.	241
Tabla 51: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Formas de Comunicación.	241



ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Método Egipcio para cálculo de la medida de la superficie circular.	27
Ilustración 2: Elementos II.14.	28
Ilustración 3: Arquímedes, proposición 1.	29
Ilustración 4: Fases y Niveles de Van Hiele (Corberán et al., 1994, p. 28).	52
Ilustración 5: Estratos de la comprensión (Meel, 2003, p. 236)	54
Ilustración 6: Comportamiento Fractal del nivel de Conocimiento Primitivo (Meel, 2003, p. 240).	57
Ilustración 7: Complementariedad de forma y proceso en la teoría de Pirie Kieren (Meel, 2003, p. 241).	58
Ilustración 8: Complemento de Límites de falta de necesidad en el modelo de Pirie y Kieren (Meel, 2003, p. 242).	59
Ilustración 9: Fichas para actividad de equivalencia de polígono.	179
Ilustración 10: Fichas para actividad de equivalencia de polígono.	179
Ilustración 11: Fichas para actividad de equivalencia entre mitades del cuadrado unidad.	179

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1: Tablilla Babilónica (Gibson y Morden, sf).	26
Imagen 2: Terminología Cafetera.	45
Imagen 3: Terminología cafetera.	46
Imagen 4: Unidades de medida en el contexto creado para las actividades en la almaciguera	135
Imagen 5: Croquis de lote sin tajos.	138
Imagen 6: Lote dividido en tajos.	138
Imagen 7: Lote para reconocimiento de perímetro y área.	140
Imagen 8: Conservación del área. Lote para redistribución de tajos.	142
Imagen 9: Comprobar la igualdad del área en polígonos diferentes.	143
Imagen 10: Respuestas de personas cercanas a Messi sobre la definición de área y perímetro.	160
Imagen 11: Continuación de respuestas de personas cercanas a Messi sobre la definición de área y perímetro.	160
Imagen 12: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual perímetro, diferente área.	167
Imagen 13: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual perímetro diferente área.	167
Imagen 14: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual área, diferente perímetro.	168
Imagen 15: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual área, diferente perímetro.	169
Imagen 16: Observación de los puntos de los perímetros de rectángulos de 8x5 y 10x4.	169

Imagen 17: Observación del punto de uno de los perímetros anteriormente medidos en la actividad igual área, diferente perímetro.	170
Imagen 18: Observación de los diferentes perímetros obtenidos con rectángulos de 40 unidades de bolsa: $8*5$, $10*4$ y $20*2$.	170
Imagen 19: Respuestas de Messi en reconocimiento y conceptualización de área y perímetro y la independencia de sus medidas.	172
Imagen 20: Respuesta Messi en relación a la conservación del área en el contexto de la agricultura del café.	173
Imagen 21: Necesidad de medición para asegurar la igualdad o diferencia de áreas.	174
Imagen 22: Necesidad de medición para asegurar la igualdad o diferencia de áreas.	175
Imagen 23: Lote dividido en tajos sembrados de café.	176
Imagen 24: Messi, delineación de tajos en un lote.	176
Imagen 25: Messi estimación del perímetro del nuevo lote con conservación de tajos	177
Imagen 26: Messi, actividad de comprobación de igualdad de áreas en diferentes polígonos.	178
Imagen 27: Respuestas Isis, concepto de área y perímetro.	191
Imagen 28: Respuestas Isis, asociación área y perímetro con los términos agrícolas tajo y cercado.	198
Imagen 29: Respuestas Isis, independencia de las medidas de área y perímetro.	198
Imagen 30: Respuestas Isis, reconocimiento del área y el perímetro en el contexto de la agricultura del café.	199
Imagen 31: Isis, realizando la actividad de medición para la argumentación de igual o diferencia de áreas.	199
Imagen 32: Isis, respuestas en la actividad de necesidad de medir para asegurar la diferencia o igualdad de áreas.	200



Imagen 33: Isis, actividad de redistribución de tajos y conservación del área del lote.	200
Imagen 34: Isis, estimación del perímetro lote dividido en tajos sembrados de café.	201
Imagen 35: Isis, redistribución de los tajos y conservación del área del lote.	202
Imagen 36: Isis, actividad: comprobación de la igualdad de área de diferentes polígonos.	202
Imagen 37: Minerva, respuestas de personas cercanas sobre los conceptos de área y perímetro.	214
Imagen 38: Comprobación de que la diferencia de perímetros es igual a dos longitudes de lado de bolsa de almácigo.	219
Imagen 39: Minerva, asociación del concepto de perímetro con uno de los términos agrícolas cercado y tajo.	220
Imagen 40: Minerva, asociación del concepto de área con uno de los términos agrícolas cercado y tajo.	220
Imagen 41: Minerva, argumentación sobre la independencia de las medidas del perímetro y el área.	220
Imagen 42: Minerva, reconocimiento de los conceptos de área y perímetro en el contexto del cultivo del café.	221
Imagen 43: Minerva, igualdad del área de un lote con diferente distribución de tajos.	221
Imagen 44: Minerva, argumentación de igualdad del área de un lote con diferente distribución de tajos.	222
Imagen 45: Minerva, necesidad de medir para determinar la igual o diferencia de áreas.	222
Imagen 46: Minerva, argumentación sobre la necesidad de medir para determinar la igual o diferencia de áreas.	223
Imagen 47: Minerva, actividad de conservación del área, redistribución de los tajos de un lote	223



Imagen 48: Minerva, argumentación sobre la conservación del área en la redistribución de

tajos

224

Imagen 49: Minerva, comprobación de igual área en polígonos diferentes

224



RESUMEN

La presente investigación está orientada hacia la caracterización de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en tres estudiantes del grado 5° de una institución educativa rural del municipio de Andes. La investigación se hizo bajo la metodología cualitativa y para ello se tomaron varias referencias bibliográficas, entre ellas Sandoval (2002), Taylor y Bogdan (1986) y Vasilachis (2006). Desde la perspectiva del investigador, la metodología es apropiada en la medida que permite, más que cuantificar la realidad, describirla e interpretarla. Como apoyo a la metodología, se hizo uso del método de estudio de casos, porque este permite realizar el análisis de los sujetos investigados o de los procesos estudiados en los participantes durante el trabajo de campo, que en este caso serían los procesos de comprensión de conceptos geométricos.

El planteamiento del problema se hizo desde la historicidad de los conceptos objetos de estudio de la investigación, su importancia y vigencia; esto se planteó desde autores como Cortés (2012), Parra (2009), Leithold (2005), Larson y Hostetler (1990); también se resaltan las vivencias personales del investigador, debido a que en su práctica diaria se encontró con lo que a su juicio eran dificultades en la comprensión y en la enseñanza. En el rastreo bibliográfico se halló que autores como del Olmo, Moreno y Gil (1993), Corberán (1996), D'Amore y Fandiño (2007), Chamorro, Belmonte, Llinares y Vecino (2008), Fandiño y D'Amore (2009), identificaron y estudiaron situaciones muy similares. La investigación se orientó entonces a proponer una guía curricular que aporte a la solución de dichas dificultades; para la elaboración de la misma se recurrió a las directrices del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, al contexto socio-cultural como insumo para las prácticas didácticas y de aula, apoyado en los Lineamientos Curriculares para el área de



matemáticas (MEN, 1998), y en autores como Gómez (1989), Font (2007) y Berrío (2011); además, es importante mencionar que el marco conceptual posibilita la ampliación curricular al vincular el contexto al aula de clase y, de esta manera, construir sentido sobre los conceptos estudiados. Por lo tanto, la pertinencia de la Enseñanza para la Comprensión, en el presente estudio, se apoya en Rendón (2009) y en Acevedo (2011).

Seguidamente, se expone la guía curricular elaborada a partir de los elementos y aportes de la Enseñanza para la Comprensión, buscando que los estudiantes alcancen niveles cada vez más altos. La caracterización de la comprensión y la observación del progreso en los niveles de la misma, se realiza a través de una rúbrica, denominada Descriptores de Categorías por Nivel. Para esta rúbrica, se tomaron como referencia las dimensiones y niveles establecidos desde el marco conceptual; las categorías fueron elaboradas a priori desde las pretensiones curriculares y expresadas en las metas de comprensión y tópicos generativos, ambos, elementos del mencionado marco conceptual.

Para cerrar el informe, se presentan las conclusiones relacionadas con la consecución de los objetivos, un acercamiento a la respuesta de la pregunta de investigación y un informe del progreso de los participantes en cuanto al nivel alcanzado en la comprensión de los conceptos objeto de estudio. También se plantea la posibilidad de futuras líneas de investigación y los aportes que, a juicio del investigador, se hicieron a la Educación Matemática.

CAPÍTULO 1

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El primer capítulo contiene la información sobre el planteamiento del problema, para lo cual se presentan, en primer lugar, los antecedentes; luego, se presenta la problemática evidenciada por el investigador desde su práctica docente, contrastada con investigaciones internacionales, en las que se encontraron situaciones similares. Posteriormente, se plantea la pregunta de investigación, los objetivos que se desean alcanzar y, por último, algunas recomendaciones para la evaluación escolar desde la visión de evaluación formativa que se propone desde la normatividad colombiana y que concuerda con los principios del marco conceptual elegido para llevar a cabo la investigación.

1.1. ANTECEDENTES

Los antecedentes a los que se refiere esta investigación, están presentados en siete subcapítulos. Se inicia con las concepciones de los términos área y perímetro, seguidamente se complementa con un recuento histórico sobre las primeras formas de medición descubiertas hasta el momento y el aporte de civilizaciones que utilizaron los conocimientos en geometría para resolver sus problemas de construcción, delimitación y medida de terrenos e, incluso, para creaciones artísticas. Posteriormente, se expone el interés y la necesidad actual de comprender los conceptos de área y perímetro debido a que su uso es recurrente no solo en las aulas de clase sino en situaciones de la vida cotidiana, tal es el caso de las medidas de terrenos, potreros, parques, canchas o fachadas. Como elemento fundamental para la investigación, se analizan las ideas de autores que han evidenciado dificultades para la comprensión de los conceptos de área y perímetro; entre estas dificultades se encuentran: la

falsa relación de dependencia entre sus medidas, la confusión de los términos y la reducción del concepto a una simple expresión numérica o fórmula de cálculo de la misma en polígonos regulares. Desde el título de la investigación se pone de manifiesto que se busca vincular el contexto a situaciones de aprendizaje, debido a ello, se dedica un apartado a la contextualización del aprendizaje y se sustenta desde los lineamientos curriculares, donde se presentan las propuestas metodológicas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) y, además, se toma como fuente una tesis de maestría llevada a cabo en la misma subregión departamental. Otros antecedentes importantes para este trabajo, son los que se han dedicado a la teorización e investigación sobre la comprensión, dado esto, en uno de los subcapítulos se analizan teorías de la comprensión como el Modelo Educativo de Van Hiele, el de Pirie y Kieren y el de Enseñanza para la Comprensión, este último adoptado como el marco conceptual de referencia. En esta perspectiva, se enuncian y analizan otras investigaciones en Educación Matemática bajo el marco conceptual seleccionado. Por último, se presenta una revisión bibliográfica, con base en las ideas del MEN (2006), en la que se estipulan los referentes de evaluación nacional como seguimiento a la calidad de la educación, desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

1.1.1. EL CONCEPTO DE ÁREA Y LA DELIMITACIÓN DE SUPERFICIES EN LOS ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA

Aunque no se sabe con exactitud cuándo se originó el concepto de área, ni por qué ese nombre fue escogido para referirse a la extensión en unidades cuadradas de una superficie, sí es claro que en el español etimológicamente se deriva de las raíces latinas del adjetivo árido, y las palabras ardor y arder. En sus orígenes, la palabra se usaba para designar un terreno baldío y sin sembrado en el que se extendía el trigo para ser secado, luego se aplicó a la explanada de

los templos y por generalización a cualquier terreno desprovisto de sembrados. Después, sin más, se tomó para designar la medida de esos terrenos en unidades de 100 metros cuadrados (Anders, 2013). Actualmente, la Real Academia de la Lengua Española define área, en su primera acepción, como “espacio de tierra comprendido entre ciertos límites” (RAE, 2001), pero, para Fandiño y D’Amore (2009) “es la medida bidimensional, es decir, un número real acompañado de una oportuna unidad de medida” (p. 22). También está claro que medirla y calcularla es una preocupación de vieja data, al igual que otros intereses geométricos como el cálculo del valor circunferencial; hay evidencias escritas, encontradas en tablillas y papiros, de que los pueblos sumerios, fenicios y egipcios se ocuparon de los procedimientos para calcular el área contenida en circunferencias (círculo), rectángulos y triángulos.

El término *perímetro* no es de origen español; se tiene información de que este concepto se dio primero en griego, *περιφέρεια*, que significa *periferia* (Rodríguez, 2006) y luego se latinizó; por lo tanto, su etimología debe buscarse en estos idiomas. El prefijo *peri* se entiende como *alrededor* y el sufijo *metron* como *medida*, entonces puede aceptarse como medida alrededor de. Por su parte, Fandiño y D’Amore (2009) definen *perímetro* como la medida lineal de una figura plana, además, distinguen este de la frontera o contorno, que es la línea cerrada que delimita un polígono.

Por otro lado, la *Geometría*, como los demás saberes formalizados y llevados a la categoría de ciencia, nació por la reflexión de los estudiosos sobre la solución de las necesidades apremiantes y de cotidiano aparecer. La necesidad de contar se solucionó con la invención del número, la necesidad de expresar sus interpretaciones personales dio origen al arte, la necesidad de medir los espacios y de edificar dieron origen a la geometría; al respecto, manifiesta Viedma (1970) que “la Geometría nació para ayudar al hombre a resolver sus

problemas de medición y construcción; después, por obra de los griegos, se perfeccionó y se convirtió en una ciencia pura” (p. 6); otro autor que habla sobre el mismo aspecto y que también resalta el paso de la geometría de saber práctico a disciplinar, es Cortés (2012), quien asegura que:

La Geometría es tan antigua como la humanidad y ha acompañado al ser humano a lo largo de toda su historia: los babilonios y los egipcios ya la utilizaban tanto en la resolución de problemas aplicados a la vida diaria como en la creación artística. Fue posteriormente, en Grecia, donde la Geometría se transforma en una ciencia que se estructura con un razonamiento lógico-deductivo [...] (p. 3)

El desarrollo de esta ciencia no fue uniforme para todos los pueblos, ni se dio secuencialmente de uno a otro; probablemente el intercambio comercial y el interés de unos por aprender y entender los conocimientos de los otros, fueron las causas para que se integraran las disciplinas de estudio aplicadas en la vida diaria y la práctica continua; en concordancia, Morales (2002) afirma:

Las formas y vías del desarrollo de los conocimientos matemáticos en los diferentes pueblos son muy diversas; sin embargo, el común para todos los pueblos es que todos los conceptos básicos de las matemáticas: número, figura, área, prolongación infinita de la serie natural, etc., surgieron de la práctica y atravesaron un largo período de perfeccionamiento. (p. 5)

La Geometría, aún mucho antes de que se pensara en ella como una estructura sistemática o conjunto de conocimientos y saberes para heredarlos a las generaciones venideras, ha sido utilizada, como ya se ha dicho, desde tiempos inmemoriales y, tal vez, es

tan antigua como la civilización misma, pues, el reconocimiento y la demarcación de un espacio de terreno ya es un primer paso en la aparición de la geometría.

Lo que hoy se conoce de las grandes culturas o civilizaciones, sus conocimientos, innovaciones y/o avances, se debe a los hallazgos encontrados en piedras conservadas, tabletas de arcilla, rollos de papiro, creaciones artísticas y construcciones monumentales. De hecho, “existen tabletas sumerias en las cuales se pide determinar el área de un cuadrado, dada la medida de la diagonal; o el área de un hexágono regular dado el lado” (Fandiño y D’Amore, 2009, p. 46). Los mismos autores hacen alusión a que en algunos papiros egipcios es recurrente la figura de tenedor de cuerdas, funcionario que tenía por oficio trazar las parcelas luego de las inundaciones del Nilo. Tales hallazgos son evidencia de que conocían y aplicaban propiedades geométricas solucionando problemas de su diario vivir; entre los problemas y soluciones a los que se enfrentaban comúnmente, se encuentran la demarcación de superficies, determinación de perímetros, el cálculo de áreas y volúmenes. Sobre los conocimientos geométricos de los egipcios, Morales (2002), manifiesta:

La mayoría de los problemas de geometría que aparecen en los papiros hacen referencia a fórmulas de medición necesarias para evaluar el área de figuras planas y de ciertos volúmenes. El área de un triángulo isósceles se obtiene multiplicando la mitad de la base por la altura. Los egipcios parecen acostumbrados a transformaciones que comprenden la semejanza de rectángulos con ayuda de triángulos isósceles y trapecios isósceles. Calculan también el volumen de cilindros y prismas, pero desconocen el Teorema de Pitágoras en su formulación general. (p. 10)

En Cortés (2012), quien también se ocupa del desarrollo histórico y cultural de la geometría, en relación a las evidencias arqueológicas sobre los conocimientos de antiguas

culturas, se encuentra información relevante que podría ampliar la aseveración de Morales (2002):

En 1936 se desenterró una colección de tablillas procedentes de Susa, a unos 300 km al este de Babilonia, en las que se comparan las áreas y cuadrados de los lados de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, y 7 lados [...]

Junto al cálculo de áreas de los campos aparecen cálculos de los rendimientos totales de terrenos, trataron cuestiones de proporcionalidad en el triángulo. En general π fue aproximado por 3, aunque en las tablillas de Susa aparece como razón del perímetro del hexágono regular a la circunferencia circunscrita: $3\frac{1}{8}$.

Conocían también el teorema de Pitágoras, al menos en cuanto a su contenido, que en los primeros tiempos se empleaba tan solo en problemas concretos [...]

El problema de determinar triángulos rectángulos cuyos lados fueran de longitud racional condujo al problema análogo de encontrar tripletas numéricas. En este sentido quizás la más famosa de las tablillas mesopotámicas sea la tablilla de Plimpton 322 que se conserva en la Universidad de Columbia, en la que aparece la primera relación de ternas pitagóricas, es decir tres números naturales que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$ de la que se tenga conocimiento. (Cortés, 2012, p. 10)

Lo expuesto por Cortés (2012) permite afirmar que los babilónicos u otras civilizaciones utilizaban las unidades cuadradas para asociarlas a la medida de áreas y que con ellas efectuaban operaciones, por lo menos, dentro del campo de la aritmética.

Otros de los pueblos antiguos que desarrollaron conocimientos geométricos son los mesopotámicos. Estos utilizaban el trazado de triángulos rectángulos y subdivisión de estos en otros triángulos menores de área conocida para realizar el cálculo de la longitud de uno de los lados.

En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que está dibujado un triángulo rectángulo ABC de lados $a = 60$, $b = 45$ y $c = 75$, subdividido en cuatro triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF, EFB, cuyas áreas eran conocidas y a partir de cuyos valores el escriba calculaba la longitud de AD utilizando aparentemente un tipo de ‘fórmula de semejanza’ que viene a ser equivalente a nuestro teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados correspondientes. (Cortés, 2012, p. 11)



Imagen 1: Tablilla Babilónica (Gibson y Morden, sf)¹.

También hay evidencia de que los egipcios, además de saber calcular el área de los triángulos sabían calcular la medida, en unidades cuadradas, de regiones contenidas por circunferencias, rectángulos y trapecios y que probablemente usaban procedimientos de

¹Tomada de: <http://www.odysseyadventures.ca/aboutUs.html>

proporcionalidad y semejanza. Con respecto a los conocimientos alcanzados por el pueblo establecido en el delta del Nilo, el mismo autor comenta:

Los egipcios utilizaban una regla precisa relativa a la circunferencia: la razón entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que entre el área del cuadrado circunscrito al círculo y su perímetro. Según Boyer, esta relación tiene una significación matemática mucho mayor que la aproximación a π . Además, podían calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios. La semejanza y la proporcionalidad no parecen haberles sido desconocidas. En el siglo XIII a. de C. dos figuras similares, aunque de dimensiones diferentes, fueron dibujadas en las paredes de la habitación donde se encuentra la tumba de Seti I. (p. 11)

Con relación al método utilizado para calcular el área del círculo, de acuerdo con lo encontrado en el papiro de Hames, los egipcios operaban “a través de un octágono a partir de un cuadrado de 9 unidades, dividiendo cada parte en 3 partes iguales y suprimiendo los 4 triángulos isósceles de las esquinas” (Cortés, 2012, p. 13). Procedimiento más simple que el posteriormente usado por los griegos y al que llamaron método exhaustivo.

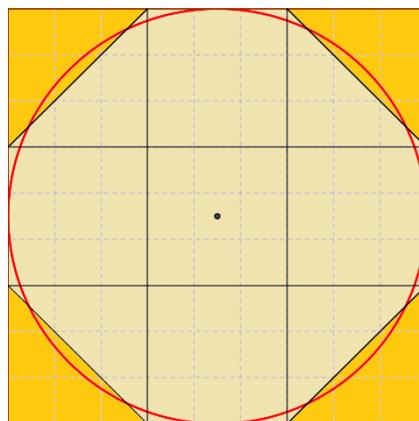


Ilustración 1: Método Egipcio para cálculo de la medida de la superficie circular.

En Cortés (2012), se afirma que el pueblo de los faraones, además de saber operar con semejanzas y relaciones entre figuras, utilizaba enunciados precisos para formularlas, como por ejemplo que “el área de un triángulo isósceles es igual al área del rectángulo formado por sus dos mitades” (p. 12).

En el segundo libro de Los Elementos de Euclides se encuentra todo un tratado sobre problemas de áreas, este, a pesar de ser el más corto de los 13 libros, tiene 14 proposiciones dedicadas a triángulos y rectángulos, estas junto a sus demostraciones fueron luego llamadas, por algunos estudiosos, como álgebra geométrica (Jiménez, 2010). La última proposición de este libro ha sido denominada como El Problema de la Cuadratura y se expresa como:

“construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada [...] garantiza la solución para cualquier figura poligonal con número finito de lados” (Jiménez, 2010, p. 192), seguidamente el autor expresa:

Esta proposición se relaciona de manera directa con VI.13, problema en el que se exige la búsqueda de una Figura 10: Proposición II.14 de Euclides (relacionada con VI.13) media proporcional entre dos magnitudes dadas. Ambas proposiciones caracterizan a la circunferencia de diámetro AB... como el lugar geométrico de los puntos P tales que la recta PR –con R en la recta AB– es perpendicular a AB y el cuadrado de PR es igual al rectángulo formado con AR y RB. (p. 192)

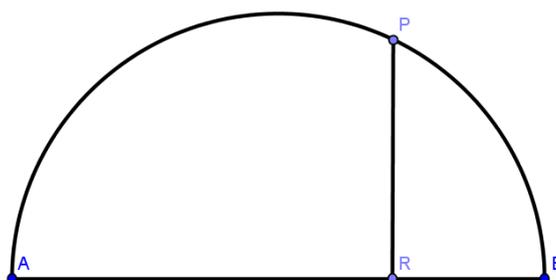


Ilustración 2: Elementos II.14.

Parece ser que la unidad de medida del área, el cuadrado de lado uno, proviene desde la escuela de Alejandría: “en el caso del área la figura patrón por excelencia fue el cuadrado, de ahí la denominación de cuadratura para referirse al problema de hallar el área de una figura plana” (Jiménez, 2010, p. 204).

Tiempo después sobresalen, en la historia de la geometría y de especial interés para el objeto de estudio de esta investigación, Arquímedes de Siracusa y Apolonio de Perga, quienes, entre otras cosas, se interesaron por el área de las parábolas, las hipérbolas, las elipses, pero el primero de ellos además trató sobre la espiral y el círculo (Parra, 2009) y la constante de relación entre este y la circunferencia (Fandiño y D’Amore, 2009). Parra (2009), tomando apartados del libro de Arquímedes, sobre la medida del círculo, transcribe:

1. El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo.

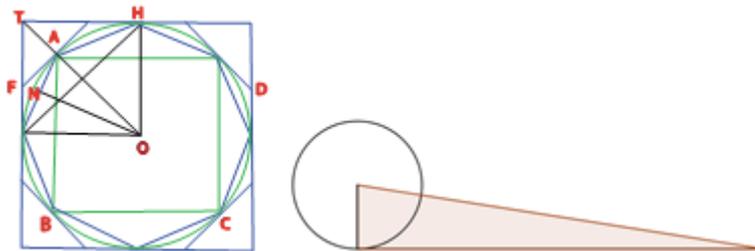


Ilustración 3: Arquímedes, proposición 1.

2. El área del círculo es al cuadrado de su diámetro 11 a 14 (el círculo es los 11/14 del cuadrado circunscrito si la longitud de la circunferencia es $3\frac{1}{7}$ veces del valor del diámetro).
3. El perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro aumentado en un segmento comprendido entre $10/71$ y $1/7$ de dicho diámetro (lo que equivale a decir que el

perímetro del círculo es menor que los $3\frac{1}{7}$ del diámetro puesto que es superior a los $3\frac{10}{71}$ de este diámetro). (p. 14-15)

Uno de los métodos que lleva a cabo para demostrar sus proposiciones es el exhaustivo, que consiste en trazar polígonos regulares inscritos y circunscritos, pero, con una variación, además de considerar sus áreas también consideraba sus perímetros, por este método encontró una aproximación al valor de la constante de relación entre el radio y la longitud de la circunferencia (π) al inscribir y circunscribir un polígono regular de 96 lados (Parra, 2009).

Como ya se ha dicho, la relación entre el área contenida dentro de la circunferencia y la longitud de la misma fue un interés común de muchos pueblos, pero, los métodos y técnicas empleadas para determinar la constante de relación los llevó a encontrar distintos valores, por ejemplo: una aproximación a 3,16049 fue la establecida por los egipcios; 3,125 la de los sumerios y los hebreos la redondearon a 3 (Fandiño y D'Amore, 2009).

Por lo expuesto hasta el momento, históricamente, las grandes civilizaciones se ocuparon de problemas geométricos que les dieran solución a sus necesidades y entre ellas estaba la de comparar terrenos o su equivalente geométrico de semejanza de figuras, trazar perpendiculares que los llevó a descubrir las relaciones de los lados del triángulo rectángulo, calcular distancias y longitudes; estas últimas dos situaciones están asociadas al concepto de perímetro y, además, se ocuparon de la medición de superficies, es decir, al cálculo de áreas.

La evolución de las matemáticas se ha dado constantemente, ya se mencionó cómo Euclides, a través del tratamiento lógico-deductivo dio a la geometría nivel de ciencia. Pero el estudio permanente de ellas ha llevado al planteamiento de nuevos problemas y por consiguiente se han dado nuevos hallazgos. Para el siglo XVII, en Europa, los matemáticos se

enfrentaron a la resolución de cuatro problemas significativos: La tangente, la velocidad y la aceleración, los máximos o mínimos y el problema del área (Larson y Hostetler, 1990).

1.1.2. EL CONCEPTO DE ÁREA Y LA DELIMITACIÓN DE SUPERFICIES EN LA VIDA COTIDIANA Y LA ACTIVIDAD ACADÉMICA

Los conceptos de área y perímetro, como se ha argumentado en párrafos anteriores, han interesado a la humanidad desde los inicios de las sociedades, tanto así que los egipcios y los griegos tenían procedimientos para calcularlos en diferentes figuras y relacionaban estas medidas; incluso pueblos anteriores a estos también lo hacían. Fandiño y D'Amore (2009) hacen hincapié en que los griegos, por muchos siglos, se plantearon el problema de la cuadratura del círculo y que “buscaron la fórmula que les permitiera transformar la superficie de un círculo de radio r en la de un cuadrado de lado l , con l en términos de r ” (p. 58).

Es más, dentro de los cuatro grandes problemas del siglo XVII, que originaron el cálculo, se encuentra el que Larson y Hostetler (1990) enumeran como el cuarto, y lo denominan, el “Problema de las áreas” (p. 113). Muñoz y Román (1999) enmarcan esto último en lo que llaman problemas de integración, que se orientan a hallar la longitud de una curva o el área encerrada en ella; este problema también fue de gran interés para Arquímedes. El método de llenado o exhaustivo, antes mencionado, perfeccionado con el paso al límite y la noción de infinito, fueron los insumos para la aparición del cálculo

El uso de los conceptos objeto de estudio de esta investigación no se ha difuminado con el paso del tiempo; de hecho, ha ocurrido todo lo contrario, son utilizados en la vida cotidiana y en distintos niveles de complejidad de las matemáticas, desde las nociones de geometría elemental hasta en el cálculo, tanto diferencial como integral. En estos últimos es recurrente el

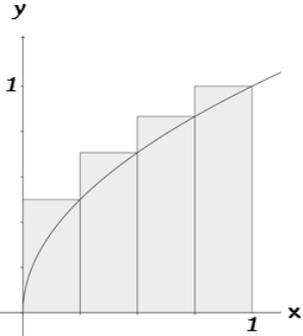
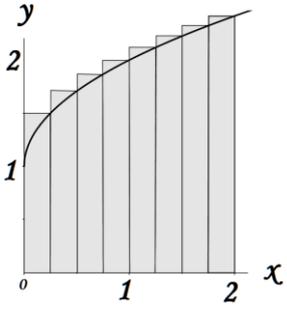
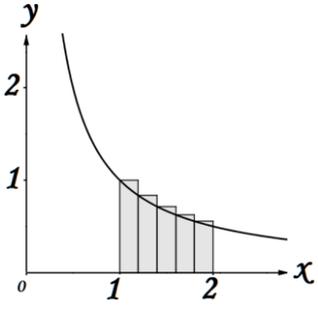
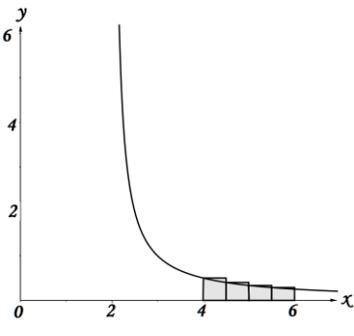
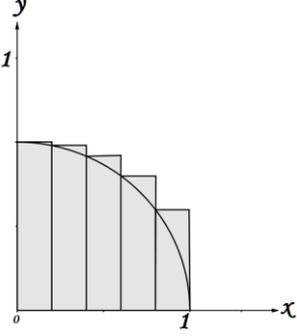
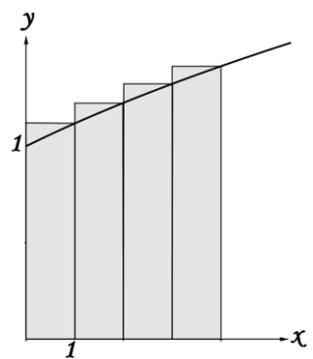
uso de los conceptos de área o perímetro para la formulación de enunciados en los que se pide calcularlos o en los que se hace referencia a ellos. A continuación se exponen, a modo de ejemplo, algunos de los ejercicios propuestos en estas ramas de las matemáticas.

Larson y Hostetler (1990) en los ejercicios de la Sección 4.7 del capítulo de Aplicaciones de la Derivada, proponen situaciones como las siguientes:

¿Qué longitud y anchura debe tener un rectángulo de 100 pies de perímetro para que su área sea máxima?... Un pabellón deportivo cubierto consta de una zona rectangular y un semicírculo en cada uno de sus extremos. Si el perímetro del pabellón ha de ser una pista de 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular... La suma de perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es de 10. Hallar las dimensiones de ambos para que el área total sea mínima. (pp. 238 - 239)

Los mismos autores, en el capítulo 5, Integración, Sección 5.4 Área, en el que tratan el llamado cuarto problema, para hacer la introducción a la situación general de calcular el área de una región en el plano, comienzan con lo que, según ellos en la geometría euclidiana, es el tipo de región plana más simple, el rectángulo, y muestran cómo con el triángulo, que tiene la mitad del área del primero, se puede determinar el área de cualquier otro polígono, pero, advierten que hallar el área de regiones planas más generales es más difícil. Por eso, en los ejercicios de finalización de la unidad piden aproximar el área de cada una de las funciones y gráficas dadas.

Tabla 1: Relación función - gráfica. (Larson y Hostetler, 1990, p 302).

		
$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x} + 1$	$y = 1/x$
		
$y = \frac{1}{x-2}$	$y = \sqrt{1-x^2}$	$y = \sqrt{x+1}$

Leithold (2005), en la cuarta sección del capítulo cuarto, aborda el concepto de área y dice que el “área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en que pueda ser descompuesto, y puede demostrarse que el área así obtenida es independiente de cómo se descompuso el polígono” (p. 328). Más adelante, afirma que definir “el área de una región en un plano si la región está limitada por una curva” (p. 328) es útil para establecer “los fundamentos necesarios para motivar geoméricamente la definición de integral definida” (p. 329). El mismo autor, en el ejercicio 2.6 del capítulo 2, Derivada y Diferenciación, propone el siguiente problema:

La ley de Stefan establece que un cuerpo emite energía radiante de acuerdo con la fórmula $R = kT^4$, donde R es la media tasa de emisión de energía radiante por unidad cuadrada de área, T es la medida de la temperatura Kelvin de la superficie, y k es una constante. Determine (a) la tasa promedio de variación de R con respecto a T cuando T se incrementa de 200 a 300; (b) la tasa instantánea de variación de R con respecto a T cuando $T = 200$. (p. 150)

Por lo dicho en este problema, es claro que el concepto de área es también utilizado en ciencias como la física; es también el caso de la presión, de la que se dice “la presión P , ejercida por la fuerza \vec{F} sobre el área A , es la relación entre la magnitud de \vec{F} y el valor del área A ” (Ribeiro y Alvarenga, 2004, p. 298). Además, el concepto demográfico de densidad de población también incluye, para su definición y comprensión, el concepto de área.

Adicional a lo expresado anteriormente, es necesario decir que el concepto de área es fundamental no solo en el ámbito académico, sino que se emplea ampliamente en diversos contextos: agricultura, arquitectura, edificios, aeropuertos, escenarios deportivos, vehículos, artículos del hogar y más. Como ejemplo, se tomarán tres casos concretos:

La definición de la densidad de siembra:

La densidad de siembra se define como el número de plantas por unidad de área de terreno. Tiene un marcado efecto sobre la producción del cultivo y se considera como un insumo, de la misma forma que se considera por ejemplo, un fertilizante. (Arcila, 2007, p. 132)

En la revista Agro Mensajes de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina, se afirma que la densidad de siembra es el número de plantas

por área medida en metros cuadrados (n/m^2); en la siguiente tabla se relacionan algunas plantas y la correspondiente densidad de siembra:

Tabla 2: Densidad de siembra

Especie	Número/m²
Alfalfa	68
Festuca	23
Cebadilla	40

Otro ejemplo del uso del concepto de área se encuentra en la página de distribuidora Pintuco (sf). Para dar a conocer el rendimiento de la pintura *Acriltex* en la superficie a cubrir con pintura, se afirma:

RENDIMIENTO: Sobre Estuco Profesional Pintuco: de 25 a 30 m^2 /galón a dos manos. En repinte sobre color diferente: de 25 a 30 m^2 /galón a dos manos. En repinte sobre color igual o similar: de 30 a 35 m^2 /galón a dos manos².

En estos últimos 3 casos, se hace alusión al concepto de área y a una de sus unidades de medida en casos no académicos, sino, en situaciones agrícolas y comerciales; es evidente que la comprensión de este concepto es necesaria, no solo en el ambiente escolar o de formación académica, sino también para entender información de diversa índole basada en una forma de medición y expresión mundialmente utilizada.

Área y perímetro, dos conceptos íntimamente ligados y claramente diferenciados, que han interesado a la humanidad desde los albores de la civilización, la comprensión de ambos es necesario no sólo dentro de la escuela sino en situaciones prácticas, pero, ¿qué dificultades

²Tomado de la página: <http://www.pintuco.com/index.php/productos-hogar/vinilos-para-interiores/viniltex-acriltex>

se han encontrado en relación a la comprensión de ambos conceptos objeto de estudio?, ¿qué es área?, ¿qué es perímetro? En lo que sigue de este capítulo, se abordarán estos interrogantes.

1.1.3. DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE ÁREA Y PERÍMETRO

Uno de los grandes retos que se trazan los investigadores en Educación Matemática, consiste en analizar los procesos de comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, a través de la identificación de las dificultades presentadas en las experiencias de aprendizaje y del diseño de estrategias que permitan superarlas, en coherencia con los marcos teóricos adoptados.

En este sentido, la presente investigación centra su atención, en primer lugar, en las dificultades que presentan los estudiantes del grado 5° para la comprensión de los conceptos de perímetro y área, cuando son enfrentados a la confusión conceptual generada por su posible dependencia y, en segundo lugar, en el diseño de una estrategia metodológica que permita analizar el proceso de comprensión de dichos conceptos, a través del marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC)³.

Desde mi experiencia docente, he identificado que los estudiantes suelen no dar cuenta del concepto de área ni para qué es utilizado, además, cuando intentan definirlo lo asumen como igual al perímetro y en el mejor de los casos lo relacionan con una figura plana. En los grados de mayor escolaridad he encontrado que siempre relacionan el área con la aplicación de fórmulas y el desarrollo de algoritmos, además, es recurrente la creencia de que a la figura,

³En adelante, Enseñanza para la Comprensión se abreviará como EpC.

regular o no, de mayor perímetro le corresponde mayor área. Autores como Corberán (1996) y Fandiño y D'Amore (2009) han advertido sobre este hecho:

Esta <<falsa>> relación entre el área y el perímetro, que se ha constatado que está muy arraigada en los alumnos, pone de manifiesto que estos piensan en el área y en el perímetro como en dos propiedades de la superficie íntimamente ligadas, concepción errónea que les impide ver el área como una propiedad de la superficie independiente del perímetro, que les dificulta e incluso imposibilita realizar transformaciones de superficies bajo determinadas condiciones. (Corberán, 1996, p. 10)

En relación a este obstáculo, en otra investigación se expone que la creencia errónea de mutua dependencia entre los conceptos de interés para esta investigación no solo es vigente, sino que está presente desde la antigüedad; sobre esto, Fandiño y D'Amore (2009) señalan:

La literatura de investigación (y también la historia y la leyenda) han demostrado ampliamente que gran número de estudiantes de todas las edades están convencidos de que existe una relación de estrecha dependencia entre estos dos conceptos sobre el plano racional, del tipo: Si A y B son dos figuras planas, entonces: si (perímetro de A > perímetro B) entonces (área A > área B); ídem con <; ídem con = (por lo cual: dos figuras isoperimétricas son necesariamente equi-extensas). Y viceversa cambiando el orden “perímetro-área” con “área-perímetro”. (pp. 85 - 86)

Pero la anterior no es la única dificultad en lo concerniente al área y al perímetro. Existen evidencias obtenidas en varias investigaciones, como la de Corberán (1996), que para un gran número de estudiantes de primaria el concepto de área se reduce a una fórmula y esto conlleva a una concepción limitada de lo que este es, dado que perciben dicho concepto solamente como un número obtenido al aplicar una fórmula, muchas veces inconexa. Esto

último impide que el área sea entendida o comprendida como el número de unidades que recubren una superficie.

La misma autora, haciendo referencia, en primer lugar, a las concepciones erróneas de área y perímetro como propiedades independientes de la superficie y, en segundo lugar, a lo inútil del uso exclusivo de las fórmulas como herramienta de enseñanza aprendizaje de estos conceptos, expone:

Son frecuentes los errores cometidos por los alumnos al utilizar las fórmulas. Se observa dificultad, incluso incapacidad de utilizarlas para calcular áreas de superficies poligonales sencillas o para aplicarlas con éxito a resolución de problemas relativamente sencillos y que pueden requerir de algo más que una sustitución de un número dentro de una fórmula. (p. 11)

Nuevamente, recurriendo a la experiencia docente, es común encontrar que algunos de los estudiantes reprueben exámenes escritos porque aplicaron una fórmula inapropiada o porque no realizaron los procedimientos esperados; incluso, en muchos casos, la argumentación más frecuente es: “*no entendimos la pregunta*”. Otra situación común sucede cuando, después de unas semanas, a varios estudiantes parece que nunca se les hubiera hablado acerca de un tema. De hecho, es repetitivo que al intentar explicar el volumen de un sólido regular (por ejemplo, el prisma, cuya fórmula es $V = a * h$, siendo V: volumen, a: área de la base y h: altura), los estudiantes expresen no saber qué es el área o simplemente confunden la fórmula de esta con la del perímetro y presentan resultados en los que la expresión del área se muestra como unidad de medida no bidimensional y por lo tanto las respuestas no sean correctas.

Otro tema de gran interés, abordado en varias investigaciones relacionadas con perímetro y área, es el relacionado directamente con las medidas longitudinales y de superficie, estas revelaron que para los estudiantes es altamente difícil apropiarse de la idea de medición de una porción de plano (D'Amore y Fandiño, 2007). Considerando que el área es una propiedad de la superficie y que es la medida en unidades bidimensionales que la cubren, ¿cómo abordar entonces el concepto de unidad bidimensional? Con relación a esto, Chamorro et al. (2008) también aseguran, que el proceso de decantación entre longitud y superficie es muy complejo, y agregan que esto se hace aún más difícil, cuando la primera aproximación a superficie se da con una figura dibujada por el profesor en el pizarrón, debido a que lo más resaltante para el estudiante es la línea que constituye el límite de la figura plana; en este sentido, afirman los autores:

Lo que aparece destacable en todo momento es la línea que constituye la frontera, sin que muchas veces el alumno reconozca la superficie como el interior delimitado por dicho borde... Un claro obstáculo epistemológico lo constituye la noción de perímetro en relación con la superficie. Los alumnos de Primaria creen que el área de una figura depende de la medida de sus lados, lo que es cierto sólo de manera local: para los polígonos regulares. (p. 248)

Corberán (1996), en relación a la falsa dependencia que establecen los estudiantes de que la medida del área está supeditada a la longitud del perímetro, asegura que:

Está constatado que una de las confusiones más frecuentes entre los estudiantes y más difícil de erradicar es la falsa relación que estos establecen entre el área y el perímetro de una superficie. Esta errónea ligazón entre el área y el perímetro les conduce en numerosas ocasiones a emitir conclusiones falsas. (p. 8)

De acuerdo con lo anterior, el área no debe reducirse a la aplicación de una fórmula, que la mayoría de las veces no significa nada para el estudiante, porque deriva en una limitada concepción numérica o, en el peor de los casos, se percibe como una ecuación sobre la que no se tiene una clara noción de su carácter bidimensional. Esto se manifiesta cuando el estudiante ignora los atributos del concepto y ejecuta operaciones que no se relacionan con ello.

Del Olmo et al. (1993) encontraron que cuando a los estudiantes se les cambia de manera específica el rectángulo por el paralelogramo, calculan el perímetro y suministran este dato como el área; en el mismo apartado, estos autores aseguran que: “Confusión de perímetro – área. Este es un error bastante frecuente. En algunos casos, los niños calculan el área y el perímetro de una figura y le asignan el dato mayor al área y el menor al perímetro” (p. 43).

Con relación a la reducción del área como una simple expresión numérica o a un algoritmo de aplicación, sin la debida reflexión sobre el concepto, sus propiedades y la misma estructura de la expresión algebraica, Vanlehn (1983, citado por Gómez, 1989) expone cómo los alumnos generalizan la aplicación de un algoritmo tipo a cualquier expresión, así no sean de la misma estructura; por ejemplo: sea la expresión $a(b + c) = ab + ac$, este algoritmo tipo o referente lo aplican a expresiones como $a + (bc) = a + b * a + c$ o $c\sqrt{a^2 + b^2} = ca + cb$.

Por otro lado, de acuerdo con el marco conceptual Enseñanza para la Comprensión, la habilidad de comprender conceptos está supeditada a la contextualización de estos; al respecto, Gómez (1989) encontró que los niños explican la solución de un problema evocando sus entornos familiares o locales, realizan dibujos en los que priorizan el contexto (tienda,

escuela u otros) y que pocas veces utilizan las "explicaciones formales" para dar cuenta de sus soluciones. Por lo tanto, pone de manifiesto que para llegar a la formalización hay que “vivir” un proceso de comprensión en un contexto particular.

En consecuencia, el presente estudio se focaliza en el diseño de actividades en contexto que permitan que los estudiantes comprendan los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas.

1.1.4. LA CONTEXTUALIZACIÓN EN EL APRENDIZAJE

La relevancia del aprendizaje contextualizado de las matemáticas ha cobrado vigencia en la actualidad, debido principalmente a que adquiere importancia desde el punto de vista psicológico en lo referente a la memorización, razonamiento, imaginación y uso del conocimiento; adicionalmente y, partiendo de la utilización de lo que se aprende, aparece la perspectiva antropológica que se ocupa de la significación en cuanto a construcción, transformación y activación de lo aprendido (Font, 2007).

Considerando que la construcción del conocimiento se da en ambientes sociales de interacción mutua y que los desempeños de comprensión⁴ se manifiestan cuando lo que se aprende se utiliza en diferentes escenarios, se busca en esta investigación, contextualizar el aprendizaje de los conceptos de perímetro y área en estudiantes del grado 5° de una institución educativa rural del municipio de Andes en el departamento de Antioquia, en una de las actividades económicas y de carácter social más representativas de la región del suroeste, como lo es la agricultura del café. En relación a lo anterior, Berrío (2011) indagó sobre los elementos que intervienen en la (re) construcción hecha por los estudiantes de los modelos

⁴ Este concepto será ampliado en el capítulo 2.

matemáticos contextualizados en el cultivo del café. Este autor logró con su investigación, dar sentido a las matemáticas escolares trabajadas en las aulas de clase utilizando la modelación matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Berrío (2011) llegó a la conclusión de que la vinculación de los conceptos desarrollados al interior del aula con actividades diarias como las labores propias del café en la misma región, es pertinente “debido a que es una situación de contexto, dado que todos los estudiantes han tenido una relación con algún tipo de dependencia ya sea laboral o de práctica familiar” (p. 56). En este sentido, más de la mitad de los estudiantes del grado 5° de la institución o su núcleo familiar, tienen relación directa con el cultivo del café y por lo tanto la conclusión de Berrío (2011) es un referente para la presente investigación.

En este sentido, el MEN (1998) hace referencia al contexto, en cuanto a la utilidad que tiene en el aprendizaje de conceptos y en la comprensión de los mismos:

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del ambiente social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. (p. 36)

Específicamente, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se hace referencia al contexto como “elemento importante que puede proveer al individuo de aptitudes, competencias y herramientas para resolver problemas y **representar ideas matemáticas** [...]” (MEN, 1998, p. 30). En relación con esto, la misma entidad asegura que:

[...] la Educación Matemática debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego, sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal construidos por el hombre a través de la historia durante los últimos seis mil años. (pp. 30 – 31)

De otro lado, en cuanto a la construcción curricular, el docente debe facilitar el enriquecimiento del contexto a través de actividades motivadoras que estimulen el aprendizaje; de acuerdo con esto, el MEN (1998) invita a la reflexión del docente y hace énfasis en su papel de diseñador de situaciones de aprendizaje:

Es así como enriqueciendo el contexto deberá crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; establecer relaciones informales y múltiples y, al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción; diseñar además situaciones que generen conflicto cognitivo teniendo en cuenta el diagnóstico de dificultades y posibles errores. (p. 32)

Con relación a los sistemas geométricos, el MEN (1998) sostiene que su construcción depende en gran medida de la contextualización del entorno y del desarrollo cognitivo del estudiante:

Los sistemas geométricos se construyen a través de la participación activa [...] Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un estudio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con una capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.) a un espacio conceptual abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y

razonando sobre propiedades geométricas abstractas [...] Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas como por la influencia del mundo físico, cultural, social e histórico. (pp. 56 - 57)

En concordancia con dicha cita, la Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia (2005), sostiene que:

Desde la perspectiva psicogenética, y en síntesis muy apretada, se puede plantear siguiendo a Piaget, que el niño en su proceso de construcción de las nociones geométricas primero procede desde el espacio que está a su alcance, esto es, el entorno inmediato que lo rodea [...] pero esta construcción comporta un posicionamiento del sujeto con respecto al espacio que lo rodea, esto es, debe situarse como un objeto más dentro de su entorno. (p. 71)

En coherencia con lo anterior, se quiere centrar la atención en indagar sobre cómo ciertas actividades relacionadas con el cultivo del café (la organización de las eras de almácigo, la siembra del mismo o el cercado de propiedades) propician situaciones de aprendizaje en el marco de la EpC y qué elementos emergen que aporten al avance en los niveles de comprensión en correspondencia con los conceptos objeto de estudio.

En el ámbito del aprendizaje en contexto, que para la presente investigación es el cultivo del café, es necesario considerar que los agricultores usan términos propios de su que hacer que les permite comunicarse efectivamente en las labores del campo; por ejemplo, los caficultores en Andes emplean términos como almácigo, almaciguera, era, lote, tajo, parcela, barrera, surco, calle, puente, soca, entre otros. El almácigo es el fruto o semilla de café que se siembra en una bolsa plástica y que se protege en una especie de invernadero, que se le llama almaciguera; la almaciguera está dividida en porciones de una determinada cantidad de almácigos distribuidos o dispuestos en regiones rectangulares, a estos se les llama eras.

Los términos calle, puente y barrera, que en un contexto diferente al cultivo de café en Andes pueden significar vías para tránsito vehicular, para los cafeteros del municipio son ejes de cultivo: la línea horizontal, en la que se camina sin recorrer la generatriz (en cálculo se conoce como línea de nivel), es llamada calle; la línea vertical, que es el eje de ascenso o descenso recibe el nombre de puente y, lo que marca la separación entre parcelas, lotes o tajos, que puede ser construido por mallas, alambrados, sembrados en una sola línea de un producto distinto al café, es denominada barrera. Otra demarcación de los límites entre tajos son los caminos. Tajos es el terreno sembrado por una cantidad aleatoria de cafetos; normalmente estos son separados o por una calle o por un puente sin sembrados, o una barrera de plátanos o de otro producto.

ALMACIGUERA



Bolsa de
almácigo

Era de
almácigo

Imagen 2: Terminología Cafetera.

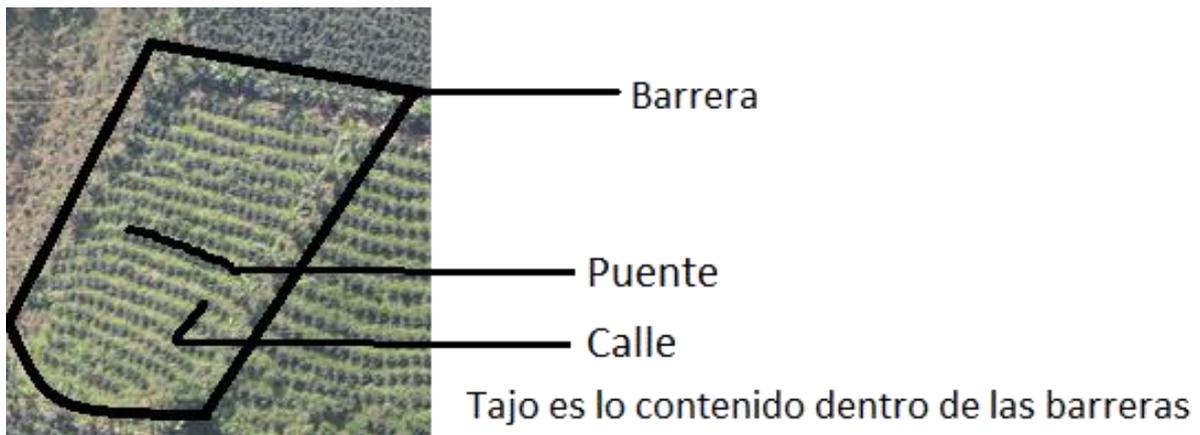


Imagen 3: Terminología cafetera.

De otro lado, las matemáticas también tienen términos específicos para expresar sus saberes, pero, para el aprendiz, estos pueden ser descontextualizados o carentes de significado. Considerando el marco de la EpC, se puede mostrar que los conceptos de perímetro y área tienen un significado distinto para un estudiante que se encuentre en el nivel de novato con respecto a la dimensión de contenido⁵, que para otro que se encuentre en un nivel superior en relación a la misma dimensión. Esto es determinado por un conjunto de elementos emergentes del trabajo de campo que caracterizarán cada uno de los niveles de comprensión, los cuales llamaremos posteriormente descriptores de categorías por nivel.

1.1.5. TEORÍAS DE LA COMPRENSIÓN

El siguiente apartado presenta tres modelos, los cuales tienen en común abordar, como eje central de su propuesta educativa, la **comprensión**. Los modelos expuestos son: Modelo Educativo de Van Hiele, Modelo de Pirie y Kieren y Enseñanza para la Comprensión.

⁵ En el segundo capítulo se abordan y se amplían estos conceptos de acuerdo al marco conceptual que guía la investigación.

1.1.5.1. Modelo Educativo de Van Hiele

Considerando las ideas de los creadores del modelo, Dina y Piere Van Hiele, los conceptos matemáticos se comprenden de acuerdo al nivel de razonamiento en el que se está ubicado; es decir, “se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 305). Según los esposos Van Hiele, si no se orientan las clases con base en el nivel de pensamiento en el cual se encuentran los estudiantes, puede ocasionar frustración tanto para el docente como para el estudiante y este último tendrá la sensación de estar escuchando un discurso en una lenguaje desconocido para él (Van Hiele, 1986, citado por Corberán et al., 1994). Esto es,

El Modelo de Van Hiele enfatiza la existencia de diferentes formas de razonamiento en Matemáticas y señala la necesidad de que los profesores tengan en consideración la capacidad de razonamiento de sus alumnos al decidir la forma y el rigor de sus clases. (p. 14)

Niveles de razonamiento de Van Hiele

De acuerdo con Corberán et al. (1994), hay cinco niveles de sofisticación en el razonamiento de los estudiantes; cada uno de ellos tiene una descripción general que puede ser detectada en los estudiantes, mientras dure su estancia en algunos de estos. En la perspectiva de esta autora, estos niveles se describen a continuación.

Nivel 1

Los razonamientos de los estudiantes en este nivel se caracterizan por su poca precisión en la caracterización de las propiedades de las figuras planas y esto los lleva a no generalizarlas de una a otra. Una figura geométrica es tomada como una totalidad y no se

logra visualizar sus partes. La descripción de figuras es superflua y se toman atributos como el color o la textura, o suelen evocar un objeto conocido para relacionarla y dar su parecido. Aprenden a relacionar los términos geométricos con la figura señalada o dibujada.

Nivel 2

Tienen conciencia de que las figuras geométricas tienen partes y pueden nombrarlas usando correctamente el vocabulario geométrico y expresiones complementarias como, por ejemplo, *el lado más largo es opuesto al ángulo recto*. Cuando se trata de definir una figura hacen un listado extenso de sus propiedades y no tienen conciencia de condiciones *necesarias* y *suficientes*. Hacen uso explícito de las propiedades de una figura. Defienden sus propias definiciones y estas prevalecen en comparación de las suministradas por el libro o el profesor. Pueden llegar a generalizar las propiedades de las figuras geométricas y reconocerlas por observación. Para aceptar la validez de una afirmación, tratan de comprobarla haciendo uso del método científico y extraen conclusiones de la observación de varias figuras. No hacen clasificación lógica de las figuras porque no relacionan propiedades, además, estas se perciben de forma aislada y por lo tanto tampoco se deducen unas de otras ni se explican relaciones entre ellas; adicional a eso, en relación con las clases de figuras no ven relaciones lógicas. Aún no hay comprensión sobre lo que es una demostración matemática y todavía no se ha desarrollado la capacidad para admitir la existencia de clases dentro de las familias de figuras.

Nivel 3

Aún no se comprende el papel que juegan los axiomas, aunque se comprende que unas propiedades se deducen de otras. Todavía no se entiende una demostración pero sí se

entienden los pasos individuales de un razonamiento lógico formal. También entienden una demostración hecha por el profesor o vista desde un libro, pero, no se tiene aún la capacidad de hacerla por sí mismo, tampoco saben hacer una demostración con premisas diferentes a las que han visto ni saben cómo se altera el orden lógico de una demostración. Hay capacidad de razonar dentro de un sistema de razonamiento lógico deductivo, pero, no quiere esto decir que se pueda razonar cabalmente dentro de la lógica formal, por ejemplo, es común que den como equivalente la premisa $p \rightarrow q$ con su recíproco $q \rightarrow p$. Se está en capacidad de realizar razonamientos deductivos informales usando de modo implícito reglas lógicas. El uso de las representaciones físicas es más de verificación que de medio de realización. Comprenden significados como el de la expresión “al menos uno”. Pueden dar definiciones matemáticamente correctas y entienden la utilidad de las definiciones y sus formas equivalentes.

Nivel 4

Se tiene la capacidad de entender y llevar a cabo razonamientos lógicos formales, se le da sentido a las demostraciones en cuanto a que son el medio para verificar las afirmaciones. Se hacen conjeturas y se intenta verificarlas deductivamente. Las demostraciones no solo se memorizan sino que pueden realizarse de manera distinta. Se tiene seguridad al suministrar información necesaria y precisa y se tiene conciencia de que la implicación $p \rightarrow q$ es diferente de la recíproca $q \rightarrow p$. Se entienden las diferentes definiciones de un mismo concepto y se tiene la capacidad de demostrar que son equivalentes. Además, se comprende la estructura axiomática de las matemáticas. Se hacen razonamientos y conclusiones siguiendo un modelo de rigurosa demostración. Aún no se comparan sistemas axiomáticos diferentes.

Nivel 5

Se tiene el máximo nivel de rigor matemático de acuerdo con lo estipulado. Se puede prescindir de soportes concretos para llevar a cabo las argumentaciones y la producción matemática. Aceptan que existen otros sistemas axiomáticos y establecen comparaciones entre varios de ellos.

Fases de aprendizaje en el Modelo Educativo de Van Hiele

En el Modelo Educativo de Van Hiele se tiene la premisa de que a los estudiantes no se les enseña a razonar de determinada manera, sino que se les debe sugerir tareas acordes a su nivel de razonamiento, para que pueda haber una aprehensión de la geometría; estas tareas acordes se agrupan de acuerdo a las fases de aprendizaje (Corberán et al., 1994). Con base en esta autora, se encuentra que el número de fases, al igual que el de los niveles de razonamiento, es de cinco. Estas fases se describen a continuación, de acuerdo con Corberán et al. (1994):

Fase 1 o de contacto

El profesor debe crear expectativas, presentar los temas, los tipos de problemas que se pueden llegar a resolver, los materiales a utilizar y la metodología de trabajo. También hace parte de esta fase, el diagnóstico tanto de los conocimientos, apropiados o no, que los estudiantes tienen sobre un tema en particular, como del nivel de razonamiento “*real*” en que se encuentran, porque es posible que hayan memorizado fórmulas e, incluso, procedimientos, pero que no razonen a profundidad sobre ellos.

Fase 2 o de orientación dirigida

En esta fase se espera que los docentes ayuden a los estudiantes para que adquieran y dominen conceptos disciplinares. Al respecto, Corberán et al. (1994) afirma:

Los objetivos principales de esta fase son conseguir que los estudiantes tomen contacto con los métodos de razonamiento del nivel superior de Van Hiele al que se espera que accedan y que descubran, comprendan y aprendan los principales conceptos, propiedades, etc. del área de la Geometría que están estudiando. (p. 26)

Las actividades deben orientarse hacia la construcción de conceptos y la observación de propiedades, con el fin de encaminar a los estudiantes hacia el descubrimiento y la demostración.

Fase 3 o de explicitación

La característica de esta fase es que los estudiantes, en diálogos con su grupo, puedan exponer cómo han resuelto un problema, intercambien ideas y reflexionen sobre el proceso. En esta fase es importante que los estudiantes adquieran y, por ende, empleen correctamente un vocabulario nuevo dentro del campo de estudio. Aún en los niños de primaria, es recomendable comenzar con la adquisición de los términos aceptados como correctos en el campo geométrico.

Fase 4 o de orientación libre

En esta fase se espera que los estudiantes apliquen y combinen los conocimientos construidos en la solución de nuevas situaciones. No es recomendable proponer problemas

prototipo sino situaciones o interrogantes que puedan ser resueltos por varios métodos o procedimientos.

Fase 5 o de integración

La importancia de los aprendizajes radica en que puedan ser combinados e integrados dentro del campo disciplinar de estudio y con conceptos de otros campos. No es menester en esta fase crear nuevos conocimientos sino la integración de los que ya se han adquirido.

Los niveles y las fases se relacionan en el Modelo Educativo de Van Hiele de forma cíclica, es decir, en cada nivel se deben superar las cinco fases.

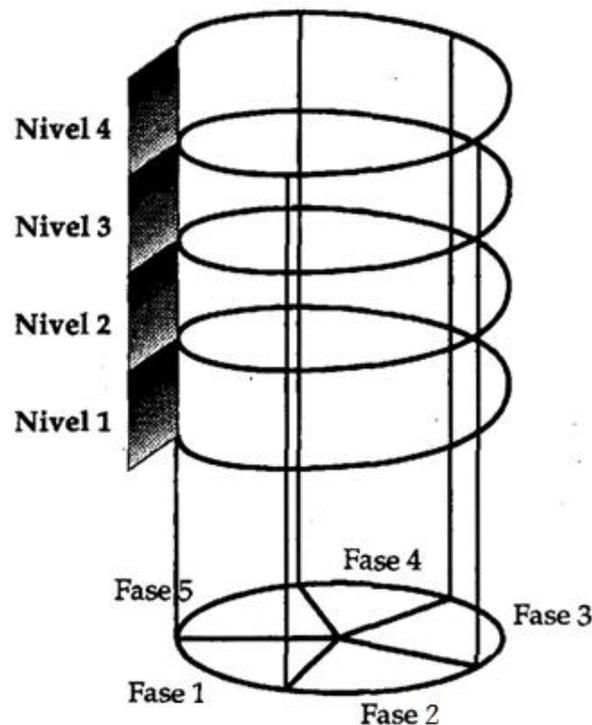


Ilustración 4: Fases y Niveles de Van Hiele (Corberán et al., 1994, p. 28).

Corberán, et al., (1996) explica la anterior gráfica de la siguiente manera:

Completada esta secuencia de cinco fases de aprendizaje para un área de la Geometría (cosa que puede llevar varios cursos en el contexto de la enseñanza ordinaria), los estudiantes deben haber alcanzado un nuevo nivel de razonamiento. Ahora debe comenzar de nuevo el proceso, empezando por una nueva primera fase y, probablemente, retomando los temas que se han estudiado en las fases anteriores, pero dándoles otra perspectiva acorde con el nuevo nivel superior de razonamiento que se desea alcanzar. (p. 29)

1.1.5.2. Teoría de Pirie y Kieren

La teoría de Pirie y Kieren tiene como objetivo único el crecimiento de la comprensión matemática; desde esta perspectiva, se define la comprensión partiendo de las ideas de Glaserfeld (1987, citado por Meel, 2003), de la siguiente manera:

La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (p. 235)

La teoría de comprensión propuesta por Pirie y Kieren (1989, citados por Meel, 2003) se estructura sobre la base de que se progresa de nivel en nivel, donde un nivel de menor complejidad está dentro del nivel de mayor complejidad; estos autores presentan su trabajo proponiendo la existencia de ocho niveles.

La siguiente ilustración presenta un esquema de los niveles del modelo en mención.

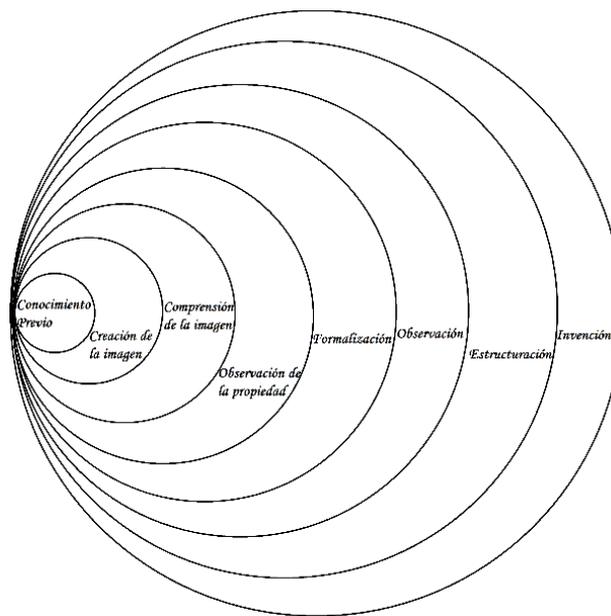


Ilustración 5: Estratos de la comprensión (Meel, 2003, p. 236)

Niveles de la comprensión de la teoría de Pirie y Kieren

De acuerdo con Meel (2003), esta teoría de la comprensión presenta un complemento para profundizar en el aprendizaje, a esto lo denominaron niveles y los caracterizaron en ocho, a saber:

Nivel de conocimiento primitivo

Este nivel no hace alusión a estar en un bajo nivel en matemáticas, sino que se refiere al conocimiento previo y la información que tenga un estudiante a la hora de comenzar una unidad o tema de estudio. Las conexiones y la cantidad de ellas que se logren elaborar entre la información nueva y la que se posee, influye a favor o en contra de la evolución en la comprensión.

Nivel de creación de la imagen

Se refiere a un tipo de imagen mental de las situaciones a las que se les asigna un significado más que una representación icónica. En este estrato, la intencionalidad está dada para que el estudiante realice acciones, mentales o físicas y que las dote de algún tipo de significado matemático.

Nivel de comprensión de la imagen

Al igual que en el anterior nivel, no se trata de representaciones pictóricas, son secuencias de los procesos mentales que permiten al estudiante desligarse de la necesidad de manipular objetos para comprender o resolver situaciones matemáticas.

Nivel de observación de la propiedad

En este nivel, la persona está en capacidad de analizar los atributos y propiedades matemáticas de las secuencias de los procesos mentales y hacer conexiones entre varias de ellas. Además, la combinación origina la construcción de definiciones y se puede explicar con fluidez cómo se establecieron dichas conexiones.

Nivel de formalización

A través de la combinación de imágenes, se llega a la extracción de propiedades comunes y se posibilita la adquisición de definiciones matemáticas completas y complejas. Estas definiciones pueden no estar soportadas “en un lenguaje matemático formal” (Meel, 2003, p. 238), pero las definiciones suministradas por los estudiantes deben estar en total concordancia con las definiciones formalmente aceptadas.

Nivel de observación

Se tiene la capacidad de combinar múltiples componentes y estructuras matemáticas como demostraciones, ejemplos, axiomas, teoremas, definiciones y otros, para obtener nuevas relaciones o explicación de las mismas, es decir, hay un orden en los procesos mentales de cognición.

Nivel de estructuración

Se llega a ese estado cuando se logran expresiones con el lenguaje matemático formal y, además, se puede explicar, mediante un sistema de axiomas y acciones coherentes, las relaciones internas entre varias observaciones. En este estrato, la imaginación y la capacidad de indagar sobre la alteración o cambio son permanentes, se es capaz de cuestionar el conocimiento vigente y de pensar en unas combinaciones entre ideas y conceptos o cambios en las formas de resolver un problema planteado no propuestos por otros, es decir, se está en capacidad de plantear interrogantes o variaciones novedosas que reflejen la comprensión de un axioma, una teoría o un procedimiento.

Construcciones de la comprensión

Pirie y Kieren (1989, citados por Meel, 2003) complementan su modelo proponiendo una serie de construcciones, entre ellas:

Comportamiento fractal del centro, nivel de Conocimiento Primitivo

Con esta construcción quieren hacer evidente que el estado de conocimiento primitivo está presente en todos los otros niveles y que la revisión de los conocimientos previos es

inherente al progreso de la comprensión matemática. Tal construcción se aprecia en la siguiente imagen:

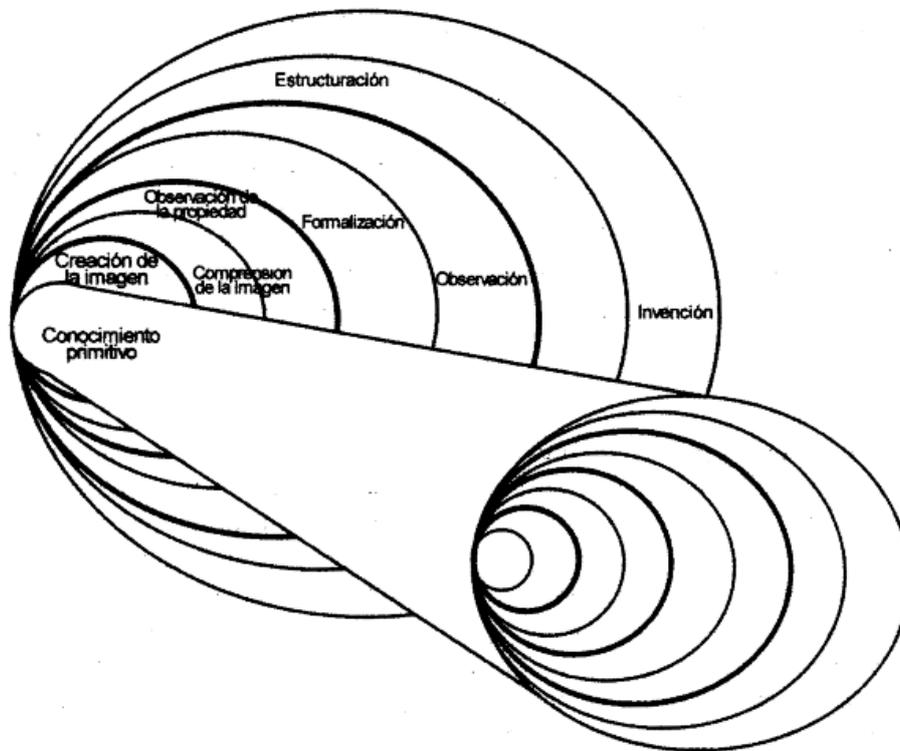


Ilustración 6: Comportamiento Fractal del nivel de Conocimiento Primitivo (Meel, 2003, p. 240).

Complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma

Se refiere a un complemento de la forma y del proceso; se dice que la ejecución de una tarea debe estar encaminada a la forma en que se actúa dentro de cada estrato. La siguiente es una presentación icónica de este complemento:

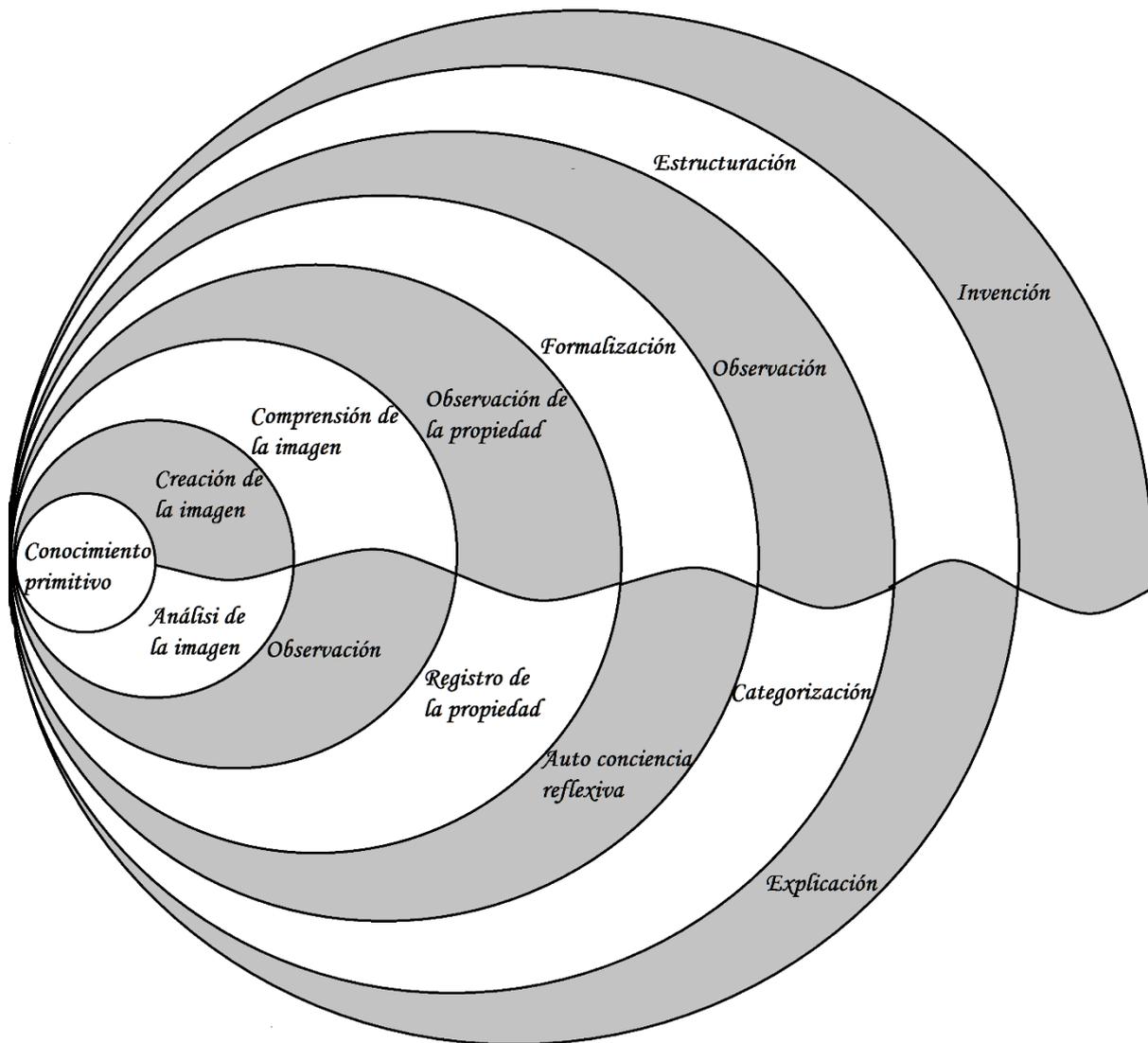


Ilustración 7: Complementariedad de forma y proceso en la teoría de Piaget Kieren (Meel, 2003, p. 241).

Construcción de límites de falta de necesidad

Se refiere a que si alguien supera un nivel y se instala en el inmediatamente superior, no necesita de los instrumentos mentales del anterior. Estos progresos involucran, necesariamente una cualificación en “los procesos de pensamiento asociado [...] por lo tanto moverse en los límites de ‘falta de necesidad’ significa un importante cambio cualitativo en la comprensión de la persona” (Meel, 2003, p. 243).

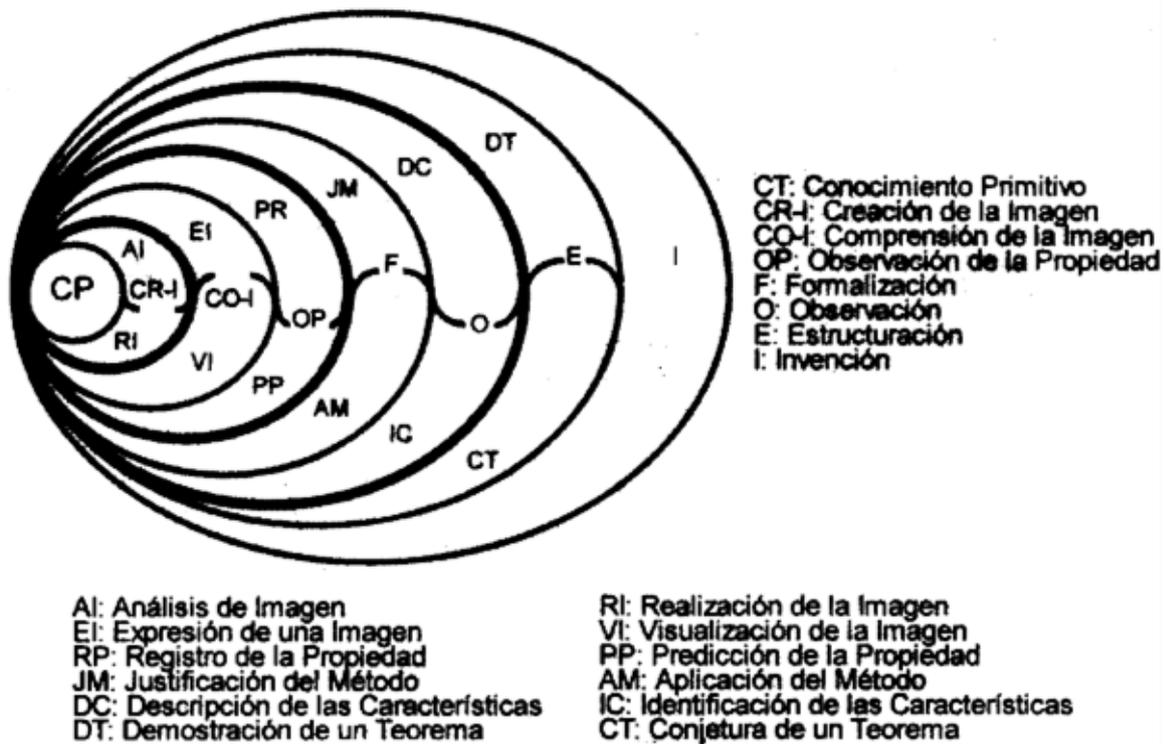


Ilustración 8: Complemento de Límites de falta de necesidad en el modelo de Pirie y Kieren (Meel, 2003, p. 242).

1.1.5.3. Pertinencia del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión

“Prácticamente todos los maestros enseñamos para que nuestros estudiantes comprendan, entre otras cosas” (Acevedo, 2011, p. 22) pero...

Es claro que los docentes planeamos clases, estudiamos y repasamos un tema cuidadosamente; nos apoyamos en varios libros y buscamos refuerzo en sitios web; elaboramos un discurso que nos parece correcto y claro e incentivamos la participación a través de preguntas abiertas o concretas; citamos casos de la “*vida real*” e instamos a los estudiantes a compartir sobre su práctica; elaboramos cuestionarios y ejercicios de refuerzo y progreso; hacemos más y más explicaciones y, en fin, andamos sobre la premisa de que nuestro ideal es que los estudiantes *comprendan*, pero, cuando tratamos de avanzar hacia un

tema o progresar en niveles de complejidad tomando como base las unidades estudiadas anteriormente, por ejemplo, el concepto de volúmenes de prismas regulares luego de haber estudiado el concepto de área, nos queda la sensación de que el estudiante no ha “comprendido” y que no “ve” en su diario acontecer situaciones en las cuales pueda aplicar lo estudiado en el colegio (Blythe, 1999, citado por Acevedo, 2011). Al respecto, Acevedo (2011) afirma:

Estimular la comprensión es una de las máximas aspiraciones de la educación, y también una de las más difíciles de lograr. El concepto mismo de comprensión plantea a los educadores que reflexionan y se comprometen con la enseñanza innumerables y complejos interrogantes. ¿Qué significa comprender algo? ¿De qué manera desarrollan la comprensión los alumnos? ¿Cómo averiguar hasta qué punto comprende un tópico? ¿Cómo podemos apoyar de un modo coherente el desarrollo de la comprensión? (p. 13)

En relación a las mismas cuestiones, intereses y necesidades, Perrone (1999), dice que el interés en la comprensión no es un tema de última generación y, que por el contrario, ha estado presente desde tiempos atrás, y que dicho interés parece haberse convertido en la regla general, pero, que a pesar de ello, la comprensión no se alcanza.

La enseñanza para la comprensión –la idea de que lo que aprenden los alumnos tiene que ser internalizado y factible de ser utilizado en muchas circunstancias diferentes dentro y fuera de las aulas, como base para un aprendizaje constante y amplio, siempre lleno de probabilidades– hace largo tiempo que se ha considerado una meta educativa primordial en las escuelas. Pocas veces, sin embargo, semejante fin se ha convertido en la norma. (p. 35)

Acevedo (2011), en su trabajo de investigación, presenta la EpC como su marco conceptual de referencia. En relación a lo que permite el marco conceptual de la EpC, afirma:

Este es un marco que además de dar un aporte teórico sobre la comprensión, brinda a los profesores herramientas para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión, desde el abordaje de un concepto hasta el de un curso completo. Esta es una característica que ni la teoría de Pirie y Kieren ni el Modelo Educativo de Van Hiele posee, puesto que en estos dos abordajes de la comprensión están más interesados en mostrar lo que pasa a nivel cognitivo en el estudiante cuando comprende un concepto que en asuntos curriculares, de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación como lo hace la EpC. Esto se debe a que la EpC surge de la vivencia de los profesores en el aula, entonces la teoría y la práctica están estrechamente ligadas pero claramente diferenciadas, por lo que la teoría ilumina la práctica y la práctica nutre la teoría. (p. 25)

Lo expuesto por Acevedo (2011), se fortalece con lo afirmado por Rendón (2009), quien argumenta que:

La Enseñanza para la Comprensión [...] amplía la visión del currículo, reconociendo múltiples relaciones de este con el entorno para contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos o unidades temáticas. De este modo el profesor enriquece su experiencia docente, presentando los conceptos de acuerdo con las necesidades e intereses de la comunidad en la que participa y no de forma aislada... (p. 51)

Teniendo claro que el interés de la investigación es analizar la comprensión de los conceptos de perímetro y área, se eligió el marco conceptual de la EpC, primero, porque traza unos parámetros para evaluarla o evidenciarla en los estudiantes; permite hacer la construcción de los conceptos desde el mundo real o la vida misma del estudiante; brinda herramientas suficientes para planificar y diseñar actividades en una unidad curricular; posibilita la expansión de las posibilidades del proceso de enseñanza y aprendizaje al involucrar directamente al estudiante en la práctica, a través de los lazos que trace entre el

saber cultural y el académico; por último, el progreso entre niveles de comprensión que propone el marco conceptual espera una transformación del pensamiento concreto al pensamiento abstracto.

1.1.6. OTRAS INVESTIGACIONES LLEVADAS A CABO EN EL MARCO CONCEPTUAL DE LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

En este apartado se presentan tres investigaciones elaboradas por miembros del Grupo de Investigación *Educación Matemática e Historia (Universidad de Antioquia-EAFIT)*.

1.1.6.1. Conceptualización de la Razón de Cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión

Rendón (2009) expresa, en su planteamiento del problema, que la EpC ayuda a planear actividades que trascienden el trabajo en el aula y superan la escueta explicación algorítmica de los conceptos matemáticos abordados en las clases. Acerca de la construcción del concepto objeto de estudio que aborda en su tesis, la autora dice:

La construcción de una conceptualización sobre la razón de cambio, asumida desde el proceso enseñanza y de aprendizaje y la matematización, relacionada con diversos contextos y con otras ciencias, inducen a implementar en el aula de clase metodologías flexibles, no transmisionistas o netamente algorítmicistas, sino que por el contrario, permitan ampliar el referente conceptual nutriendo de esta forma el pensamiento variacional. Desde las teorías y modelos educativos presentados en este Capítulo, el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión, permite generar procesos de aula que posibilitan la comprensión de conceptos y por ende los estudiantes logran aprendizajes significativos. (p. 47)

En el objetivo planteado para llevar a cabo su investigación, en relación al cómo evolucionan, el docente (quien enseña) y el docente (quien aprende), plantea lo siguiente:

Describir y analizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje para la conceptualización de la razón de cambio con el propósito de determinar la viabilidad de la implementación de una estrategia metodológica en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. (p. 48)

La autora emplea el marco conceptual EpC porque le permite ampliar el currículo y diseñar una estrategia metodológica en la cual el contexto juega un papel protagónico para motivar al estudiante en el logro de aprendizajes significativos; al respecto, concluye:

Esta metodología se fundamenta en la convicción de que las escuelas deben comprometer a los alumnos en su propio aprendizaje y fortalecer la comprensión como habilidad central de su formación. Esto implica que el profesor debe promover acciones que conduzcan al desarrollo de habilidades de comprensión a través de actividades que sean significativas en la vida diaria de cada uno de ellos. (p. 52)

En relación a los resultados obtenidos al abordar el marco conceptual de la EpC, en el apartado de conclusiones y, tomando como base el objetivo general, expresa textualmente:

El Objetivo General de la investigación se cumple (ver Capítulo 2, página 48), ya que se logra establecer la propuesta como algo viable dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje, pues tanto el docente como los estudiantes, cumplen el propósito definido, en términos de la conceptualización de la razón de cambio. (p. 142)

1.1.6.2. Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado

Acevedo (2011) desarrolló un estudio en el que se trazó la meta de caracterizar la comprensión del concepto de *probabilidad*, apoyada en los cuatro niveles del marco de la Enseñanza para la Comprensión. Utilizó este marco porque posibilita la formación de los estudiantes en la superación de obstáculos que pueden emerger cuando se proponen resolver problemas de probabilidad.

La pregunta de investigación que se planteó fue: “¿Cómo comprenden el concepto de probabilidad un grupo de estudiantes de décimo grado?” (p. 25). El objetivo general trazado para dar respuesta a la pregunta fue: “Caracterizar la comprensión del concepto de probabilidad en un grupo de estudiantes de décimo grado” (p. 27).

Para desarrollar las conclusiones de su trabajo, elaboró matrices para cada una de las dimensiones y se hizo evidente que los estudiantes progresaron en los niveles de comprensión e, incluso, todos superaron el nivel de ingenuo. En la dimensión de métodos, algunos de los estudiantes alcanzaron el nivel de experto.

1.1.6.3. Los mapas conceptuales en la enseñanza para la comprensión y el aprendizaje significativo⁶

En este artículo, Esteban y Henao-Calad (2006) proponen una articulación entre la elaboración de mapas conceptuales con el marco de la EpC y dan como una muestra de

⁶Tomado de: <http://cmc.ihmc.us/cmc2006Papers/cmc2006-p26.pdf>

desempeño la elaboración de estos. De acuerdo a lo expuesto por estos autores, los mapas conceptuales se validan porque:

... se analizan varias etapas fundamentales de la comprensión de los conceptos: la memorización de aspectos fundamentales, la representación de los mismos en un código personal, su traducción a un código socialmente aceptado y el entendimiento que se logra a partir de la interacción del individuo con distintos agentes del proceso, como son sus compañeros, el profesor y los textos utilizados, para construir un aprendizaje significativo del concepto objeto de estudio. (Esteban y Henao, 2006, p. 1)

Lo esperado por los autores al presentar este artículo, es dar insumos a las instituciones educativas para que avancen en la construcción de currículos que propendan por aprendizajes significativos.

1.1.6.4 Enseñanza para la comprensión. Marco interpretativo de la construcción de conocimiento en clases de ciencias

En este artículo, Ruiz, Peme, Longhi, y Ferreira (2012) presentan un análisis de las prácticas de aula en cuanto a la promoción de la comprensión en los estudiantes del nivel de secundaria en Argentina. Estos autores también exponen la relación de tres marcos teóricos vinculados con la enseñanza y el aprendizaje: EpC, construcción compartida del conocimiento e interacción en el aula. En este trabajo, además de las cuatro dimensiones del marco de la EpC, al que llamaron marco interpretativo, incluyen una dimensión adicional: *interacción docente – alumno*. Algunas de sus conclusiones son:

El aprendizaje es una actividad compartida, que el alumno no lo logra en solitario y que comprender -como actividad del pensamiento- no es conocer; al menos no es eso

solamente, sino fundamentalmente la posibilidad de aplicar lo aprendido a nuevas situaciones, afirmación reconocida por la mayoría de quienes ejercemos la docencia.

El aprendizaje comprensivo y la enseñanza para la comprensión -como dos caras de una misma moneda-, requieren que se involucren en ese proceso tanto el docente como los alumnos. (p. 133)

El estudio lo llevaron a cabo en dos etapas: la primera, fue la aplicación de un cuestionario sobre las prácticas de aula, a 40 docentes; en la segunda, registraron y analizaron las clases de tres profesoras.

1.1.6.5. Enseñanza para la Comprensión. Un marco para el desarrollo profesional docente

La tesis doctoral aquí referenciada es una reflexión profunda sobre las acciones de aula y el agotamiento del sistema educativo, que según la autora, entró en vigencia hace aproximadamente tres siglos. Plantea algunos puntos para la actualización de dicho sistema y, consecuentemente, las relaciones docente – alumno, la democratización de la escuela y la calidad de la educación. En los ocho capítulos, aborda temas como: la práctica docente desde una perspectiva de “práctica social, compleja y multidimensional” (Pogré, 2012, p. 21); el marco conceptual, el metodológico; “el enfoque biográfico – narrativo” (p. 61); las “renarraciones” (p. 99); contrastación de casos y los resultados de la investigación.

Uno de los objetivos del estudio de Pogré (2012), respecto al marco conceptual, fue “conocer las valoraciones de los profesores acerca de los aportes del marco de EpC en relación con su concepción de aprendizaje, del conocimiento de su disciplina y de su enseñanza” (p. 78). En este sentido, esta autora tuvo la necesidad de “caracterizar los modos

particulares en que se han desarrollado los procesos de apropiación de las ideas de EpC en diferentes contextos socioeducativos y según las experiencias previas de los docentes” (p. 78).

Dentro de las conclusiones, ella encontró que la transformación de la forma de llevar a cabo la labor docente, de rotuladora de estudiantes a vinculante de los mismos, debe ser considerada en el momento de plantear reformas institucionales en la formación docente, debido a que el cambio del modo en que los docentes ven a los estudiantes, debe permitir trascender hacia el modo en que los gobiernos ven al profesor; esto es, en palabras de la autora:

En este sentido podríamos afirmar quienes se involucraron con EpC no necesariamente eran diferentes de otros docentes. Esto tiene especiales implicancias a la hora de pensar en políticas de desarrollo profesional docente, ya que es frecuente escuchar en instituciones, y aún en organismos de gobierno del sistema, que no a todos los docentes se los puede involucrar en propuestas educativas más abiertas o inclusivas, en el supuesto de que hay ciertas matrices construidas por los docentes en relación a la discriminación de los estudiantes que parecerían muy difíciles de transformar o que éstas se modificarían trabajando temáticas vinculadas a la las “nuevas juventudes”, el trabajo con estudiantes vulnerables, la convivencia en la escuela y/o los valores y no desde la el replanteo de la enseñanza. (p. 233)

Para terminar, presenta los alcances, limitaciones y notas de cierre. Entre estas últimas, expone la necesidad de trascender en las investigaciones educativas revisando las perspectivas micro y macro, y comprender más y mejor la labor del docente y su proceso de apropiación de los cambios propuestos.

1.1.7. RECOMENDACIONES PARA LA EVALUACIÓN

A continuación, se presentarán algunas sugerencias para abordar la evaluación del aprendizaje de los estudiantes y que serán consideradas en la guía curricular que se mostrará en el capítulo 4. Primero, se abordará cómo han analizado los creadores del marco de la EpC el concepto de evaluación y cómo lo entienden dentro del marco; segundo, se hará referencia al decreto 1290 de 2009; tercero, se tomarán elementos de los estándares curriculares y, por último, se presentarán algunas consideraciones de la autora Escobar (2007).

1.1.7.1. Evaluación desde la EpC

Dentro del campo de la evaluación y de acuerdo a los autores del marco conceptual, este ofrece muchas posibilidades, entre ellas, evaluar el currículo o un plan de área y evaluar los aprendizajes de los estudiantes (Hetland, Hammerness, Unger y Wilson, 1999). Esto último, es un proceso bastante complejo y delicado, dado que la comprensión no se observa a simple vista; al respecto, Hetland et al. (1999) dicen que la comprensión:

Se revela en fragmentos y tiene aspecto de ser más un caso construido a partir de las pruebas que un hecho concluyente. Parece un sistema dinámico en proceso de cambio, no un juicio estático grabado en un alumno como una identidad. Lo más importante, tiene muchas facetas, más parecido a un perfil de puntos de fuertes y débiles que el simple compuesto numérico de las evaluaciones tradicionales. (p. 295)

Se hace claro entonces que, para los autores del marco, es más importante la construcción de la comprensión que la asignación de una nota o calificación; es fundamental resaltar que esto se asume y se aprueba dentro del proceso de evaluación formativa que, como se verá más adelante, es la propuesta del MEN (2006).

El marco de la EpC brinda herramientas para planificar actividades que permitan manifestaciones de la comprensión y para lograr niveles altos de la misma; incluso, el planteamiento de estos últimos ayudó a resolver algunos de los limitantes de la evaluación acumulativa. “La evaluación tradicional compara efectivamente a un estudiante con otro pero es menos valiosa como guía para los siguientes pasos del aprendizaje” (Hetland et al., 1999, p. 296). Con la identificación de sus puntos fuertes dentro de un campo disciplinar y, la seguridad de que han progresado en niveles de comprensión, “los estudiantes podrían estar más dispuestos a afrontar sus zonas de limitaciones: un hábito necesario para el trabajo de toda la vida tendiente al desarrollo de una comprensión profunda” (p. 296). Así que, más que asignar una calificación, el marco de la EpC propone buscar estrategias para lograr desempeños de alto nivel en los estudiantes, las cuales, se exponen con más detalle y profundidad en el marco conceptual, del capítulo dos.

1.1.7.2. Decreto 1290 de 2009

En el artículo 1° que se refiere a los ámbitos en que se debe realizar la evaluación de los estudiantes, el Decreto 1290 de 2009, le dedica el numeral 3 al ámbito institucional y en este se menciona: “La evaluación del aprendizaje de los estudiantes realizada en los establecimientos de educación básica y media, es el proceso permanente y objetivo para valorar el nivel de desempeño de los estudiantes” (Presidencia de la República, 2009, p. 1).

En el artículo 3°, se presentan los siguientes propósitos en numerales de 1 a 5:

Identificar las características personales, intereses, ritmos de desarrollo y estilos de aprendizaje del estudiante para valorar sus avances.

Proporcionar información básica para consolidar o reorientar los procesos educativos relacionados con el desarrollo integral del estudiante.

Suministrar información que permita implementar estrategias pedagógicas para apoyar a los estudiantes que presenten debilidades y desempeños superiores en su proceso formativo.

Determinar la promoción de estudiantes.

Aportar información para el ajuste e implementación del plan de mejoramiento institucional. (p. 1)

Es de anotar que los elementos del marco de la EpC responden con claridad y suficiencia a los propósitos anteriores, pero, tratándose solamente de una guía curricular y no de un programa a desarrollarse en todo un año, es necesario aclarar que es el docente quien en su calidad de conocedor del sistema evaluativo institucional, deberá adaptar los descriptores establecidos en la Rúbrica de *Descriptores de Categorías por Nivel* que se expone en el capítulo 4, a los requerimientos institucionales. También se hace necesario señalar que en el marco de la EpC, se procura el progreso de los estudiantes en cuanto a la comprensión de los saberes estudiados y, una de las formas de lograrlo, es a través de la detección de falencias, tanto de la planeación como del aprendizaje o, mejor, de los desempeños de comprensión, para buscar alternativas que procuren la superación de las mismas. Por consiguiente, es un marco hacia la orientación y obtención de mejores desempeños y no hacia la aprobación o reprobación escolar.

1.1.7.3. Estándares y lineamientos curriculares

El MEN (2006), en cuanto a evaluación se refiere, se encamina hacia la evaluación formativa, cuyo énfasis está en la valoración permanente de las actuaciones de los estudiantes. Para ello, el Ministerio de Educación propone adoptar elementos del marco conceptual de la EpC, en especial aquellos relacionados con la interpretación, argumentación y explicación de los procedimientos y soluciones propuestas.

Dicho lo anterior, el MEN (2006) asume entonces que, en todo momento, se procura por el avance en el aprendizaje, que dentro del marco de la EpC se entiende como progreso en los niveles de comprensión; además, es claro que el docente juega un doble papel: propiciar los escenarios que brinden tal posibilidad y llevar los registros que den cuenta de la comprensión de los estudiantes. Al respecto, el MEN (2006) afirma que: “La evaluación formativa como valoración permanente integra la observación atenta y paciente como herramienta necesaria para obtener información sobre la interacción entre estudiantes, entre estos y los materiales y recursos didácticos y sobre los procesos de la actividad matemática” (p. 75). Más adelante aclara que la calidad de los juicios en la evaluación formativa depende de la cantidad y calidad de evidencias de las actuaciones de los estudiantes y que estas deben provenir de variadas fuentes de información. Esto último es logrado, en gran medida, aplicando las orientaciones del marco de la EpC y, a lo largo de la guía curricular que se presentará en el capítulo 4, se logró atender a ello.

En los Lineamientos Curriculares, específicamente en orientaciones para la evaluación, el MEN (1998) afirma que:

Toda evaluación educativa es un juicio en donde se comparan los propósitos y deseos con la realidad que ofrecen los procesos, de aquí que la evaluación debe ser más una reflexión que un instrumento de medición para poner etiquetas a individuos; lo que no excluye el reconocimiento de las diferencias individuales. (p. 107)

De aquí se desprende que, el proceso de evaluación, tal como lo expresa la EpC, está orientado hacia el re-direccionamiento de los aspectos débiles y a la sostenibilidad de los aspectos fuertes más que a la calificación, pero, en todo caso, dentro del sistema escolar colombiano, aún se hace uso de los criterios de promoción y aprobación de los años lectivos; por esta condición, el MEN (1998) aclara que:

[...] interesa observar los cambios de los alumnos desde sus estados iniciales de conocimiento y actuación (evaluación diagnóstica), pasando por el análisis de los comportamientos y logros durante los procesos de enseñanza-aprendizaje (evaluación formativa) hasta llegar a algún estado final transitorio (evaluación sumativa). En todos los casos la evaluación deberá ser secuencial. (p. 107)

La propuesta de la guía curricular es promover la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, teniendo en cuenta los descriptores de nivel que fueron refinados durante el trabajo de campo, de acuerdo a lo esperado dentro del marco conceptual, las concepciones personales sobre las matemáticas, los estándares curriculares del MEN y, sobre todo, lo observado en el proceso con los estudiantes. Más que la asignación de una calificación, la pretensión de la guía curricular es evidenciar si hubo o no progresos hacia niveles superiores de comprensión dentro de cada una de las categorías pensadas para cada una de las dimensiones.



Estándares relacionados con los conceptos de perímetro y área

Para el caso de esta investigación, los estándares relacionados con los conceptos objeto de estudio, el objetivo general abordado, el marco conceptual que orienta la investigación, la actividad curricular y el grado que cursan los participantes del estudio de casos, son los siguientes:

Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos.

Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación.

Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.

Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.

Conjeturo y verifico resultados de aplicar transformaciones a figuras en plano para construir diseños.

Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masas de cuerpos y sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).

Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.

Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.

Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas (MEN, 2006, pp. 82 – 83).

A través de la guía curricular que se desarrolla en el capítulo 4, en la que se orientan: conversaciones hacia la asociación de los términos propios de la agricultura del café, tales como lote, tajo, almaciguera, almácigo o lindero con los términos propios de la geometría como superficie, figura, perímetro y área; actividades de cubrimiento de superficies con una misma cantidad de unidades y determinación del perímetro con elementos comunes a su labor; manipulación de fichas obtenidas del recorte de fotografías de cafetales; comparación de áreas por superposición y transformación de figuras y la elaboración de maquetas a escala, se espera que los estudiantes alcancen niveles altos, en consonancia con el marco conceptual de la EpC, en relación a la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas. Dicho lo anterior, se espera que el recorrido a lo largo del proceso permita que tanto los objetivos del estudio como los estándares relacionados con la investigación y la guía curricular, expuestos anteriormente, sean alcanzados.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En reuniones de la Mesa de Investigación y Formación en el Área de Matemáticas del Municipio de Andes (Antioquia) –grupo de docentes de matemáticas de la básica que durante

los años 2002 a 2010 se reunió con periodicidad mensual a compartir experiencias positivas y tratar dificultades de la práctica docente en el aula–, fue recurrente el tema relacionado con las dificultades que presentan los estudiantes al expresar aprendizajes matemáticos, elegir la respuesta en los test de selección múltiple con única respuesta, al hacer exposiciones y nombrar los pasos aplicados en los algoritmos. “*Los muchachos no comprenden lo que les decimos en clase*”, es una de las frases más repetidas por los profesores; parece también evidente que no entienden los enunciados matemáticos escritos en los libros, artículos de revista o páginas web. Otro tema presente fue que los estudiantes no hacen uso correcto del lenguaje propio de las matemáticas (superficie, área, perímetro, exponente, sub radical, denominador, cuadrado, triángulo, cubo, entre otros) o no hacen argumentaciones precisas utilizándolos, de hecho, en lo que mejor se desenvuelven es en la aplicación de la secuencia de pasos de algoritmos estándar. Las anteriores situaciones se fundamentan, en primera instancia, en la forma en que los estudiantes resumen las explicaciones, argumentan las soluciones propuestas, hacen preguntas sobre los procesos de solución, y/o presentan informes de consultas y proyectos; en segunda instancia, al analizar los resultados de las pruebas tanto internas como externas.

En ese sentido, dentro de las aulas de clases, es del diario vivir escuchar de los estudiantes frases y expresiones como: “¿cómo así que cero al ‘consciente’?”, “ah, entonces, mi cuaderno es un rectángulo”, “la moneda no es un cilindro, es un círculo”, “¿cómo así que volumen es área por altura?”, “el puesto de Gilma es el triángulo de la esquina”, “ah, entonces el perímetro de la cancha de fútbol es la red de la portería”, “lo hice para que me pudiera dar la respuesta”, entre otras.

Autores como Corberán (1996), también han detectado errores que dejan al descubierto la escasa comprensión de los estudiantes, en especial, en lo relacionado con la característica bidimensional del área; algunos de sus hallazgos se presentan a continuación:

Cuando se les pregunta por una determinada fórmula, por ejemplo la del círculo, dan sin mayor problema una expresión que nunca podría corresponder a una magnitud bidimensional como es el área [...] $A = 2 \pi r$ o $A = \pi r$ o $A = 2 \pi r^3$.

O bien, algunos alumnos cuando se les pide el área, por ejemplo, de un triángulo del que se conocen las dimensiones de los tres lados, al no recordar la fórmula, multiplican las 3 longitudes.

Este tipo de respuestas ponen de manifiesto que los alumnos no reflexionan sobre el carácter dimensional de las fórmulas. (p. 11)

En este sentido, desde nuestra práctica docente, también hemos evidenciado que en la escuela se ha privilegiado la aplicación y repetición de un algoritmo y se ha dejado de lado la comprensión del concepto que dé sentido a las expresiones algorítmicas asociadas. En apartados anteriores, se mencionó que autores como Vanlehn (1983, citado por Gómez, 1989), ponen de manifiesto la problemática de estandarizar pasos de solución sin ahondar en la comprensión de los conceptos vinculados.

De acuerdo con lo anterior, la comprensión de un algoritmo está supeditada a la comprensión de los conceptos asociados a este. Por lo expuesto en el sub capítulo 1.1.4 *La contextualización del aprendizaje* y de acuerdo con lo dicho por los creadores del marco conceptual que orienta esta investigación, la vinculación entre el contexto y el aprendizaje

escolar es una alternativa eficiente para lograr progresos en los desempeños de comprensión y aprendizajes relacionados con la realidad que se vive.

En consecuencia, se infiere que el aprendizaje de las matemáticas tiene que ir más allá de la aplicación “en serie” de algoritmos que despejan x , expresan el cuadrado de un binomio o el grado de rotación de una figura, establecen semejanzas entre triángulos, calculan el área o estiman el perímetro de figuras planas. Las matemáticas deben utilizarse y observarse en las situaciones y actividades del entorno; es decir, se debe construir sentido de lo que se aprende. La significación de las matemáticas y, por lo tanto, la comprensión de las mismas se exhibe en el uso correcto o apropiado de sus términos, símbolos o signos, enunciados y formulaciones pero, también, en las interpretaciones que el sujeto quien las estudia da a todos esos elementos; es importante que haya una estrecha relación entre lo que se expresa en las ideas matemáticas y lo que asume o comprende quien se adentra en ellas.

En ese sentido, dada la necesidad de articular conceptos y procedimientos mencionada en párrafos anteriores, es indispensable enfocar esfuerzos para lograr que los estudiantes construyan una red de conocimientos coherente y rica (Stone, 1999) y que se desempeñen de forma creativa, de acuerdo al marco conceptual que guía esta investigación, mostrando comprensión de los conceptos objetos de estudio para que puedan expresar y, sobre todo, utilizar lo aprendido en diferentes situaciones. Para lograrlo, la investigación se interesó en estudiar cómo pueden influir las actividades agrícolas, en este caso el cultivo del café, en la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, de tal manera que pueda ser un punto de partida para demostrar que algunos contextos de la realidad de los estudiantes pueden ser aprovechados para la significación de diversos conceptos



matemáticos y así lograr niveles de comprensión altos en los estudiantes. Por lo tanto, con la investigación se pretende responder la siguiente pregunta:

¿Cómo comprenden los estudiantes del grado 5° de la I. E. Santa Rita los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café, según el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión?

Por lo dicho en la pregunta de investigación, el objeto de estudio es la comprensión de los conceptos perímetro, área y la independencia de sus medidas, a través de las actividades agrícolas de la siembra del café.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. GENERAL

Analizar el proceso de comprensión de los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Santa Rita, de los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café.

1.3.2. ESPECÍFICOS

Diseñar y evaluar una unidad curricular que facilite el avance en la comprensión de los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café, en los estudiantes del grado 5° de la básica primaria.



Describir de qué manera avanza un estudiante del grado 5° de un nivel a otro de comprensión de los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, según el marco conceptual de la EpC.

CAPÍTULO 2

En este capítulo se presenta el marco conceptual “*Enseñanza para la Comprensión*”, que guía todo el proceso investigativo con el propósito de describir el progreso en el proceso de comprensión de los estudiantes que hicieron parte del estudio; en este sentido, sus desempeños fueron caracterizados de acuerdo con las dimensiones y los niveles de desempeño del modelo. El trabajo se orientó desde los elementos del marco conceptual y fue guiado por un tópico generativo específico, que se asumió como lo “que vale la pena comprender” (Stone, 1999, p. 24); las metas de comprensión se entendieron como aquellas que dan claridad frente a lo que se espera que los estudiantes comprendan y, por hilos conductores, los que dentro de la EpC mantienen la estructura de la unidad temática a estudiar en el aula (Stone, 1999). Cada uno de los anteriores conceptos será expuesto en el desarrollo del presente capítulo.

2. MARCO CONCEPTUAL: ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

Es importante mencionar que este fue el marco pertinente para la presente investigación y el contexto en la que se enmarca, porque permite ampliar el currículo, reconoce que este puede establecer múltiples conexiones con la realidad y se acepta, además, que la vida diaria es un insumo para elaborarlo (Rendón, 2009).

El marco conceptual nació a finales de la década del 80 bajo la dirección de David Perkins, Howard Gardner y Vito Perrone; los dos primeros autores también dirigían el centro de investigación “*Proyecto Cero*”, adscrito a la Escuela de Graduados de Educación de Harvard. Los tres directores extendieron la invitación a colegas del centro de investigación, además de vincular a profesores de una escuela media y seis escuelas secundarias de

Massachusetts. En general, los miembros del Proyecto Cero estaban interesados, desde hacía algún tiempo, en los procesos de aprendizaje, la pedagogía, el proceso de fortalecimiento docente y el mejoramiento académico en las escuelas (Stone, 1999).

2.1. ¿QUÉ ES LA COMPRENSIÓN?

De acuerdo con los creadores del marco, la educación se logra a través de unos insumos básicos que se intercambian, a saber: conocimiento, habilidad y comprensión (Perkins, 1999). En este sentido, Perkins (1999) asegura que, normalmente, para los dos primeros se tienen respuestas, que aunque aproximadas, surgen con facilidad. Acerca del conocimiento afirma que “es información a mano [...] El alumno puede decirnos dónde está Pakistán [...]Cuál es la primera ley de Newton” (p. 69). Con respecto al segundo material de intercambio en la educación, menciona que: “[...] las habilidades son desempeños de rutina a mano [...]” (p. 69). En particular, expresa que son tareas repetitivas que no revisten mucho compromiso después de aprendidas. El mismo autor, refiriéndose a la comprensión, aclara que aunque es un elemento común en la enseñanza, la definición no se tiene tan a la mano y, pese a que hay una idea intuitiva de ella, su conceptualización es particularmente difícil.

Por otro lado, Boix y Gardner (1999) exponen que la calidad de la comprensión se basa:

[...] en su capacidad para hacer un uso productivo de los conceptos, teorías, narraciones y procedimientos disponibles en dominios tan dispares como la biología, la historia y las artes. Los alumnos deberían ser capaces de comprender la naturaleza humanamente construida de este conocimiento y remitirse a él para resolver problemas, crear productos, tomar decisiones y, finalmente, transformar el mundo que los rodea. Dicho de otra forma, los alumnos deberían usar el conocimiento para comprometerse en un repertorio de desempeños valorados por la sociedad en la que viven. (p. 216 – 217)

Continuando con los acercamientos sobre el concepto de comprensión, Blythe y Perkins (1998) afirman que “la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y presentar el tópico de una nueva manera” (p. 39); posteriormente, Perkins (1999) complementa la anterior definición exponiendo que “comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe” (p. 70). Con estas palabras, este último autor manifiesta que, en la EpC, la comprensión se vislumbra como un desempeño. Esta visión amplía la percepción de la comprensión más allá de un acto o de una respuesta preconcebida y esto contrasta con la concepción de aprendizaje memorístico y rutinario, sin querer decir con esto que ambas acciones educativas no sean relevantes; es más, lo que en un momento fue una tarea retadora, en otro puede volverse en una simple actividad rutinaria; al respecto, el autor sostiene:

De ninguna manera el énfasis en los desempeños de comprensión significa quitarle importancia al conocimiento o a las habilidades básicas. Por cierto, todos estaríamos profundamente limitados sin el apoyo de la memorización y la rutina, sin embargo, comprender exige algo más. (p. 73)

Los investigadores proponentes del marco de la EpC establecieron tres principios generales para sentar las bases de la comprensión vista como un comportamiento, es decir, como un desempeño: (1) los desempeños son desafíos para el estudiante, son metas que exigen de él un compromiso reflexivo pero que a la vez tenga la convicción de que los pueda alcanzar. (2) Son construcciones que conjugan comprensiones previas con nueva información. (3) Son elaborados en una escalera en la que la variedad y la complejidad se acrecientan. (Perkins, 1999).

Considerando lo anterior, se espera que mediante la significación de los términos de perímetro y área, los estudiantes desarrollen desempeños que demuestren la comprensión de dichos conceptos y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café, además de que se puedan desenvolver con propiedad entre el conocimiento escolar y el cotidiano, al poner en juego su comprensión.

2.2. ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN (EPC)

“La indagación continua es el sello distintivo de la Enseñanza para la comprensión” (Stone, 1999, p. 27)

El marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC) se estructura en dos grandes ejes sobre los que se articulan y engranan todos sus componentes. Estos ejes son los elementos y las cualidades de la Comprensión. Cada uno de estos tiene, a su vez, una estructura que clarifica y amplía su contenido y alcance.

A continuación se presentan los ejes y su respectiva organización.

2.2.1. ELEMENTOS DE LA COMPRENSIÓN

De acuerdo con Escobedo, Jaramillo y Bermúdez (2004), los elementos (tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua) son responsabilidad primaria del educador, y están descritos así:

2.2.1.1. Tópicos Generativos

De acuerdo con Stone (1999), los tópicos generativos son útiles en cuanto ayudan a responder preguntas del tipo “¿qué ideas preferidas abordan, qué intereses se satisfacen, qué

pasiones se comprometen, quién toma decisiones curriculares y cómo aseguramos que todos los alumnos estén preparados de manera equivalente?” (p. 97). Para la elección de los tópicos generativos, menciona la misma autora que el grupo que llevó a cabo el proyecto de la EpC, estableció, a través del diálogo continuo de los investigadores con los docentes colaboradores y el trabajo conjunto en las aulas, unos criterios de elección que el docente debe tener en cuenta a la hora de formularlos:

Centrales para el dominio o la disciplina

El tópico generativo debe estar incluido dentro de los preceptos disciplinares, es decir, debe ser considerado por profesionales del área y vinculado con “conceptos centrales, controversias perdurables o modalidades de indagación importantes en su disciplina” (Stone, 1999, p. 99).

Accesibles e interesantes para los alumnos

La generación de un tópico “varía según la edad, los contextos sociales y culturales, los intereses personales y la formación intelectual de los alumnos” (p. 99). Un tópico generativo debe estar orientado a despertar el interés de los estudiantes y captar toda su atención; puede ser multidisciplinar, estar orientado hacia diferentes tipos de inteligencias y buscar siempre la aceptación del estudiante.

Interesantes para el docente

“La pasión, la curiosidad y el asombro del docente sirven como modelo de compromiso intelectual para los alumnos que recién están aprendiendo cómo explorar un terreno poco familiar y complejo con preguntas de final abierto” (p. 100). Un tópico también llega a ser

generativo cuando es enseñado con pasión y abnegación. La entrega del docente, su forma de enseñar y las características intrínsecas de su personalidad son una marca indeleble puesta sobre lo que se va enseñar.

Rico en conexiones

“Los tópicos generativos se vinculan con facilidad a las experiencias previas de los alumnos (tanto fuera como dentro de la escuela) y con ideas importantes dentro de las disciplinas y entre ellas” (p. 100). Los tópicos generativos despiertan la creatividad y estimulan la relación de aprendizajes dentro del área de estudio y otras afines, además, deben lograr asombro por lo que se aprende o se descubre, tanto en el estudiante como en el docente.

Por lo tanto, la elección del tópico, que se pretende sea generativo, debe armonizarse de acuerdo con los intereses de la disciplina, los afectos de los estudiantes y las expectativas del docente.

2.2.1.2. Metas de Comprensión

Las metas de comprensión son el segundo elemento de la EpC; se usan para especificar los procesos, relaciones e ideas que los estudiantes llegarán a comprender durante la unidad a estudiar o a investigar. Es decir, “las metas de comprensión afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender” (Stone, 1999, p. 101). A diferencia de los demás elementos (tópicos generativos, desempeños y evaluación continua), las metas de comprensión no hicieron parte de las formulaciones iniciales del marco; estas se hicieron necesarias a medida que la investigación avanzaba y se definían las formas de progresar en el

alcance de los tópicos generativos y la evaluación de los desempeños de los estudiantes. (Stone, 1999).

Redactar metas de comprensión y, por lo tanto, establecerlas, no es una tarea fácil, debido principalmente a que pueden ser demasiado ambiguas, ambiciosas o, comprender más de un aspecto que no es pertinente para el tópico generativo; con respecto a esto, la autora en mención afirma que las metas propias de los docentes casi siempre son complejas o, en algunos casos, rudimentarias, dado que ellos tienen variados e interrelacionados propósitos. En este sentido, para que los docentes definan metas de comprensión, deben distinguir las metas finales particulares de aquellas metas académicas intermedias.

Además de la dificultad para concentrar los esfuerzos en una meta particular y de su clara redacción, otra dificultad que aparece es que los profesores pueden no ser conocedores a profundidad del tema que enseñan; en relación a esto, Stone (1999) precisa que “ las ideas de muchos docentes sobre sus materias están definidas por los materiales curriculares, a menudo libros de texto que están acostumbrados a usar” (p. 103). En la Enseñanza para la Comprensión, de acuerdo con lo que se ha expuesto anteriormente, el docente debe ser un amplio conocedor de lo que va a enseñar y utilizar una amplia gama de fuentes que superen el limitante de que los textos guía de estudio sean su principal o único material, porque esto podría representar un gran obstáculo para definir las metas de comprensión.

Otra causa para no presentar metas de comprensión claras, es el hecho de que se quieran abarcar muchos tópicos en una sola o que hayan tópicos secundarios que no hagan parte de la intencionalidad principal de la unidad o del curso; cuando este tipo de situaciones ocurra, los creadores del marco conceptual recomiendan que se usen *hilos conductores*, que son uno de los dos “tamaños” de las metas de comprensión y “describen las comprensiones más

importantes que deberían desarrollar los alumnos durante todo el curso” (Blythe y Outerbridge, 1998, p. 71), es decir, son metas más abarcadoras y más amplias; el otro “tamaño”, se relaciona con las metas correspondientes a la unidad, que son más específicas y “expresan lo que se desea que los alumnos aprendan de la unidad” (p. 75). Los llamados hilos conductores pueden ser convertidos en preguntas abarcadoras o de referencia permanente, sobre las que se volverán a lo largo del desarrollo de la unidad (Stone, 1999). La utilidad intrínseca de las metas de comprensión, como todos los demás elementos del marco conceptual EpC, radica en que fueron consideradas “para clarificar y guiar la práctica en el aula” (Stone, 1999, p. 107). De acuerdo con Stone (1999), las metas de comprensión deben tener las siguientes características:

- Explícitas y públicas: con estas dos cualidades, “las metas de comprensión son especialmente poderosas” (107). Con el fin de que toda la comunidad educativa se involucre o aporte hacia las metas de comprensión, estas deben darse a conocer, ya sea en reuniones o carteles que anuncien la ruta de las clases; con relación a lo anterior, esta última autora expresa: “las metas de comprensión expuestas públicamente ayudan a todos a saber hacia dónde va la clase, a avanzar y a centrar la atención en la agenda principal” (p. 107). En este sentido, Blythe y Outerbridge (1998) nos ejemplifican la importancia de estas características con la siguiente situación: Paul, un estudiante de décimo grado en Braintree Massachusetts, dice “las metas de comprensión [puestas en la pared] son útiles. A veces me olvido de esas cosas y entonces las miro y me vuelvo a acordar. Después de estar colgadas allí durante tanto tiempo se nos graban en la memoria” (p. 76).
- Dispuestas en una estructura compleja: las metas de comprensión deben organizarse en una amplia red de conexiones con el objetivo de depurar los hilos conductores, hallar los

elementos comunes a varios de ellos y establecer los puntos que los unen para hacer de ellas un material valioso como guía del curso.

- Centrales para la materia: afirma Stone (1999) que “las metas de comprensión deben centrarse en las ideas, modalidades de indagación y formas de comunicación que resultan esenciales si se quiere que los alumnos entiendan la materia en cuestión” (p. 108). Las metas de comprensión tienen la función de orientar el camino hacia lo esencial de lo que se pretende comprender, es decir, deben estar redactadas y entendidas de tal forma que no desvíen la atención ni los esfuerzos hacia aspectos periféricos sino hacia lo que debe ser estudiado realmente para alcanzar la comprensión y generar un trabajo significativo.

2.2.1.3. DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN

En la EpC, la comprensión no se evalúa de una forma memorística aplicando test de selección múltiple, por ejemplo. Más que una recopilación de saberes o la consolidación de unas respuestas preconcebidas, la comprensión se evalúa y se observa en el actuar de las personas. Al respecto, Stone (1999) afirma que los desempeños de comprensión podrían ser el elemento más importante de este marco conceptual. De hecho, al entenderse la comprensión como un desempeño más que como un estado de la mente, permite verla como esa capacidad de usar “lo que uno sabe cuando actúa en el mundo” (p. 109)

Este elemento está focalizado en el trabajo de los estudiantes, es decir, su interés principal se centra en estos y no en los profesores; en este sentido, los maestros tienen un rol fundamental y es observar los desempeños de los estudiantes. La atención se pone toda al servicio de ellos y sus actuaciones con relación al tema objeto de estudio.

Categorías de los Desempeños de Comprensión

Así como las metas de comprensión deben ser sintetizadas y enlazadas a través de un hilo conductor, los desempeños también deben pensarse en indicadores progresivos para poder alcanzarlos en su completa extensión. Estos indicadores progresivos dentro del marco conceptual se llaman categorías de la comprensión; en este sentido, Stone (1999) presenta lo que los profesores e investigadores que fundamentaron la EpC determinaron: “[...] los alumnos deben comprometerse en desempeños preliminares o sub-desempeños con el fin de desarrollar la comprensión de ideas y procesos que pueden sintetizar en el desempeño o producción culminante” (p. 111). Estos equipos de investigación encontraron una “progresión común de categorías de desempeño diseñadas para fomentar la comprensión” (p. 111). Estas categorías son: Fase de Exploración, Investigación Guiada y Proyecto Final de Síntesis.

Fase de Exploración:

Por lo general, estos desempeños se construyen al comienzo de una unidad y tienen el objetivo principal de “traer a los alumnos al dominio de un tópico generativo” (p. 112). Pueden establecerse a través de preguntas de final abierto y son útiles para vincular los intereses del estudiante con el tema objeto de aprendizaje. Son, además, útiles porque permiten hacer un diagnóstico de lo que los estudiantes ya saben y de las expectativas que tienen con respecto a lo que se les propone aprender. Una característica importante de esta fase, es que el abordaje de los objetos de estudio o de los desempeños esperados, por tratarse de una exploración de saberes, no se estructuran de acuerdo a los procedimientos y concepciones propias de la disciplina (Stone, 1999).

Investigación Guiada

Estos desempeños buscan involucrar a los estudiantes en el uso de ideas centrales para la comprensión de una meta. Se caracterizan por ser básicos o elementales durante las etapas iniciales de una unidad. En esta fase, el trabajo del docente puede centrarse en orientar observaciones, registro preciso de datos, uso adecuado del vocabulario o síntesis de información (Stone, 1999). La misma autora dice que esto debe focalizarse hacia el refinamiento de los desempeños y lograr, por ejemplo, que los estudiantes se expresen de manera fluida y correcta dentro de la disciplina que estudian, que integren el cuerpo de conocimientos que han adquirido y que apliquen los conceptos y métodos disciplinarios para lograr una comprensión “compleja y sofisticada” (p. 113).

Proyecto Final de Síntesis

Esta categoría suele ser comparada con los trabajos de finalización de período o año escolar que normalmente los profesores ponen a sus alumnos pero, en la EpC, estos desempeños no solo deben dar cuenta del dominio que tienen los estudiantes sobre las metas de comprensión sino que deben ser más integradores que en las dos categorías anteriores (Stone, 1999), es decir, dar cuenta de lo que ya se dijo que el marco define como comprensión: “habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe” (Perkins, 1999, p. 70).

Los desempeños de comprensión son verdaderamente útiles en el marco de la EpC si se logra que sean: directamente vinculados con las metas de comprensión; manifestaciones de la comprensión por medio de la práctica; generadores de múltiples estilos de aprendizaje y formas de expresión; promotores de compromiso reflexivo con tareas que representen un

desafío y manifestaciones de la comprensión (Stone, 1999). Esto es, de acuerdo con esta autora:

- Un desempeño de comprensión se vincula directamente con las metas de comprensión, cuando ayuda a los estudiantes en el logro de las mismas con trabajos que efectivamente se relacionen con el progreso.
- También cuando están diseñados secuencialmente de manera que desarrollen las habilidades y conocimientos iniciales, fomentando la observación y autocrítica.
- Además, deben estar diseñados de forma tal que promuevan la utilización de múltiples estilos de aprendizaje y, a su vez, la utilización de múltiples sentidos y formas de inteligencia usando diversos recursos y modalidades de expresión.
- Plantear retos y reflexiones es otra característica de un buen desempeño de comprensión, porque obliga a pensar, dejando de lado la repetición o mecanización de rutinas.
- Por último, se espera que puedan ayudar a demostrar la comprensión, esto quiere decir que deben trascender del plano individual porque la comprensión debe ser también percibida por los otros actores.

2.2.1.4. Evaluación Diagnóstica Continua

En la EpC, el proceso de evaluación es una responsabilidad conjunta que compromete tanto al docente como al estudiante; por razones de familiaridad o experiencia, en la primera categoría de los desempeños, fase de exploración guiada, los criterios de evaluación son propuestos por el docente, pero, al transcurrir el tiempo y haber ganado experiencia, los

estudiantes tienen la oportunidad de exponer sus propias ideas de evaluación y compromisos en cuanto a los desempeños de comprensión. Al respecto, Stone (1999) expone:

Las evaluaciones continuas se basan en criterios públicos vinculados con metas de comprensión, tienen lugar a menudo, son hechas por los alumnos y los docentes por igual y configuran la planificación y a la vez estiman el progreso de los alumnos. (p 119)

Según Stone (1999), los siguientes son los rasgos efectivos de la evaluación diagnóstica:

Criterios relevantes, explícitos y públicos

Estos tienen relación directa con las metas de comprensión; deben hacerse públicos antes de ser usados como instrumentos de evaluación para darles a los estudiantes la opción de aplicarlos y comprenderlos con anterioridad.

Evaluaciones diagnósticas continuas

La evaluación es un proceso continuo de realimentación permanente: desde el principio hasta el final. Las tareas propias de la evaluación diagnóstica se efectúan a la par con cada desempeño significativo de comprensión.

Múltiples fuentes de evaluación

El proceso evaluativo involucra tanto la co-evaluación como la autoevaluación; el trabajo se hace enriquecedor en la medida en que intervienen el propio estudiante, sus pares y el docente orientador.

Estimular el avance y configurar la planeación

Las evaluaciones no solo encaminan a los estudiantes hacia los próximos logros, sino que permiten evaluar todo el proceso desarrollado. También le permiten al docente planear y diseñar las actividades posteriores.

Con relación al propósito de la evaluación diagnóstica continua y la utilidad dentro del marco de la EpC, Blythe y Outerbridge (1998) explican:

Integrar el desempeño y la realimentación es justamente lo que necesitan los alumnos cuando trabajan en el desarrollo de la comprensión de un tópico o concepto específico. En el Marco Conceptual de la Enseñanza para la Comprensión esto se denomina “evaluación diagnóstica continua” y no es sino el proceso de brindar respuestas claras a los desempeños de comprensión de los alumnos, de modo tal que les permita mejorar sus próximos desempeños. (p. 108)

La evaluación diagnóstica continua busca dar a los estudiantes, a través de la realimentación, la posibilidad de lograr los desempeños de comprensión que a un momento determinado del proceso no han alcanzado. Este tipo de evaluación se planea de acuerdo con los desempeños esperados, que a su vez, están en consonancia con las metas de comprensión y, estas últimas, de acuerdo a los tópicos generativos. La utilidad de la evaluación diagnóstica continua es que permite analizar los resultados del proceso en un período de tiempo específico y brinda apoyo permanente para alcanzar los desempeños posteriores.

2.2.2. CUALIDADES DE LA COMPRESIÓN

Aunque los desempeños de comprensión se enmarcan en las condiciones de cada disciplina y las reflejan, es importante mencionar que comparten elementos en común; al respecto, Boix y Gardner (1999) explican:

Aunque muestran rasgos disciplinarios distintivos, estos desempeños también comparten modelos comunes: los alumnos usan una base de conocimientos rica, detallada y organizada; se remiten a los métodos y convenciones de las disciplinas para construir y validar lo que saben; atienden a la importancia social, científica o médica de lo que aprenden y se preocupan acerca de las formas en las que se comparte el conocimiento con otros. (p. 227)

La presencia de estas cualidades demuestra comprensión en los estudiantes pero, también, deben responder a las particularidades de cada disciplina de estudio; en este orden de ideas, la preocupación de los autores por generar una herramienta de sistematización de los desempeños que cumpliera ambos propósitos (demostrar la comprensión y responder a cada disciplina) los llevó a formularse la siguiente pregunta: “¿cómo pueden sistematizarse estas cualidades de manera tal que respete su especificidad disciplinaria pero se genere un lenguaje para hablar de la comprensión en diversos dominios?” (Boix y Gardner, 1999, p. 227). El equipo de investigación que estructuró el marco de la EpC, encontró una forma de hacerlo, es decir, de caracterizar la comprensión de una forma válida para distintas disciplinas. Esto se logró con la formulación de las dimensiones y de los niveles de la comprensión. En este sentido, Boix y Gardner (1999) expresan:

Para describir sistemáticamente las cualidades de la comprensión –en formas que sean a la vez respetuosas de la especificidad disciplinaria y válida en diferentes dominios– el

marco conceptual de la Comprensión destaca cuatro dimensiones de la comprensión: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación. Dentro de cada dimensión, el marco describe cuatro niveles de comprensión: ingenua, de principiante, de aprendiz y de maestría. (p. 230)

2.2.2.1. Dimensiones de la comprensión

Las dimensiones describen o detallan las características observables que pueden registrarse en cuanto al desarrollo o mejoramiento de la comprensión. A continuación, se describen cada una de las dimensiones.

Dimensión de Contenido

Desde la niñez, se construyen explicaciones acerca de la vida, de la familia y del mundo que pueden ser producto de la imaginación, de ideas transmitidas por la cultura o por una mezcla de ambas; estas explicaciones alcanzan a tener mucha fuerza y, en variadas ocasiones, prevalecen a pesar de las discusiones y explicaciones surgidas en clase o en otros escenarios. Por ejemplo, hay estudiantes que tienen algunas ideas preconcebidas, que son difíciles de eliminar, como: la pirámide es un triángulo, el cubo es un cuadrado, un rectángulo es un cuadro o los cuerpos pesados caen con mayor velocidad que otros más livianos. En relación a esto, Boix y Gardner (1999) expresan:

Desde los primeros años de vida, los alumnos construyen teorías poderosas sobre la materia, la sociedad y ellos mismos. Si bien imaginativas, estas teorías a menudo entran en conflicto con las versiones elaboradas a lo largo de los siglos por gente ilustrada [...] Las creencias no escolarizadas son robustas, incluso después de años de escolaridad. En algunos casos siguen siendo parte de la comprensión del mundo basada en el sentido común, una

comprensión que está prototípicamente orientada a lo práctico, vinculada con la inmediatez de la experiencia, es local, egocéntrica y válida en virtud de pertenecer a la colección genérica de presupuestos que la cultura comparte como obvios. Refinar, transformar o reemplazar estas intuiciones iniciales es un desafío central que enfrentan los alumnos cuando apuntan a comprender en profundidad el mundo que los rodea. (p. 230)

De acuerdo con lo anterior, surge la dimensión de contenido como aquella que evalúa el tránsito que ha tenido el estudiante desde el conocimiento intuitivo hacia el conocimiento académico a través de la creación de redes de conceptos amplias y acordes con el campo disciplinar; además, evalúa el modo en que este conocimiento se acomoda a las distintas situaciones y es aplicado de manera correcta. En esta perspectiva, Pogré (2012) expresa que en la dimensión de contenido se espera que “que los estudiantes transformen sus creencias intuitivas y que puedan construir redes conceptuales ricas y coherentes” (p. 53)

La evaluación de esta dimensión se hace a través de los criterios expresados por Boix y Gardner (1999):

- Creencias intuitivas transformadas, en las que se observa si los desempeños de los estudiantes dan cuenta de que los saberes disciplinares han sustituido las creencias intuitivas.
- Redes conceptuales ricas y coherentes, características que se manifiestan cuando los estudiantes razonan alrededor de conceptos, desde sus generalidades hasta sus particularidades, es decir, se mueven de manera flexible entre lo global y los detalles específicos.

Dimensión de Métodos

Esta dimensión describe la forma en que los estudiantes construyen el conocimiento, si contrastan, comprueban y demuestran sus argumentos con procedimientos propios de la disciplina usados y validados por los expertos; también se observa si discuten sus conclusiones con otros estudiantes y si cuestionan lo que han percibido y dado como cierto a través del sentido común (Pogré, 2012). Algunos rasgos característicos de los métodos de los expertos y que revisten relevancia según Boix y Gardner (1999) son:

El sano escepticismo

Esta característica se manifiesta cuando el estudiante no da por cierto lo que escucha de sus profesores, otras personas o en canales de medios de comunicación masiva; ni lo que lee en prensa o en páginas web, sino que conserva un grado de desconfianza que lo lleva a corroborar la veracidad o falsedad de esa información.

Construcción de conocimiento dentro del dominio y validación de conocimiento dentro del dominio

Esta característica se percibe cuando los estudiantes utilizan métodos para corroborar la información o someter a verificación las afirmaciones.

En general, esta dimensión permite observar y analizar las estrategias, técnicas y procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de algún problema o en la validación de información, y si estos son admitidos o no a la luz del campo disciplinar en que se enmarcan (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión de Propósitos

La base de esta dimensión es “la convicción de que el conocimiento es herramienta para explicar, reinterpretar y operar el mundo ” (Boix y Gardner, 1999, p. 234). Esta cualidad de la comprensión indaga si los estudiantes tienen presente las finalidades y las motivaciones que guían la construcción del conocimiento, si utilizan lo que comprenden en diferentes y diversas circunstancias y reconocen las consecuencias de utilizarlo (Ruíz, Peme, de Longhi y Ferreyra, 2012). Las anteriores ideas hacen que la dimensión de propósitos ayude con la elección de los tópicos generativos. Además, los estudiantes y los docentes deben encontrar escenarios y situaciones para poner en juego el conocimiento y los efectos de su uso.

De acuerdo con lo explicado por Boix y Gardner (1999), los parámetros sobre los cuales se hace seguimiento a esta dimensión, son:

Conciencia de los propósitos del conocimiento

Esta característica indaga sobre la justificación del por qué y el para qué de haber estudiado y aprendido la temática.

Múltiples usos del conocimiento

Este punto de los propósitos examina si los estudiantes reconocen e identifican distintos escenarios y posibilidades en los que pueda usarse el conocimiento.

Buen manejo y autonomía

Qué posición personal asumen los estudiantes sobre lo que aprenden y en qué medida revelan dominio e independencia para hacer uso de lo que han aprendido.

Dimensión Formas de Comunicación

Dentro de esta característica, se observa cómo el estudiante comunica a una audiencia lo que ha comprendido haciendo uso de ciertos “sistemas de símbolos (visuales, verbales, matemáticos y cinestésicos corporales, por ejemplo) para expresar lo que sabe” (Boix y Gardner, 1999, p. 237) y en qué medida expone con un lenguaje riguroso pero, a la vez, toma en cuenta la situación, el nivel del auditorio y el contexto para lograr que le entiendan lo que presenta (Ruíz, et al., 2012).

Son variados los procedimientos por medio de los cuales se manifiestan las formas de comunicación: realización de video clips; elaboración de ensayos; exposiciones verbales que pueden ser acompañadas de filminas; presentación de carteles, esculturas, maquetas, obras de teatro y otros en los que se exteriorice la comprensión de un concepto respetando el campo disciplinar pero considerando el nivel del público (Pogré, 2012).

De esta dimensión, de acuerdo con Boix y Gardner (1999), se encuentran tres características que permiten su evaluación:

Dominio de los géneros de realización

Esta característica evalúa qué tanto dominan los estudiantes los métodos e instrumentos para presentar su comprensión, es decir, cuánto han progresado en la puesta en escena para

dar a conocer lo que han comprendido. Esto puede darse a través de informes escritos, clips de audio y video, escenografías, ejecución de ejercicios o exposiciones orales ante el público.

Efectivo uso de sistemas simbólicos

El interrogante sobre el que esta característica enfatiza es el de cómo el estudiante combina diferentes simbologías y cuán buenas son esas combinaciones. Por ejemplo, entrelaza coherentemente una secuencia de imágenes con un escrito o contexto, utiliza bien representaciones icónicas o símbolos propios de una disciplina, ejecuta movimientos y emplea formas novedosas para exponer su comprensión.

Consideración de la audiencia y del contexto

Para evaluar esta característica, se observa qué tan consciente es el estudiante del nivel público que lo escucha y cómo, en consecuencia con ello, se expresa y presenta los contenidos que den cuenta de su comprensión.

2.2.2.2. Niveles de la Comprensión

En cada dimensión, la calidad de la comprensión es distinta, es decir, puede ser más alta o fuerte en una que en otra. En este orden de ideas, los niveles de la comprensión (ingenua, de principiante, de aprendiz y de maestría) describen el grado de calidad de la comprensión, al distinguir niveles débiles de otros más avanzados (Boix y Gardner, 1999).

Nivel de ingenuidad

Los desempeños en este nivel se caracterizan por estar cimentados en el conocimiento intuitivo, de sentido común y por transmisión cultural sin rigurosidad disciplinar. Otras características de este nivel son: el saber aprendido en la escuela (el académico o disciplinar) no se relaciona con los acontecimientos de la vida diaria; la construcción de los saberes es difuminada y, a la par, no hay una conciencia de para qué es el conocimiento; no se evidencian señales de dominio de los estudiantes sobre lo que han aprendido; no se contrasta la información escolar ni la cultural con fuentes válidas dentro de la disciplina y, por último, la expresión del conocimiento es rígida y sin creatividad (Boix y Gardener, 1999).

Nivel de novato

Este nivel se evidencia cuando los desempeños de un estudiante dan cuenta de que rudimentariamente establece conexiones entre ideas y conceptos disciplinarios, expone su conocimiento de forma mecánica y ritualizada, a modo de seguimiento de una receta o instrucciones paso a paso. Un estudiante en este nivel no es consciente de que el uso del conocimiento trae consecuencias y la validación del saber está dada por la figura de autoridad (Pogré, 2012).

Nivel de Aprendiz

De acuerdo con Pogré (2012), en este nivel la relación de saberes es fuerte y coherentemente conectada; el conocimiento disciplinar es usado flexiblemente y con principios disciplinares; se tiene la convicción de que la construcción del conocimiento es una tarea compleja que está permanentemente sometida a validación y verificación con

procedimientos propios de los expertos; el estudiante relaciona el acontecer diario con los aprendizajes obtenidos y, con cierta ayuda, puede encontrar las oportunidades para relacionar el conocimiento cultural con el disciplinar considerando las consecuencias de usarlo y, además, la expresión de los aprendizajes es adecuada y fluida.

Nivel de Maestría

Los desempeños en este nivel se caracterizan por ser altos en cada una de las dimensiones. Hay una variada y coherente relación de los conceptos de un dominio con otras áreas del conocimiento y con las situaciones comunes de la vida. Se tiene la convicción de que el conocimiento es una construcción que requiere ser sometida a discusión, que es una tarea compleja y que se nutre de variadas fuentes. Se analizan las causas y los efectos del uso del conocimiento y las situaciones en que este puede ser aplicado. Las formas de expresión del conocimiento son ricas y variadas, se recurre a una diversidad de herramientas para comunicarlo y son notorias la fluidez y la coherencia en las expresiones y la exactitud en ejemplos y analogías (Boix y Gardner, 1999).

2.3. RELACIÓN ENTRE LAS DIMENSIONES Y LOS NIVELES DE LA COMPRENSIÓN

Las siguientes tablas muestran las características de cada dimensión en cada estado o nivel de la comprensión, de acuerdo con Boix y Gardner (1999).

Tabla 3: Las cuatro dimensiones de la comprensión y sus rasgos (Boix y Gardner, 1999, pp. 244 – 245).

Conocimiento	Métodos	Propósitos	Formas
<p>A. <i>Creencias intuitivas transformadas</i></p> <p>¿En qué medida muestran los desempeños de los alumnos que teorías y conceptos garantizados del dominio han transformado las creencias intuitivas de los alumnos?</p>	<p>A. <i>Sano escepticismo</i></p> <p>¿En qué medida despliegan los alumnos un sano escepticismo hacia sus propias creencias y hacia el conocimiento de fuentes tales como sus de texto, las opiniones de la gente y los mensajes de los medios de comunicación?</p>	<p>A. <i>Conciencia de los propósitos del conocimiento</i></p> <p>¿En qué medida ven los alumnos las cuestiones, los objetivos y los intereses esenciales que impulsan la investigación en el dominio?</p>	<p>A. <i>Dominio de los géneros de realización</i></p> <p>¿En qué medida despliegan los alumnos dominio de los géneros de desempeños en los que se comprometen, tales como escribir informes, hacer presentaciones o preparar el escenario de una pieza?</p>
<p>B. <i>Redes conceptuales ricas y coherentes</i></p> <p>¿En qué medida son capaces los alumnos de razonar dentro de redes conceptuales ricamente organizadas, moviéndose con flexibilidad entre detalles y visiones generales, ejemplos y generalización?</p>	<p>B. <i>Construir conocimiento en el dominio</i></p> <p>¿En qué medida usan los alumnos estrategias, métodos, técnicas y procedimientos similares a los usados por los profesionales del dominio para construir conocimiento confiable?</p>	<p>B. <i>Usos del conocimiento</i></p> <p>¿En qué medida reconocen los alumnos una variedad de usos posibles de lo que aprenden?</p> <p>¿En qué medida consideran los alumnos las consecuencias de usar su conocimiento?</p>	<p>B. <i>Uso efectivo de sistemas de símbolos</i></p> <p>¿En qué medida exploran los alumnos diferentes sistemas de símbolos para representar su conocimiento de maneras efectivas y creativas, por ejemplo, usando analogías y metáforas, colores y formas o movimientos?</p>
	<p>C. <i>Validar el conocimiento en el dominio</i></p> <p>¿Depende la verdad, lo bueno y lo bello de afirmaciones autorizadas, o más bien de criterios públicamente aceptados como usar métodos sistemáticos, ofrecer argumentos racionales, tejer explicaciones coherentes, y negociar sentidos por medio de un diálogo cuidadoso?</p>	<p>C. <i>Buen manejo y autonomía.</i></p> <p>¿En qué medida evidencian los alumnos buen manejo y autonomía para usar lo que saben?</p> <p>¿En qué medida han desarrollado los alumnos una posición personal alrededor de lo que aprenden?</p>	<p>C. <i>Consideración de la audiencia y del contexto.</i></p> <p>¿En qué medida demuestran los desempeños de los alumnos una conciencia de los intereses, necesidades, edades, maestría o antecedentes culturales de la audiencia?</p> <p>¿En qué medida demuestran conciencia del contexto de comunicación?</p>

Tabla 4: La dimensión del conocimiento: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 246 – 247).

<i>Rasgo</i>	<i>Definir preguntas por rasgos</i>	<i>Nivel 1. Ingenuo</i>	<i>Nivel 2. De principiante</i>	<i>Nivel 3. De aprendiz</i>	<i>Nivel 4. De maestría.</i>
A. Creencias intuitivas transformadas	¿En qué medida demuestran los desempeños de los alumnos que las teorías y conceptos garantizados del dominio has transformado sus creencias intuitivas?	Faltan conceptos disciplinarios; prevalecen las creencias intuitivas, folklóricas o míticas.	Ecléctico. Los alumnos mezclan creencias intuitivas con fragmentos de conocimiento disciplinario, pero sigue dominando las visiones intuitivas.	Prevalecen las teorías y los conceptos disciplinarios. Pueden aparecer algunas creencias intuitivas. El conocimiento disciplinario sigue considerándose no vinculado con el sentido común.	Prevalecen los conceptos disciplinarios. Los alumnos reconocen la importancia del conocimiento disciplinario para refinar las creencias del sentido común y la importancia del sentido común para inspirar, desarrollar y criticar el conocimiento disciplinario.
B. Redes conceptuales ricas y coherentes	¿En qué medida son capaces los alumnos de razonar dentro de redes conceptuales ricamente organizadas, moviéndose con flexibilidad entre detalles y visiones generales, ejemplos y generalizaciones?	Fragmentos o partes del conocimiento parecen aburridos, borrosos o no diferenciados. Los ejemplos y generalizaciones están desconectados. Incluso cuando se los insta, los alumnos ven los problemas desde el punto de vista de ejemplos específicos o de generalizaciones amplias.	Los alumnos afirman conexiones simples, frágiles o ensayadas entre conceptos o ideas. Los alumnos se extienden en ejemplos pero no son capaces de vincularlos con generalizaciones o marcos del dominio. Cuando se los insta, los alumnos pueden pasar de ejemplos específicos a generalizaciones más amplias en formas ensayadas.	Los alumnos demuestran una fértil red de ideas o puntos de vista dentro de un dominio. Aunque pueden aparecer algunas brechas o contradicciones, se mueven espontáneamente entre ejemplos específicos y generalizaciones de la disciplina. Los alumnos todavía no demuestran la capacidad de razonar creativamente dentro de estos marcos disciplinarios.	Los alumnos muestran redes altamente organizadas de ideas o puntos de vista dentro de un dominio. Los alumnos muestran movimientos fluidos entre una rica variedad de ejemplos específicos y generalizaciones disciplinarias amplias. Los ejemplos y generalizaciones son usados reflexivamente para apoyarse unos a otros. Los alumnos crean nuevas asociaciones, ejemplos, interpretaciones o respuestas que son coherentes con marcos e

Tabla 5: La dimensión de los métodos: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 248 – 250).

<i>Rasgo</i>	<i>Definir preguntas por rasgos</i>	<i>Nivel 1. Ingenuo</i>	<i>Nivel 2. De principiante</i>	<i>Nivel 3. De aprendiz</i>	<i>Nivel 4. De maestría.</i>
A. Sano escepticismo	¿En qué medida despliegan los alumnos un sano escepticismo hacia sus propias creencias y hacia fuentes de conocimiento tales como libros de texto, opiniones de gente y mensajes de los medios?	<i>Conocimiento y mundo no se distinguen.</i> Es incuestionable porque es el mundo. Los alumnos ven el mundo como inmediatamente captable, por lo tanto ningún método específico es necesario para probar las afirmaciones.	<i>El conocimiento es información sobre el mundo.</i> El escepticismo no es muy evidente. Los alumnos ven la necesidad de respaldas sus afirmaciones, sin embargo es cuestión de demostrar que están acertados, no de averiguar si sus creencias con correctas.	<i>El conocimiento es humanamente construido.</i> Con apoyo, pueden dudar y ser autocríticos o escépticos a cerca de lo que piensan, saben, oyen, leen y toman por contenido disciplinario. En la mayoría de los casos las críticas son escasas o ensayadas. Los alumnos centran su escepticismo en simples métodos o procedimientos. Pueden aparecer contradicciones o malas concepciones. A veces el escepticismo de los alumnos se vuelve nihilista, poniendo así en cuestión cualquier creencia o conocimiento disciplinario.	<i>El conocimiento es humanamente construido, racionalmente discutible, guiado por un marco y provisorio.</i> Los alumnos dudan y son autocríticos o escépticos a cerca de lo que piensan, saben, oyen, leen y toman por contenido disciplinario. Sus críticas por lo general se refieren a la base sobre la cual se construye el conocimiento disciplinario, es decir, perciben y usan múltiples métodos y procedimientos en un dominio e implícitamente reconocen las limitaciones de los métodos solos. Cuando se les presentan nuevas pruebas, teorías o interpretaciones, los alumnos pueden centrar el escepticismo en la naturaleza provisorio del conocimiento disciplinario los objetivos que impulsan la construcción del conocimiento o los usos o consecuencias

del conocimiento.

<p>B. Construir conocimiento en el dominio.</p>	<p>¿En qué medida los alumnos usan estrategias, métodos, técnicas y procedimientos similares a los usados por profesionales en el dominio para construir confiable?</p>	<p>Ningún método de construcción del conocimiento es evidente más allá del ensayo y el error.</p>	<p>Los alumnos empiezan a comprender que los métodos son útiles para construir conocimiento, pero aplican mecánicamente los procedimientos.</p>	<p>Los alumnos ven el valor de los métodos para construir conocimiento confiable. “El conocimiento es construido humanamente por medio de métodos”. Los alumnos tienden a usar un solo y simple método o procedimiento para construir conocimiento en el dominio.</p>	<p>Los alumnos usan una variedad de métodos efectivamente o usan métodos simples en forma sofisticada. Algunos alumnos perciben que los métodos emergen a través de una discusión pública y racional.</p>
<p>C. Convalidar el conocimiento en el dominio.</p>	<p>¿Dependen la verdad, lo bueno y lo bello de afirmaciones autorizadas o más bien de criterios públicamente aceptados, como usar métodos sistemáticos ofrecer argumentos racionales, tejer explicaciones coherentes y negociar los sentidos por medio de un diálogo cuidadoso?</p>	<p>Ningún criterio de convalidación es evidente. Las cosas se ven como verdaderas por propia evidencia, aceptables moralmente o agradables estéticamente “porque es así”. Los criterios de convalidación están ausentes o siguen siendo mágicos o míticos.</p>	<p>Los alumnos empiezan a ver la importancia de convalidar el conocimiento, los valores morales o los juicios estéticos. Sin embargo, la validez está basada en la autoridad externa como el libro de texto, expertos o docentes, a quienes se los ve como fuentes de información correcta. La convalidación o justificación tiende a centrarse en la experiencia inmediata o en afirmaciones autorizadas no vinculadas con reglas o tradiciones del dominio.</p>	<p>Los alumnos ven la importancia de convalidar el conocimiento, los valores morales o los juicios estéticos. Perciben métodos aislados y procedimientos de convalidación. Cuando se los enfrenta con métodos alternativos valorados en el dominio, fácilmente caen en un relativismo total: “todas las afirmaciones están hechas humanamente y por lo tanto son igualmente justificables”. Algunos usan normas y procedimiento de convalidación en el dominio pero mecánicamente, sin percibir relación con marcos más amplios o</p>	<p>Los alumnos convalidan el conocimiento, los valores morales y los juicios estéticos refiriéndose a múltiples métodos y procedimientos y a los cánones de convalidación del dominio. Algunos alumnos van más allá de su anterior relativismo para explicar cómo los métodos y criterios de convalidación se vinculan con marcos o puntos de vista más amplios. Ven cómo algunos pueden elegirse en lugar de otros por medio de argumentos racionales. Los alumnos ven los criterios de convalidación como abiertos al cuestionamiento y la</p>

tradiciones del dominio. revisión a lo largo del tiempo.

Los procedimientos de convalidación se ven como ciertos e incuestionables.

Tabla 6: La dimensión de los propósitos: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 251 – 253).

<i>Rasgo</i>	<i>Definir preguntas por rasgos</i>	<i>Nivel 1. Ingenuo</i>	<i>Nivel 2. De principiante</i>	<i>Nivel 3. De aprendiz</i>	<i>Nivel 4. De maestría.</i>
A. Conciencia de los objetivos del conocimiento.	¿En qué medida ven los alumnos cuestiones, objetivos e intereses que impulsan la investigación en el dominio?	Los alumnos no son conscientes de cuestiones y objetivos esenciales que impulsan la investigación en el dominio; es decir, no son conscientes del hecho de que aprenden lo que se les enseña.	Los alumnos son conscientes de que cuestiones esenciales guían la investigación en el dominio, pero esas cuestiones y objetivos no se vinculan claramente o se lo hace mecánicamente con la investigación en el dominio.	Con apoyo, los alumnos pueden identificar cuestiones y objetivos esenciales que impulsan la construcción de conocimiento y lo usan para reflexionar sobre la importancia de lo que aprenden en la escuela.	Los alumnos buscan espontáneamente e identifican cuestiones y objetivos esenciales que guían la investigación humana y reflexionan acerca de la importancia de lo que aprenden. Algunos alumnos reconocen estas cuestiones como parte significativa de su propia vida. Otros cuestionan el objetivo de la construcción de conocimiento en un dominio por las consecuencias potencialmente negativas de su uso.
B. Múltiples usos y consecuencias.	¿En qué medida reconocen los alumnos una variedad de usos posibles de lo que aprenden? ¿En qué medida	Los alumnos no exploran el potencial de lo que aprenden más allá de las tareas prescritas. Sus desempeños demuestran poca o	Los alumnos exploran el potencial de lo que aprenden en la escuela cuando se supone que lo hagan. Los usos del conocimiento que	Con apoyo, los alumnos usan lo que aprenden en la escuela de muchas formas originales en la vida cotidiana para resolver problemas	Los alumnos espontáneamente usan el conocimiento de maneras nuevas o múltiples. Claramente perciben al conocimiento

<p>consideran los alumnos las consecuencias de usar su conocimiento?</p>	<p>ninguna relación entre lo que aprenden en la escuela y las experiencias de la vida cotidiana.</p>	<p>identifican están atados estrechamente a rituales y tareas escolares, como hacer presentaciones o a escribir ensayos.</p>	<p>prácticos, generar explicaciones, interpretarse a sí mismo y a los demás y modificar situaciones.</p>	<p>como una herramienta para predecir y controlar la naturaleza, orientar la acción humana o mejorar su entorno social o el mundo físico.</p>	
		<p>Con apoyo, los alumnos empiezan a conectar lo que aprenden con las experiencias cotidianas. Las conexiones pueden seguir siendo ensayadas.</p>	<p>Espontáneamente re interpretan la experiencia cotidiana a través de lentes aprendidas en la escuela; por ejemplo, los valores que orientan las decisiones están claramente informados por las visiones del mundo aprendidas en la escuela.</p>	<p>Los alumnos espontáneamente reinterpretan las experiencias de la vida cotidiana a través de las lentes aprendidas en la escuela y las usan para interpretar lo que aprenden; por ejemplo, los valores que orientan sus decisiones están claramente informadas por visiones del mundo aprendidas en la escuela.</p>	
		<p>Los alumnos no examinan las consecuencias de usar el conocimiento más allá de las paredes de la escuela.</p>	<p>Con apoyo, algunos alumnos examinan consecuencias prácticas, lógicas, sociales y morales de usar el conocimiento, apoyando, por ejemplo, una posición o visión del mundo y generando una reacción o cambio no intencional.</p>	<p>Algunos evalúan espontáneamente las consecuencias prácticas, lógicas, sociales y morales de usar el conocimiento: por ejemplo, apoyando una posición o cosmovisión y generando una reacción o cambio no intencional.</p>	
<p>C. Dominio autonomía.</p>	<p>y ¿En qué medida evidencian los alumnos manejo y autonomía para usar lo que saben? ¿En qué medida han desarrollado los alumnos una posición personal alrededor de lo que aprenden?</p>	<p>El uso del conocimiento por parte de los alumnos requiere considerable apoyo y depende de la instrucción de la autoridad. No hay pruebas de un crecimiento durable. Los alumnos no ven el sentido o la necesidad de desarrollar una posición</p>	<p>Al principio, los alumnos necesitan ayuda para usar el conocimiento en situaciones nuevas pero luego son capaces de hacerlo solos. Cuando los ayudan, los alumnos ven los intereses y posiciones de los autores o especialistas. Sin</p>	<p>Los alumnos usan lo que han aprendido libremente, pero sus realizaciones siguen sin considerar las perspectivas o intereses de los demás. Algunos alumnos perciben cómo las posiciones, objetivos e intereses personales</p>	<p>Los alumnos demuestran que son dueños de lo que han aprendido. Se sienten más poderosos para usar el conocimiento al margen de las preocupaciones autoritarias o las relaciones de poder. Lo hacen considerando cuidadosamente múltiples perspectivas y</p>

personal acerca de lo que aprenden.	embargo, siguen tendiendo a verlos como no vinculados con una posición personal sobre el tópico que están aprendiendo.	afectan la forma en que se construye el conocimiento. Advierten que, como los expertos, también tienen intereses y objetivos para aprender. También se dan cuenta de que, como éstos, pueden desarrollar posiciones personales acerca de lo que aprenden. Sin embargo, los alumnos siguen percibiendo que estos intereses se impulsan caprichosamente las motivaciones de la gente. Algunos alumnos desarrollan posiciones acerca de lo que aprenden, pero siguen sin tomar en cuenta puntos de vista alternativos.	preocupaciones. Algunos perciben, cómo las posiciones, objetivos e interés personales afectan la forma en que se construye el conocimiento. Se dan cuenta de que, al igual que los expertos, ellos también tienen intereses y objetivos para aprender. También se dan cuenta de que, como éstos, pueden desarrollar posiciones personales acerca de lo que aprenden. Los intereses y las posiciones personales no se consideran más caprichosas sino arraigadas en visiones del mundo, marcos o antecedentes.
-------------------------------------	--	---	---

Tabla 7: La dimensión de las formas de comunicación: sus rasgos y niveles de comprensión (Boix y Gardner, 1999, pp. 254 – 256).

<i>Rasgo</i>	<i>Definir preguntas por rasgos</i>	<i>Nivel 1. Ingenuo</i>	<i>Nivel 2. De principiante</i>	<i>Nivel 3. De aprendiz</i>	<i>Nivel 4. De maestría.</i>
A. Dominio general del desempeño.	¿En qué medida despliegan los alumnos los géneros de desempeños que emprenden, tales como escribir informes, hacer presentaciones, o preparar el escenario?	Los géneros o tipos de desempeños con los cuales los alumnos comunican sus ideas parecen poco importantes para ellos. Los alumnos no son conscientes de que los géneros tienen reglas específicas.	Los alumnos siguen los cánones de desempeños específicos ritualmente; por ejemplo, las presentaciones son asunto de seguir ciertas pautas e instrucciones. Cuando se los insta, los alumnos pueden seguir con éxito instrucciones	Los alumnos se comprometen en ricos desempeños de comprensión y se mueven con flexibilidad y expresivamente dentro del género o tipo de realización de cuestión. Los alumnos demuestran conciencia de las reglas	Los alumnos emprenden ricos desempeños de comprensión y se mueven con flexibilidad y expresividad dentro del género o tipo de desempeño en cuestión. Algunos alumnos introducen nuevos y aceptables cambios en

para desempeñarse en el nuevo género. cuando empiezan a explorar nuevos géneros. formas típicas de desempeñarse en cada género o combinan con éxito géneros de manera aceptable.

Algunos alumnos demuestran dominio del género al manifestar un claro estilo o voz personal al desempeñarse en ese género.

Cuando exploran nuevos géneros, los alumnos espontáneamente buscan desempeñarse dentro de las reglas.

B. Uso efectivo de sistemas de símbolos.

¿En qué medida exploran los alumnos diferentes sistemas de símbolos de forma efectiva y creativa, por ejemplo, usando analogías y metáforas, colores y formas o movimientos?

Los sistemas de símbolos se usan sin reflexión, lo que da como consecuencia representaciones chatas y poco claras. No hay ninguna intención comunicativa o estética evidente.

Los alumnos muestran una familiaridad inicial con los sistemas de símbolos en cuestión; por ejemplo; usando metáforas comunes, movimientos simples o desempeños equilibrados.

Estos alumnos tienden a usar un solo sistema de símbolos para expresar lo que han aprendido.

Los alumnos demuestran un dominio flexible y fácil de un sistema de símbolos: metáforas expresivas y analogías o cuidadosos movimientos corporales, por ejemplo.

El centro de atención está en el propio sistema de símbolos; los alumnos exploran colores, términos y movimientos, pero con una atención que a menudo interfiere con el objetivo representativo del desempeño.

Cuando se los insta, los alumnos usan más de un sistema de símbolos y deciden cuál es el más poderoso para el objetivo que tienen en mente.

Los alumnos demuestran un fácil acceso y un dominio flexible o grácil en diferentes formas de representación de lo que saben o una elevada maestría en un sistema de símbolos específico.

Los alumnos muestran una conciencia estética en su uso de sistemas de símbolos —un atractivo uso de metáforas y analogías, originalidad, parsimonia o elegancia. En cada caso, deliberadamente usan símbolos para apoyar metas representativas.

Cuando es necesario, los alumnos usan más de un sistema de símbolos, integrándolos con flexibilidad y sentido

estético de formas que sirven al objetivo que tienen en mente.

C. Consideración de la audiencia y del contexto.

¿En qué medida demuestran los desempeños de los alumnos una conciencia del público, tal como sus intereses, necesidades, edades, conocimiento o antecedentes culturales?

¿En qué medida demuestran conciencia del contexto de la comunicación?

La comunicación es egocéntrica. Los públicos y contextos no se toman en cuenta.

No es posible ninguna conciencia, es evidente la incomunicación.

La audiencia se toma en cuenta pero con lentes egocéntricas; se espera que el público se adecue a la presentación y que asuma la carga de entenderla. La comunicación iguala a la transmisión.

No se presta atención a las formas específicas en las cuales el contexto puede estar configurando la comunicación.

Las fallas en la comunicación se ven como falta de atención por parte del público o como aspectos técnicos de la comunicación, como términos o ilustraciones usadas sin que se las entienda.

Con apoyo los alumnos toman en cuenta al público, es decir, son sensibles a diferencias tales como género, intereses, necesidades, nivel de conocimiento y antecedentes culturales. Sin embargo, todavía no se perciben como público de otros.

Los alumnos demuestran una conciencia inicial de algunas formas en que los contextos pueden afectar la comunicación, pero manejan mecánicamente los factores contextuales, si lo hacen.

Los alumnos todavía no tienen un sentido realista de las dificultades de la comunicación. Para ellos, la comunicación es asunto de intención; se cree que querer comunicar es lograrlo.

Los alumnos toman en cuenta al público mostrándose sensibles a diferencias tales como género, intereses, necesidades, nivel de conocimiento y antecedentes culturales. También se ven como público de otros y son capaces de ofrecer una retroalimentación reflexiva.

Algunos alumnos también son conscientes de las diversas exigencias que puedan imponer los contextos a la comunicación y pueden hábilmente usar factores contextuales para reforzar la comunicación.

Los alumnos son claramente conscientes de las dificultades de la comunicación. Comunicarse con otros a menudo entraña comprender y afectar la visión del mundo, los marcos de referencia y las creencias de otros.

CAPÍTULO 3

En este capítulo se expondrá la metodología utilizada para dar respuesta a la pregunta de investigación y lograr la consecución de los objetivos propuestos. Para ello, se exponen los principios de la investigación de corte cualitativo seleccionados para llevar a cabo al trabajo, el tipo de estudio, la descripción de los participantes, los mecanismos de recolección de la información, la validación de los datos y los principios del marco conceptual articulados a la metodología.

3. METODOLOGÍA PROPUESTA

Para exponer los principios de la investigación cualitativa, bajo los cuales se orientó el presente trabajo, se aborda dicho paradigma desde autores como Sandoval (2002), Taylor y Bogdan (1986), Vasilachis (2006) y Martínez (2006). Es importante mencionar que, como punto de partida del estudio, se aceptó la premisa dada por Taylor y Bogdan (1986): “La frase metodología cualitativa se refiere en su más amplio sentido a la investigación que producen datos descriptivos” (p. 2).

3.1. PARADIGMA

La investigación tuvo como finalidad, interpretar y analizar el proceso de comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en tres estudiantes del grado 5°; para hacerlo, se partió del contexto cultural de los participantes y, por lo tanto, se enmarcó como el estudio de un fenómeno de tipo social. Es decir, del mencionado fenómeno se

pretendió realizar un análisis del proceso de comprensión de los conceptos objeto de estudio inmersos en la práctica del cultivo del café en participantes pertenecientes a familias que obtienen el sustento económico de dicha práctica agrícola; por lo tanto, no hubo intención de explicar ni hallar leyes causales de cumplimiento periódico o regular, ni observar la realidad desde una perspectiva externa con el ánimo de hacer predicciones; en este sentido, el estudio se enmarca en la investigación cualitativa.

Esta investigación tiene varias características enunciadas por Taylor y Bogdan (1986):

- Inductiva: Los datos se utilizaron para desarrollar conceptos e intelecciones, no para corroborar hipótesis o demostrar teorías.
- Holística: Los actores y los escenarios fueron observados como un todo y no como entidades independientes o variables.
- Naturalista e interpretadora del contexto: Se aceptó que la presencia del investigador pudo alterar el comportamiento de los participantes, pero, se buscó que el acercamiento fuera de un modo natural y no intrusivo, tratando de reducir los efectos al mínimo y experimentar la realidad de la misma forma que la experimentan los participantes. Vasilachis (2006), al respecto, afirma que la investigadora o el investigador cualitativos, al ser naturalistas:

[...] se aproximan a situaciones, a acciones, a procesos, a acontecimientos reales, concretos, a interacciones espontáneas que, o bien son pre existentes, o bien, en parte tuvieron lugar, o bien se desarrollan durante su presencia en el campo y pueden continuar en su ausencia. Los investigadores observan, analizan esas situaciones, esos procesos [...] y tratan de captarlos

tan completamente como sea posible, en toda su complejidad y tal como realmente ocurren [...]

(p. 4)

- Humanista: Los participantes fueron observados respetando sus particularidades y sus individualidades, no aislándolos como variables de estudio sino en su doble perspectiva de individuo (pensamientos, sentimientos) y ser socio-cultural (costumbres, frases, normas).

Además, la investigación no se abordó desde la lógica de la realidad empírica, sino de la realidad epistémica (Sandoval, 2002). El autor, con relación a ambas lógicas de apreciación de la realidad, expresa:

La primera puede tener una existencia independiente de un sujeto que la conozca; mientras la segunda necesariamente requiere, para su existencia, de un sujeto cognoscente, el cual está influido por una cultura y unas relaciones sociales particulares, que hacen que la realidad epistémica dependa para su definición, comprensión y análisis, del conocimiento de las formas de percibir, pensar, sentir y actuar, propias de esos sujetos cognoscentes. (p. 28)

Además, desde el mismo autor, también se aceptó como condición *sine qua non* que el conocimiento no es un acto individual sino una construcción colectiva, generada por la interacción entre participante e investigador y en la que están presentes valores y rasgos culturales; por lo tanto, es indispensable sumergirse en la realidad investigada “para poder comprenderla tanto en su lógica interna como en su especificidad” (p. 29).

De esta manera, siendo el conocimiento una creación e invención social que circula, que necesita de la interacción de sujetos que lo compartan, lo debatan y lo cuestionen; aceptando que

en la construcción del conocimiento cada sujeto lo aprehende de acuerdo con su individualidad y subjetividad (Sandoval, 2002), entonces el resultado y la validación de esta investigación fueron producto de lo que el investigador aprendió sobre las expresiones que utilizan los cultivadores del café y lo que comprendió de la transición que hicieron los participantes, de la práctica social y de los términos empleados en la agricultura del café hacia los conceptos objeto de estudio. Es decir, la comprensión y la construcción del conocimiento se lograron gracias a las interacciones entre el investigado y el investigador, proceso que le exige a este último “‘meterse en la realidad’ objeto de análisis para poder comprenderla” (p. 29).

3.2. TIPO DE ESTUDIO

Para llevar a cabo la investigación con metodología cualitativa, fue necesario establecer los actores que, además del investigador, intervinieron directamente en ella. Los actores o sujetos acompañantes fueron tres estudiantes del grado quinto⁷ de la básica primaria que tienen relación directa con el cultivo del café.

Para hacer el estudio y el proceso de comprensión en la transición del contexto de significación agrícola a la comprensión de los términos perímetro y área y la independencia de sus medidas, se trabajó mediante el método de estudio de casos. En primer lugar, porque fue adecuado para la investigación, de acuerdo con lo expresado por Stake (1999):

Estudiamos un caso cuando tiene un interés muy especial en sí mismo. Buscamos el detalle de la interacción con sus contextos. El estudio de casos es el estudio de la particularidad y

⁷Más adelante se encuentra la descripción de los participantes y los criterios por los cuales hicieron parte de esta investigación.

de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes. (p. 11)

Segundo, porque el objetivo general de la investigación se centró en la descripción del proceso de comprensión que tres estudiantes tuvieron sobre dos conceptos geométricos y su independencia, a partir del contexto particular de la agricultura del café. En este sentido, el foco de atención fue el estudiante, su contexto, su saber previo y la transformación de este en saber académico, hasta progresar en los niveles de comprensión de acuerdo a lo expuesto por la EpC.

También se tuvo presente que el método elegido permitió la comprensión de los dinamismos propios de contextos particulares; las percepciones de cada participante nutrieron la investigación y fueron el punto central para describir de qué manera el contexto es un insumo para la comprensión de conceptos académicos. En relación a esto, Einserhardt (1989, citado por Martínez, 2006), dice que el estudio de casos puede tomarse:

Como ‘una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos singulares’, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, combinando distintos métodos para la recolección de evidencia cualitativa y/o cuantitativa con el fin de describir, verificar o generar teoría. (p. 174)

Para la elección de los tres participantes o casos, se tuvieron en cuenta ciertas características socio económicas que son descritas en el apartado 3.3. Participantes; en relación a la cantidad de casos, fue una decisión personal del investigador, en la que se consideró lo expuesto por Muñoz y Serván (2001, citados por Barrio, González, Padín, Peral, Sánchez y López, 2010), quienes afirman que el estudio se guía hacia la especificidad del caso estudiado sin

desconocer el funcionamiento de las partes y las relaciones entre estas para comprenderlo como un todo; del mismo modo, Stake (1999) menciona que el caso puede ser un individuo o un grupo de ellos, pero resalta que lo fundamental del caso es la especificidad y su funcionamiento. Por otro lado, Hernández, Fernández-Collado y Baptista (2006) aportan dos elementos que brindan claridad al respecto de los casos: primero, la correcta elección de estos depende del grado de inserción del investigador en el campo y esto, a la vez, enriquece la investigación en cuanto a la obtención y análisis de la información y, segundo, la elección de los casos está directamente relacionada con las intencionalidades del investigador o las particularidades de la investigación y no con bases probabilísticas.

Teniendo en cuenta lo anterior, los participantes de esta investigación fueron seleccionados de acuerdo a algunas características socio—culturales especiales o necesarias para el proceso de investigación que se exponen en el siguiente apartado.

3.3. PARTICIPANTES

Como se dijo en el apartado 1.1.3. *La contextualización del aprendizaje*, la investigación se llevó a cabo en un territorio de tradición agrícola. La institución en donde se eligieron los participantes está ubicada en un corregimiento del municipio de Andes, en el departamento de Antioquia, Colombia. La comunidad, históricamente, ha basado su economía en el cultivo del café que lo combina con productos como el plátano (que además lo utilizan como separador de tajos de café), yuca o maíz; actualmente un nuevo renglón de la economía que toma fuerza en el corregimiento, es la minería de oro. Las edades de los participantes oscilan entre los 12 y los 15 años.

El proceso de elección fue el siguiente: en un primer momento, durante la realización del documento solicitado por la rectoría de la institución educativa, que se denomina “Proyecto de dirección de grupo”, en el que se pide la caracterización económica de los estudiantes, se hizo una encuesta para indagar quiénes pertenecían a familias cafeteras; de los 36 estudiantes, 19 respondieron que el principal o único sustento económico de sus familias era el cultivo del café; 11 de estos 19 respondieron afirmativamente a la pregunta de si participaban de las actividades agrícolas; los 11 niños fueron invitados a una reunión en la que se les contó acerca de la investigación y se les invitó a participar de ella advirtiéndoles que las sesiones se llevarían a cabo en jornada extra escolar; siete de ellos manifestaron interés en participar; solo cinco niños se presentaron a las siguientes reuniones; por cruces de horarios con otras actividades y deberes, lejanía de la residencia con respecto al colegio o a la finca en la que se llevaron a cabo las sesiones, solo tres niños quedaron hasta el final de la investigación. Para el presente estudio y, de acuerdo al trabajo de campo realizado en el marco de la EpC, los tres participantes corresponderán a los tres casos que serán objeto de análisis en el desarrollo metodológico, dada la descripción en la comprensión de los conceptos matemáticos en cuestión, a través de las dimensiones y los niveles que postula el mismo marco.

3.4. RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Anteriormente se dijo que los investigadores cualitativos son naturalistas, esto es: “observan y analizan esas situaciones, esos procesos [...] y, tratan de captarlos tan completamente como sea posible, en toda su complejidad y tal como realmente ocurren, intentando no controlarlos, no influir sobre ellos, no alterarlos, no modificarlos” (Vasilachis, 2006, p. 4).

De acuerdo con esto, el investigador asume un papel fundamental en la recolección y análisis de la información. En este sentido, Rosaldo (1991, citado por De la Cuesta, 2003), reconoce al investigador como una persona con:

... una biografía y una perspectiva dadas que condicionarán lo que pregunta, cómo lo pregunta y qué interpreta. Ser sujeto situado significa comprender mejor ciertos fenómenos humanos que otros. El investigador ocupa un lugar o una posición y observa desde un ángulo particular. La ubicación no sólo es social, esto es, en las relaciones con los otros, sino también subjetivo, en la capacidad para comprender las experiencias del otro. (p. 2)

Para apoyar la labor del investigador como recolector e interpretador de la información se usarán la entrevista, la observación, la grabación en audio y video.

3.4.1. ENTREVISTA

Esta se entenderá tal y como lo establecen Hernández et al. (2006) “íntima, flexible y abierta. Esta es una reunión para intercambiar información...” (p. 597). Janesick (1998, citado por Hernández et al., 2006), precisa que “en la entrevista, a través de las preguntas y respuestas, se logra una comunicación y la construcción conjunta de significados respecto a un tema” (p. 597). El tipo de entrevista utilizado fue el de semi-estructurada y abierta, para tener un derrotero de temáticas a comprender, pero, dejando la posibilidad de incluir preguntas que surjan en la conversación de la entrevista.

3.4.2. OBSERVACIÓN

Otro instrumento para la recolección de la información fue la observación directa, en la que se tuvieron presentes los siguientes propósitos: explorar y describir aspectos de la vida social como los ambientes físicos, contextos (sociales y culturales), las actividades, los participantes que las ejecutan; comprender procesos, relaciones entre las personas y entre estas y la situaciones (Hernández et al., 2006).

3.4.3. MEDIOS TECNOLÓGICOS

Con el fin de registrar las evidencias, estas fueron grabadas en audio y video, con previa autorización de los participantes o sus representantes legales.

3.4.4. ENCUESTA

La encuesta se hizo para seleccionar a los estudiantes que cumplieran con los requisitos de edad, sustento económico familiar y labor directa en las actividades de agricultura. Además, se aplicó una en la *fase de exploración*, los objetivos de esta se explican en el apartado 3.6.1 de este capítulo.

3.5. VALIDACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Sandoval (2002), en relación a la validación del conocimiento en el paradigma cualitativo, aclara:

La validación de las conclusiones obtenidas se hace aquí a través del diálogo, la interacción y la vivencia; las que se van concretando mediante consensos nacidos del ejercicio sostenido de los procesos de observación, reflexión, diálogo, construcción de sentido compartido y sistematización. (p. 30)

El proceso de análisis de la información se llevó a cabo con el siguiente proceso: transcripción de las entrevistas, redacción y relato de las observaciones; codificación, tematización y categorización para comparar y contrastar esta información con una rúbrica denominada Dimensiones de Categorías por Nivel; las categorías de esta fueron elaboradas a priori y refinadas durante las fases de la investigación, en el contexto del marco conceptual de la EpC.

La rúbrica, la guía curricular y los guiones de entrevistas, se especifican en el capítulo 4, Unidad Curricular: Ruta de la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas.

3.6. RUTA METODOLÓGICA

Anteriormente se mencionó que la selección de los participantes se hizo a través de una caracterización de la situación familiar y socio-económica del grupo, en la que se hizo uso de la oportunidad brindada para indagar sobre la obtención del sustento económico y la participación o no en las actividades relacionadas con el proceso de siembra.

Luego de haber conformado el grupo de participantes, se procedió con la aplicación de las actividades que hicieron parte del proceso de investigación que, a la luz del marco conceptual de

la EpC (como se enunció en el apartado 2.3.3 *Desempeños de la Comprensión*), se llevó a cabo en tres categorías de desempeño: fase de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis. A continuación, se describirán cada una de estas fases.

3.6.1 FASE DE EXPLORACIÓN

1. Lo primero que se hizo, a través de un cuestionario (con características de entrevista abierta) de realización autónoma y en compañía de la familia o expertos en café, fue indagar a los estudiantes por las percepciones sobre las dimensiones de los terrenos de siembra de café que le eran familiares y los límites de estos; también por la asociación que establecía entre esos sitios y su periferia; después, se indagó por la concepción de los términos de perímetro y de área y si reconocía o no la independencia entre las medidas de ambos.
2. Considerando las respuestas dadas en los cuestionarios y la posible ambigüedad generada en las preguntas, estas fueron refinadas para diseñar una entrevista semi-estructurada que luego fue aplicada con la intención de reducir sesgos y obtener información más detallada sobre los puntos cruciales para la investigación.
3. Se realizaron varias visitas al campo para observar y dialogar sobre el proceso de siembra, con el fin de identificar los conceptos y procedimientos matemáticos (técnicos o teóricos) utilizados en las diferentes actividades del proceso agrícola del café: preparación del terreno, incubación en almácigos, distribución de almácigueros, siembra del café, recolección y venta.

3.6.2. FASE DE INVESTIGACIÓN GUIADA

1. Se selecciona una de las etapas del proceso agrícola para llevar a cabo la investigación. Por la facilidad de manipulación y la distribución geométrica de las eras, se tomó la decisión de llevar a cabo esta fase en la almaciguera de una de las fincas del corregimiento donde está ubicada la institución educativa en la que están matriculados los participantes.
2. Dado que los términos agrícolas son muchos y algunos de ellos se prestaron para confusiones por los conceptos previos del investigador y la informalidad en el uso por parte de los participantes y, a eso, sumándole la difícil definición por parte de ellos, hubo una sesión de conceptualización de términos como finca, terreno, parcela, lote y tajo. Resultó evidente que para los participantes el término parcela era insignificante y de poco uso, solamente uno de los tres niños lo usaba con frecuencia pero siempre fuera del contexto agrícola; el término terreno también resultó ser inoperante para los participantes, dado que la extensión amplia de tierra la denominan como finca. Los términos más utilizados para identificar la zona y lugar específico de los sembrados son lote y tajo. Lote, por la conversación con ellos y las señales hechas con el movimiento de las manos, fue definido como la cara o superficie de una montaña cuyos límites naturales son los altos o bajos relieves y las quebradas o riachuelos. Tajo, es cada una de las divisiones menores del lote. Los límites entre estas particiones (tajos) son sembrados (en línea) de plátano, yuca u otro producto amigable con el café, también se relaciona con cercados de madera y alambre o caminos aptos para el tránsito de personas y animales de carga. En esta misma sesión, se hizo un acercamiento a los conceptos de perímetro y área, lo que sirvió como retroalimentación de las actividades de la fase de exploración.

3. Visitas a la almaciguera para la observación de formas y la comparación de estas con los lotes y tajos. Identificación de lo que en ellas es el perímetro y el área; discusión y contrastación de las afirmaciones “*a mayor perímetro, mayor área*”, “*a igual perímetro, igual área*”. Una cuerda (que los arrieros llaman liga) asumida como perímetro y de la que siempre se trabajó con la misma longitud, se distribuyó de diferentes formas para rodear distintas cantidades de bolsas de almácigo (de las que nunca se tuvo en cuenta su altura), siempre ubicadas sin dejar espacios entre ellas; durante esta etapa de la investigación estas fueron tomadas como unidades de área. Se llegó a la conclusión de que con el mismo perímetro se podían rodear diferentes cantidades de unidades de área. Esto se determinó, gracias a la afirmación “*con la misma cuerda nos dieron diferentes áreas*”, hecha por una participante llamada Isis.
4. En otra de las visitas, se eligió una cantidad de bolsas (40 en total); primero, se formó un rectángulo de 8x5, este se rodeó con la cuerda y se marcó con cinta el punto donde se cerraba el rectángulo; luego, los niños las distribuyeron formando otro rectángulo de 10x4, también se rodeó con cuerda y se marcó con cinta el lugar donde se encerraba el rectángulo; por último, se armó uno de 20x2 y se repitió el procedimiento con la cuerda. Los puntos marcados con cinta no coincidieron, por lo que uno de los participantes llamado Messi, dijo que con la misma área habían dado diferentes perímetros; en este sentido, la participante Isis expuso la siguiente duda: “*¿si es la misma cuerda de la semana pasada, por qué decimos que es diferente perímetro?*”
5. En otras sesiones, se hicieron test y entrevistas grupales en los que fue observado el progreso en el proceso de comprensión, al considerar: la relación área-perímetro, la conservación del área, independiente de las transformaciones y la congruencia de áreas. Con estas actividades

se evidenció otro de los aportes del marco conceptual que guió esta investigación, el de la evaluación continua.

3.6.3. PROYECTO FINAL DE SÍNTESIS

1. Consultar, con personas dedicadas a la siembra del café y en fuentes académicas, sobre las unidades de medida del área y del perímetro. Contrastar las informaciones obtenidas y plantear una conclusión.

2. Se dio solución a tres situaciones planteadas:
 - a. Conseguir un tajo, preferiblemente plano. Dar el total de cercado necesario para encerrarlo y el total de café que puede ser sembrado en este. En ambos casos, se debió describir el proceso utilizado para hallar las respuestas.

 - b. Bajo el supuesto de que se necesite encerrar el patio de la sección de primaria del colegio, dar el total de metros de malla que son necesarios para bordearlo y, en caso de ser posible, estimar el costo total de la malla que se utilizaría.

 - c. Bajo el supuesto de que se necesite pavimentar con fibra sintética el patio del colegio, estimar el total de unidades bidimensionales de fibra para cubrirlo y, en caso de ser posible, estimar el costo total de la fibra sintética utilizada.

3. Exposición, en primera instancia, al grado quinto de la institución educativa a la que pertenecen los participantes y, en segunda instancia, al cuerpo docente del mismo



establecimiento educativo. Durante esta, los estudiantes dieron cuenta del proceso de comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, además, el modo en que resolvieron las situaciones planteadas.

CAPÍTULO 4

El presente capítulo contiene todo el desarrollo del marco conceptual empleado para llevar a cabo la investigación en articulación con la metodología cualitativa. Se expone la unidad curricular completa que contiene los elementos de la EpC, la guía de actividades, los descriptores de desempeño de acuerdo al nivel y la dimensión, y una aclaración sobre la evaluación de los estudiantes a la luz de la unidad curricular. Finalmente, se presenta un segundo apartado, con el análisis de la comprensión de cada uno de los estudiantes del estudio de casos.

4. UNIDAD CURRICULAR Y ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN

“Para conseguir una actividad matemática significativa, hay que partir de la experiencia real de los estudiantes”
(Freudenthal, 1983, Citado por Font, 2007, p. 433).

A continuación, se presenta la *Unidad Curricular* o *Guía Curricular*, que contiene las actividades llevadas a cabo durante el proceso de investigación y que sirvieron para orientar la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas en el contexto del cultivo del café.

De acuerdo con el marco conceptual de la EpC y considerando lo que se mencionó en el capítulo 2 (apartado 2.2.1.3.1. Categorías de los Desempeños de Comprensión), las actividades se diseñaron con una estructura de tres fases, a saber: fase de exploración, fase de investigación guiada y proyecto final de síntesis; esto con el fin de favorecer el progreso en la comprensión y mantener vivo el interés de los estudiantes en los objetos de estudio (Stone 1999). También es

una parte importante de este capítulo, el análisis del proceso de comprensión de cada uno de los participantes al terminar cada una de las fases aquí mencionadas.

4.1. GUÍA CURRICULAR

Teniendo en cuenta los elementos del marco conceptual de la EpC, la unidad curricular estuvo guiada por los siguientes aspectos:

4.1.1. TÓPICO GENERATIVO

Para la construcción de la unidad curricular, con la que se busca la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto del cultivo del café, se pensó en una pregunta que fuera transversal a todo el proceso que se pretende realizar con los estudiantes. Esta pregunta se consolidó en el tópico generativo, que se enuncia a continuación:

¿De qué manera el contexto de la agricultura del café contribuye a la comprensión de los conceptos de perímetro y área y a la independencia de sus medidas?

4.1.2. METAS DE COMPRENSIÓN

Con el fin de lograr los objetivos propuestos en la investigación, en concordancia con el marco conceptual, se proponen las siguientes metas de comprensión a corto plazo:

- Comprender el concepto de perímetro en el contexto de la agricultura del café.

- Comprender el concepto de área en el contexto de la agricultura del café.
- Determinar que el perímetro y el área son propiedades independientes de la forma, teniendo en cuenta el contexto del sembrado de café.

4.1.2.1. Hilo Conductor

La intención del hilo conductor, es motivar al estudiante a resolver problemas, impulsarlo a buscar información y a cuestionarse sobre la importancia de lo que está aprendiendo. Por lo tanto, para esta investigación el hilo conductor, que será la meta de comprensión a largo plazo, es:

Los estudiantes comprenderán los conceptos de perímetro, área y la independencia de sus medidas a partir del sembrado, cercado y observación de las formas del terreno destinado a la siembra del café.

4.1.3. ACTIVIDADES Y DESEMPEÑOS

Como ya se había mencionado anteriormente, las actividades fueron divididas en tres fases, con el fin de motivar permanentemente a los estudiantes hacia el progreso en la comprensión de los conceptos objeto de estudio y la conservación de la atención en el logro de la meta de comprensión, es decir, “que las cadenas de desempeños fueran a la vez generativas y plantearan un desafío” (Stone, 1999, p. 112).

4.1.3.1. Fase de exploración

En esta fase se pretende determinar qué ideas iniciales tienen los estudiantes acerca de los conceptos de perímetro y área.

Cuestionario de trabajo familiar

Acercamiento entre el investigador y el estudiante, a través de unas preguntas concretas, que le permitan manifestar todas las ideas previas desde su experiencia, en torno al cultivo del café.

Primera Parte

- ¿Cuál terreno de los que conoces donde se cultiva café crees que es más grande? ¿Por qué?
- ¿Cuál terreno de los que conoces donde se cultiva café crees que tiene más plantas? ¿Por qué?
- ¿Cuál terreno de los que conoces donde se cultiva café crees que tiene la mayor cantidad de cercado? ¿Por qué?
- ¿Crees que el terreno más grande tiene mayor cantidad de cercado? ¿Por qué?

Segunda Parte

Salir a su entorno e indagar en distintos actores de la comunidad lo que se entiende por perímetro y por área.

- Hacer un video que muestre el proceso del sembrado del café e indagar acerca de los conceptos matemáticos involucrados.

Entrevista individual

El tipo de entrevista elegido para esta parte de la investigación fue semi-estructurada, debido a que el investigador no utiliza habitualmente los términos que son propios de la cultura del café y, además, porque se buscaba generar un ambiente de tranquilidad en los niños participantes.

Apertura de la entrevista

Entrevistador:

Hola.

Fuiste invitado a participar en esta investigación, por reunir los elementos o condiciones que fueron decididos previamente para realizarla; estos elementos son: ser estudiante de la Institución Educativa Santa Rita en el grado 5°, estar en el rango de edades de 11 a 15 años, pertenecer a un grupo familiar que esté directamente relacionado con el cultivo del café y, lo más importante, participar directamente de las tareas de cultivo del café. Esto último porque es uno de los aspectos primordiales de esta investigación.

Recuerda que estás aquí, porque aceptaste voluntariamente responder de forma afirmativa al llamado de ser parte de la investigación y porque tu familia te respaldó y decidió autorizarte

para ello. No estás obligado a responder nada, si no sabes una respuesta simplemente me dices que no la sabes, y ¡listo! o que simplemente no quieres contestarla. Otra cosa importante que debes tener presente, es que no estás obligado a quedarte hasta el final del proceso de investigación, que puedes retirarte cuando te sientas mal o estés aburrido.

Hoy hablaremos de dos aspectos: de lo que has aprendido sobre los cultivos y los terrenos del café y, de alguna u otra manera, si podemos vincular eso con la geometría. Si hay alguna pregunta que no entiendes o no puedes responder, simplemente me lo haces saber, me pides el favor de que te la explique o que simplemente no te acuerdas de ello. Recuerda, no hay problema. No es una evaluación, de aquí no depende que ganes o pierdas el año, simplemente vamos a conversar acerca del café.

Preguntas guía para la entrevista

¿Qué fincas conoces donde se cultiva café? ¿Dónde quedan y cómo se llaman?

¿Por qué las conoces? ¿Has vivido en ellas, las visitas, has trabajado en algún momento en ellas?

De esas fincas que acabas de mencionar, ¿cuál es la más grande?

¿Por qué crees que es la más grande?

En la finca más grande ¿crees que es en la que más café se siembra? ¿Por qué?

¿Sabes qué es un cercado?



Si los límites de las fincas tuvieran que delimitarse con cercado, ¿en cuál de ellas crees que se utilizaría más cercado?

¿En las fincas cafeteras a qué se le llama lote, tajo y parcela?

¿Cómo se separan unos lotes de otros? ¿Cómo se marcan los límites de cada uno?

¿Para qué tienen que separarse unos lotes de otros? ¿Por qué no se deja uno solo?

¿Qué figuras se ven cuando se forman los tajos, los lotes o las parcelas?

¿Un cafetero decide qué figuras va a formar al momento de sembrar? O ¿esas figuras se dan sin planearlo?

Con relación a las figuras geométricas, existen dos conceptos muy importantes que son perímetro y área ¿has escuchado hablar de ellos? ¿Sabes qué significa cada uno?

¿Con cuál de los conceptos geométricos asocias los términos cercado y tajo?

Espero no haberte causado algún malestar o incomodidad con las preguntas de la entrevista. Nos veremos luego, ya sea para otra entrevista o para una práctica de campo en la que se pueda observar y analizar los conceptos de área y de perímetro.

Agradezco que hubieras venido y estés participando de la investigación. Realizarlo es algo muy importante para mí.

Labores agrícolas y conceptos matemáticos involucrados

Realiza un guion de video en el que muestres algunas de las labores que comúnmente realizas cuando participas de la actividad agrícola. Ten presente mencionar los conocimientos matemáticos que reconoces en dicha actividad.

4.1.3.2. Investigación guiada

Con esta fase se pretendió dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo podría determinar un estudiante si existe o no relación entre el perímetro y el área de una figura geométrica?

Además, constó de cuatro observaciones: dos salidas al campo, específicamente a la almaciguera y, dos sesiones en aula de clase para realizar conversatorios sobre lo aprendido y realizar actividades de: (1) conservación del área y variación del perímetro, (2) demostración de la igualdad de área en diferentes polígonos, (3) medición del área para determinar la igualdad o diferencia en polígonos distintos y, (4) determinación de las unidades de medida del perímetro y del área.

Primera observación. ¿A igual perímetro igual área?

- Con una longitud fija de una cuerda y en una de las eras de almácigo, formar un rectángulo. Contar la cantidad de caras superiores de bolsas de almácigo. Contar la cantidad de lados de bolsa que están al borde del polígono formado.



Imagen 4: Unidades de medida en el contexto creado para las actividades en la almaciguera

- Con la misma longitud de cuerda, formar otro rectángulo. Contar nuevamente la cantidad de bolsas de almácigo y los lados de bolsa del exterior.
- Con la misma longitud de cuerda, formar un polígono rectangular no regular. Contar la cantidad de bolsas de almácigo y los lados de bolsa del exterior.
- Motivar la estimación de la cantidad de bolsas sin tener que hacer el conteo una a una.
- Motivar la estimación de los lados de bolsa sin tener que contarlos uno a uno.
- Asociando la cantidad de bolsas de almácigo al concepto y unidad de área, la extensión de cuerda al concepto de perímetro y el lado de bolsa como unidad del mismo, responder la pregunta ¿todas las superficies de igual perímetro tienen la misma área?

Segunda Observación ¿a igual área igual perímetro?

- En una almaciguera, tomar 40 bolsas de almácigo (o cualquier otra cantidad que pueda descomponerse en varios pares de factores) de una de las eras y formar un rectángulo de 10×4 , bordearlo con una cuerda y marcar el punto donde se cierra la cuerda.
- Con las mismas bolsas, armar un rectángulo de 8×5 , bordearlo de nuevo con la cuerda y marcar el nuevo punto donde se cierra la cuerda.
- Es posible que ambas marcas no queden en el mismo lugar, ¿qué puede estar sucediendo?
- Distribuir las bolsas en un rectángulo de 20×2 , bordearlo de nuevo con la cuerda y marcar el punto donde se cierra la cuerda.
- ¿Por qué las tres marcas no quedan en el mismo lugar? ¿Qué puede estar sucediendo?
Asociando la cantidad de unidades de almácigo al concepto de área y la longitud de la cuerda al concepto de perímetro, responder a la pregunta ¿todas las superficies de igual área tienen el mismo perímetro?

Actividades en el aula

Conservación del área

Las siguientes figuras son tajos de siembra de café separados, de un lote de una de las veredas cercanas.



Con las figuras, realiza la siguiente actividad:

- Recórtalas y únelas sin superponerlas y distribúyelas de la forma que quieras. Recuerda que entre los tajos hay caminos, quebradas, cercados o sembrados de otras plantas; por lo tanto, entre una imagen de tajo y otra, puedes dejar un espacio aproximado de 1 cm.

Observa las distribuciones que han hecho tus otros compañeros.

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Las tres distribuciones tienen la misma forma?
- ¿Alguna de las distribuciones se ve más grande que las otras?
- ¿En cuál de las tres formas de distribución, crees que cabe más café? ¿Puedes argumentar tu respuesta?
- Ahora, compara con la forma original.



Imagen 5: Croquis de lote sin tajos.



Imagen 6: Lote dividido en tajos.



Conceptualización y reconocimiento del área y del perímetro

Considerando lo que se ha analizado hasta hoy, responde:

- ¿Con cuál de los siguientes términos: cercado o tajo, relacionas el concepto de perímetro?

¿Por qué?

--

- ¿Con cuál de los siguientes términos: cercado o tajo, relacionas el concepto de área? ¿Por

qué?

--

Explica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- A mayor perímetro siempre corresponde mayor área.

- A un área determinada siempre le corresponde el mismo perímetro

--

- Observando la siguiente imagen y prestando atención a la porción señalada con la línea negra, responder:



Imagen 7: Lote para reconocimiento de perímetro y área.

5. El perímetro puede estar representado por:
 - a. Las matas de plátano junto con las de café.
 - b. El pasto.
 - c. Solamente las matas de café.
 - d. Solamente las matas de plátano.
6. El área se mediría:
 - a. En el borde que forman las matas de plátano.
 - b. En la superficie sembrada con matas de café.
 - c. Desde el borde exterior de las matas de plátano.
 - d. No puede tomarse el área porque hay un borde más extenso que el otro.

- ¿La conservación del área implica la conservación del perímetro?

Cada uno de los siguientes cuadrados, es la representación del espacio que ocuparía cada una de las bolsas del almácigo.



- Si cada cuadrado en el que se encuentra un almácigo, mide una unidad de lado, ¿cuál es la longitud del perímetro del cuadrado mayor?

- ¿Cuál es la medida del área?

⁸Tomado de la página <http://gt.clasificados.com/almacigo-de-cafe-injertado-17888>

-
- Recorta todos los cuadrados y distribúyelos en otras tres formas; en cada una de estas, los cuadrados deben quedar unidos o por un lado o por un vértice. Para cada caso, escribe el perímetro y el área:

1. Perímetro: _____. Área: _____.

2. Perímetro: _____. Área: _____.

3. Perímetro: _____. Área: _____.

- ¿El área depende de la forma?, ¿el perímetro depende de la forma?



Imagen 8: Conservación del área. Lote para redistribución de tajos.

- Con un esfero o marcador, traza los bordes del lote de la imagen y también los límites de los tajos; puedes dividir los tajos en otros, es decir, crear tus propios límites. Identifica las figuras geométricas que se forman allí. Con hilo, marca la longitud del perímetro.
- Luego recorta los tajos (las figuras) y arma con ellos otra forma del lote.
- Vuelve a tomar el perímetro de este nuevo lote, compáralo con el perímetro anterior y responde a las preguntas: ¿cuál de los perímetros tiene mayor medida? ¿Por qué?
- Ahora, teniendo presente que el área es la región contenida dentro de los límites, responde a esta otra pregunta ¿cuál de los lotes tiene mayor área? Explica el porqué.
- ¿Cómo podrías demostrar que los siguientes polígonos tienen la misma medida del área?

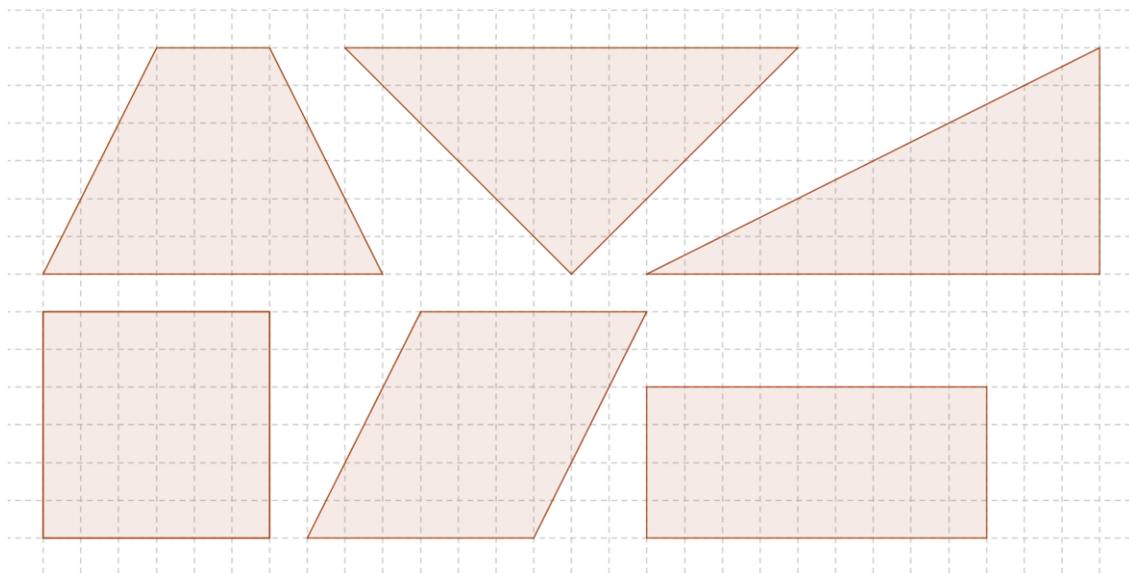
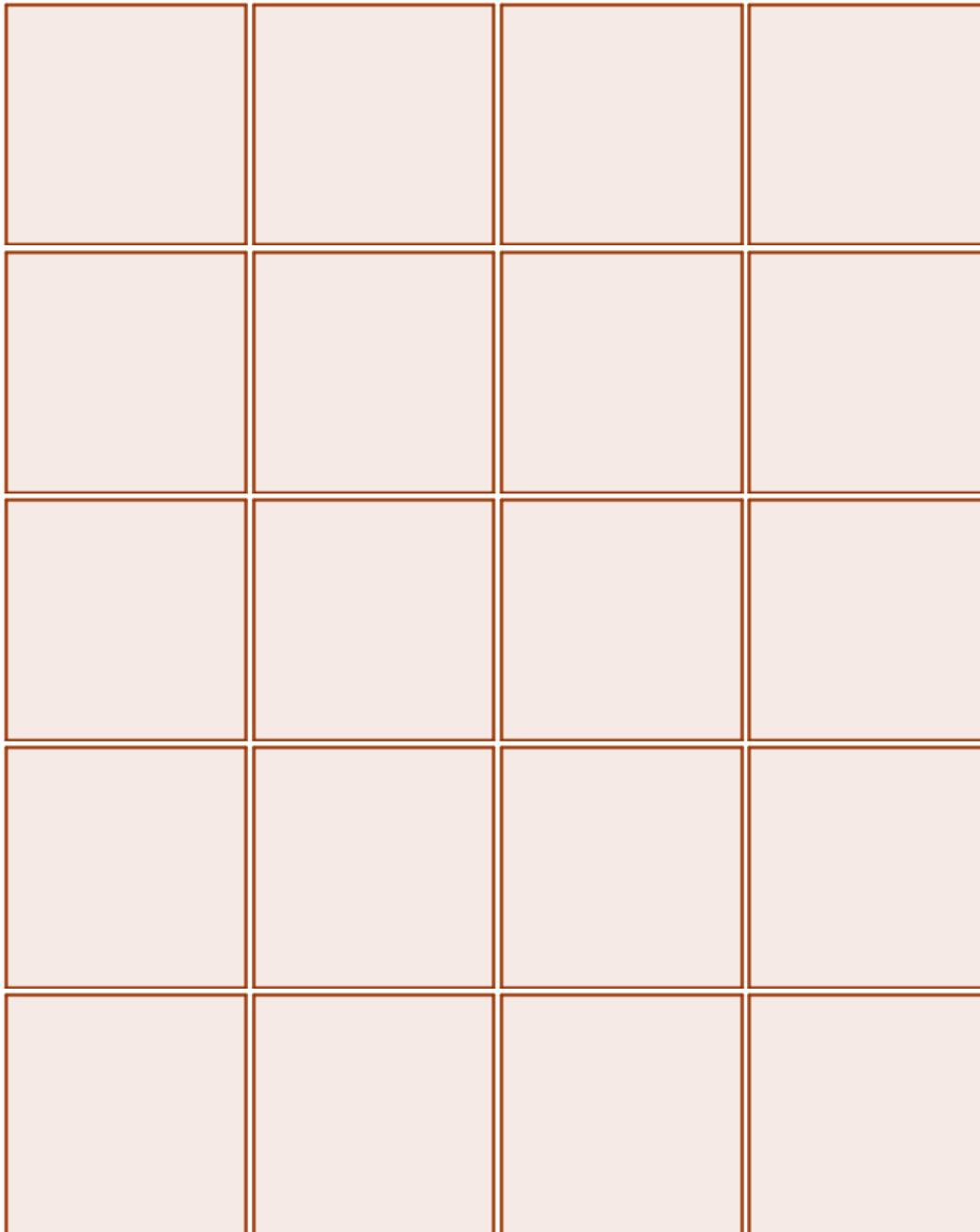
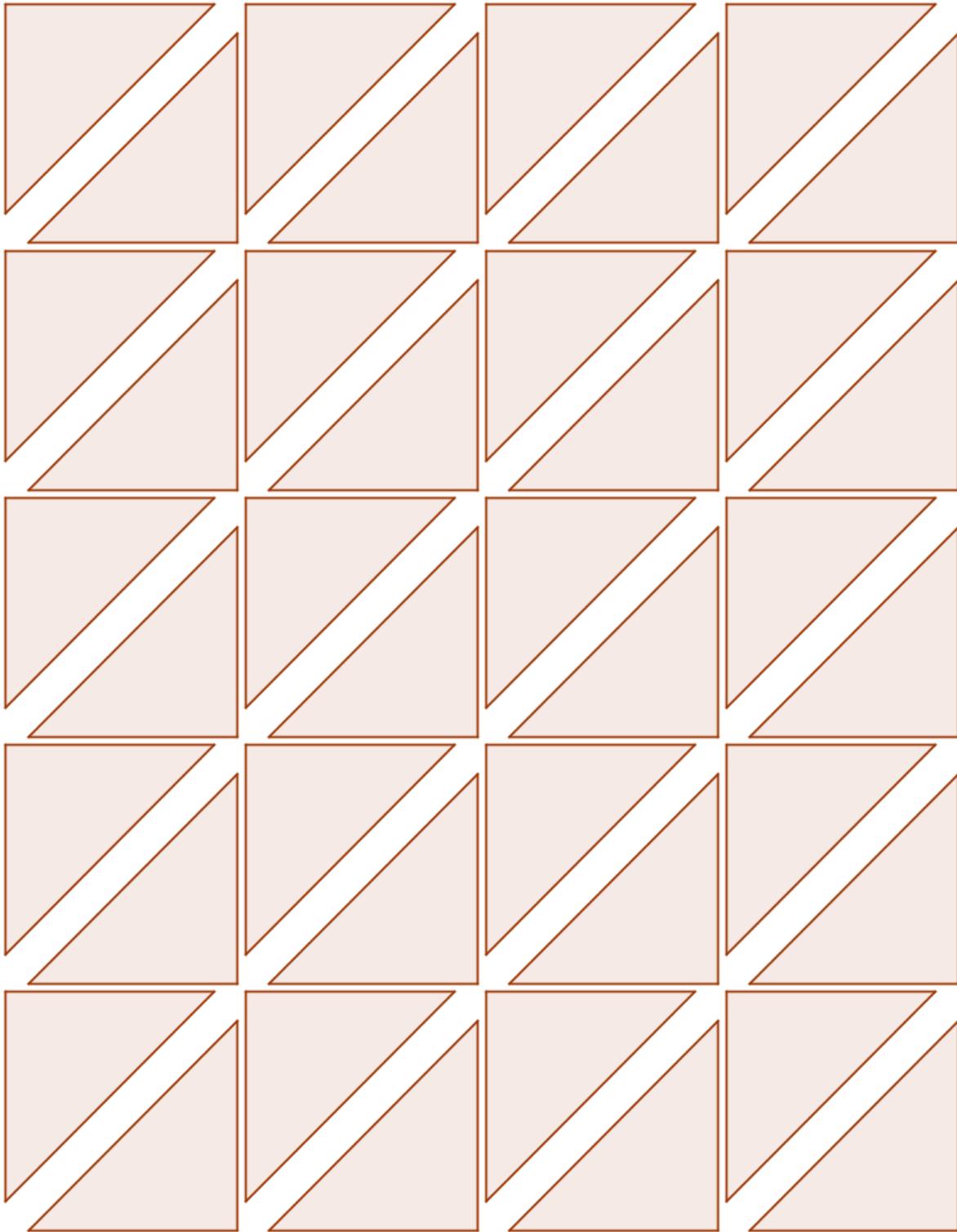


Imagen 9: Comprobar la igualdad del área en polígonos diferentes.

- Recorta las siguientes 20 fichas y arma con todos ellos la silueta que quieras.

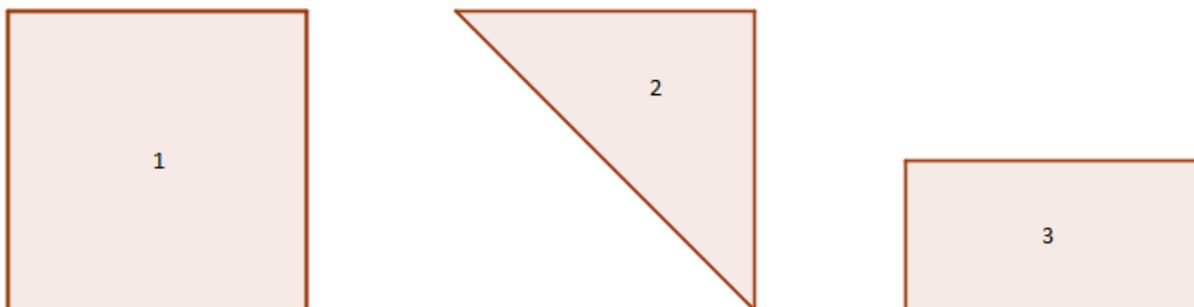


➤ Ahora, con las siguientes 40 fichas, arma una silueta igual a la anterior.



- Con respecto a las siluetas que armaste, responde la siguiente pregunta: ¿la silueta que tiene mayor cantidad de fichas tiene mayor área? Explica tu respuesta.

- Observa las siguientes tres figuras:



- Ahora, responde ¿cómo son las áreas de las figuras 2 y 3?

Ahora, prepárate para realizar una maqueta de la almaciguera, esa será nuestra próxima tarea.

4.1.3.3. Proyecto final de síntesis

Esta fase pretende dar respuesta a la pregunta: ¿cómo podría un estudiante demostrar su comprensión de los conceptos de perímetro y área, y de la independencia de sus medidas?

Para la evaluación, se considerarán los siguientes aspectos:

Evaluación Continua y Final

- Exposición del proyecto final de síntesis al grupo de estudio.

Solución de situaciones problema

- Consultar las unidades de medida del perímetro y las unidades de medida del área.

- Conseguir un tajo, preferiblemente plano. Dar el total de cercado necesario para encerrarlo y el total de café que puede ser sembrado en este. En ambos casos, se debió describir el proceso utilizado para hallar las respuestas.
- Si fuese necesario encerrar el patio de la sección de primaria del colegio, dar el total de metros de malla que son necesarios para bordearlo y, en caso de ser posible, estimar el costo total de la malla que se utilizaría.
- Bajo el supuesto de que se necesite pavimentar con fibra sintética el patio del colegio, estimar el total de unidades bidimensionales de fibra para cubrirlo y, en caso de ser posible, estimar el costo total de la fibra sintética utilizada.
- Exposición, en primera instancia, al grado quinto de la institución educativa a la que pertenecen los participantes y, en segunda instancia, al cuerpo docente del mismo establecimiento educativo. Durante esta, los estudiantes dieron cuenta del proceso de comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, además, el modo en que resolvieron las situaciones planteadas.

Exposición ante el público

Para esta sustentación, se debe preparar una presentación con diapositivas y una maqueta de la almaciguera. En la exposición, se debe explicar el proceso llevado a cabo durante la investigación; la relación lote-tajos y su asociación con área y perímetro; las actividades que se realizaron para determinar la independencia entre el área y el perímetro; los métodos de

comprobación de la conservación del área; las unidades de medida del perímetro y del área y, finalmente, los modelos aritméticos para el cálculo de ambos.

Presentación con diapositivas

- En fotografías de fincas cafeteras, también llamados cafetales, explicar la relación lote-tajos y almaciguera-eras. Mostrar los perímetros, las áreas y hablar sobre las figuras geométricas ahí presentes.
- Presentar imágenes que den cuenta de las actividades realizadas en la almaciguera y las primeras visualizaciones de la independencia de las medidas del área y el perímetro.
- Mostrar las diferentes distribuciones que pueden hacerse con las fotografías de tajos y, con ello, la conservación de área en el lote y la variación del perímetro de este.
- Mostrar la igualdad de áreas de polígonos diferentes.
- Dar cuenta de las unidades de medida del área y del perímetro y de los procesos utilizados para dar solución a los problemas propuestos.

Maqueta de representación de las eras de almácigo

- Con una cuerda, de la cual siempre se usará la misma longitud y se tomará como línea poligonal cerrada, demostrar que la conservación del perímetro no implica, necesariamente, la conservación del área. Para ello, formas diferentes figuras con la cuerda y cuenta siempre las unidades que encierras.

- Con una misma cantidad de unidades que representen las bolsas de almácigo, preferiblemente un número que pueda descomponerse en mínimo tres pares de factores, formar diferentes figuras y a cada una tomarle el perímetro. Se debe mostrar que con la misma área, con las unidades distribuidas de diferente forma, el perímetro varía.

4.1.4. DESCRIPTORES DE CATEGORÍAS POR NIVEL

Como aporte fundamental del marco conceptual de la EpC a la validación de la investigación, se elaboró y refinó, en la medida de los resultados y aportes brindados por los participantes, una rúbrica que relaciona las dimensiones y los niveles de la comprensión con categorías elegidas a priori. Para cada una de estas, vistas a la luz de las dimensiones y niveles, se redactaron unos descriptores que, como su nombre lo indica, permiten determinar o describir el proceso de comprensión de los participantes de los conceptos objeto de estudio de esta investigación. Este proceso de descripción de la comprensión requirió, además, de la transcripción de las entrevistas, los conversatorios y las observaciones, tanto en el campo como en el aula; también, de la lectura y la valoración de los test, cuestionarios y de las sesiones de realimentación que los participantes abordaban. Esta triangulación nos permitió analizar el proceso de comprensión de cada participante y la consecuente ubicación en el nivel de comprensión en las categorías de cada dimensión.

A continuación, se presentan los descriptores finales de nivel, de cada una de las dimensiones del marco conceptual de la EpC. Como se dijo anteriormente, estos descriptores surgieron a priori, pero se fueron refinando a medida que la investigación avanzaba.

4.1.4.1. Dimensión de contenido

Tabla 8: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Contenido.

Categoría Nivel	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del Área y la del Perímetro
Ingenuo	<p>Manifiesta no saber qué es el área. No encuentra vinculación entre el área y situaciones del diario vivir. Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca de la relación entre una superficie y su área. Carece de argumentos para establecer que el área es la medida de la superficie, es decir, del interior de la figura. Reconoce que un lote se compone de tajos.</p>	<p>Manifiesta no saber qué es el perímetro. No encuentra vinculación entre el perímetro y situaciones del diario vivir. Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca del reconocimiento del perímetro en eras, imágenes o maquetas. Carece de argumentos para establecer que el perímetro es la medida del límite de la superficie, es decir, el contorno de la figura.</p>	<p>Toma por cierta alguna de las afirmaciones: - A mayor perímetro, mayor área. - Dos o más tajos o eras de diferente forma tienen diferente área. - Dos o más tajos o eras de igual perímetro tienen la misma área.</p>
Novato	<p>Repite y toma como ciertas las definiciones de área que le suministran quienes representan la autoridad. En las formas geométricas de los cultivos de café y otras especies, identifica el área y el perímetro.</p>	<p>Repite y toma como ciertas las definiciones de perímetro que le suministran quienes representan autoridad. Establece relaciones entre los tajos y las figuras geométricas. Reconoce el perímetro en eras, maquetas a escala o imágenes.</p>	<p>Repite y toma como cierta la dependencia entre las medidas del área y del perímetro.</p>
Aprendiz	<p>En eras, maquetas a escala o imágenes, muestra que reconoce la región que representa el área. Relaciona el área de las eras con la cantidad de almácigos. Manifiesta la necesidad de medir el área de una era. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</p>	<p>Manifiesta la necesidad de medir el perímetro en unidades de longitud. Relaciona el perímetro con la longitud del cercado, las barreras agrícolas u otros delimitadores del terreno. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</p>	<p>Manifiesta la posibilidad de independencia entre las medidas del área y el perímetro. Esclarece en qué casos se estima el área y en qué casos el perímetro.</p>

Maestría	Explica situaciones que involucren el concepto de área en el contexto del cultivo del café. Explica situaciones que involucren el concepto de área en contextos diferentes al del cultivo del café. Expresa el área calculada en unidades bidimensionales. Comprende la razón por la cual el área se expresa en unidades bidimensionales.	Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en el contexto del cultivo del café. Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en contextos diferentes al del cultivo del café. Expresa el perímetro en unidades de medida estandarizadas internacionalmente.	Reconoce que superficies de diferente forma y diferente área pueden tener igual perímetro. Reconoce que superficies de diferente forma y perímetro pueden tener la misma área.
----------	--	---	---

4.1.4.2. Dimensión de método

Tabla 9: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Método.

Nivel \ Categoría	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Ingenuo	Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual área. No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el área. No utiliza algún procedimiento para relacionar el área y la forma.	Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual perímetro. No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el perímetro. No utiliza algún procedimiento para relacionar el perímetro con la longitud.	No utiliza algún método que permita verificar alguna de las siguientes afirmaciones que toma por ciertas: - A mayor perímetro, mayor área. - Dos o más tajos o eras de diferente perímetro tienen diferente área. - Dos o más tajos o eras de igual perímetro tienen la misma área.
Novato	Establece la medida del área a través del conteo de unidades concretas como bolsas de almácigo o recortes de imágenes de tajos. Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos de igual área tienen igual forma.	Establece la medida del perímetro a través del conteo de unidades longitudinales. Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos de igual perímetro tienen igual forma. Utiliza métodos que	Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos o eras de igual área tienen igual perímetro. Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos o eras de diferente área tienen

	Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos de diferente área tienen diferente forma.	solamente le permiten demostrar que dos o más tajos de diferente perímetro tienen diferente forma.	diferente perímetro.
Aprendiz	Manifiesta la necesidad de realizar cálculos aritméticos para expresar el área de eras o tajos con forma rectangular. A través de la superposición y transformación de gráficas y de imágenes, establece la igualdad o diferencia de áreas. Reconoce que el área de una figura se conserva a pesar de que esta sufra transformaciones. Reconoce que el área de una figura se conserva a pesar de que esta sufra transformaciones y que esto puede implicar cambios en el perímetro.	Manifiesta la necesidad de realizar cálculos aritméticos para expresar el perímetro de eras o tajos con forma rectangular. A través del uso de elementos comunes establece la igualdad o diferencia de perímetros. Reconoce que la conservación del perímetro no se corresponde con la conservación del área.	Muestra que dos regiones de igual perímetro pueden tener diferente área. Muestra que dos regiones de igual área pueden tener diferente perímetro. Muestra cómo la conservación de la medida del área (por diferentes manipulaciones y transformaciones) no se corresponde con la conservación de la medida del perímetro. Muestra cómo la conservación de la medida del perímetro (por diferentes manipulaciones) no se corresponde con la conservación de la medida del área.
Maestría	Realiza el cálculo aritmético para determinar el área de las eras o tajos de formas rectangulares. Resuelve situaciones que involucren la medida del área en el contexto del cultivo del café y la cantidad de plantas que pueden ser sembradas en él. Resuelve situaciones que involucren la medida del área en contextos diferentes al del cultivo del café. Calcula el área de formas regulares y no regulares.	Realiza el cálculo aritmético para determinar el perímetro de las eras o tajos de formas rectangulares. Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en el contexto del cultivo del café. Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en contextos diferentes al del cultivo del café. Calcula el perímetro de formas regulares y no regulares.	A través de la transformación de figuras muestra la independencia de las medidas del área y el perímetro.

4.1.4.3. Dimensión de propósitos

Tabla 10: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Propósitos.

Nivel \ Categoría	Relación: <i>área</i> : <i>contexto</i>	Relación: <i>perímetro</i> : <i>contexto</i>
Ingenuo	No establece relaciones entre los términos agrícolas (lote, tajo y era) con el término geométrico de área. No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas. No relaciona la medida de la superficie del tajo con el concepto de área.	No establece relaciones entre los términos agrícolas (barrera, cercado y camino) con el término geométrico de perímetro. No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas. No relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el perímetro.
Novato	Percibe algunas relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello, con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de área. Manifiesta la necesidad de relacionar la medida de la superficie del tajo con el concepto de área.	Percibe algunas relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello, con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de perímetro. Manifiesta la necesidad de relacionar la longitud de las barreras u otros límites con el perímetro.
Aprendiz	Relaciona la medida de la superficie del tajo o de la era con el concepto de área. Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de área.	Relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el concepto de perímetro. Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de perímetro.
Maestría	Aplica lo aprendido para estimar el área de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad de cafetos que pueden ser sembrados. Relaciona lo que sabe de área con otras disciplinas y resuelve situaciones como el cálculo de área de contextos no agrícolas.	Aplica lo aprendido para estimar el perímetro de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad y de alambre necesario para el cercado. Relaciona lo que sabe de perímetro con otras disciplinas y resuelve situaciones reales, en contextos diferentes al café, en las que se necesita el cálculo del perímetro.

4.1.4.4. Dimensión de formas de comunicación

Tabla 11: Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de Formas de Comunicación

Categoría Nivel	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Ingenuo	No da cuenta de reconocimiento de los términos área y perímetro.	No utiliza las palabras área y perímetro para explicar la relación entre lotes y tajos.
Novato	Las palabras área y perímetro tienen algún significado para el estudiante, lo relaciona con las barreras y los tajos o las eras, pero, no da cuenta del significado correcto.	Expresa inseguridad al relacionar los términos propios de la agricultura (lote, tajo, barrera y cercado) con los términos y conceptos geométricos (área y perímetro). No argumenta con claridad los procedimientos llevados a cabo para la realización de las tareas de medición o comprobación de supuestos.
Aprendiz	Expresa de modo informal el significado de los términos área y perímetro de acuerdo al contexto de la agricultura del café.	Expresa la relación entre los términos, los combina con flexibilidad y coherencia para explicar cada uno de los conceptos. Explica la forma de los cultivos en relación a las figuras planas que conoce. Establece un discurso coherente alternando entre las figuras geométricas y los cultivos que conoce.
Maestría	Explica, en el cultivo del café y otros contextos, dónde está representada el área y dónde está representado el perímetro. En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, presenta una explicación formal sobre el significado de los términos área y perímetro. En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, expresa el perímetro en unidades longitudinales estandarizadas internacionalmente. En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, expresa el área en unidades bidimensionales estandarizadas internacionalmente.	Explica, con diferentes ejemplos y argumentos, los conceptos de área y de perímetro. Da cuenta de las unidades utilizadas para presentar la medida del área y del perímetro. Explica la independencia entre las medidas del área y del perímetro, utilizando correctamente los términos y dando ejemplos de ello.

4.1.5. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA CONTINUA

Esta investigación no se hizo dentro de las actividades académicas institucionales contempladas en el currículo, pues los participantes que hicieron parte de ella, desarrollaron las actividades extra jornada; por lo tanto, los resultados obtenidos no fueron considerados para la aprobación de los contenidos del área y, menos aún, para la promoción del grado escolar.

El proceso de valoración, más que el de calificación, consistió en compartir con los participantes, en un primer momento y, de manera sucinta, los elementos del marco conceptual de la EpC: las dimensiones, los niveles, el tópico generativo, las metas de comprensión y los niveles; posteriormente, el diálogo con ellos sobre los progresos en su comprensión, permitió hacer uso de la heteroevaluación. Tal proceso se llevaba a cabo mediante conversatorios que posibilitaban el recuerdo de los procesos vividos en la sesión anterior y de las conclusiones elaboradas; estas repuestas, se registraban en audio y en medio escrito para contrastarlas con los descriptores. Los participantes reflexionaban sobre si las actividades habían tenido significancia o no para la comprensión o si, por el contrario, se requería de una actividad complementaria; esto los llevó a tomarse en serio la responsabilidad de culminar las actividades en un tiempo extra cuando la duración de la sesión era insuficiente para dar término a las mismas.

Otro punto importante fue el de la co-evaluación; esta consistía en repartir diferentes preguntas entre los participantes, uno de ellos daba respuesta y los demás presentaban argumentos para afirmar o desvirtuar la afirmación; el investigador aportaba información o preguntas orientadoras del tema y registraba estos hechos para su posterior análisis. El propósito

de la evaluación diagnóstica continua, más que calificar o evaluar para la aprobación o promoción, es fomentar los desempeños altos de comprensión en cada una de las dimensiones y esto fue lo que se puso en práctica durante la investigación.

4.1.5.1. ¿Evaluar o calificar?

En relación a lo anterior y, en especial, a los criterios de aprobación o promoción, Escobar (2007) dice que estos deben estar formulados

...en términos que admitan la flexibilidad en su aplicación, en coherencia con la diversidad de situaciones que se puedan plantear, sin perder de vista que el objetivo último de las decisiones sobre promoción es favorecer que el estudiante pueda desarrollar las capacidades expresadas en los logros y estándares de cada nivel de formación. (p. 46)

Dicho de otro modo, lo que se entiende es que la decisión de aprobación o promoción responde a un plan previamente trazado y al cual se le brinda una amplia gama de estrategias de ejecución satisfactoria. En este sentido, se propone una reflexión entre lo que se ha dicho que es evaluar formativamente y lo que es calificar. “La calificación es una interpretación de las mediciones que permite emitir un juicio valorativo a partir de una escala establecida. Mientras que la medición es una comparación respecto a un patrón acordado” (Escobar, 2007, p. 42). En este orden de ideas, es el docente quien en última instancia asigna la calificación en un momento crucial del proceso y quien determina si los progresos observados en el estudiante son equiparables a los criterios de promoción o aprobación institucional.

El marco de la EpC se corresponde perfectamente con la propuesta de evaluación formativa que se orienta desde el MEN y, por lo tanto, la guía curricular propuesta en el presente informe de investigación se ajusta a los requerimientos nacionales; además, podrá ser adecuada a las necesidades y particularidades de cada institución educativa, explicitadas en su modelo evaluativo.

A modo personal, se sugiere la siguiente asociación de niveles de desempeño con la escala valorativa nacional.

Nivel de maestría → Desempeño superior

Nivel de aprendiz → Desempeño alto.

Nivel de novato → Desempeño básico.

Nivel de ingenuo → Desempeño bajo.

En el ámbito de la cotidianidad escolar, en el que se aprecia la necesidad de calificar y llevar registros que ayuden a determinar la aprobación o promoción de un grado o ciclo a otro, se sugiere, que los descriptores de nivel estén en absoluta concordancia con los criterios de aprobación consignados en el sistema institucional de evaluación y, sujeto a esto, se tomará la decisión, por parte del docente o el cuerpo colegiado responsable de ello, si el estudiante es aprobado o no.

4.2. ANÁLISIS DEL PROCESO DE COMPRENSIÓN DE LOS PARTICIPANTES

A continuación, se describe el proceso de comprensión de cada uno de los participantes, cuyos seudónimos son Messi, Minerva e Isis, a través de la aplicación de la unidad curricular en cada una de las fases, a la luz de la rúbrica de Dimensiones de Categoría por Nivel.

4.2.1. MESSI

Participante masculino de 15 años.

Es residente en la vereda de La Soledad; joven que se destaca por ser un habitual sembrador y recolector de café; dichas actividades las realiza en jornada extraescolar o en recesos estudiantiles.

4.2.1.1. Fase de exploración

Para el interés de esta investigación, se evidencia que el estudiante utiliza lo aprendido en su actividad agrícola para representar ideas matemáticas y abstraer el concepto de superficie desde la concepción geométrica. En la entrevista individual que se le hizo, se transcribieron las repuestas (ver anexo E), las cuales fueron contrastadas con la rúbrica de descriptores de categorías por nivel que se explicó en el capítulo 4 numeral 4.1.4 y se evidencian las siguientes situaciones:

- Reconoce las figuras geométricas que se forman al dividir el lote en tajos, pero, no se atreve a asegurar si los límites de los tajos son el perímetro o el área; en la pregunta: "...en esas

divisiones de los lotes ¿vos has visto que formen figuras geométricas?”, respondió: “*Vea, por ejemplo hay unos caminos en unos lotes que forman como unas zetas (z, z, z), eso forma triángulos, cuadrados*”.

- Conoce la existencia de los términos área y perímetro, pero, desconoce su definición e identificación en una figura o región geométrica: “...*Ahora, de geometría, te voy a mencionar dos conceptos que se utilizan mucho y que son los que hacen parte de esta investigación: perímetro y área. ¿Los has escuchado alguna vez en la vida?*”, la respuesta fue: “*Sí, varias veces*”; luego se le preguntó: “*¿Te acordás bien, bien de eso, o ahí más o menos?*”, respondió “*Ahí más o menos*”. Más adelante se le pregunta “*¿el perímetro es más parecido al tajo o es más parecido al lindero?, es decir, ¿perímetro es lo mismo que lindero o es lo mismo que tajo?*”, a lo que respondió “*pues, yo digo que lindero*”; “*entonces ¿el área sería referente a qué?*”, “*pues al tajo, ¿o no?*”, respondió el estudiante. Con relación a la definición de área y de perímetro, no dio ninguna; además, trajo a colación que en el cuestionario le había preguntado por esas definiciones a una hermana, a un primo, a un vecino y al papá y que ellos le habían dicho cosas distintas. Las respuestas que le dieron se encuentran en las siguientes imágenes:

besino

perimetro: es la suma de los lados de una figura

area: es una medida

Papá

perimetro: que es el perimetro de una figura o poligono

Imagen 10: Respuestas de personas cercanas a Messi sobre la definición de área y perímetro.

area: lo que mide la altura y base

Memoria

perimetro: perimetro de una circunferencia de una figura

area: es la medida de la región o superficie

Punto

perimetro: perimetro exterior de un edificio

area: el area superficial y el volumen

Imagen 11: Continuación de respuestas de personas cercanas a Messi sobre la definición de área y perímetro.

- No relaciona la longitud de esos límites con el tamaño de las superficies, sino con la utilidad práctica que representa; esto pudo evidenciarse en las respuestas a las preguntas sobre el

cercado necesario para bordear toda la finca o los tajos, uno de sus argumentos para explicar la cantidad necesaria de cercado fue: “... *si es toda (la finca) de café, no necesitamos separar el café y si es toda de ganado tampoco necesitamos. Pero, sí es para los dos sí, para separar el ganado del café*”.

- Relaciona la dimensión de la superficie de la finca con las condiciones de tierra para el sembrado y no por sus medidas; por ejemplo, a la pregunta de por qué es más pequeña una finca que la otra, dice: “*Porque habían muchas peñas. No tierra así... como la que vemos allá, sino, peñas, lomas y no se podía pegar la raíz de la tierra*”. Es decir, que las medidas longitudinales y de superficie, las asocia a la fertilidad.
- Demuestra que no desconoce que las dimensiones tienen relación con la capacidad de albergar una determinada cantidad de cultivo; es decir, a la pregunta ¿por qué la finca Los Farallones es la más grande?, él responde: “*Porque el terreno se alarga más, es más montañosa, y le cabe más café y es muy alta*”.
- Tiene conocimientos sobre el hecho de medir longitudes y la necesidad de hacerlo, manifestados estos durante la entrevista en frases como “*Pues, si va a sembrar por primera vez en un lote o tajo, lo tiene que medir con la vara que mide 130 cm y entonces ya cuenta cuántos palos le caben*”. Se aprecia que carece de un método o modelo matemático que le permita estimar la cantidad de superficie o el número de matas que pueden ser sembradas en ella (lote o tajo según el caso).

- Con respecto al área, como el contenido de una superficie delimitada, da a conocer que, aunque el término no lo define con claridad y seguridad, la propiedad de ser dividida en partes menores no le es ajena; en una de sus explicaciones sobre la relación lote-tajo expresa: *“el patrón le dice a un trabajador: ‘me coge este tajo’, o sea que está dividido, como dije yo, por los árboles y por el camino... Y un lote puede dividirse”*.

- Se pone de manifiesto una de las dificultades para la comprensión del área como propiedad independiente de la forma. Con el objetivo de enfocar la conversación en la relación dimensiones de superficie y límites, con la cantidad de plantas posibles de sembrar en ella, se planteó el supuesto caso de que las tierras sean igualmente fértiles y se elaboró la siguiente pregunta: *“¿el tajo más grande es el que tiene linderos más largos y al que más café le cabe?”*, su respuesta fue: *“El tajo más grande sobre el lote...sí, es el que tiene linderos más largos”*. Este punto, en especial, generó bastante interés para la investigación dado que es una de las situaciones enunciadas por Corberán (1996) y por Del Olmo et al. (1993) relacionada con las dificultades para comprender la independencia de las medidas del área y el perímetro. Tales situaciones fueron ampliamente presentadas en el capítulo 1 en el apartado 1.1.3.

Una de las dificultades de la comprensión enunciadas por Gardner y Boix (1994), dos de los investigadores que propusieron el marco conceptual que orienta esta investigación y que fue expuesto en el capítulo 2, es que las explicaciones o teorías acerca del mundo, que se aceptan o generan desde la niñez, son muy difíciles de reemplazar y esto genera barreras y complicaciones para la comprensión. Específicamente, en este caso, hay que enfrentarse a la aceptación de que a mayor perímetro mayor contenido interno.

Después de este análisis y de haber llevado a cabo la triangulación, el estudiante fue caracterizado tal y como se expone a continuación:

Caracterización parcial de la comprensión, fase de exploración

Sus desempeños, en esta fase de la investigación, se equipararon con los establecidos en el nivel de ingenuo en cada una de las categorías hasta el momento establecidas; estas serán contrastadas con las categorías in situ que puedan emerger y los desempeños serán refinados de acuerdo a lo evidenciado en las siguientes fases. Los desempeños alcanzados, se resaltan en negrilla y subrayado.

Tabla 12: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Contenido.

Categoría Nivel	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del Área y la del Perímetro
Ingenuo	<p><u>Manifiesta no saber qué es el área.</u> <u>No encuentra vinculación entre el área y situaciones del diario vivir.</u> <u>Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca de la relación entre una superficie y su área.</u> <u>Carece de argumentos para establecer que el área es la medida de la superficie, es decir, del interior de la figura.</u> <u>Reconoce que un lote se compone de tajos.</u></p>	<p><u>Manifiesta no saber qué es el perímetro.</u> <u>No encuentra vinculación entre el perímetro y situaciones del diario vivir.</u> <u>Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca del reconocimiento del perímetro en eras, imágenes o maquetas.</u> <u>Carece de argumentos para establecer que el perímetro es la medida del límite de la superficie, es decir, el contorno de la figura.</u></p>	<p><u>Toma por cierta alguna de las afirmaciones:</u> <u>- A mayor perímetro, mayor área.</u> <u>- Dos o más tajos o eras de diferente forma tienen diferente área.</u> <u>- Dos o más tajos o eras de igual perímetro tienen la misma área.</u></p>

Tabla 13: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Métodos.

Nivel \ Categoría	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Ingenuo	<p>Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual área.</p> <p>No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el área.</p> <p>No utiliza algún procedimiento para relacionar el área y la forma.</p>	<p>Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual perímetro.</p> <p>No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el perímetro.</p> <p>No utiliza algún procedimiento para relacionar el perímetro con la longitud.</p>	<p>No utiliza algún método que permita verificar alguna de las siguientes afirmaciones que toma por ciertas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - A mayor perímetro, mayor área. - Dos o más tajos o eras de diferente perímetro tienen diferente área. - Dos o más tajos o eras de igual perímetro tienen la misma área.

Tabla 14: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Propósitos.

Nivel \ Categoría	Relación: <i>área : contexto</i>	Relación: <i>perímetro : contexto</i>
Ingenuo	<p>No establece relaciones entre los términos agrícolas (lote, tajo y era) con el término geométrico de área.</p> <p>No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas.</p> <p>No relaciona la medida de la superficie del tajo con el concepto de área.</p>	<p>No establece relaciones entre los términos agrícolas (barrera, cercado y camino) con el término geométrico de perímetro.</p> <p>No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas.</p> <p>No relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el perímetro.</p>

Tabla 15: Messi, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Formas de Comunicación.

Nivel \ Categoría	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Ingenuo	<p>No da cuenta de reconocimiento de los términos área y perímetro.</p>	<p>No utiliza las palabras área y perímetro para explicar la relación entre lotes y tajos.</p>

4.2.1.2. Fase de investigación guiada

Se notó evolución en cuanto a la comprensión de área y perímetro, en el uso de métodos para ratificar o desechar sus afirmaciones, en la estimación y cálculo del perímetro y el área de una región poligonal, en la comprensión de la conservación del área, en la independencia de las medidas del área y del perímetro y, por último, en el uso correcto de los términos objeto de estudio de esta investigación. Las situaciones a destacar son:

Primera observación, finca la Soledad

- Explica, sin lenguaje técnico o fluido, que los tajos son subdivisiones del lote, con lo que se evidenció que intuitivamente reconoce la propiedad del área total como la suma de sus partes, pero que, para ese momento carecía de dominio de lenguaje matemático y de coherencia en el discurso. A la pregunta ¿toda la finca es un lote?, respondió: “*¡No! Si la finca toda es llana o montañosa, ahí se dividen los lotes...* [trazando en el aire con las manos las curvaturas de las montañas] – *Pues la finca va así, después así ¿usted ve esta cordillera?, sube ahí en punta y allá vuelve y baja así, ahí se dividen, un lote así y por el otro lado está el otro lote*”.
- Reconoce varios elementos que utilizan para la separación y delimitación entre lotes y tajos: cercados, caminos, barreras naturales. Posteriormente, después de una conversación grupal, se llegó a la conclusión de que estos son el perímetro.
- Utiliza instrumentos para la medición de longitudes como la “*vara guía*” de la cual dice que existen 2 tipos: 1,20 m. para la separación en calle (surcos) y 1,30 m. para la separación en puente (cambio de surco).

- Comprendió la comparación *lote : almaciguera, tajo : era* y en ellas visualizó las figuras geométricas formadas.
- Estableció la semejanza entre los separadores de almaciguera con los de tajos y ambos con los límites de las figuras geométricas.
- Asumió con naturalidad el concepto de perímetro, al realizar las asociaciones anteriormente descritas con la definición de límites de una región poligonal.
- Asumió con naturalidad el concepto de área, al realizar las asociaciones anteriormente descritas con la definición de región contenida al interior de una región poligonal.
- Conservaba la creencia de que a mayor perímetro mayor área.
- Después de varios trazados con la cuerda guía, de la cual expresó que hacía las veces de perímetro sobre las bolsas llenas con la tierra de almácigo sembrado (concebida como área), comprendió que con una misma longitud de cuerda era posible encerrar diferentes cantidades de bolsas, con lo que expresó la conclusión de que con un *mismo perímetro se pueden obtener diferentes áreas*.
- Recurrió a sumas y multiplicaciones para determinar el número de bolsas contenidas dentro de la región poligonal o figura.



Imagen 12: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual perímetro, diferente área.

- Respondió con acierto a las preguntas: ¿a mayor perímetro siempre le corresponde mayor área?, ¿a un mismo perímetro le corresponde siempre una misma área? Y argumentó que depende de cómo se doble la cuerda.

- No tuvo respuesta para las preguntas ¿a mayor área siempre le corresponde mayor perímetro?, ¿a la misma área siempre le corresponde el mismo perímetro?



Imagen 13: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual perímetro diferente área.

Segunda observación, finca la Soledad

- Recordó y explicó con mediana claridad lo ocurrido en la sesión anterior, mediana claridad porque hace uso del lenguaje coloquial y aún no discurre con términos propios de la matemática.
- Encontró fácilmente pares de números cuyo producto fuera 40. Esto debido a que la sesión de trabajo se llevaría a cabo con 40 bolsas distribuidas en rectángulos diferentes.
- No dio crédito a que en la distribución de 10×4 , cuyo perímetro se estimó con la cuerda y se marcó con cinta, fuera distinto al perímetro en la distribución de 8×5 . Incluso, empleó el argumento de que la cuerda estaba más templada en unos sitios.



Imagen 14: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual área, diferente perímetro.



Imagen 15: Participantes en la almaciguera realizando la actividad: igual área, diferente perímetro.



Imagen 16: Observación de los puntos de los perímetros de rectángulos de 8x5 y 10x4.

- Aceptó la diferencia de perímetros cuando se contaron los lados de cada bolsa en cada rectángulo y obtuvieron 28 para el de 10x4 y 26 para el de 8x5 y, cuando se hizo la distribución de 20x2, cuyos lados de bolsa contados fueron 44, expresó: “¡jum!, *ni siquiera pasó por el 30*”. Además la diferencia de longitudes marcadas en la cuerda fue bastante notoria.



Imagen 17: Observación del punto de uno de los perímetros anteriormente medidos en la actividad igual área, diferente perímetro.



Imagen 18: Observación de los diferentes perímetros obtenidos con rectángulos de 40 unidades de bolsa: 8×5 , 10×4 y 20×2 .

- Al finalizar la sesión concluyó que, con la misma área se pueden obtener diferentes perímetros.
- Encontró y explicó el modo de estimar el área de un rectángulo multiplicando las longitudes de los lados.
- Encontró y explicó el modo de estimar la longitud del perímetro de un rectángulo sumando el lado mayor con el menor y luego multiplicando por dos.

Tercera observación, Institución Educativa Santa Rita.

Fue una sesión en la que se aplicó un test de trabajo grupal; en esta se pretendió observar la capacidad de argumentación acerca de los conceptos de área y perímetro y la independencia de sus medidas; además, se pretendió observar si los reconocían y diferenciaban en fotografías de lotes y tajos sembrados de café y en textos escritos utilizando términos propios de las matemáticas. De esta actividad, se concluyó que el estudiante:

- Asocia correctamente los términos tajo y cercado con los términos o elementos geométricos que representan, área o perímetro respectivamente. Esto se interpreta gracias a las respuestas de las preguntas 1 y 2 del test.
- Argumenta el por qué a mayor perímetro no corresponde necesariamente mayor área.
- Argumenta el por qué a mayor área no corresponde necesariamente mayor perímetro.
- Carece de fluidez para expresarse coherentemente con relación al término central de la pregunta, evidenciado en las respuestas a las preguntas 3 y 4.
- Reconoce en fotografías de lotes y tajos los elementos que representan el área y el perímetro (ver repuestas a las preguntas 5 y 6).

MESSI

De acuerdo a lo que hemos conversado hasta hoy.

1. ¿Con cuál de los siguientes términos: cercado y tajo, relacionas el concepto de perímetro?
 yo digo que el cercado lo podemos relacionar con el perímetro.

2. ¿Con cuál de los siguientes términos: cercado y tajo, relacionas el concepto de ^{Área} perímetro?
 el tajo si se relaciona con el área

Explica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

3. A mayor perímetro siempre corresponde mayor área.
 no, porque la podemos poner de diferentes formas y obtener diferentes perímetros.

4. A un área siempre le corresponde el mismo perímetro
 no, porque con el misma área pero tener diferentes perímetros.

Observando la siguiente imagen y prestando atención a la porción señalada dentro con la línea negra.



5. El perímetro puede estar representado por:

- a. Las matas de plátano junto con las de café.
- b. El pasto.
- c. Solamente las matas de café.
- d. Solamente las matas de plátano.

6. El área se mediría:

- a. En el borde que forman las matas de plátano.
- b. En la superficie sembrada con matas de café.
- c. Desde el borde exterior de las matas de plátano.
- d. No puede tomarse el área porque hay un borde más extenso que el otro.

Imagen 19: Respuestas de Messi en reconocimiento y conceptualización de área y perímetro y la independencia de sus medidas.

- Demuestra comprender que el área se conserva a pesar de las transformaciones y nuevas distribuciones de sus objetos o elementos anteriores.

- Confunde los términos forma y distribución pero no por ello asume que el área sufre cambios en su medida.



Imagen 20: Respuesta Messi en relación a la conservación del área en el contexto de la agricultura del café.

- Evidencia la necesidad de establecer comparaciones y realizar medidas para lanzar juicios sobre las diferencias en la dimensión del área. Esto se evidenció en la entrevista posterior a la

siguiente actividad, en la que se preguntaba en cuál de los espacios para almácigo cabría la mayor cantidad de matas y en la que después debía hacer una estimación con dos superficies de área menor. Su respuesta fue: “yo *escogí al principio esa porque la vi más grande, pero, después de que medí, me di cuenta de que todas tres tienen la misma cantidad de matas porque son iguales en el área.*”

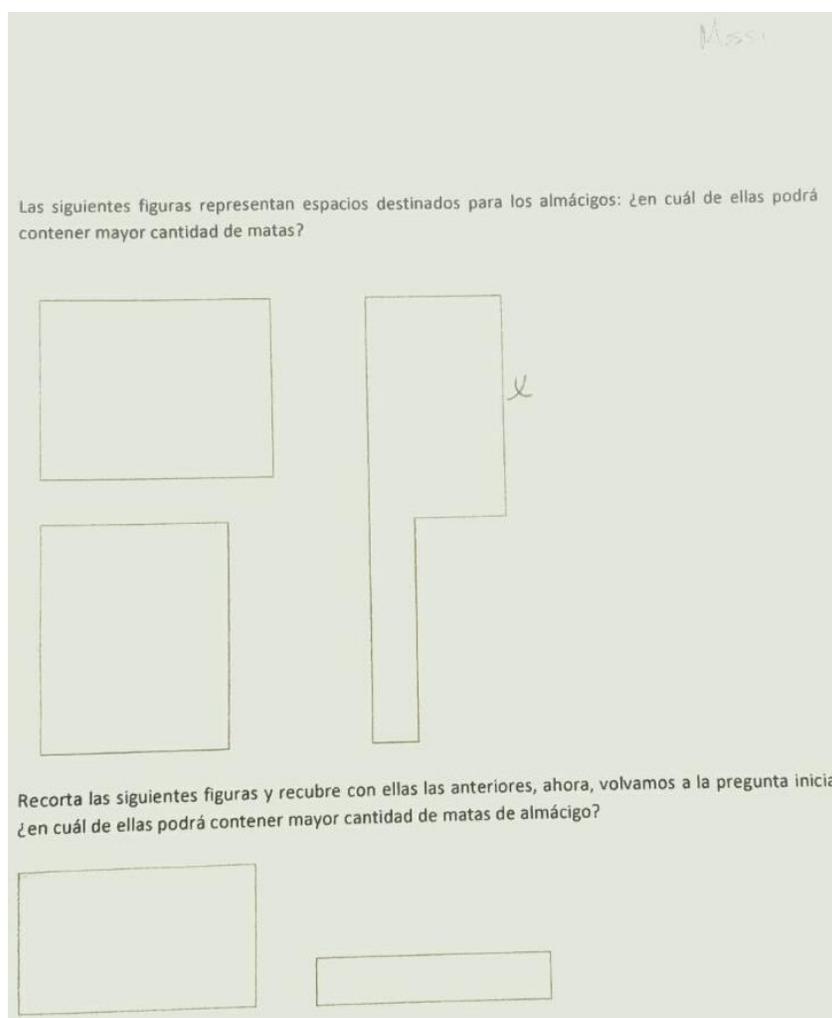


Imagen 21: Necesidad de medición para asegurar la igualdad o diferencia de áreas.

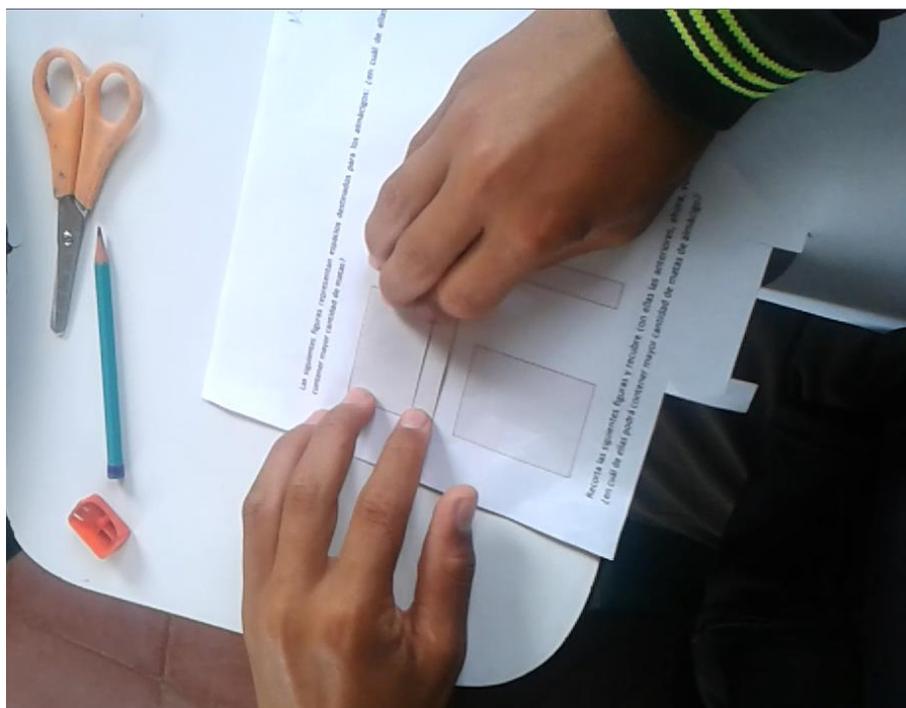


Imagen 22: Necesidad de medición para asegurar la igualdad o diferencia de áreas.

Cuarta observación, Institución Educativa Santa Rita.

En esta etapa, se aplicó un test individual de conservación del área y variación del perímetro, en el que se entregó la fotografía de un lote dividido en tajos y cuyos límites son caminos destinados al paso de personas, esto por las pendientes que se notan y que no son aptas para el tránsito de animales de carga. Con una cuerda, debían estimar el perímetro del lote, con un esfero o marcador debían trazar todos los límites, tanto internos como externos, recortarlos y luego redistribuirlos, tomar nuevamente el perímetro y expresar una conclusión de acuerdo con las medidas obtenidas del perímetro y la variación o no del área. Se concluyó que:



Imagen 23: Lote dividido en tajos sembrados de café.

- Comprende la conservación del área a pesar del cambio de forma.
- Acepta y comprende el cambio de medida en la longitud del perímetro cuando se transforma la región poligonal.



Imagen 24: Messi, delineación de tajos en un lote.



Imagen 25: Messi estimación del perímetro del nuevo lote con conservación de tajos

- Utiliza procedimientos para demostrar la igualdad de área de diferentes figuras o regiones poligonales que no necesariamente son lugares de siembra de café. Esto es útil debido a que de acuerdo con el marco conceptual de la EpC, “la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y presentar el tópico de una nueva manera” (Blythe y Perkins, 1998, p. 39); la anterior definición es complementada por Perkins (1999): “comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe” (p. 70). En esta etapa, el proceso de comprensión evidencia cómo se trasciende del contexto en el que el estudiante actúa inicialmente a la matematización de los conceptos.

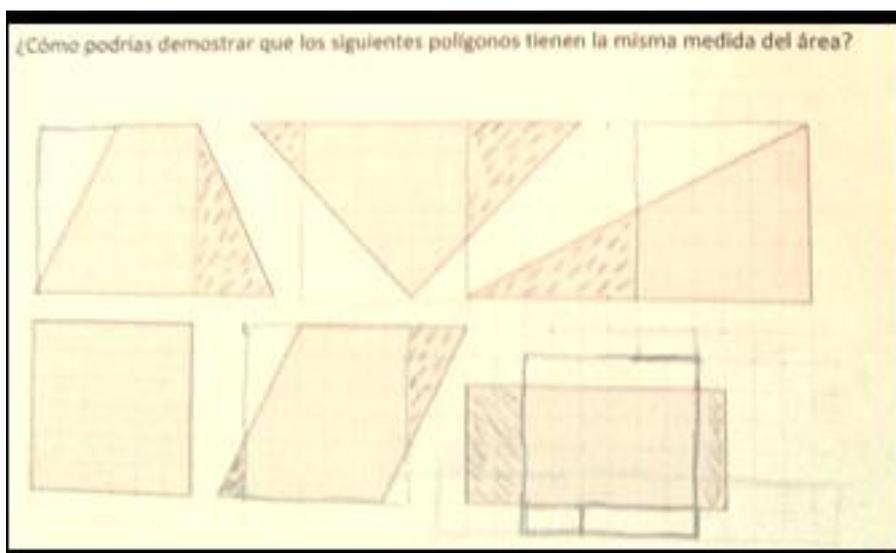


Imagen 26: Messi, actividad de comprobación de igualdad de áreas en diferentes polígonos.

- La argumentación no fue fluida para explicar lo realizado en la comprobación de que todas las figuras tienen la misma área; dijo *“dibujé el cuadrado encima de las otras y vi que lo que faltaba estaba por fuera del cuadrado y que eran iguales y ya el profe me dijo que hiciera punticos en lo que quedaba por fuera”*.
- Visualizó la unidad de medida del área cuando se llevó a cabo una actividad con fichas en cartulina para darle continuidad al refinamiento de la conservación del área y la equivalencia de la misma en distintas distribuciones. En este sentido, el estudiante utilizó la expresión *“la medida del área de esta figura es de 15 cuadros y es igual a la de esta otra que se llevó 30 triángulos, porque estos (los triángulos) son la mitad del cuadrado”*.

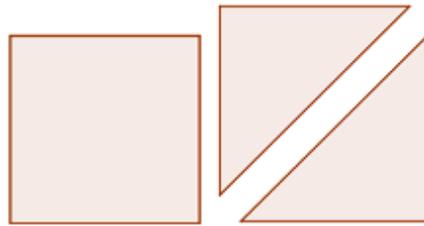


Ilustración 9: Fichas para actividad de equivalencia de polígono.

- Al dividir uno de los cuadrados en dos rectángulos iguales, encontró la equivalencia entre los triángulos y los rectángulos recién formados.

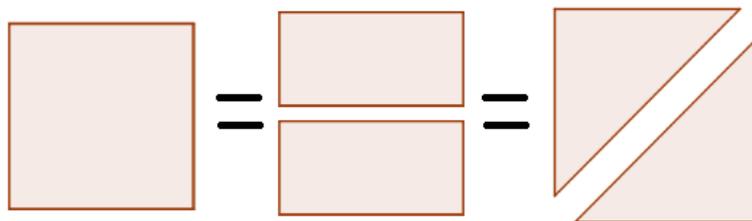


Ilustración 10: Fichas para actividad de equivalencia de polígono.

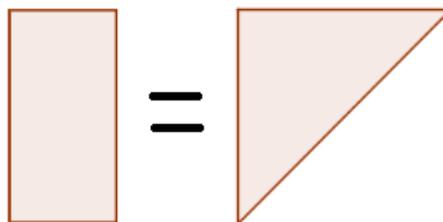


Ilustración 11: Fichas para actividad de equivalencia entre mitades del cuadrado unidad.

Caracterización parcial de la comprensión, fase de investigación guiada

En cada una de las categorías establecidas en la guía curricular para las dimensiones de método, contenido y propósitos, hubo dudas sobre si sus desempeños se correspondían a los de novato o los de aprendiz. Finalmente, luego de refinados los desempeños y evidenciado el

progreso de comprensión, se estableció que en esta fase, para las dimensiones antes enunciadas, el estudiante alcanzó el nivel de aprendiz en cada una de las categorías. En la dimensión de formas de comunicación, cuyas categorías son: definiciones y términos del lenguaje matemático y coherencia en el discurso, se apreció, a través del análisis de sus respuestas escritas y verbales y contrastadas con la rúbrica, que sus desempeños lo ubican en el nivel de aprendiz para la categoría de lenguaje matemático y en el nivel de novato para la categoría de coherencia en el discurso.

Tabla 16: Messi, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Contenidos.

Categoría Nivel	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del Área y la del Perímetro
Aprendiz	<p><u>En eras, maquetas a escala o imágenes, muestra que reconoce la región que representa el área. Relaciona el área de las eras con la cantidad de almácigos. Manifiesta la necesidad de medir el área de una era. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</u></p>	<p><u>Manifiesta la necesidad de medir el perímetro en unidades de longitud. Relaciona el perímetro con la longitud del cercado, las barreras agrícolas u otros delimitadores del terreno. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</u></p>	<p><u>Manifiesta la posibilidad de independencia entre las medidas del área y el perímetro. Esclarece en qué casos se estima el área y en qué casos el perímetro.</u></p>

Tabla 17: Messi, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Métodos.

Categoría Nivel	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Aprendiz	<p><u>Manifiesta la necesidad de realizar cálculos aritméticos para expresar el área de eras o tajos con forma rectangular.</u></p>	<p><u>Manifiesta la necesidad de realizar cálculos aritméticos para expresar el perímetro de eras o tajos con forma</u></p>	<p><u>Muestra que dos regiones de igual perímetro pueden tener diferente área. Muestra que dos regiones de igual área</u></p>

	<p><u>A través de la superposición y transformación de gráficas y de imágenes, establece la igualdad o diferencia de áreas. Reconoce que el área de una figura se conserva a pesar de que esta sufra transformaciones. Reconoce que el área de una figura se conserva a pesar de que esta sufra transformaciones y que esto puede implicar cambios en el perímetro.</u></p>	<p><u>rectangular. A través del uso de elementos comunes establece la igualdad o diferencia de perímetros. Reconoce que la conservación del perímetro no se corresponde con la conservación del área.</u></p>	<p><u>pueden tener diferente perímetro. Muestra cómo la conservación de la medida del área (por diferentes manipulaciones y transformaciones) no se corresponde con la conservación de la medida del perímetro. Muestra cómo la conservación de la medida del perímetro (por diferentes manipulaciones) no se corresponde con la conservación de la medida del área.</u></p>
--	---	---	--

Tabla 18: Messi, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Propósitos.

Categoría \ Nivel	Relación: <i>área</i> : <i>contexto</i>	Relación: <i>perímetro</i> : <i>contexto</i>
Aprendiz	<p><u>Relaciona la medida de la superficie del tajo o de la era con el concepto de área. Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de área.</u></p>	<p><u>Relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el concepto de perímetro. Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de perímetro.</u></p>

Tabla 19: Messi, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Formas de Comunicación.

Categoría \ Nivel	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Novato	<p>Las palabras área y perímetro tienen algún significado para el estudiante, lo relaciona con las barreras y los tajos o las eras, pero, no da cuenta del significado correcto.</p>	<p><u>Expresa inseguridad al relacionar los términos propios de la agricultura (lote, tajo, barrera y cercado) con los términos y conceptos geométricos (área y perímetro). No argumenta con claridad los procedimientos llevados a cabo para la realización de las tareas de medición o comprobación de supuestos.</u></p>

Aprendiz	<u>Expresa de modo informal el significado de los términos área y perímetro de acuerdo al contexto de la agricultura del café.</u>	Expresa la relación entre los términos, los combina con flexibilidad y coherencia para explicar cada uno de los conceptos. <u>Explica la forma de los cultivos en relación a las figuras planas que conoce.</u> Establece un discurso coherente alternando entre las figuras geométricas y los cultivos que conoce.
----------	---	--

4.2.1.3. Proyecto final de síntesis

Con esta fase, se espera dar cuenta de los progresos en cada uno de los niveles para cada una de las dimensiones, en especial, la de formas de comunicación, que fue la que evidenció menor evolución y, la de unidad de medida del área, por ser esta una magnitud bidimensional y ser de especial interés para la investigación. En esta fase se destacan varias situaciones:

Solución de problemas propios y no propios del contexto del cultivo de café

- Plantea soluciones apropiadas para el cálculo del perímetro y el costo del cercado. Tuvo en cuenta el valor de cada estación y la distancia a la que debe estar cada uno, además, el número necesario de estos de acuerdo al perímetro del tajo.
- Debido a su práctica cotidiana, organizar los objetos que representan los almácigos y presentar una almaciguera no le representó ninguna dificultad, además, fue flexible y preciso en el uso de los términos propios de las figuras planas utilizadas.

- En cuanto a la cantidad de palos a sembrar en el tajo, solo tuvo en cuenta la distancia horizontal, por lo que el cálculo del área del tajo dividido entre palos no fue correcto.

Exposición ante el público de los saberes desarrollados

- Durante la exposición, presentó inconsistencias en la explicación del perímetro, lo estimó bien al rodear la representación de la almaciguera con una cuerda, pero, al momento de presentarlo, solo mostró el punto en que terminaba y no la longitud de la misma.
- No presentó los métodos ni modelos utilizados para la solución de cada una de las situaciones que expuso, valor del cercado y cantidad de palos a sembrar.
- Buscó la información necesaria para la solución de estimar la longitud de una cuerda de alambre de púas para el cercado, luego explicó su multiplicación entre tres, por ser esta la cantidad de hiladas comúnmente utilizadas; también habló sobre la cantidad de estacones necesarios de acuerdo con la distancia que tiene dejar entre uno y otro.
- Expresó la intención de abordar el problema de cálculo de los costos, presentó el valor de cada estación y valor aproximado del alambre de púas; sobre este último dijo que no podía darlo con exactitud porque venía por rollos de 400 metros y cada uno tiene un valor de \$90000.
- Dio la información completa sobre la longitud perimetral del tajo seleccionado utilizando la unidad patrón del sistema métrico decimal.

- Expresó la conclusión de que el área se mide en figuras. Dijo que su padre no sabe la unidad que se utiliza para expresar la medida del área. Dio cuenta de conocer que se usaba el cuadrado, pero, no utilizó las denominaciones centímetro cuadrado o metro cuadrado para expresar la dimensión del tajo.

4.2.1.4. Caracterización Final de la comprensión

La caracterización de la comprensión al finalizar este proceso de investigación, se detalla a continuación.

Dimensión de contenido

Categorías: concepto de área, concepto de perímetro, independencia entre la medida del área y el perímetro. De los desempeños esperados, el estudiante mostró alcanzar todos los del nivel de aprendiz; del nivel de maestría, logró los que en la siguiente tabla se escriben en resalto de color negro y subrayado, en este se evidencia que solamente uno no fue alcanzado.

Tabla 20: Messi, caracterización, dimensión de contenido.

Nivel	Categorías		
	Concepto de área	Concepto de perímetro	Independencia entre la medida del área y el perímetro.
Descriptores del nivel de Maestría	<u>Explica situaciones que involucren el concepto de área en el contexto del cultivo del café.</u> <u>Explica situaciones que involucren el concepto de área en contextos diferentes al del cultivo</u>	<u>Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en el contexto del cultivo del café</u> <u>Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en</u>	<u>Reconoce que superficies de diferente forma y diferente área pueden tener igual perímetro.</u> <u>Reconoce que superficies de diferente forma y perímetro</u>

	<p><u>del café.</u></p> <p>Expresa el área calculada en unidades bidimensionales</p> <p>Comprende la razón por la cual el área se expresa en unidades bidimensionales.</p>	<p><u>contextos diferentes al del cultivo del café.</u></p>	<p><u>pueden tener la misma área.</u></p>
Nivel alcanzado	Aprendiz	Maestría	Maestría

Por lo anteriormente expuesto, se acepta que el estudiante en la dimensión de contenido progresó hasta el nivel de maestría en las categorías *concepto de perímetro e independencia de las medidas*; en la categoría *concepto de área*, progresó hasta el nivel de aprendiz, muy próximo a alcanzar el nivel de maestría.

Dimensión de método

Las categorías de esta dimensión son: método para la estimación o medición del área, método de estimación o medición del perímetro, método para establecer la independencia entre las medidas del área y del perímetro. La caracterización se presenta a continuación:

Tabla 21: Messi , caracterización, dimensión de Método.

	Categorías		
Nivel	Método de estimación medición del área.	Método de estimación o medición del perímetro.	Método para establecer la independencia entre las medidas del área y el perímetro.

Descriptores del nivel de Maestría	<p><u>Realiza el cálculo aritmético para determinar el área de las eras o tajos de formas rectangulares.</u></p> <p>Resuelve situaciones que involucren la medida del de área en el contexto del cultivo del café y la cantidad de plantas que pueden ser sembradas en él.</p> <p><u>Resuelve situaciones que involucren la medida del área en contextos diferentes al del cultivo del café.</u></p> <p><u>Calcula el área de formas regulares y no regulares.</u></p>	<p><u>Realiza el cálculo aritmético para determinar el perímetro de las eras o tajos de formas rectangulares.</u></p> <p><u>Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en el contexto del cultivo del café.</u></p> <p><u>Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en contextos diferentes al del cultivo del café.</u></p> <p><u>Calcula el perímetro de formas regulares y no regulares.</u></p>	<p><u>A través de la transformación de figuras muestra la independencia de las medidas del área y el perímetro.</u></p>
Nivel alcanzado	Aprendiz	Maestría	Maestría

Para esta dimensión, de acuerdo con la rúbrica y lo observado durante la fase tres, proyecto final de síntesis, el estudiante alcanzó nivel de maestría en las categorías *método de estimación o medición del perímetro, independencia entre las medidas de área y perímetro*. En la categoría *cálculo del área*, de los 4 desempeños esperados, en el estudiante solo uno de ellos no se evidenció. En el nivel de aprendiz mostró haber alcanzado todos los desempeños propuestos, por lo tanto se concluye, para la última categoría referenciada, que alcanzó el nivel de aprendiz muy próximo a alcanzar el nivel de maestría.

Dimensión de propósitos

Para esta dimensión, las categorías que emergieron fueron: relación *área : contexto*, relación *perímetro : contexto*. Se evidenció que el estudiante alcanzó la totalidad de los desempeños del nivel de aprendiz en ambas categorías.

Tabla 22: Messi, caracterización dimensión de Propósito

Nivel	Categorías	
	Relación <i>área : contexto</i>	Relación <i>perímetro : contexto</i>
Descriptores del nivel de Maestría	<p>Aplica lo aprendido para estimar el área de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad de cafetos que pueden ser sembrados.</p> <p><u>Relaciona lo que sabe de área con otras disciplinas y resuelve situaciones como el cálculo de área de contextos no agrícolas.</u></p>	<p><u>Aplica lo aprendido para estimar el perímetro de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad y de alambre necesario para el cercado.</u></p> <p><u>Relaciona lo que sabe de perímetro con otras disciplinas y resuelve situaciones reales, en contextos diferentes al café, en las que se necesita el cálculo del perímetro.</u></p>
Nivel alcanzado	Aprendiz	Maestría

En la categoría relación *área : contexto*, el primero de los desempeños esperados para el nivel de maestría no fue demostrado a plenitud, dado que, aunque calculó el área del terreno, no estimó correctamente la cantidad de palos que podían ser sembrados, pues, solo tuvo en cuenta la distancia que los separa en el mismo surco, pero, no la distancia entre surcos. Curiosamente, la situación del contexto diferente al de la agricultura del café la resolvió bien. En la segunda categoría, se observó que ambos desempeños fueron alcanzados completamente. Por lo tanto en la relación *perímetro : contexto* el estudiante fue ubicado en el nivel de maestría; en la relación

área : *contexto* el estudiante fue ubicado en el nivel de aprendiz, aunque muy próximo a alcanzar el nivel de maestría.

Dimensión de formas de comunicación

Las categorías de esta dimensión fueron: definiciones y términos del lenguaje matemático y coherencia en el discurso.

Tabla 23: Messi, caracterización, dimensión de Formas de comunicación.

Nivel	Categorías.	
	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Descriptores del nivel de Maestría	<p><u>Explica, en el cultivo del café y otros contextos, dónde está representada el área y dónde está representado el perímetro.</u></p> <p>En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, presenta una explicación formal sobre el significado de los términos área y perímetro.</p> <p><u>En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, expresa el perímetro en unidades longitudinales estandarizadas internacionalmente.</u></p> <p>En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, expresa el área en unidades bidimensionales estandarizadas internacionalmente.</p>	<p>Explica, con diferentes ejemplos y argumentos los conceptos de área y perímetro.</p> <p>Da cuenta de las unidades utilizadas para presentar la medida del área y del perímetro.</p> <p><u>Explica la independencia entre las medidas del área y del perímetro utilizando correctamente los términos y dando ejemplos de ello.</u></p>
Nivel Alcanzado	Aprendiz	Aprendiz

Para el nivel de maestría, de los cuatro desempeños esperados en la categoría de *Definiciones y términos del lenguaje matemático*, alcanza plenamente el primero de ellos, para el tercer desempeño se observa que lo adquiere de forma parcial, debido a que combina sin

mediación alguna la medida antropométrica (la distancia que hay de su hombro a la punta del dedo medio de la mano) con la unidad métrica. Los que no se alcanzaron a observar fueron: En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo presenta una explicación formal sobre el significado de los términos área y perímetro y, en exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo expresa el área en unidades bidimensionales estandarizadas internacionalmente. En la segunda categoría, de los tres desempeños esperados se observó que alcanzó parcialmente cada uno de ellos, pues, no logró rigor en la definición disciplinar de los conceptos de área y perímetro. En el nivel de aprendiz se evidenció que alcanzó todos los desempeños esperados. Por lo tanto, en ambas categorías el estudiante se ubica en el nivel de aprendiz, pero, se observa que está muy próximo al nivel de maestría.

4.2.2. ISIS

Participante femenina de 11 años.

Residente de la vereda Yarumal del corregimiento de Santa Rita, Andes. Hija de sembradores y recolectores de café; todo el tiempo ha vivido en el sector rural y desde hace unos años cumple las tareas de sembrar almácigos o de llevar los alimentos de sus padres hasta el lugar de trabajo. Estas labores las desempeña en recesos estudiantiles y tiempos de cosecha.

4.2.2.1. Fase de exploración

Después del desarrollo de esta fase, se estableció que la estudiante tiene nociones de medición intuitiva y de comparación entre tamaños y asocia estos conceptos con la cantidad de sembrado que puedan contener; así que, a modo informal, establece asociaciones con la medida

del área, evidenciándose que tiene conocimiento sobre las unidades de medida de longitud. A continuación, se enuncian los aspectos destacados de la fase de exploración, tanto del test previo como de la entrevista.

- Asocia el tamaño de las fincas con la cantidad de plantas que puedan ser sembradas en ellas y por el espacio visual; en esta apreciación también se percibió que podía influir la fertilidad de los suelos y sus otros usos. En la respuesta a la pregunta ¿por qué la finca La Mancha es más grande que La Torre? Su respuesta fue: *“Para mí La Mancha, porque es una finca muy grande y tiene muchos terrenos para cultivar, ya sea el café que uno quiera cultivar”* y luego complementa: *“La Mancha tiene más espacio, más terreno y es la tierra más fértil, en cambio La Torres es un poco más pequeña y no tiene tanto espacio”*. Cabe subrayar el uso que le da a la palabra espacio, lo asume como dimensión y capacidad de reunión o albergue de objetos.
- Sabe que en una finca, los terrenos de siembra no tienen todas las mismas dimensiones, que unos tienen más *“espacio”* que otros. Esto es un buen insumo para la comprensión de la conservación del área o la propiedad de que el área puede ser descompuesta en áreas menores (Viedma, 1970).
- Expresa inseguridad en la definición de términos como parcela, lote y tajo, aunque los asocia siempre al uso de suelos para sembrado.
- Reconoce separaciones entre terrenos, los elementos utilizados para cercar y la utilidad práctica de estos, es decir, la separación de propiedades y la protección de los sembrados.

- Asocia la cantidad de cercado para rodear una finca con el tamaño que le atribuye a la misma, es decir, la de mayor espacio para sembrar y de casa más grande es en la que más cercado tendría que usarse. Con esto, también asume que a mayor área mayor perímetro y con ello presenta una de las dificultades expuestas por Corberán (1996), cuando expresa que para la mayoría de los alumnos es difícil comprender que el área es una propiedad de las superficies independiente de la medida del perímetro; autores como Chamorro et al. (2008) también encontraron esa falacia comprensiva, al igual que Del Olmo et al. (1993).
- Dice haber escuchado las palabras perímetro y área, pero, manifiesta no saber qué significado tienen. En el test inicial aporta las definiciones que le dio su hermana mayor.

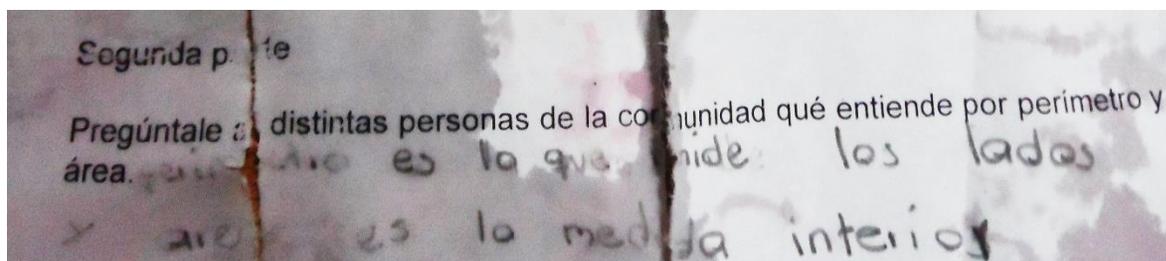


Imagen 27: Respuestas Isis, concepto de área y perímetro.

- Manifiesta inseguridad al asociar las palabras perímetro y área con términos como tajo, parcela, lote y cercado.

Después de este análisis y haber llevado a cabo la triangulación, la estudiante fue caracterizada tal y como se expone a continuación:

Caracterización Parcial

Los aspectos destacados de la fase de exploración fueron contrastados con los desempeños esperados y escritos en la rúbrica de dimensiones de categoría por nivel; estos, al igual que con los de sus otros compañeros, son utilizados para refinar la rúbrica y determinar el nivel de comprensión en el cual se encuentra.

Debido a que sus respuestas se equiparan en gran medida con los descriptores del primer nivel en cada una de las categorías de las dimensiones, la estudiante fue caracterizada en el nivel de ingenuo.

Tabla 24: Isis, caracterización parcial. Fase de exploración. Dimensión de Contenido.

Categoría Nivel	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del Área y la del Perímetro
Ingenuo	<p><u>Manifiesta no saber qué es el área.</u> <u>No encuentra vinculación entre el área y situaciones del diario vivir.</u> <u>Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca de la relación entre una superficie y su área.</u> <u>Carece de argumentos para establecer que el área es la medida de la superficie, es decir, del interior de la figura.</u> <u>Reconoce que un lote se compone de tajos.</u></p>	<p><u>Manifiesta no saber qué es el perímetro.</u> <u>No encuentra vinculación entre el perímetro y situaciones del diario vivir.</u> <u>Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca del reconocimiento del perímetro en eras, imágenes o maquetas.</u> <u>Carece de argumentos para establecer que el perímetro es la medida del límite de la superficie, es decir, el contorno de la figura.</u></p>	<p><u>Toma por cierta alguna de las afirmaciones:</u> <u>- A mayor perímetro, mayor área.</u> <u>- Dos o más tajos o eras de diferente forma tienen diferente área.</u> <u>- Dos o más tajos o eras de igual perímetro tienen la misma área.</u></p>

Tabla 25: Isis, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Métodos.

Nivel \ Categoría	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Ingenuo	Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual área. No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el área. No utiliza algún procedimiento para relacionar el área y la forma.	Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual perímetro. No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el perímetro. No utiliza algún procedimiento para relacionar el perímetro con la longitud.	No utiliza algún método que permita verificar alguna de las siguientes afirmaciones que toma por ciertas: - A mayor perímetro, mayor área. - Dos o más tajos o eras de diferente perímetro tienen diferente área. - Dos o más tajos o eras de igual perímetro tienen la misma área.

Tabla 26: Isis, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Propósitos.

Nivel \ Categoría	Relación: <i>área</i> : <i>contexto</i>	Relación: <i>perímetro</i> : <i>contexto</i>
Ingenuo	No establece relaciones entre los términos agrícolas (lote, tajo y era) con el término geométrico de área. No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas. No relaciona la medida de la superficie del tajo con el concepto de área.	No establece relaciones entre los términos agrícolas (barrera, cercado y camino) con el término geométrico de perímetro. No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas. No relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el perímetro.

Tabla 27: Isis, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Formas de Comunicación.

Nivel \ Categoría	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Ingenuo	No da cuenta de reconocimiento de los términos área y perímetro.	No utiliza las palabras área y perímetro para explicar la relación entre lotes y tajos.

4.2.2.2. Fase de investigación guiada

Se notó evolución en cuanto a la comprensión de área y perímetro, en el uso de métodos para ratificar o desechar sus afirmaciones, en la estimación y cálculo del perímetro y el área de una región poligonal, en la comprensión de la conservación del área, en la independencia de las medidas de área y perímetro y, por último, en el uso correcto de los términos área y perímetro. Las situaciones a destacar son:

Primera observación, finca la Soledad

Esta constó de dos partes; la primera fue un conversatorio sobre los términos propios de la agricultura, la denominación de sitios de sembrado como lote y tajo, y de los elementos usados para dividirlos: barreras y cercados y, en la segunda, se realizaron algunas actividades en las que se percibían figuras de igual perímetro y diferente área. En consecuencia, la estudiante:

- Estableció la relación, *finca : lote, lote : tajo*, en la que expresó que el tajo es la parte más pequeña del lote y que dependiendo del tamaño de la finca, puede tener varios lotes, ser igual a un lote o estar en parte del lote.
- Comparó las eras de almácigo con los tajos y la almaciguera con el lote.
- Asoció el concepto de perímetro a la longitud de las barreras y los cercados, pero, el entrevistador quedó con la sensación de que solo lo asumía en el sentido vertical dado a que su expresión corporal y señalización siempre lo hacía en acción descendiente de ambos brazos.

- Expresó que el perímetro está relacionado con el rededor.
- Expresó que el área es lo que está contenido dentro del perímetro, luego de una conversación en la almaciguera.
- Recordó que en la entrevista no había dado respuestas al significado, tanto de perímetro, como de área.
- Argumentó que en las eras, el perímetro está representado por los caminos o el lazo con que se llevaban a cabo los ejercicios de delimitación y que el área está rellena con las bolsas de almácigos.
- Concluyó que el perímetro puede medirse en metros al asociarlo con el lazo; de hecho, expresó que la medida del perímetro era igual a los metros que midiera la cuerda.
- Utilizó el procedimiento de multiplicación columna por fila para calcular el total de bolsas de almácigo que hubiera en el interior de los rectángulos formados con la cuerda, luego de una discusión colectiva entre los participantes.
- Llegó a la conclusión de que de un mismo perímetro pueden obtenerse distintas áreas, luego de haber efectuado varias transformaciones con la misma longitud de cuerda.
- Utilizó el método de suma de áreas en una de las formaciones irregulares en las que se apreciaban tres rectángulos, calculó el área de cada uno y luego dio el área total (ver imagen 6).

- Expresó que con el mismo perímetro pueden obtenerse diferentes áreas y explicó la razón de ello, “*depende de cómo hagamos la forma*”.

Segunda observación, finca La Soledad

En esta observación se hizo una realimentación de la sesión anterior y luego se procedió a realizar las actividades concernientes a la conservación de área y variación del perímetro. En este sentido, la estudiante:

- Dio cuenta de que en la sesión anterior, debido a que siempre se trabajó con la misma cuerda, el perímetro no varió y que lo que cambió fue el área.
- Dudó en que el perímetro de un rectángulo (formado con bolsas sembradas con almácigo) de 10×4 , fuera diferente al de un rectángulo de 8×5 . Expresó que las marcas en la cuerda quedaban muy cerca y sugirió que a lo mejor habían cometido un error.
- Para cada rectángulo formado, se contaron los lados de bolsa como unidad de longitud del perímetro y comprobó que sí eran diferentes, aunque daban cifras muy cercanas.
- Dedujo que para el cálculo del perímetro no era necesario contar las bolsas que forman todos los lados, sino que bastaba contar los de dos lados intersectados y luego multiplicar por 2.
- En el rectángulo de 40 bolsas en distribución de 20×2 , mostró asombro por la diferencia tan grande con las otras marcas del perímetro.

- Expresó lo que le pareció una contradicción por lo hecho en la sesión anterior: “¿si hoy estamos trabajando con la misma cuerda de la vez pasada, por qué estamos diciendo que el perímetro sí cambió?”. Se asumió que no había comprendido realmente el trabajo del día presente o que no había comprendido el perímetro como longitud sino como herramienta (la cuerda). El investigador le explicó que para eso se marcaba con cinta, “para poder mirar cuán largo es el perímetro de cada rectángulo sin dañar la cuerda, no podemos cortarla porque no es nuestra”.

- Expresó la diferencia de las dos sesiones así: “hace 15 días, con el mismo perímetro nos dieron diferentes áreas, hoy con la misma área obtuvimos diferente perímetro”.

Tercera observación, Institución Educativa Santa Rita

Esta fue una sesión de trabajo grupal en la que los estudiantes debían resolver un test donde se buscaba: la asociación de algunos términos agrícolas con algunos términos geométricos; el reconocimiento del área y el perímetro en fotografías de sembrado de café; la argumentación de afirmaciones como “*diferente perímetro, diferente área*” y la comparación y medición del área de figuras diferentes. En relación a esto, la estudiante:

- Asoció de manera adecuada los términos cercado y tajo con perímetro y área respectivamente.

De acuerdo a lo que hemos conversado hasta hoy.

1. ¿Con cuál de los siguientes términos: cercado y tajo, relacionas el concepto de perímetro?

yo digo que el cercado lo podemos relacionar con el perímetro

2. ¿Con cuál de los siguientes términos: cercado y tajo, relacionas el concepto de ^{área} perímetro?

yo digo que el tajo lo podemos relacionar con el área

Imagen 28: Respuestas Isis, asociación área y perímetro con los términos agrícolas tajo y cercado.

- Presenta argumentos para afirmar que dos áreas iguales pueden tener perímetros distintos y que dos perímetros iguales pueden encerrar diferentes áreas.
- Carece de claridad argumentativa para enfocar la respuesta en el tópico central.

Explica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

3. A mayor perímetro siempre corresponde mayor área.

mi respuesta es que esta afirmación es falsa porque con la misma área algunas veces se puede obtener diferente perímetro según su forma.

4. A un área siempre le corresponde el mismo perímetro

no porque podemos medir con la misma área pero nos puede dar diferentes perímetros.

Imagen 29: Respuestas Isis, independencia de las medidas de área y perímetro.

- En imágenes que muestran lotes, tajos y cercados, identifica qué elementos son el perímetro y cuáles son el área.

Observando la siguiente imagen y prestando atención a la porción señalada dentro con la línea negra.



5. El perímetro puede estar representado por:

- a. Las matas de plátano junto con las de café.
- b. El pasto.
- c. Solamente las matas de café.
- d. Solamente las matas de plátano.

6. El área se mediría:

- a. En el borde que forman las matas de plátano.
- b. En la superficie sembrada con matas de café.
- c. Desde el borde exterior de las matas de plátano.
- d. No puede tomarse el área porque hay un borde más extenso que el otro.

Imagen 30: Respuestas Isis, reconocimiento del área y el perímetro en el contexto de la agricultura del café.

- Concluyó que para asegurar qué región es más grande o alberga más cantidad de café, es necesario medir o comparar.



Imagen 31: Isis, realizando la actividad de medición para la argumentación de igual o diferencia de áreas.

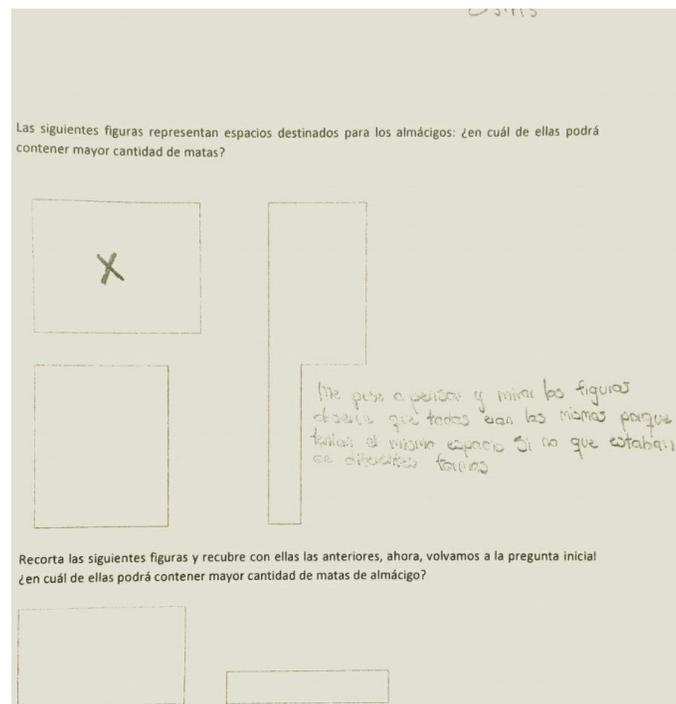


Imagen 32: Isis, respuestas en la actividad de necesidad de medir para asegurar la diferencia o igualdad de áreas.

- Expresó que el área se conserva aunque cambie de forma, si todas sus partes se conservan.

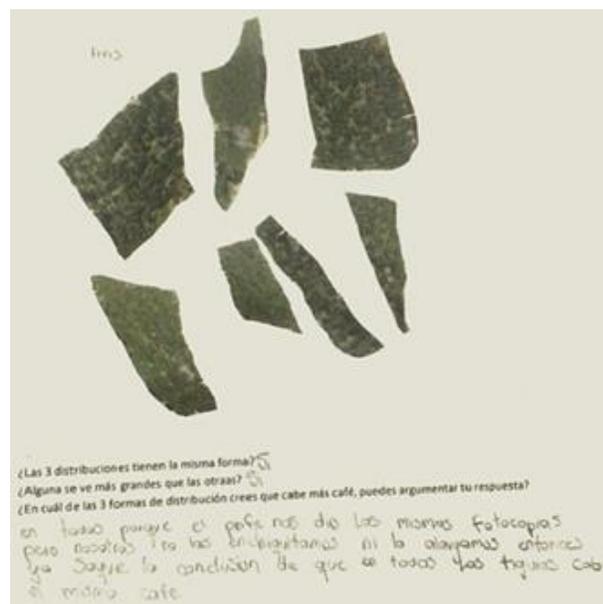


Imagen 33: Isis, actividad de redistribución de tajos y conservación del área del lote.

Cuarta observación, Institución Educativa Santa Rita

En esta etapa, se aplicó un test individual de conservación del área y variación del perímetro, en el que se entregó la fotografía de un lote dividido en tajos. Con una cuerda, los estudiantes debían estimar el perímetro del lote; posteriormente, con un esfero o marcador debían trazar todos los límites, tanto internos como externos, recortarlos y luego redistribuirlos para tomar nuevamente el perímetro y expresar una conclusión de acuerdo con las medidas obtenidas de este y la variación o no del área. En esta situación, la estudiante:

- Expresó con acierto y seguridad que los tajos de un lote pueden distribuirse de diferente forma y que si estos no cambian de tamaño, el área del lote tampoco.
- Aseguró que, como en otras ocasiones, el área y el perímetro no varían sus medidas en una relación de dependencia, es decir, el hecho de conservar el área no implica la conservación del perímetro.



Imagen 34: Isis, estimación del perímetro lote dividido en tajos sembrados de café.

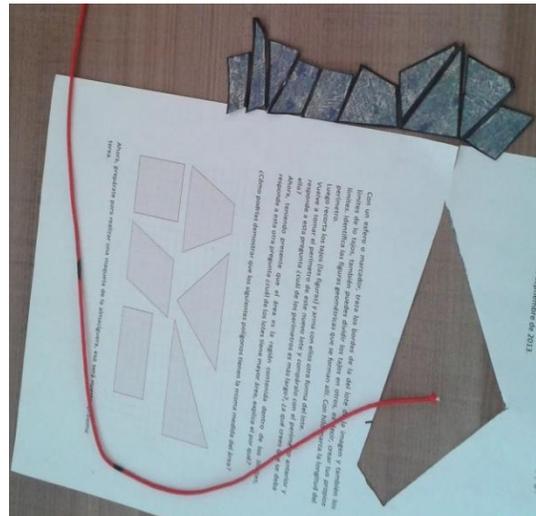


Imagen 35: Isis, redistribución de los tajos y conservación del área del lote.

- Demostró que varias figuras pueden ser equivalentes aunque visualmente sean distintas.
- Argumentó que “*por cambio de posición y el giro de las partes que sobran demostré que las áreas son iguales*”.

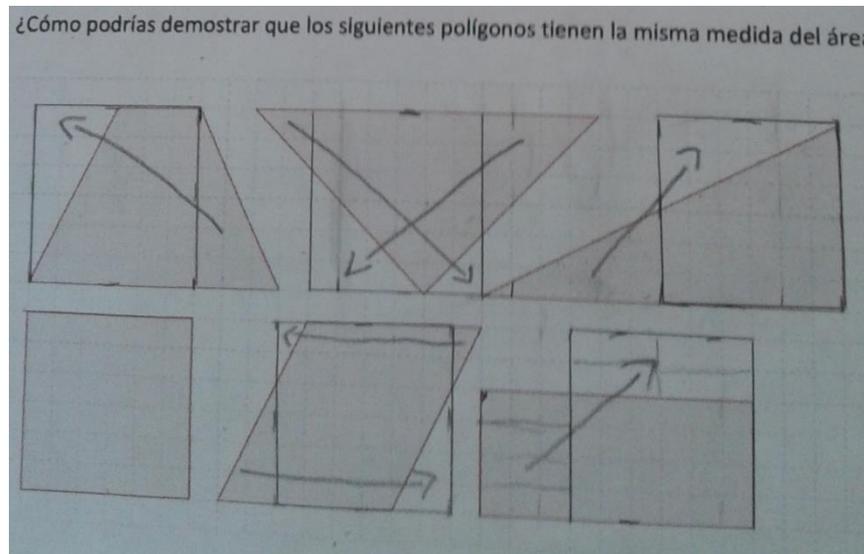


Imagen 36: Isis, actividad: comprobación de la igualdad de área de diferentes polígonos.

- Al dividir uno de los cuadrados en 2 rectángulos iguales y al considerar que uno de sus compañeros encontró la equivalencia entre los triángulos y los rectángulos recién formados, expresó: “*¡pues claro!, si son la mitad del cuadrado*”.

- Visualizó la unidad de medida del área cuando se llevó a cabo una actividad con fichas en cartulina para darle continuidad al refinamiento de la conservación del área en distintas distribuciones, para ello utilizó la expresión “*la medida del área de las figuras que hice son iguales porque los 30 triángulos, dan lo mismo que los 15 cuadrados, porque un triángulo es la mitad del cuadrado*”.

Las ilustraciones que dan claridad sobre esta aseveración son las expuestas y numeradas del 10 al 12.

Caracterización parcial

Se notó progreso en cada una de las dimensiones. En especial, en la de formas de comunicación.

Los desempeños observados durante la realización de esta fase, fueron contrastados con los descriptores de la rúbrica que, a su vez, fueron nuevamente refinados y comparados con los de sus compañeros; luego de este proceso, se evidenció que la estudiante logró un nivel de aprendizaje en cada una de las categorías de las dimensiones de contenido, método y propósitos. Para la dimensión de formas de comunicación, en la categoría coherencia del discurso, se notó que de los tres desempeños esperados, solamente uno de ellos fue alcanzado completamente, por lo tanto, en la categoría *coherencia del discurso* sus desempeños se ubicaron en novato, pero, se observó una

aproximación fuerte al nivel de aprendiz. En la categoría *definiciones y términos del lenguaje matemático*, sus desempeños se corresponden con el nivel de aprendiz.

Tabla 28: Isis, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Contenido.

Categoría Nivel	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del Área y la del Perímetro
Aprendiz	<p><u>En eras, maquetas a escala o imágenes, muestra que reconoce la región que representa el área. Relaciona el área de las eras con la cantidad de almacigos. Manifiesta la necesidad de medir el área de una era. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</u></p>	<p><u>Manifiesta la necesidad de medir el perímetro en unidades de longitud. Relaciona el perímetro con la longitud del cercado, las barreras agrícolas u otros delimitadores del terreno. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</u></p>	<p><u>Manifiesta la posibilidad de independencia entre las medidas del área y el perímetro. Esclarece en qué casos se estima el área y en qué casos el perímetro.</u></p>

Tabla 29: Isis, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Métodos.

Categoría Nivel	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Aprendiz	<p><u>Manifiesta la necesidad de realizar cálculos aritméticos para expresar el área de eras o tajos con forma rectangular. A través de la superposición y transformación de gráficas y de imágenes, establece la igualdad o diferencia de áreas. Reconoce que el área de una figura se conserva a pesar de que esta sufra transformaciones.</u></p>	<p><u>Manifiesta la necesidad de realizar cálculos aritméticos para expresar el perímetro de eras o tajos con forma rectangular. A través del uso de elementos comunes establece la igualdad o diferencia de perímetros. Reconoce que la conservación del perímetro no se corresponde con la conservación del área.</u></p>	<p><u>Muestra que dos regiones de igual perímetro pueden tener diferente área. Muestra que dos regiones de igual área pueden tener diferente perímetro. Muestra cómo la conservación de la medida del área (por diferentes manipulaciones y transformaciones) no se corresponde con la conservación de la medida del perímetro. Muestra cómo la</u></p>

	<u>Reconoce que el área de una figura se conserva a pesar de que esta sufra transformaciones y que esto puede implicar cambios en el perímetro.</u>		<u>conservación de la medida del perímetro (por diferentes manipulaciones) no se corresponde con la conservación de la medida del área.</u>
--	--	--	--

Tabla 30: Isis, caracterización parcial, Fase de investigación guiada. Dimensión de Propósitos

Nivel \ Categoría	Relación: <i>área : contexto</i>	Relación: <i>perímetro : contexto</i>
Aprendiz	<u>Relaciona la medida de la superficie del tajo o de la era con el concepto de área. Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de área.</u>	<u>Relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el concepto de perímetro. Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de perímetro.</u>

Tabla 31: Isis, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Formas de Comunicación.

Nivel \ Categoría	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Novato	Las palabras área y perímetro tienen algún significado para el estudiante, lo relaciona con las barreras y los tajos o las eras, pero, no da cuenta del significado correcto.	<u>Expresa inseguridad al relacionar los términos propios de la agricultura (lote, tajo, barrera y cercado) con los términos y conceptos geométricos (área y perímetro). No argumenta con claridad los procedimientos llevados a cabo para la realización de las tareas de medición o comprobación de supuestos.</u>
Aprendiz	<u>Expresa de modo informal el significado de los términos área y perímetro de acuerdo al contexto de la agricultura del café.</u>	Expresa la relación entre los términos, los combina con flexibilidad y coherencia para explicar cada uno de los conceptos. <u>Explica la forma de los cultivos en relación a las figuras planas que conoce. Establece un discurso coherente alternando entre las figuras geométricas y los cultivos que conoce.</u>

4.2.2.3. Proyecto final de síntesis

Con esta fase, se espera dar cuenta de los progresos en cada uno de los niveles para cada una de las dimensiones. En particular, la de formas de comunicación, que fue la que evidenció menor evolución y, la unidad de medida del área, por ser esta una magnitud bidimensional y ser de especial interés para la investigación. En esta fase se destacan varias situaciones:

Solución de problemas propios y no propios del contexto del cultivo de café

- Plantea soluciones apropiadas para el cálculo de áreas en contextos diferentes al cultivo del café.
- Resolvió con exactitud la situación planteada: estimar el total de unidades bidimensionales de fibra para cubrirlo y, en caso de ser posible, estimar el costo total de la fibra sintética utilizada. Midió en unidades del sistema métrico decimal dos los lados del patio y multiplicó ambas medidas para determinar la medida del área, además, consultó en fuentes virtuales el costo de unidad cuadrada del material sintético para cubrir el suelo y con ello calculó el valor de la fibra sintética necesaria para cubrir el patio de la escuela.

Exposición ante el público.

- Afirma que el área se mide en figuras planas que recubren la superficie y que, por decisión de la comunidad académica, se eligió el cuadrado como unidad de medida.

- Llevó a cabo un proceso secuencial para dar cuenta de la solución: medición del perímetro en unidades convencionales, cálculo del área en unidades cuadradas convencionales a través de la multiplicación de los lados intersectados, costo de la fibra por unidad cuadrada convencional, multiplicación de las unidades de área por el costo de unidad de área.
- En el recuento de lo realizado en la investigación, la estudiante mostró la equivalencia de figuras y argumentó el porqué de tal equivalencia.

4.2.2.4 Caracterización final

En cada una de las sesiones, el acierto de sus aportes, lo asertivo de sus preguntas, las elaboraciones hechas y sus argumentos fueron en notoria progresión.

La caracterización de la estudiante, luego de terminada la investigación y refinada la rúbrica, se detalla a continuación:

Dimensión de contenido

Categorías: concepto de área, concepto de perímetro, independencia de las medidas. Luego de contrastar los desempeños de comprensión, evidenciados durante el proceso de investigación, con los descriptores de categoría por nivel consignados en la rúbrica, se encuentra que la estudiante progresó hasta el máximo nivel esperado y propuesto por el marco conceptual de la EpC, es decir, avanzó hasta el nivel de maestría en la dimensión de contenido. Por eso, todos sus descriptores, están resaltados en negro y subrayado en la tabla correspondiente.

Tabla 32: Isis, caracterización, dimensión de Contenido.

Nivel	Categorías		
	Concepto de área	Concepto de perímetro	Independencia entre la medida del área y el perímetro.
Descriptores del nivel de Maestría	<u>Explica situaciones que involucren el concepto de área en el contexto del cultivo del café.</u> <u>Explica situaciones que involucren el concepto de área en contextos diferentes al del cultivo del café.</u> <u>Expresa el área calculada en unidades bidimensionales</u> <u>Comprende la razón por la cual el área se expresa en unidades bidimensionales.</u>	<u>Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en el contexto del cultivo del café</u> <u>Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en contextos diferentes al del cultivo del café.</u>	<u>Reconoce que superficies de diferente forma y diferente área pueden tener igual perímetro.</u> <u>Reconoce que superficies de diferente forma y perímetro pueden tener la misma área.</u>
Nivel alcanzado	Maestría	Maestría	Maestría

Dimensión de método

Las categorías de esta dimensión son: método para la estimación o medición del área, método de estimación o medición del perímetro, método para establecer la independencia entre las medidas del área y del perímetro. Dado que en el proceso llevado por la estudiante se evidencia que sus desempeños finales dan cuenta de los esperados, se acepta que la estudiante alcanzó el nivel de maestría en cada una de las categorías. Por lo tanto, estos descriptores se presentan a continuación y se resaltan en negro y subrayado.

Tabla 33: Isis, caracterización, dimensión de Método.

Nivel	Categorías		
	Método de estimación o medición del área.	Método de estimación o medición del perímetro.	Método para establecer la independencia entre las medidas del área y el perímetro.
Descriptores del nivel de Maestría	<u>Realiza el cálculo aritmético para determinar el área de las eras o tajos de formas rectangulares.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del de área en el contexto del cultivo del café y la cantidad de plantas que pueden ser sembradas en él.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del área en contextos diferentes al del cultivo del café.</u> <u>Calcula el área de formas regulares y no regulares.</u>	<u>Realiza el cálculo aritmético para determinar el perímetro de las eras o tajos de formas rectangulares.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en el contexto del cultivo del café.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en contextos diferentes al del cultivo del café.</u> <u>Calcula el perímetro de formas regulares y no regulares.</u>	<u>A través de la transformación de figuras muestra la independencia de las medidas del área y el perímetro.</u>
Nivel alcanzado	Maestría	Maestría	Maestría

Dimensión de propósitos

Las categorías de esta dimensión son: relación *área : contexto*, relación *perímetro : contexto*. La estudiante dio cuenta de cada uno de los desempeños esperados en ambas categorías, por lo tanto se da por hecho que la estudiante progresó hasta el nivel de maestría. Los descriptores se muestran a continuación y se resaltan en color negro y subrayado.

Tabla 34: Isis, caracterización, dimensión de Propósitos

Nivel	Categorías	
	Relación <i>área : contexto</i>	Relación <i>perímetro : contexto</i>
Descriptores del nivel de Maestría	<u>Aplica lo aprendido para estimar el área de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad de cafetos que pueden ser sembrados.</u> <u>Relaciona lo que sabe de área con otras disciplinas y resuelve situaciones como el cálculo de área de contextos no agrícolas</u>	<u>Aplica lo aprendido para estimar el perímetro de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad y costo de alambre necesario para el cercado.</u> <u>Relaciona lo que sabe de perímetro con otras disciplinas y resuelve situaciones reales, en contextos diferentes al café, en las que se necesita el cálculo del perímetro.</u>
Nivel alcanzado	Maestría	Maestría

Dimensión de formas de comunicación.

Las categorías de esta dimensión fueron: términos y definiciones del lenguaje matemático y coherencia en el discurso. Por lo mostrado durante el proceso de investigación y lo presentado en el proyecto final de síntesis, se evidencia que la estudiante dio cuenta de los desempeños esperados para el nivel de maestría. En la estudiante se observaron todos los desempeños de este nivel y se presentan a continuación:

Tabla 35: Isis, caracterización, dimensión de Formas de Comunicación

Nivel	Categorías.	
	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Descriptores del nivel de Maestría	<u>Explica, en el cultivo del café y otros contextos, dónde está representada el área y dónde está representado el perímetro.</u> <u>En exposiciones al público y en las</u>	<u>Explica, con diferentes ejemplos y argumentos los conceptos de área y perímetro.</u> <u>Da cuenta del modo de expresión o unidades utilizadas para presentar la</u>

	<p><u>sesiones de trabajo en grupo, presenta una explicación formal sobre el significado de los términos área y perímetro.</u></p> <p><u>En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, expresa el perímetro en unidades longitudinales estandarizadas internacionalmente.</u></p> <p><u>En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo, expresa el área en unidades bidimensionales estandarizadas internacionalmente.</u></p>	<p><u>medida del área y del perímetro.</u></p> <p><u>Explica la independencia entre las medidas del área y del perímetro, utilizando correctamente los términos y dando ejemplos de ello.</u></p>
Nivel alcanzado	Maestría	Maestría.

4.2.3. MINERVA

Participante femenina de 12 años de edad.

Pertenece a una familia de tradición cafetera propietaria de dos fincas dedicadas al cultivo del café. La joven realiza actividades como siembra del almácigo, depósito de los almácigos listos para sembrado en el hoyo previamente hecho por su padre y arribo de los alimentos a su padre al lugar de trabajo agrícola. Dichas actividades las realiza durante las vacaciones y otros recesos escolares.

4.2.3.1 Fase de exploración

Esta consistió en una entrevista individual y en un test con el que se pretendió indagar sobre las nociones intuitivas del concepto de área, de perímetro, la asociación que se podría establecer entre estos, el conocimiento previo o nociones sobre medida y las relaciones de la estudiante con

las actividades propias del agro. Durante esta fase, se percibió que la estudiante reconoce formas geométricas en los tajos de sembrado, relaciona la cantidad de cercado con las condiciones de albergar sembrado, pero desconoce el significado de los términos área y perímetro. Las situaciones a destacar son las siguientes:

- Relaciona las condiciones de relieve de un lote o tajo con la cantidad de sembrado que puede albergar, situación común entre los caficultores de la zona; esto se percibió por su respuesta a la pregunta ¿en cuál de las fincas que tiene o ha tenido tu papá cabe más café?: *“En La Quinta... Porque allá en San Agustín el terreno es como en subida y en plancho, pero muy pequeño. En La Quinta siempre es largo de faldudo y el plano es siempre larguito”*.
- Reconoce que el tamaño del terreno o de una finca no se da solamente por la cantidad de sembrado posible, pues a la pregunta ¿cuál de las fincas en que trabaja tu papá es la más grande?, respondió que la finca más grande es la de San Agustín aunque no tiene casi café porque tiene muchas construcciones.
- No estableció relación de pertenencia entre el tajo y lote, expresó que eran lo mismo. La relación de pertenencia la estableció entre la finca y el lote. Dijo no conocer el término parcela.
- Relaciona el uso de los cercados con la tenencia de animales y la posibilidad de que estos se muevan con libertad, aunque reconoce que los cercados también se utilizan para separar propiedades y establecer los límites de una finca con otra e, incluso, dentro de una misma

finca y que, al hacer esto, el tajo queda “*como un cuadrito, parecido a lo de la geometría*”, que otros pueden ser triángulos y que existen otros que son “*desfigurados*”.

- Establece relaciones entre las formaciones de los lotes y fincas con el aprendizaje de la geometría; esto se percibió por la respuesta dada a una pregunta asociada a este tema: “*Sí, porque el tajo es así como las figuras de la geometría, triángulos, cuadrados. Entonces el cercado es lo que hace ver la figura porque es lo que está alrededor*”. Además, se reconoce el conocimiento intuitivo de trazos y formaciones, lo que conlleva a suponer que establece que el tamaño de la finca es igual a la suma de cada tajo (Viedma, 1970).
- No estableció con seguridad las asociaciones: cercado-perímetro y tajo-área. En una primera aproximación, relacionó cercado con área y perímetro con tajo, luego, expresó que creía que el cercado era el perímetro y que el tajo era el área.
- Asegura que a mayor terreno de la finca, es decir, que entre más grande sea, mayor cercado se lleva, pero que, además, depende de la cantidad de divisiones que se necesitan.
- No dio una definición de área y perímetro, pero manifestó que le preguntó a varios de sus familiares y que todos le habían dicho cosas distintas:

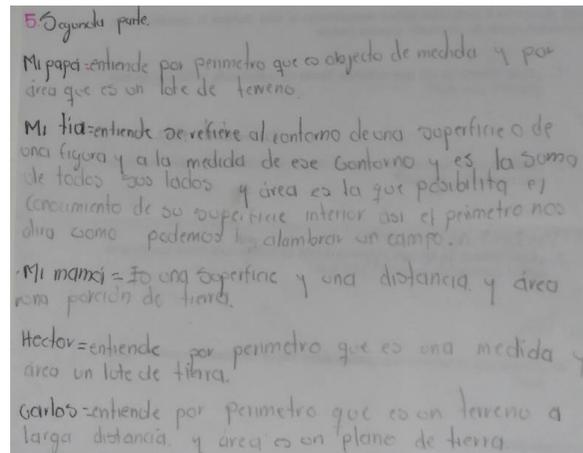


Imagen 37: Minerva, respuestas de personas cercanas sobre los conceptos de área y perímetro.

Caracterización parcial de la comprensión

Considerando la triangulación realizada con las respuestas de la entrevista y del test con los planteamientos del marco conceptual sobre las características de cada nivel y de cada dimensión y los aportes de los antecedentes en cuanto a las dificultades de la comprensión de los conceptos de perímetro y área (vinculando los saberes culturales con los académicos), se puede establecer que los desempeños de la estudiante en esta fase de la investigación, se equiparan con los establecidos en el nivel de ingenuo en cada una de las categorías.

Tabla 36: Minerva, caracterización parcial. Fase de exploración. Dimensión de Contenido.

Categoría Nivel	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del Área y la del Perímetro
Ingenuo	<p><u>Manifiesta no saber qué es el área.</u> <u>No encuentra vinculación entre el área y situaciones del diario vivir.</u> <u>Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca de la relación entre una</u></p>	<p><u>Manifiesta no saber qué es el perímetro.</u> <u>No encuentra vinculación entre el perímetro y situaciones del diario vivir.</u> <u>Da respuestas incorrectas cuando se le indaga acerca del</u></p>	<p><u>Toma por cierta alguna de las afirmaciones:</u> <u>- A mayor perímetro, mayor área.</u> <u>- Dos o más tajos o eras de diferente forma tienen diferente área.</u> <u>- Dos o más tajos o</u></p>

	<u>superficie y su área.</u> <u>Carece de argumentos para establecer que el área es la medida de la superficie, es decir, del interior de la figura.</u> <u>Reconoce que un lote se compone de tajos.</u>	<u>reconocimiento del perímetro en eras, imágenes o maquetas.</u> <u>Carece de argumentos para establecer que el perímetro es la medida del límite de la superficie, es decir, el contorno de la figura.</u>	<u>eras de igual perímetro tienen la misma área.</u>
--	---	---	--

Tabla 37: Minerva, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Métodos.

Nivel \ Categoría	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Ingenuo	<u>Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual área.</u> <u>No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el área.</u> <u>No utiliza algún procedimiento para relacionar el área y la forma.</u>	<u>Carece de argumentos para establecer que dos o más tajos de diferente forma pueden tener igual perímetro.</u> <u>No utiliza algún procedimiento para estimar o medir el perímetro.</u> <u>No utiliza algún procedimiento para relacionar el perímetro con la longitud.</u>	<u>No utiliza algún método que permita verificar alguna de las siguientes afirmaciones que toma por ciertas:</u> <u>- A mayor perímetro, mayor área.</u> <u>- Dos o más tajos o eras de diferente perímetro tienen diferente área.</u> <u>- Dos o más tajos o eras de igual perímetro tienen la misma área.</u>

Tabla 38: Minerva, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Propósitos.

Nivel \ Categoría	Relación: <i>área : contexto</i>	Relación: <i>perímetro : contexto</i>
Ingenuo	No establece relaciones entre los términos agrícolas (lote, tajo y era) con el término geométrico de área. <u>No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas.</u> <u>No relaciona la medida de la superficie del tajo con el concepto de área.</u>	No establece relaciones entre los términos agrícolas (barrera, cercado y camino) con el término geométrico de perímetro. <u>No encuentra utilidad académica a los términos utilizados en las prácticas agrícolas.</u> <u>No relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el perímetro.</u>

Tabla 39: Minerva, caracterización parcial, Fase de exploración. Dimensión de Formas de Comunicación.

Categoría Nivel	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Ingenuo	<u>No da cuenta de reconocimiento de los términos área y perímetro.</u>	<u>No utiliza las palabras área y perímetro para explicar la relación entre lotes y tajos.</u>

4.2.3.2 Fase de investigación guiada

La fase de investigación guiada constó de dos visitas al campo de cultivo del café y dos sesiones de trabajo en el aula de clase. En las situaciones planteadas, se percibió: (1) el desarrollo de métodos para superar el conteo de unidades que representan el área, (2) el reconocimiento de las regiones en que se aprecian el área y el perímetro y (3) la superación de la creencia de que a mayor perímetro corresponde mayor área.

Primera observación, finca La Soledad

Durante esta sesión, se dieron acuerdos sobre términos y definiciones cafeteras, como lote, tajo y cercados. Además, se trabajó por el reconocimiento in situ del perímetro y del área.

Las situaciones a destacar durante esta observación para la participante Minerva son:

- Reconoce, debido a su cercanía con la actividad cafetera, que una superficie mayor puede ser dividida en superficies menores pues, a la pregunta ¿toda una finca es un tajo?, su respuesta fue, “*Toda una finca es un lote y tiene tajos y ahí cultivan café*”. Con esta respuesta se

presume que la estudiante podrá aceptar con naturalidad que el área de una región es la suma de las áreas en que sea dividida.

- Reconoce que la separación de tajos se da por líneas conformadas con matas de plátano o yuca; caminos para sembradores y recolectores, cercados con madera o alambre de púas. Este tipo de conocimiento es lo que Viedma (1970) llama noción intuitiva; además, el hecho de distinguir la forma, el tajo y sus límites ayuda superar lo que para Chamorro et al. (2008) representa un obstáculo para la comprensión del área, el dibujo de líneas en el pizarrón que no permiten despertar interés en el interior del polígono.
- Reconoció en los caminos y las matas de plátano el perímetro de los tajos y, el interior de estos, como el área; esto se dio cuando el investigador mencionó que el perímetro es el límite de las figuras y el área es lo que se encuentra al interior. Incluso, recordó que en la entrevista había expresado la asociación contraria.
- Propuso la equivalencia de superficies entre tajos y las eras de almácigo.
- Presentó una confusión porque las eras observadas no estaban completamente rodeadas por caminos (calles), con lo que expresó que el perímetro solo estaba presente en uno de los lados del rectángulo formado por bolsas de almácigo.
- No asoció perímetro con longitud, pues al preguntarle ¿si el perímetro está representado con la cuerda, cómo podemos saber la medida del perímetro? respondió que no sabía.

- No dio crédito a la igualdad de perímetros de rectángulos de diferente área e, incluso, argumentó que la cuerda había quedado mal puesta o que unas bolsas estaban más separadas que otras.
- Reconoció la igualdad de perímetros y la diferencia de áreas cuando se trazó con la cuerda un polígono irregular y el conteo de bolsas dio cantidades absolutamente diferentes (ver imagen 6).
- No encontró un método diferente al conteo de unidades para determinar la cantidad de bolsas (unidades momentáneas de área). Solo se percató del producto largo, después de la discusión colectiva con sus demás compañeros.
- Explicó que las bolsas de almácigo servían como unidad de área porque es lo que rellena el perímetro.
- No infirió que con la misma área se pudiera obtener diferente perímetro, solo explicó con acierto tras la actividad recién abordada, que con perímetros iguales se pueden obtener diferentes áreas.

Segunda observación, finca la Soledad

Esta sesión de trabajo se dedicó específicamente al reconocimiento de que a iguales áreas no se corresponden, estrictamente, iguales perímetros. Los aspectos destacados de esta observación son:

- No dio crédito a que dos rectángulos que contienen 40 bolsas distribuidas de 10×4 y 5×8 , tuvieran diferente perímetro; al igual que en las otras ocasiones, culpó a la cuerda y a la falta de firmeza de las bolsas, por la diferencia entre las longitudes perimetrales.



Imagen 38: Comprobación de que la diferencia de perímetros es igual a dos longitudes de lado de bolsa de almácigo.

- Aceptó la diferencia de perímetros en dos rectángulos de igual área, al realizar el conteo de las bolsas que conforman los lados del exterior y obtuvo como resultados 28 lados de bolsa para el rectángulo de 10×4 y 26 para el de 5×8 .
- Aceptó el hecho de que, a igual área diferente perímetro, cuando se formó un rectángulo de 20×2 y la longitud de cuerda utilizada fue absolutamente superior a la de los otros dos casos. Ver imagen 12.

Tercera observación, Institución Educativa Santa Rita

La sesión de trabajo que se llevó a cabo contó con un test escrito de discusión grupal y una actividad individual de redistribución de los tajos de un lote fotografiado; esto último se hizo para comenzar el proceso de conservación del área y variación de la forma.

Los progresos en el reconocimiento y expresión de la independencia del área y del perímetro, fueron notorios. En la dimensión que se notan menos avances, es en la de formas de comunicación. Esta observación permitió determinar que la estudiante:

- Relaciona correctamente el perímetro con los límites que marcan la separación de lotes o tajos.

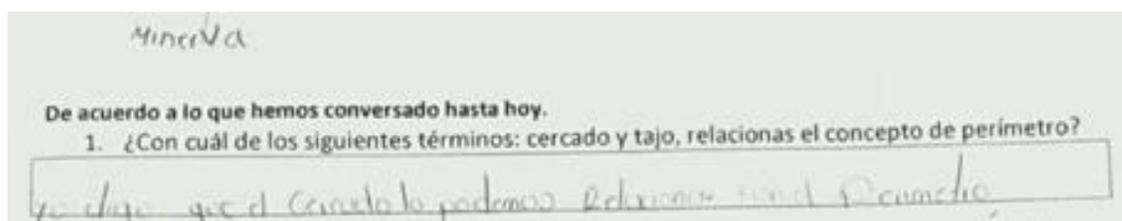


Imagen 39: Minerva, asociación del concepto de perímetro con uno de los términos agrícolas cercado y tajo.

- Relaciona correctamente el área con la región de sembrado de lote o tajo.

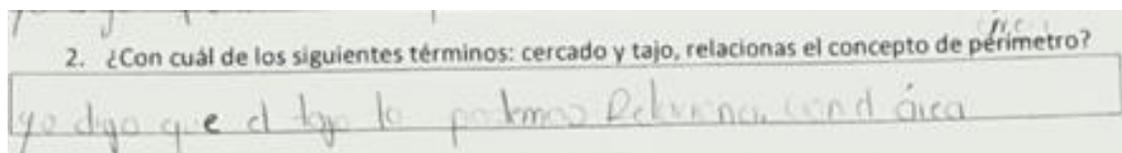


Imagen 40: Minerva, asociación del concepto de área con uno de los términos agrícolas cercado y tajo.

- No expresa correctamente la falsedad de afirmaciones como “a mayor perímetro siempre corresponde mayor área”, aunque reconoce que la relación de dependencia no se da.

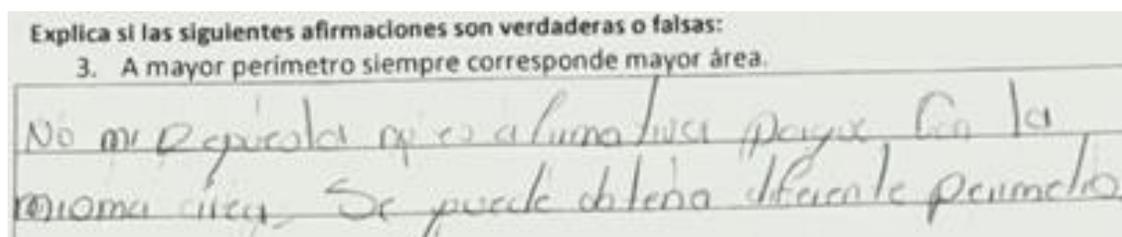


Imagen 41: Minerva, argumentación sobre la independencia de las medidas del perímetro y el área.

- En imágenes de lotes y tajos, reconoce los elementos que representan el perímetro.
- En imágenes de lotes y tajos, reconoce los elementos que representan el área.

Observando la siguiente imagen y prestando atención a la porción señalada dentro con la línea negra.



5. El perímetro puede estar representado por:

- a. Las matas de plátano junto con las de café.
- b. El pasto.
- c. Solamente las matas de café.
- d. Solamente las matas de plátano.

6. El área se mediría:

- a. En el borde que forman las matas de plátano.
- b. En la superficie sembrada con matas de café.
- c. Desde el borde exterior de las matas de plátano.
- d. No puede tomarse el área porque hay un borde más extenso que el otro.

Imagen 42: Minerva, reconocimiento de los conceptos de área y perímetro en el contexto del cultivo del café.

- Reconoce la conservación del área aunque las distribuciones se cambien y argumenta que esto se da siempre y cuando se tenga el mismo número de trozos, porque “*si se pierde uno ya el área no da*”.



Imagen 43: Minerva, igualdad del área de un lote con diferente distribución de tajos.

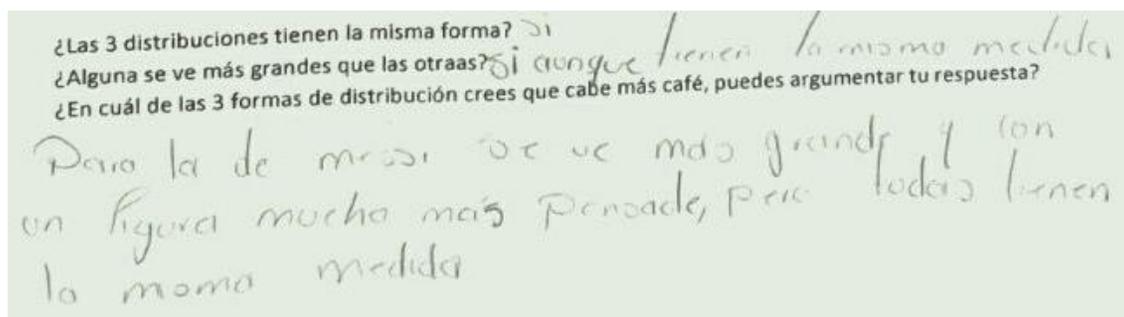


Imagen 44: Minerva, argumentación de igualdad del área de un lote con diferente distribución de tajos.

- Reconoce que para asegurar la igualdad o diferencia de áreas, debe hacer estimaciones o mediciones.

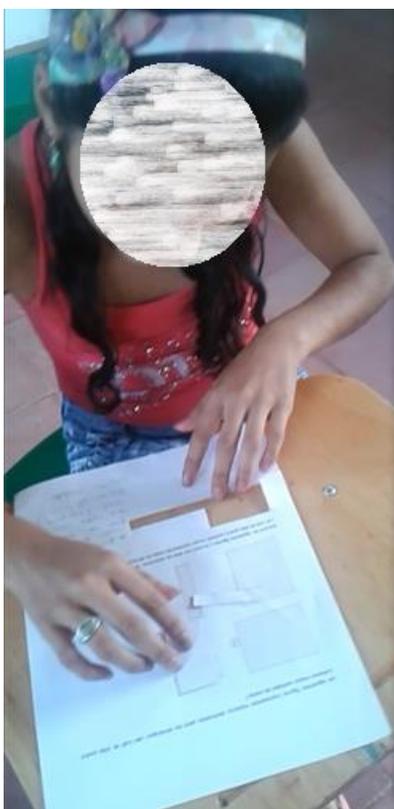


Imagen 45: Minerva, necesidad de medir para determinar la igual o diferencia de áreas.

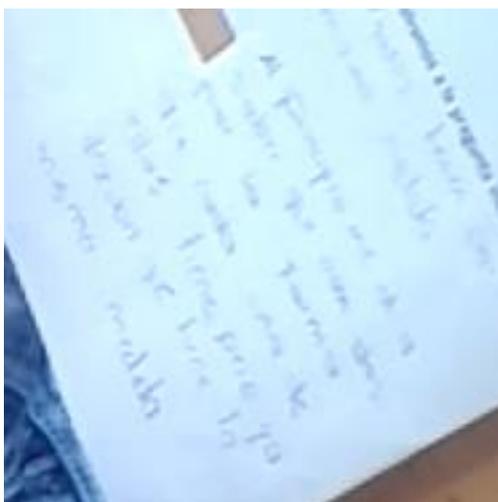


Imagen 46: Minerva, argumentación sobre la necesidad de medir para determinar la igual o diferencia de áreas.

Cuarta observación, Institución Educativa Santa Rita

En la primera actividad de corte y redistribución de los tajos de la fotografía de un lote demostró que reconoce y acepta la independencia de sus medidas. De sus aportes se destacan:

- Al terminar de redistribuir los tajos y estimar nuevamente el perímetro, dijo: *“Yo sabía que el perímetro me iba a dar distinto porque coloqué los tajos de una forma diferente a la inicial”*.



Imagen 47: Minerva, actividad de conservación del área, redistribución de los tajos de un lote

- Argumentó bien el porqué del cambio en la medida del perímetro.
- Expresó con claridad la situación de conservación del área y de la cantidad de café que puede sembrarse en un lote.

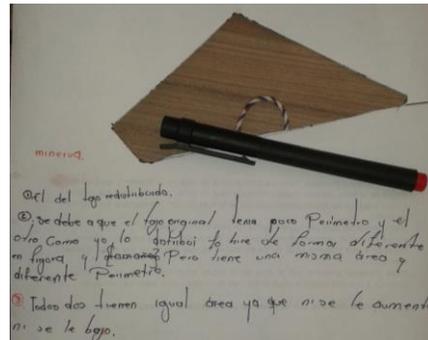


Imagen 48: Minerva, argumentación sobre la conservación del área en la redistribución de tajos

- Reconoce que para asegurar la igualdad o diferencia de áreas, debe hacer estimaciones o mediciones.
- Además, en ese procedimiento recurrió a formar unidades cuadradas con las partes cortadas por las oblicuas. Es decir, a modo de rompecabezas, armó cuadrados con las partes no enteras contenidas en los polígonos.

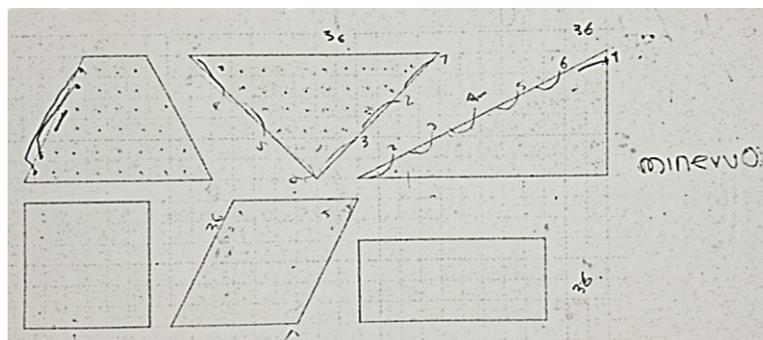


Imagen 49: Minerva, comprobación de igual área en polígonos diferentes

Caracterización parcial

Luego de triangulada la información obtenida en la fase de investigación y analizada a la luz de los antecedentes, se observó que los desempeños de la estudiante en las tres categorías de la dimensión de contenido y en la dimensión de propósitos, se corresponden con el nivel de aprendiz. Para las categorías de la dimensión métodos y las de la dimensión de formas de comunicación, los desempeños de la estudiante la ubican en el nivel de novato.

Tabla 40: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Contenido.

Categoría Nivel	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del Área y la del Perímetro
Aprendiz	<u>En eras, maquetas a escala o imágenes, muestra que reconoce la región que representa el área. Relaciona el área de las eras con la cantidad de almácigos. Manifiesta la necesidad de medir el área de una era. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</u>	<u>Manifiesta la necesidad de medir el perímetro en unidades de longitud. Relaciona el perímetro con la longitud del cercado, las barreras agrícolas u otros delimitadores del terreno. Relaciona las formas de los tajos con otras superficies y en otros contextos.</u>	<u>Manifiesta la posibilidad de independencia entre las medidas del área y el perímetro. Esclarece en qué casos se estima el área y en qué casos el perímetro.</u>

Tabla 41: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Métodos.

Categoría Nivel	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Novato	<u>Establece la medida del área a través del conteo de unidades concretas como bolsas de almácigo o recortes de imágenes de tajos.</u>	<u>Establece la medida del perímetro a través del conteo de unidades longitudinales. Utiliza métodos que solamente le permiten</u>	<u>Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos o eras de igual área tienen igual perímetro. Utiliza métodos que</u>

	<u>Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos de igual área tienen igual forma.</u> <u>Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos de diferente área tienen diferente forma.</u>	<u>demostrar que dos o más tajos de igual perímetro tienen igual forma.</u> <u>Utiliza métodos que solamente le permiten demostrar que dos o más tajos de diferente perímetro tienen diferente forma.</u>	<u>solamente le permiten demostrar que dos o más tajos o eras de diferente área tienen diferente perímetro.</u>
--	--	--	---

Tabla 42: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Propósitos.

Nivel	Categoría	Relación: <i>área</i> : <i>contexto</i>	Relación: <i>perímetro</i> : <i>contexto</i>
	Aprendiz	<u>Relaciona la medida de la superficie del tajo o de la era con el concepto de área.</u> <u>Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de área.</u>	<u>Relaciona la longitud de las barreras u otros límites con el concepto de perímetro.</u> <u>Encuentra relaciones entre sus prácticas agrícolas cotidianas y los términos propios de ello con las prácticas y términos escolares, en especial los relacionados con el concepto geométrico de perímetro.</u>

Tabla 43: Minerva, caracterización parcial. Fase de investigación guiada. Dimensión de Formas de Comunicación.

Nivel	Categoría	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
	Novato	<u>Las palabras área y perímetro tienen algún significado para el estudiante, lo relaciona con las barreras y los tajos o las eras, pero, no da cuenta del significado correcto.</u>	<u>Expresa inseguridad al relacionar los términos propios de la agricultura (lote, tajo, barrera y cercado) con los términos y conceptos geométricos (área y perímetro).</u> <u>No argumenta con claridad los procedimientos llevados a cabo para la realización de las tareas de medición o comprobación de supuestos.</u>

4.2.3.3. Proyecto final de síntesis

Esta etapa de la investigación constó de dos situaciones; en la primera, se planteó la solución de problemas que involucran los conceptos de área y perímetro, tanto en el contexto de

la agricultura del café como en otros escenarios, como es el caso del recubrimiento de la superficie del patio escolar con fibra sintética. En la segunda, se planeó una exposición, ante sus compañeros y profesores, del proceso vivido durante la investigación y de las soluciones planteadas para ambas situaciones problema.

Solución de problemas

- Estimó el perímetro de un tajo de superficie plana, al medir los lados intersectados y al multiplicar por dos la suma de ambos, y con ello, pudo determinar la cantidad de alambre necesario para rodearlo utilizando tres hiladas.
- Estimó correctamente el área del tajo pero no dio cuenta sobre cómo estableció la cantidad de matas de café posibles de sembrar en este, tampoco tuvo presente la distancia que las debe separar.
- Para estimar el perímetro del patio de recreo de primaria midió los lados intersectados, sumó ambas medidas y multiplicó el total entre dos, argumentó que siendo los lados iguales a estos, no tenía que volverlos a medir. Además, con la ayuda de su padre averiguó el valor comercial de un metro de malla y con este calculó el valor total necesario para encerrar el patio.

Exposición ante el público

- Aunque dio cuenta del dominio práctico y reconocimiento in situ de los términos área y perímetro, no hace uso de ellos para explicar los métodos, operaciones y argumentos para llevar a cabo las soluciones.

- Expresó la medida del área en términos claros, además combinó el uso de unidades convencionales con las estandarizadas.
- A través de la narración de las actividades, dio ejemplos para mostrar que el área y el perímetro son magnitudes independientes.

4.2.3.4. Caracterización final

La estudiante progresó en todas las dimensiones: dio cuenta del reconocimiento visual del área y del perímetro, utilizó cálculos aritméticos para estimar el perímetro y el área de diferentes lugares, relacionó estos conceptos con otros que los involucran como valor por unidad o reiteración de una medida. Fue evidente que en la dimensión en que menos progresos se vieron fue en la de formas de comunicación, en especial en la categoría de *coherencia en el discurso*.

A continuación se presenta un resumen de la rúbrica para dar a conocer los desempeños esperados en los niveles de aprendiz y maestría en cada una de las dimensiones

Dimensión de contenido

Las categorías de esta dimensión son: concepto de área, concepto de perímetro, independencia entre las medidas de área y perímetro.

Tabla 44: Minerva, caracterización, dimensión de Contenido.

Nivel	Categorías		
	Concepto de área	Concepto de perímetro	Independencia entre la medida del área y el perímetro.

Descriptores del nivel de Maestría	<u>Explica situaciones que involucren el concepto de área en el contexto del cultivo del café.</u>	<u>Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en el contexto del cultivo del café</u> <u>Explica situaciones que involucren el concepto de perímetro en contextos diferentes al del cultivo del café.</u>	<u>Reconoce que superficies de diferente forma y diferente área pueden tener igual perímetro.</u> <u>Reconoce que superficies de diferente forma y perímetro pueden tener la misma área.</u>
	<u>Explica situaciones que involucren el concepto de área en contextos diferentes al del cultivo del café.</u> <u>Expresa el área calculada en unidades bidimensionales</u> <u>Comprende la razón por la cual el área se expresa en unidades bidimensionales.</u>		
Nivel alcanzado	Maestría	Maestría	Maestría

De acuerdo con la rúbrica y la triangulación elaborada durante el análisis de categorías, se evidencia que la estudiante alcanzó los desempeños esperados para las tres categorías, por lo tanto, la estudiante se ubica en el nivel de maestría, resaltando los descriptores resaltados en negro y subrayados.

Dimensión de método

Las categorías de esta dimensión son: método para medición o estimación del área, método para la medición o estimación del perímetro, método para establecer la independencia entre las medidas del área y del perímetro.

Tabla 45: Minerva, caracterización, dimensión de Método.

Nivel	Categorías		
	Método de estimación o medición del área.	Método de estimación o medición del perímetro.	Método para establecer la independencia entre las medidas del área y el

			perímetro.
Descriptores del nivel de Maestría	<u>Realiza el cálculo aritmético para determinar el área de las eras o tajos de formas rectangulares.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del de área en el contexto del cultivo del café y la cantidad de plantas que pueden ser sembradas en él.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del área en contextos diferentes al del cultivo del café.</u> <u>Calcula el área de formas regulares y no regulares.</u>	<u>Realiza el cálculo aritmético para determinar el perímetro de las eras o tajos de formas rectangulares.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en el contexto del cultivo del café.</u> <u>Resuelve situaciones que involucren la medida del perímetro en contextos diferentes al del cultivo del café.</u> <u>Calcula el perímetro de formas regulares y no regulares.</u>	<u>A través de la transformación de figuras muestra la independencia de las medidas del área y el perímetro.</u>
Nivel alcanzado	Maestría	Maestría	Maestría

Luego de realizada la triangulación, la estudiante fue ubicada en el nivel de maestría para cada una de las categorías de esta dimensión. Por eso, se resaltan en negro y subrayado, para indicar los desempeños logrados.

Dimensión de propósitos

Las categorías para esta dimensión fueron: relación *área* : *contexto* y relación *perímetro* : *contexto*.

Tabla 46: Minerva, caracterización, dimensión de Propósitos.

Nivel	Categorías	
	Relación <i>área</i> : <i>contexto</i>	Relación <i>perímetro</i> : <i>contexto</i>
Descriptores del nivel de Maestría	<p><u>Aplica lo aprendido para estimar el área de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad de cafetos que pueden ser sembrados.</u></p> <p><u>Relaciona lo que sabe de área con otras disciplinas y resuelve situaciones como el cálculo de área de contextos no agrícolas.</u></p>	<p><u>Aplica lo aprendido para estimar el perímetro de los tajos donde labora y para resolver problemas sobre cantidad y de alambre necesario para el cercado.</u></p> <p><u>Relaciona lo que sabe de perímetro con otras disciplinas y resuelve situaciones reales, en contextos diferentes al café, en las que se necesita el cálculo del perímetro.</u></p>
Nivel alcanzado	Maestría	Maestría

Contrastando los desempeños esperados con lo observado y analizado en la triangulación, se determinó que la estudiante alcanzó el nivel de maestría para ambas categorías. Por eso, se resaltan en negro y subrayado los descriptores que logró desarrollar.

Dimensión de formas de comunicación

Las categorías de esta dimensión son: definiciones y términos del lenguaje matemático y coherencia en el discurso.

Tabla 47: Minerva, caracterización, dimensión de Formas de Comunicación

Nivel	Categorías.	
	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Maestría	<p><u>Explica, en el cultivo del café y otros contextos, dónde está representada el área y dónde está representado el perímetro.</u></p> <p><u>En exposiciones al público y en las</u></p>	<p><u>Explica, con diferentes ejemplos y argumentos los conceptos de área y perímetro.</u></p> <p><u>Da cuenta del modo de expresión o unidades utilizadas para presentar la</u></p>

	<p><u>sesiones de trabajo en grupo presenta una explicación formal sobre el significado de los términos área y perímetro.</u></p> <p><u>En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo expresa el perímetro en unidades longitudinales estandarizadas internacionalmente.</u></p> <p><u>En exposiciones al público y en las sesiones de trabajo en grupo expresa el área en unidades bidimensionales estandarizadas internacionalmente.</u></p>	<p><u>media del área y del perímetro.</u></p> <p><u>Explica la independencia entre las medidas del área y del perímetro utilizando correctamente los términos y dando ejemplos de ello.</u></p>
<p>Nivel alcanzado</p>	<p>Maestría</p>	<p>Maestría</p>

De la categoría *definiciones y términos del lenguaje matemático*, se evidenció que alcanzó todos los logros esperados. En la categoría *coherencia en el discurso*, aunque, durante la primera exposición tuvo varios errores, en la segunda exposición demostró haberlos superado. Por lo tanto en ambas categorías la estudiante fue ubicada en el nivel de maestría.

CAPÍTULO 5

El capítulo final de esta investigación expone las conclusiones y recomendaciones a partir del análisis del proceso vivido en el presente trabajo. Las conclusiones se dan desde la consecución de objetivos, la respuesta a la pregunta de investigación y las contribuciones que se hacen a la Educación Matemática. Las recomendaciones, presentadas de manera respetuosa, sugieren ajustes y complementos para que el proceso en el aula llegue a mejor término. También se plantean algunas líneas de investigación que pueden ampliar la que en este documento se presenta o las que pueden derivarse de él.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS

En primera instancia, se dará cuenta del objetivo general y los específicos; para ello, se presentarán los resultados y acciones que permitan asegurar que los objetivos fueron alcanzados.

5.1.1. CONSECUCIÓN DEL OBJETIVO GENERAL

Para llevar a cabo la investigación y buscar aportar a la solución del problema planteado, se trazó el siguiente objetivo general, presentado en el capítulo 1, apartado 1.3.1: *analizar el proceso de comprensión en los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Santa Rita, de los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café*. Para lograr el objetivo propuesto se llevaron a cabo acciones como:

Planteamiento de descriptores hipotéticos, llamados *Descriptores de categoría por nivel* y consignados en una rúbrica elaborada de acuerdo a las dimensiones y niveles establecidos en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, a las definiciones de los conceptos objeto de estudio de la presente investigación, a las tareas y habilidades que, de acuerdo con los antecedentes, los estándares curriculares y a la experiencia del investigador, se esperaba realizaran los participantes. La rúbrica o mejor, los descriptores de categoría por nivel, se plantearon, inicialmente, a priori, pero, a medida que la investigación progresaba y se ejecutaba el trabajo de campo, sufrieron un proceso de refinamiento.

Adopción de las fases de la comprensión propuestas por el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión: fase de exploración, fase de investigación guiada y proyecto final de síntesis. Lo realizado en cada fase se dio de la siguiente manera:

En la **fase de exploración** se indagó sobre qué conocimiento, intuitivo o académico, tenían los estudiantes sobre los conceptos geométricos objeto de estudio de esta investigación. También se buscó determinar si los estudiantes establecían relación de dependencia entre los límites de una propiedad y su porción interna de terreno. Esto se llevó a cabo a través de un test de final abierto y una entrevista semi-estructurada.

Para la **fase de investigación**, se diseñaron conversatorios grupales para acordar y adoptar la definición de los términos propios de la agricultura que serían utilizados durante el proceso de investigación: lote, tajo, barrera, cercados, límite, almaciguera, era, almácigo; con el fin de garantizar que todos nos referíamos a lo mismo con cada uno de los términos y reducir así las posibilidades de ambigüedad en las expresiones. Los conversatorios también se orientaron hacia

la asociación de estos términos y su significado con los conceptos geométricos de área y perímetro.

El trabajo de campo se llevó a cabo en la almaciguera de una de las fincas de la vereda la Soledad; allí se realizaron actividades con la que se buscó dar respuesta a interrogantes como: ¿una misma longitud de límites siempre encierra la misma cantidad de almácigos?, ¿a mayor longitud de límites se corresponde mayor cantidad de almácigos?, ¿a una misma cantidad de almácigos siempre le corresponde una longitud de límites?, ¿a mayor cantidad de almácigos le corresponde mayor longitud de límites?

También se elaboraron cuestionarios que dieran cuenta del reconocimiento de las regiones en que se aprecian el perímetro y el área en fotografías de lotes y tajos de café; además, hubo entrevistas de preguntas abiertas que permitieron identificar la adquisición o no de los conceptos objeto de estudio y el modo de expresión de los mismos. Esto con el fin de llevar a cabo la descripción de la comprensión de cada uno de los participantes del estudio de casos.

Además, se propusieron exposiciones orales a través de presentaciones ante los demás participantes y estudiantes invitados, en las que dieran cuenta de la definición de los términos, la independencia de las medidas, las unidades de medida y los posibles usos que pudieran dar a los conceptos y procedimientos comprendidos.

Para el **proyecto final de síntesis**, se propusieron dos problemas que involucraron los conceptos de área y perímetro, uno de ellos en el contexto del cultivo del café y, el otro, en un contexto diferente, cuyo referente fue el patio de recreos del colegio. Además, una exposición

formal del proceso llevado a cabo en la investigación y de la comprensión de los conceptos de perímetro y área, de actividades que dieran cuenta de la independencia de la medida de ambos y de las unidades de medida de cada uno.

Dada la anterior exposición y elaborado el análisis de cada uno de los participantes de la investigación, expuesto con detalle en el capítulo 4, y haber efectuado las triangulaciones correspondientes entre los descriptores de categorías por nivel, elaborados la luz de la definición, las cualidades de la comprensión que establece el marco conceptual de la EpC y, las elaboraciones y respuestas de los estudiantes, es pertinente decir que el objetivo general fue logrado.

5.1.2. CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos trazados para la investigación y que aparecen en el capítulo 1, apartado 1.3.2 fueron:

Diseñar y evaluar una unidad curricular que facilite el avance en la comprensión de los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café, en los estudiantes del grado 5° de la básica primaria.

Describir de qué manera avanza un estudiante del grado 5° de un nivel a otro de comprensión de los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, según el marco conceptual de la EpC.

Los objetivos específicos se complementan entre sí y estos a su vez se complementan con el objetivo general. De este modo, el diseño de la unidad curricular y su proceso de refinamiento presentado ampliamente en el capítulo 4, se logró en la medida que se modificaban los descriptores de categoría por nivel, a la luz de los resultados y productos de los participantes en cada una de las actividades de la unidad curricular.

La descripción de la forma en que un estudiante progresa de nivel dio pie para reforzar las actividades planteadas en las primeras sesiones de la fase de investigación guiada; fue así como se evidenció la necesidad de que los participantes realizaran exposiciones informales de sus progresos ante algunos de sus compañeros. Además, se posibilitaron actividades de corte y manipulación de siluetas, luego del trabajo con las fotografías de cafetales para afianzar el concepto de conservación del área, a pesar de la rotación y la traslación; adicionalmente, este tipo de trabajo facilitó el paso de la cara superior de la bolsa de almácigo como unidad de medida del área a la medida convencional de cuadrado.

Dicho lo anterior y aunado a los resultados expuestos en el capítulo 4 y también mencionados en el último párrafo de la consecución del objetivo general, es válido afirmar que los objetivos específicos se lograron.

5.1.3. RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La pregunta planteada para orientar el proceso de investigación fue: “¿*Cómo comprenden los estudiantes del grado 5º de la I. E. Santa Rita los conceptos de perímetro y área,*

y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café, según el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión?”

Los descriptores hipotéticos, refinados durante el proceso de investigación y que llegaron a convertirse en los descriptores finales, permitieron realizar la caracterización de la comprensión de los conceptos objeto de estudio para cada uno de los tres participantes y dar información pertinente del nivel, para cada una de las dimensiones, en que se encontraban al iniciar el proceso de investigación, del progreso y avance durante la misma y, por consiguiente, establecer el nivel, para cada una de las dimensiones y categorías, hasta el cual llegó cada estudiante al terminar el proceso de investigación.

Para cada uno de los estudiantes fue provechoso el hecho de realizar las actividades propuestas en las fases de la guía curricular, porque les permitió el progreso entre los niveles de comprensión en cada una de las categorías definidas a priori y de acuerdo con las dimensiones establecidas dentro del marco conceptual de la EpC. Para la consecución del objetivo general y la respuesta al interrogante planteado, lo fundamental fue la rúbrica de *Descriptores de categoría por nivel*, presentada en el capítulo 4, apartado 4.1.4, dado que los descriptores consignados en ella posibilitaron describir la comprensión y determinar el nivel alcanzado por los estudiantes, cuyo proceso fue analizado mediante el estudio de casos.

Recurriendo a las dimensiones del marco conceptual: contenido, método, propósitos y formas de comunicación y a las preguntas orientadoras de las mismas, se indagó permanentemente a través de cuestionarios, preguntas abiertas en forma oral o escrita, petición de argumentaciones de respuestas dadas o métodos empleados y constatación de que los estudiantes

habían superado las creencias intuitivas que obstaculizan la comprensión (tal es el caso de asegurar que a mayor perímetro corresponde mayor área y viceversa). También se tuvo en cuenta la utilización de métodos de estimación que superaran el conteo natural de unidades, la asertividad en los métodos empleados para corroborar sus afirmaciones y las expresiones dadas en forma correcta dentro del campo disciplinar. En algunas de las actividades de aula, en las que se les pidió demostrar que distintas figuras poligonales tenían la misma área, hubo soluciones ingeniosas como la de superponer la silueta de una ellas sobre todas las demás y, posteriormente, a través de una reconstrucción por rotación y traslación llegar a mostrar que las figuras eran de igual área; otra de las soluciones dadas fue, luego de la superposición de la silueta, identificar la semejanza e igualdad de figuras, la interna con la externa. También fue notorio el hecho de apropiarse del principio de la conservación del área a pesar de las subdivisiones de las superficies, caso dado en el argumento presentado luego del recorte en fotografías de los tajos de un lote y redistribución de los mismos: “*en todos los lotes cabe el mismo café, aunque la forma del lote cambió*”; algo similar ocurrió en la comparación de eras de almácigo; también se notó que para asegurarse, entre varios tajos, cuál de ellos tenía más perímetro o área, medían cada uno con algún patrón común y así llegaban a establecer la igualdad o diferencia entre una o ambas medidas.

Por lo tanto, observamos que los estudiantes *comprenden los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café* a través de la asociación de área : contenido de la era, unidad de área con cara superior de la bolsa de almácigo, perímetro : cuerda que bordea una cantidad de bolsas, perímetro : cercado, perímetro : barreras de sembrado, y *la independencia de sus medidas* a través de la formación de figuras geométricas con la misma cantidad de bolsas en

diferente distribución, para luego, comparar la cantidad de cuerda utilizada para bordear sus límites, además, de usar el conteo de lados de bolsa como unidad de medida de longitud.

5.1.4. UBICACIÓN FINAL DE LOS ESTUDIANTES POR NIVEL

A continuación se presenta un resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes en cada una de las categorías elaboradas para las dimensiones.

Tabla 48: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Contenido.

Dimensión de Contenido. Ubicación final de los estudiantes			
Nivel \ Categoría	Concepto de Área	Concepto de Perímetro	Independencia entre las medidas del área y del perímetro
Ingenuo			
Novato			
Aprendiz	Messi		
Maestría	Isis Minerva	Messi Isis Minerva	Messi Isis Minerva

Tabla 49: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Método.

Dimensión de Método. Ubicación final de los estudiantes			
Nivel \ Categoría	Método de estimación o medición del Área	Método de estimación o medición del Perímetro	Método para establecer la independencia entre las medidas del área del perímetro.
Ingenuo			
Novato			
Aprendiz	Messi		
Maestría	Isis Minerva	Messi Isis Minerva	Messi Isis Minerva

Tabla 50: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Propósitos.

Dimensión de Propósitos. Ubicación final de los estudiantes		
Categoría	Relación <i>área : contexto</i>	Relación <i>perímetro : contexto</i>
Nivel		
Ingenuo		
Novato		
Aprendiz	Messi	
Maestría	Isis Minerva	Messi Isis Minerva

Tabla 51: Ubicación final de los estudiantes. Dimensión de Formas de Comunicación.

Dimensión de Formas de comunicación. Ubicación final de los estudiantes		
Categoría	Definiciones y términos del lenguaje matemático	Coherencia en el discurso
Nivel		
Ingenuo		
Novato		
Aprendiz	Messi	Messi
Maestría	Isis Minerva	Isis Minerva

5.1.5. CONTRIBUCIONES A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Como se expuso en el capítulo 1, el concepto de área, ligado para su definición y observación al de perímetro, es ampliamente utilizado dentro del campo disciplinar de las matemáticas y en otras áreas como las ciencias naturales, las ciencias sociales, la agricultura, arquitectura y otras. Además, ha sido de gran interés desde la historia de la misma sociedad. Los interrogantes e investigaciones sobre ella llevaron a grandes matemáticos a plantearse el cuestionamiento de la cuadratura del círculo y de otras curvas, lo que en palabras de Larson y Hostetler (1990) es el “*Problema de las áreas*” (p. 113), que también se conoce como el

problema de integración; este interés condujo a lo que hoy se conoce como cálculo integral. Dada la importancia que tiene el concepto de área, el presente trabajo se orientó hacia la comprensión del mismo, pero, se buscó, además, darle significación y dotarlo de sentido, para reducir o evitar lo que Corberán (1996) y Chamorro et al (2008) llaman dificultades en la comprensión dadas por el tratamiento abstracto, aritmético y repetitivo con que comúnmente se lleva a cabo en las escuelas.

También, fue de especial interés para el trabajo de investigación atacar lo que en primera instancia y por intuición, se considera una verdad absoluta y que, apoyados en las investigaciones de Corberán (1996), Chamorro et al. (2008) y Del Olmo et al. (1993), de no ser tratadas debidamente permanecen como un obstáculo para la comprensión; tal situación es la creencia de que la medida del área depende y está absolutamente ligada a la medida del perímetro. Las actividades llevadas a cabo durante el trabajo de campo y complementadas con los talleres en el aula, llevaron a los estudiantes a comprender que ambas medidas son independientes aunque, con el valor de una de ellas sea posible estimar el valor de la otra.

Es útil para la Educación Matemática y, en especial, para los estudiantes, tener un contacto con los objetos concretos que permiten un acercamiento a los conceptos de perímetro y de área desde la experimentación en un contexto particular como lo es el del cultivo del café, dado que es una situación cotidiana para ellos que les ayuda a establecer relaciones beneficiosas para la comprensión de los conceptos objeto de estudio.

Uno de los recursos didácticos empleados en las escuelas para la enseñanza del área es el geoplano, que siendo un excelente recurso, puede ser en algunos casos descontextualizado; en

vez de él, la almaciguera y, por ende, sus eras y unidades de almácigo, que son lugares y elementos cotidianos para los estudiantes del contexto, dotan de un alto significado práctico y vivencial los contenidos y conceptos de aprendizaje. A través del uso manual de ellos y de las transformaciones elaboradas con fotografías, se llegó, incluso, a situaciones de congruencia, rotación y traslación. En cuanto al interés primordial de esta investigación, es notorio que la evocación y utilización de su entorno ayudan en la percepción de las cualidades de las magnitudes bidimensionales o de superficie y de su diferencia con las cualidades de las magnitudes unidimensionales. En este sentido, es pertinente evocar nuevamente lo dicho por Chamorro et al. (2008), en relación a lo dificultoso que es el proceso de escisión entre longitud y superficie y del papel relevante en esta barrera conceptual que representan los dibujos en el pizarrón. La presencia de los lotes en una finca, de tajos en un lote, de eras en la almaciguera y de unidades de almácigo en las eras, facilitó la comprensión del área como una suma de superficies y la igualdad de áreas aun en situaciones de figura y forma diferente.

En la observación y remembranza de las regiones propias de la siembra de café, se emprende el proceso de comprensión en ambientes propicios para la decantación de longitud y superficie, dado a que ambos se visualizan de forma simultánea y, además, en cuanto a la medida de la región contenida dentro de los límites, se aprecian unidades concretas y aptas para el conteo individual. Las distribuciones diferentes de estas unidades facilitaron la comprensión de que es posible conservar el área a pesar del cambio de forma poligonal y de la variación en la medida del perímetro. La utilización de elementos de uso cotidiano, como la cuerda de amarre, para la demarcación de los límites y la asociación de esta a la idea intuitiva de línea de continuidad, facilitaron la comprensión de perímetro y, la creación de formas poligonales diversas con la

misma longitud, propiciaron un ambiente favorable para la comprensión de la conservación del perímetro y la variación del área.

Los demarcadores de límites socialmente utilizados por los dueños de tierra (cercados, barreras y otros) fueron adecuadamente comparados con los demarcadores de límites de otros contextos, tales como las mallas que separan la cancha del colegio de otras propiedades. Estos materiales y ambientes también fueron útiles a la hora de establecer significación de la definición de cada uno de los conceptos objeto de estudio, de visualizarlos en contextos diferentes al del cultivo del café y mostrarlos en regiones en que cada uno se aprecia, como paredes, tableros de aulas, suelos del salón de clases y canchas.

La unidad curricular completa, es decir, la guía curricular de actividades complementada con la rúbrica de descriptores por nivel, es una valiosa contribución a la Educación Matemática en dos circunstancias: primero, porque posibilita que los estudiantes progresen entre las dimensiones de la comprensión hasta niveles altos de la misma; también, les permite involucrarse en el proceso de evaluación dado que facilita que ellos mismos estén al tanto de sus puntos débiles para animarlos a superarlos; segundo, al investigador o docente le da la posibilidad de identificar el nivel de comprensión que los estudiantes tienen en cada una de las dimensiones establecidas en el marco conceptual de la EpC. En este informe, se encuentra el análisis de cada uno de los participantes y en él se describe el proceso de comprensión, caracterizándolo en cada una de las fases dadas desde el marco conceptual. Este análisis es de gran utilidad para los docentes del área de matemáticas porque puede ser tomado como guía para la observación de los estudiantes de los cursos que oriente.

5.1.6. RECOMENDACIONES

- Desde la etapa de investigación guiada proponer exposiciones formales, con apoyo en diapositivas, sobre los avances en la comprensión de los conceptos abordados.
- También, durante la etapa de investigación guiada, proponer la realización de informes escritos y con ello hacer que la expresión y la comunicación sean más sólidas.
- Realizar actividades de medición con patrones estandarizados durante la finalización de la etapa de investigación guiada.
- Ubicar en el contexto de la almaciguera, la utilización de la unidad estandarizada de la medida del área.
- Para la etapa del proyecto final de síntesis, proponer problemas que involucren la independencia de las medidas del perímetro y del área en contextos diferentes al cultivo del café.
- Igualmente, para el proyecto final de síntesis, proponer la exposición del portafolio de actividades en la que cada estudiante cuente con un punto de exhibición y de explicación a los visitantes de los conceptos objeto de estudio.

5.1.7. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación abre posibilidades para otras líneas de investigación, entre las cuales proponemos las siguientes:

El contexto como insumo para el aprendizaje de conceptos matemáticos. Es necesario recordar que el contexto, entendido como el ambiente que rodea al estudiante, no se da solo en la agricultura. Colombia es un país diverso biológica y culturalmente, esta diversidad amplia debe ser tomada en cuenta para creación de currículos y líneas de investigación en educación; es así como los ambientes mineros, pesqueros, de varios productos de siembra o las divisiones de los centros poblados pueden ser usados para dar sentido y significación a conceptos matemáticos.

Dadas las situaciones en que se presenta la conservación del área, la presente investigación puede extenderse hacia conceptos como los de *homotecia* y *semejanza* a través de actividades contextualizadas y plasmadas en una unidad curricular, que involucre las dimensiones y los niveles de comprensión que contempla la EpC, el diseño de tópicos generativos, metas de comprensión y descriptores de comprensión y en la que se tenga claro el hilo conductor.

Observadas algunas de las soluciones que los participantes plantearon para demostrar la igualdad de áreas de diferentes figuras planas, la presente investigación puede extenderse hacia el diseño de una propuesta curricular que aborde la comprensión de conceptos como *rotación* y *traslación de figuras*.

Otra posible línea de investigación que puede seguirse del presente trabajo es la de estimación y cálculo de máximos y mínimos. Un primer momento puede ser el de conservar el perímetro constante para determinar la máxima área contenida; el segundo momento a abordar sería el de conservar el área y determinar el perímetro mínimo que la encierre.



La presente investigación también puede ampliarse con la elaboración de unidades didácticas que orienten la comprensión del concepto de volumen.

Generación de unidades didácticas que orienten la comprensión del concepto de área total de cuerpos geométricos.

BIBLIOGRAFÍA

- Acevedo, D. (2011). *Comprensión del Concepto de Probabilidad en Estudiantes de Décimo Grado*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín.
- Anders, V. (2013). Etimologías.dechile.net. Recuperado el 27 de agosto de 2013 de <http://etimologías.dechile.net/?a.area>
- Arcila, J. (2007). *Densidad de siembra y productividad de los cafetales*. Colombia: Blanecolor.
- Barrio, I., González, J., Padín, L., Peral, P., Sánchez, I. y Tarín, E. (2010). *Metodología de la Investigación Educativa, El Estudio de Casos*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.
- Berrió, M. (2011). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional, Medellín.
- Blythe, T. y Outerbridge, D. (1998). Metas de Comprensión. En T. Blythe, *La Enseñanza para la Comprensión, Guía para el Docente*. Buenos Aires: Paidós.
- Blythe, T. y Perkins, D. (1998). Comprender la Comprensión. En T. Blythe (Ed.), *Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires: Paidós.
- Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles con las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215 – 256). Buenos Aires: Paidós.
- Chamorro, M., Belmonte, J., Llinares, S., Ruíz, M. y Vecino, F. (2008). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Clasificados.com (sf). *Almacigo de café injertado*. Recuperado el 15 de enero de 2014, de <http://gt.clasificados.com/almacigo-de-cafe-injertado-17888>

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Pastor, A., Margarit, B., Peñas, A. y Ruíz, E. (1994). *Diseño y Evaluación de una Propuesta Curricular de Aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria Basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Din Impresores.

Corberán, R. (1996). El Área, recursos didácticos para su enseñanza en primaria. En O. Mourut, *Procesos de transferencia de resultados de investigación de aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas*. (pp. 1-87). Distrito Federal: CINVESTAV.

Cortés, R. (2012). *Historia de la Geometría Euclidiana y sus aplicaciones para la enseñanza*. (Trabajo de finalización de grado). Universidad de Valladolid, España. Recuperado de la base de datos UVADOC (TFG-L2.pdf).

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime*, (10)1, pp. 39 - 68.

De la Cuesta, C. (2003). El Investigador como Instrumento Flexible de Indagación. *International Journal of Qualitative Methods*, pp. 1 - 27. Recuperado el 03 de marzo de 2013 de http://www.ualberta.ca/~iiqm/backissues/2_4/pdf/delacuesta.pdf

Del Olmo, M., Moreno, M. y Gil, F. (1993). *Superficie y Volumen. ¿Algo más que el Trabajo con Fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Escobar, L. (2007). *Evaluación de aprendizajes en el área de Matemáticas*. Medellín: Imprenta U de A.

Escobedo, H., Jaramillo, R. y Bermúdez, Á. (2004). Enseñanza para la Comprensión. *Educere*, (8)27, pp. 529-534.

- Esteban, P. y Henao-Calad, M. (2005). *Los mapas conceptuales en la enseñanza para la comprensión y el aprendizaje significativo*. Recuperado el 05 de mayo de 2013, de <http://cmc.ihmc.us/cmc2006Papersw>.
- Fandiño, M. y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, pp. 427 - 442.
- Gardner, H., y Boix, V. (1994). Enseñar para la comprensión en las disciplinas y más allá de ellas. *Teachers College Record*, pp. 1-27.
- Gibson, G. y Morden, M. (sf). *Odyssey Adventure in Archaeology*. Recuperado el 23 de noviembre de 2013 de <http://www.odysseyadventures.ca/aboutUs.html>
- Gobernación de Antioquia, Secretaría de Educación para la Cultura. (2005). *Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas*. Medellín.
- Gómez, C. (1989). La Adquisición del Lenguaje Matemático: un Difícil Equilibrio entre el Rigor y el Significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, pp. 3-15.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en S. Llinares, M. V. Sánchez (eds.). *Teoría y práctica en educación matemática*, pp. 295-384.
- Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Hetland, L., Hammerness, K., Unger, C. y Wilson, D. G. (1999). ¿Cómo demuestran los alumnos que comprenden? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. (pp. 257 - 298). Buenos Aires: Paidós.

- Jiménez, D. (2010). El problema del área en los Elementos de Euclides. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, pp. 179 - 207.
- Larson, R. y Hostetler, R. (1990). *Cálculo y Geometría Analítica*. (E. Olmedilla, Trad.). México D. F.: McGraw- Hill.
- Leithold, L. (2005). *El Cálculo*. México D. F.: Oxford.
- Martínez, P. (2006). El Método de Estudio de Casos. Estrategia Metodológica de la Investigación Científica. *Pensamiento y Gestión*, pp. 165-193.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, pp. 221 - 278.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá D. C.: Delfín Ltda.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Santa Fe de Bogotá D. C.: Imprenta Nacional.
- Morales, L. (2002). Las matemáticas en el antiguo Egipto. *Apuntes de historia de las matemáticas*, pp. 5 - 12.
- Muñoz, M. y Román, N. (1999). *Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal*. Barcelona: Ediciones UPC.
- Parra, E. (2009). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 1-40. Recuperado el 15 de agosto de 2013 de http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV9_n1_2008/Arquimedes1.pdf

- Perkins, D. (1999). ¿Qué es la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. (pp. 69-95). Buenos Aires: Paidós.
- Perrone, V. (1999). ¿Por qué necesitamos una pedagogía de la comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 35 - 68). Buenos Aires: Paidós.
- PINTUCO. (s.f.). Recuperado el 29 de agosto de 2013 de <http://www.pintuco.co/index.php/productos-hogar/vinilos-para-interiores/viniltex-acriltex>
- Pogré, P. (2012). *Enseñanza para la Comprensión. Un marco para el desarrollo profesional docente*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. Recuperada de la base de datos DIALNET (57811_pogre_paula.pdf)
- Presidencia de la República. (2009). Decreto 1290 de 2009. Bogotá D. C., Colombia: Imprenta Nacional.
- RAE, Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la Lengua Española - Vigésima segunda edición*. Recuperado el 19 de agosto de 2013 de <http://lema.rae.es/drae/>
- Rendón, P. (2009). *Conceptualización de la Razón de Cambio en el de la Enseñanza para la Comprensión*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín.
- Ribeiro, A. y Alvarenga, B. (2004). *Física General con experimentos sencillos*. México D. F: Oxford.
- Rodríguez, R. (2006). El número π : De la Geometría al Cálculo Numérico. *Dibujo Técnico y Matemáticas: una consideración interdisciplinar*, pp. 1 – 14.
- Ruíz, M., Peme, C., de Longhi, A. y Ferreyra, A. (2012). Enseñanza para la Comprensión. Marco Interpretativo. *Campo Abierto*, pp. 113 – 137.
- Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. Bogotá.: ARFO Editores e Impresos Ltda.



- Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Casos*. Madrid: Ediciones Morata.
- Stone, M. (1999). ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*, (pp. 95 - 126). Buenos Aires: Paidós.
- Stone, M. (1999). La importancia de la comprensión. En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*, (pp. 21 – 34). Buenos Aires: Paidós.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados*. Buenos Aires: Paidós.
- Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de Investigación Cualitativa*. Barcelona: Gedisa.
- Viedma, J. (1970). *Lecciones de geometría intuitiva*. Cali: Norma.

ANEXOS

Anexo A: Carta de aceptación al V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Universidad de Medellín



Medellín, 19 de abril de 2013

Señor (es):

JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA, ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ Y RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO

Asunto: Aceptación de participación

Cordial saludo,

Por este medio nos complace notificarle que la propuesta # 50 titulada **"COMPRESIÓN DE LOS CONCEPTOS DE PERÍMETRO Y ÁREA EN EL CONTEXTO DE LA AGRICULTURA DEL CAFÉ** (veinticinco-25 minutos), ha sido evaluada y aceptada para presentarse dentro de las actividades del **V CONGRESO INTERNACIONAL DE FORMACIÓN Y MODELACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS**, que se realizará del 8 al 10 de mayo del 2013 en la Universidad de Medellín – Colombia; bajo la modalidad de **ponencia**

Esperamos contar con su asistencia al evento y que esta experiencia sea fructífera para todos los participantes.

Atentamente,



Comité Organizador



Anexo B: Carta de aceptación al 14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa



Barranquilla, 21 de agosto de 2013

Profesor(es)

Juan David González Molina
Zaida Margoth Santa Ramírez
René Alejandro Londoño Cano

Asunto: Evaluación propuesta de ponencia para el ECME 14

Es para el Comité organizador del 14º *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME-14*, un gusto comunicarle que su propuesta: **“Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café en estudiantes del grado 6º.”**, ha culminado su proceso de evaluación y ha sido **aceptada** para ser presentada en la modalidad de **Comunicación Breve** y para ser publicada en las memorias del encuentro que se llevará a cabo los días 9, 10 y 11 de octubre de 2013 en la Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia.

Estamos convencidos de que su participación contribuirá en el fortalecimiento de discusiones académicas en el campo de Educación Matemática a nivel nacional.

Es importante tener en cuenta que para la programación de la ponencia en el evento, al igual que para su inclusión en las memorias del evento, es necesario tener legalizada la inscripción al ECME 14 antes del 31 de agosto (registro en el sitio ocs.asocolme.org y pago de la misma) del o los autores de la ponencia (al menos un autor, en caso de que la ponencia sea colectiva, y para el caso de autores con varias ponencias, al menos un autor distinto por cada una). Visite www.asocolme.org para instrucciones detalladas sobre el proceso de inscripción.

Esperamos contar con su participación y le auguramos éxitos en su labor.

www.asocolme.org

Anexo C: Carta de aceptación al VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Universidad de Medellín



UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Medellín, 1 de abril de 2014

Señor (es):

Juan David Gonzalez Molina, René Alejandro Londoño Cano y Zaida Margot Santa Ramírez

Asunto: Aceptación de participación

Cordial saludo,

Por este medio nos complace notificarle que la propuesta # 266 titulada **Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas en el contexto del cultivo del café**. (exposición oral de 20 minutos + 5 minutos de preguntas), ha sido evaluada y aceptada para presentarse dentro de las actividades del **VI CONGRESO INTERNACIONAL DE FORMACIÓN Y MODELACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS**, que se realizará del 7 al 9 de mayo del 2014, en la Universidad de Medellín-Colombia; bajo la modalidad de **ponencia**.

Esperamos contar con su asistencia al evento y que esta experiencia sea fructífera para todos los participantes.

Atentamente,



Jaime Humberto Hoyos Barrios
**Coordinador de VI Congreso de
Formación y Modelación en Ciencias Básicas
Universidad de Medellín**

Anexo D: Artículo publicado en la edición especial de la Revista Científica, octubre 2013COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE PERÍMETRO Y ÁREA EN EL CONTEXTO DE LA AGRICULTURA DEL CAFÉ EN ESTUDIANTES DEL GRADO 6º¹**Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café en estudiantes del grado 6º¹****Understanding the concepts of perimeter and area in the context of coffee farming in 6th grade students****Comprender os conceitos de perímetro e área no contexto da cafeicultura nos alunos de 6ª série****Recibido:** mayo de 2013
Aprobado: agosto de 2013Juan David González Molina²
Zaida Margot Santa Ramírez³
René Alejandro Londoño Cano⁴**Resumen**

La presente investigación se centra en los ambientes locales del aprendiz, con el fin de darle significado a conceptos geométricos básicos, debido a que los estudiantes no alcanzan altos niveles de comprensión; prueba de ello es el uso inapropiado que hacen de los términos matemáticos para hacer argumentaciones, presentar inquietudes o solicitar explicaciones; parte de la problemática se debe a la falta de diferenciación de conceptos clave en el estudio de la geometría, como por ejemplo, área y perímetro. Así mismo, autores como Corberán (1996) y Chamorro y otros (2008), detectaron problemas en la comprensión cuando los estudiantes tienen que relacionar estos dos conceptos.

Palabras clave: Comprensión; matemáticas escolares; geometría; formas geométricas; perímetro; área; Educación Matemática y otras disciplinas; agricultura del café; enseñanza para la Comprensión.

Abstract

This research focuses on the local environment of the learner, in order to give meaning to basic geometric concepts, because students do not achieve high levels of understanding, the proof is making improper use of mathematical terms to make arguments, raise concerns or ask for explanations, part of the problem is due to the lack of differentiation of key concepts in the study of geometry, such as area and perimeter. Also, authors like Corberán (1996) and Chamorro and others (2008) found problems in understanding when students have to relate these two concepts.

1 Artículo de Investigación.

2 Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Contacto: jdavidgonzalezcm@gmail.com

3 Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Contacto: zsanta@ajura.udea.edu.co

4 Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Contacto: rene2@une.net.co

Keywords: Understanding; school mathematics, geometry, geometric shapes, perimeter, area, and other disciplines Mathematics Education, agriculture Coffee; Teaching for Understanding.

Resumo

Esta investigação centra-se no ambiente local do aluno, a fim de dar significado aos conceitos geométricos básicos, porque os alunos não alcançam altos níveis de entendimento, a prova está fazendo uso indevido de termos matemáticos para fazer argumentos, levantar questões ou pedir explicações, parte do problema se deve à falta de diferenciação de conceitos-chave no estudo da geometria, como área e perímetro. Além disso, autores como Corberán (1996) e Chamorro e outros (2008) encontraram problemas na compreensão quando os alunos têm que relacionar esses dois conceitos.

Palavras-chave: Entendimento; matemática escolar, geometria, formas geométricas, perímetro, área e outras disciplinas Educação Matemática, a agricultura de café; Ensino para a Compreensão.

Presentación del problema

Dificultades en la comprensión de los conceptos asociados de área y perímetro. En nuestra experiencia docente, hemos identificado que los estudiantes suelen relacionar el área con la aplicación de fórmulas y el desarrollo de algoritmos e, incluso, hemos notado que no dan crédito a que dos figuras de diferente forma y perímetro puedan tener igual área. Algunos autores también han advertido sobre este hecho:

Esta "falsa" relación entre el área y el perímetro, que se ha constatado que está muy arraigada en los alumnos, pone de manifiesto que éstos piensan en el área y en el perímetro como en dos propiedades de la superficie íntimamente ligadas... Algunos investigadores advierten que limitar la enseñanza del área a las fórmulas para su cálculo, se convierte para los alumnos en un obstáculo para comprender el área como número de unidades que recubren la superficie (Corberán, 1996, p. 10).

Considerando el concepto de superficie, Chamorro y otros (2008) aseguran que el proceso de decantación entre longitud y superficie es muy complejo y que es aún más difícil, cuando la primera aproximación a superficie se da con una figura dibujada

por el profesor en el tablero, debido a que lo más resaltante para el estudiante es la línea que constituye el límite de la figura plana.

Con relación a la reducción del área a una simple expresión numérica o a un algoritmo de aplicación, sin la debida reflexión sobre el concepto, sus propiedades y la misma estructura de la expresión algebraica, Gómez (1989) cita a Vanlehn (1983) y expone cómo los alumnos generalizan la aplicación de un algoritmo tipo a cualquier expresión así no sean de la misma estructura, por ejemplo: sea la expresión $a(b + c) = a*b + a*c$, este algoritmo tipo o referente lo aplican a expresiones como $\sqrt{\quad}$.

La contextualización del aprendizaje. El MEN (1998) hace referencia al contexto, en cuanto a la utilidad que tiene en el aprendizaje de conceptos y en la comprensión de los mismos:

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del ambiente social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse

en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas (p. 36).

Específicamente, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se hace referencia al contexto como “elemento importante que puede proveer al individuo de aptitudes, competencias y herramientas para resolver problemas y representar ideas matemáticas...” (MEN, 1998, p. 30).

Planteamiento del problema. El aprendizaje de las matemáticas tiene que ir más allá de la aplicación “en serie” de algoritmos que despejan X , expresan el cuadrado de un binomio, muestran el grado de rotación de una figura o que establecen semejanzas entre triángulos. Las matemáticas, para comprenderse, utilizarse y observarse en las actividades del entorno tienen que ser significadas. Esta significación se expone en sus términos, símbolos, enunciados y formulaciones pero, también, en las interpretaciones que el sujeto quien las estudia da a todos esos elementos; es importante que haya una estrecha relación entre lo que se expresa en las ideas matemáticas y lo que asume quien se adentra en ellas.

Considerando lo anterior, se pretende determinar cómo pueden influir las actividades agrícolas en la comprensión de los conceptos de perímetro y área en los estudiantes, de tal manera que logren una transformación del pensamiento concreto al pensamiento abstracto y que pueda ser un punto de partida para demostrar que algunos contextos de su realidad pueden ser aprovechados para la comprensión de diversos conceptos matemáticos. Por lo tanto, se pretende responder la siguiente pregunta: ¿Cómo comprenden los estudiantes del grado 6º los conceptos de perímetro y área, estableciendo la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café, en el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión? Para lograrlo, se ha planteado el siguiente objetivo: Analizar el proceso de comprensión de los conceptos de perímetro y área, al establecer la independencia de sus medidas en el contexto de la agricultura del café, en los estudiantes del grado 6º.

Marco conceptual

Enseñanza para la Comprensión. Este marco conceptual propicia actividades en las que el contexto es utilizado como medio para lograr avances en la comprensión; además, brinda una estructura teórica que define la comprensión, da herramientas para la construcción curricular a través de elementos como los tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños y evaluación continua; también, permite la caracterización de la comprensión a través de las dimensiones: contenido, método, propósitos y formas de comunicación y, en cada una de éstas, se determinan los niveles: ingenuo, novato, aprendiz y maestro.

Acevedo (2011), en su trabajo de investigación, presenta la EpC como su marco teórico de referencia. En relación a lo que permite el marco teórico afirma:

Este es un marco que además de dar un aporte teórico sobre la comprensión, brinda a los profesores herramientas para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión, desde el abordaje de un concepto hasta el de un curso completo (p. 35).

En los Estándares Curriculares de Matemáticas, con relación al marco teórico, se dice que en este: “se proponen los aspectos relacionados con los métodos y técnicas, con las formas de expresar y comunicar lo comprendido y con la praxis cotidiana, profesional o científico-técnica en que se despliegue dicha comprensión” (MEN, 2006, p. 49).

Metodología

Por tratarse de la investigación de un fenómeno social que se centra en la interpretación de un proceso de aprendizaje, se abordará un paradigma de corte cualitativo. De hecho, en esta investigación se

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO

asumen realidad y el conocimiento desde las ideas de Sandoval (2002), quien afirma que:

La realidad necesariamente requiere, para su existencia, de un sujeto cognoscente, el cual está influido por una cultura y unas relaciones sociales particulares, que hacen que la realidad epistémica dependa para su definición, comprensión y análisis, del conocimiento de las formas de percibir, pensar, sentir y actuar propias de esos sujetos cognoscentes... El conocimiento es una creación compartida a partir de la interacción entre el investigador y el investigado, en la cual, los valores median o influyen la generación del conocimiento; lo que hace necesario 'meterse en la realidad' objeto de análisis, para poder comprenderla tanto en su lógica interna como en su especificidad. (p. 28, 29).

Asumiendo que el conocimiento es una construcción social que circula, que necesita de la interacción de sujetos que lo compartan, que lo aprehenden de acuerdo con su individualidad y subjetividad y, que además, "los métodos cualitativos pueden usarse para obtener detalles complejos de algunos fenómenos, tales como sentimientos, procesos de pensamiento y emociones..." (Strauss & Corbin, 2002, p, 13) se puede justificar que la metodología que orienta la investigación es cualitativa.

Análisis de los datos

El proceso de análisis de la información se llevará a cabo con el siguiente proceso:

De acuerdo con el marco teórico de la EpC se tienen las siguientes etapas: fase de exploración, fase de investigación guiada, proyecto final de síntesis. Las tres fases, los guiones de entrevistas y los productos esperados están contemplados dentro de lo que en esta investigación se ha denominado Guía Curricular, Ruta de la Comprensión de los Conceptos de Perímetro y Área y la Independencia de sus Medidas.

Es importante considerar que en la investigación cualitativa, los datos obtenidos no están estructurados y, uno de los propósitos del investigador

cualitativo, es darles estructura (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Esto requiere las siguientes tareas: transcripción de las entrevistas (grabadas en audio o en video); redacción y relato de las observaciones; codificación, tematización y categorización; todo esto con el fin de desarrollarlos dentro del marco teórico y darles sentido de acuerdo al planteamiento del problema. Todas las acciones y tareas, tienen la finalidad de refinar los descriptores de la comprensión (rúbrica de dimensiones de categorías por nivel) y, a su vez, posibilitar el análisis del proceso de comprensión de los estudiantes.

Posibles conclusiones

En la etapa tres de la investigación "proyecto final de síntesis", se espera que los estudiantes puedan exponer ante la comunidad educativa lo que aprendieron sobre los conceptos de perímetro y área; en dicha etapa deberán presentar un portafolio, con la evidencia de los trabajos y actividades resueltas; una maqueta a escala de un sembrado de café en la que representen la optimización de un área con un perímetro dado y den a conocer, a través del discurso y ejemplos en diferentes contextos, la independencia de las medidas del perímetro y el área.

En la última exposición se espera que pongan de manifiesto un nivel superior al de novato en cada una de las dimensiones, es decir, que den cuenta del sano escepticismo, del empleo de métodos técnicos, de la vinculación entre diversas áreas del conocimiento y que se expresen de forma fluida y precisa en relación a los objetos de estudio.

Referencias

- Acevedo, D. (2011). *Comprensión del Concepto de Probabilidad en Estudiantes de Décimo Grado*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Chamorro, M.; Belmonte, J.; Llinares, S.; Ruiz, M. & Vecino Rubio, F. (2008). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. España: Pearson Prentice Hall.

- Corberán, R. (1996). *El Área, recursos didácticos para su enseñanza en primaria*. En O. Mourut, Procesos de transferencia de resultados de investigación de aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas. (págs. 1-87). Distrito Federal: CINVESTAV.
- Gómez, C. (1989). La Adquisición del Lenguaje Matemático: un Difícil Equilibrio entre el Rigor y el Significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 3-15.
- Hernández, R.; Fernández-Collado, C. & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la Investigación* (4 ed.). México: Mc Graw Hill.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá D. C.: Delfin Ltda.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Santa Fe de Bogotá D. C.: Imprenta Nacional.
- Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. Bogotá.: ARFO Editores e Impresos Ltda.
- Stone, M. (1999). *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Paidós.

Anexo E: Artículo publicado en la revista Unipluriversidad, 2013

Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café

Zaida Margot Santa Ramírez¹
René Alejandro Londoño Cano²
Juan David González Molina³
Universidad de Antioquia

Resumen

En el presente artículo se expone la comprensión de los conceptos de perímetro y área por parte de algunos estudiantes de una institución educativa de una región cafetera antioqueña en el contexto de la siembra del café.⁴ La intencionalidad de la investigación es encontrar una relación entre los lenguajes geométrico y coloquial dentro de la agricultura del café, y teniendo en cuenta que el segundo puede influir en la comprensión del primero, el estudio se enmarca dentro del paradigma cualitativo. La motivación para abordar este trabajo radica en las dificultades que los estudiantes manifiestan en el aprendizaje de conceptos matemáticos, porque carecen de un manejo adecuado de ese lenguaje. Por lo tanto, se espera promover la comprensión, consiguiendo la correspondiente significación matemática y el sentido contextual de las expresiones matemáticas utilizadas.

1 Licenciada en Matemáticas y Física. Magíster en Educación. Estudiante de doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: zsanta@ayura.udea.edu.co

2 Licenciado en Matemáticas y Física. Especialista en Docencia de las Matemáticas. Magíster en Educación. Doctor en Educación por la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: rene2@une.net.co

3 Licenciado en Educación Física e Ingeniero Informático. Estudiante de maestría en Educación de la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: jdavidgonzalezm@gmail.com

4 Este informe corresponde a un artículo corto que presenta algunos avances del trabajo de investigación: *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas en el contexto de la agricultura del café*, que se desarrolla actualmente en el programa de maestría en Educación, en la línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia.

Palabras claves: perímetro, área, Enseñanza para la Comprensión, contexto de la agricultura del café.

Understanding the concepts of perimeter and area in the context of coffee agriculture

Abstract

This article outlines the understanding of the concepts of perimeter and area by some students of a school in a coffee-growing region in Antioquia, in the context of coffee planting. This research project seeks to find a relationship between the geometric and colloquial languages within coffee farming; bearing in mind that the latter can influence the understanding of the former, this study is part of the qualitative paradigm. The motivation to tackle this work lies in the difficulties students manifested in learning mathematical concepts because they lack proper management of that language. Therefore, we expect to promote understanding, obtaining the corresponding mathematical significance and the contextual meaning of mathematical expressions used.

Key words: perimeter, area, teaching for understanding, context of coffee agriculture.

1. Introducción

Algunos de los grandes retos que se trazan los investigadores en Educación Matemática se relacionan con el análisis de los procesos de comprensión de conceptos matemáticos particulares por parte de los estudiantes, identificadas las dificultades en las experiencias de aprendizaje y en el diseño de estrategias que permitan superarlas en coherencia con los marcos teóricos adoptados.

Nuestra experiencia docente nos ha llevado a identificar que los estudiantes hacen un uso incorrecto de algunos términos matemáticos (superficie, área, perímetro, exponente, radicando, denominador, cuadrado, cubo, entre otros) o presentan argumentaciones imprecisas cuando los utilizan. De hecho, en lo que mejor se desenvuelven es en la secuenciación rutinaria de algoritmos estandarizados o en la aplicación de fórmulas. Las dificultades mencionadas anteriormente se perciben al analizar, en primera instancia, la forma en que los estudiantes resumen las explicaciones, argumentan soluciones propuestas a problemas, hacen preguntas sobre los procesos de solución o presentan informes de consultas y proyectos; en segunda instancia, al analizar los resultados de las pruebas tanto internas como externas.

Teniendo en cuenta lo anterior, los siguientes son algunos ejemplos que, según Rosa Corberán, ponen de manifiesto los errores más habituales que cometen los estudiantes:

Cuando se les pregunta por una determinada fórmula, por ejemplo la del círculo, dan sin mayor problema una expresión que nunca podría corresponder a una magnitud bidimensional como es el área: $A=2\pi r$ o $A=\pi r$ o $A=2\pi^2$; o bien, algunos alumnos cuando se les pide el área, por ejemplo, de un triángulo del que se conocen las dimensiones de los tres lados, al no recordar la fórmula, multiplican las 3 dimensiones. Este tipo de respuestas ponen de manifiesto que los alumnos no reflexionan sobre el carácter dimensional de las fórmulas (1996: 11).

Por otro lado, de acuerdo con el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión (EpC)⁵, la habilidad de comprender conceptos está supeditada a la contextualización de estos. Al respecto, Gómez-Granell (1989) encontró que los niños evocan, para explicar la solución de un problema, sus entornos familiares o locales, realizan dibujos en que priorizan el contexto (tienda, escuela u otros) y que pocas veces utilizan las “explicaciones formales” para dar cuenta de sus soluciones. Por lo tanto, pone de manifiesto que para llegar a la formalización hay que “vivir” un verdadero proceso de comprensión en un contexto particular.

5 En adelante, el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión se abreviará como EpC.

Por consiguiente, debido a la importancia de lograr una articulación entre conceptos y procedimientos, se hace necesario enfocar esfuerzos para lograr que los estudiantes avancen en la comprensión de los conceptos objeto de estudio, utilicen lo aprendido en diferentes situaciones y lo expresen correctamente. Con este proyecto se busca investigar cómo pueden influir las actividades agrícolas, en este caso el cultivo del café, en la comprensión de los conceptos de perímetro y área, de tal manera que pueda ser un punto de partida para intentar demostrar que algunos contextos de la realidad de los estudiantes pueden ser aprovechados para la comprensión de diversos conceptos matemáticos y así alcanzar diferentes niveles de comprensión. Por lo tanto, con la investigación se pretende responder la siguiente pregunta: ¿Cómo comprenden los estudiantes de grado quinto de básica primaria de la institución educativa Santa Rita los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas en el contexto de la agricultura del café vía Enseñanza para la Comprensión?

Se describirá, en primer lugar, de qué manera avanza un estudiante de un nivel a otro en el marco conceptual de la EpC en relación con los conceptos de perímetro y área; en segundo lugar, se diseñará y evaluará una unidad curricular que permita a los estudiantes de grado quinto de básica primaria avanzar en la comprensión de dichos conceptos inmersos en la agricultura del café.

2. Antecedentes

¿Por qué hacer énfasis en los conceptos de perímetro y área?

Con relación al concepto de superficie, Chamorro *et al.* (2008) aseguran que el proceso de decantación entre longitud y superficie es muy complejo y que es aún más difícil cuando la primera aproximación a la superficie se da con una figura dibujada por el profesor en el pizarrón, debido a que lo más resaltador para el estudiante es la línea que constituye el límite de la figura plana. En este sentido, afirman los autores:

Lo que aparece destacable en todo momento es la línea que constituye la frontera, sin que muchas veces el alumno reconozca la superficie como el interior delimitado por dicho borde [...] Un claro obstáculo epistemológico lo constituye la noción de perímetro en relación con la superficie. Los alumnos de primaria creen que el área de una figura depende de la

medida de sus lados, lo que es cierto sólo de manera local: para los polígonos regulares (2006: 248).

De acuerdo con nuestra experiencia y según las fuentes consultadas, uno de los errores más habituales de los estudiantes de primaria es dar por hecho que el área y el perímetro son magnitudes dependientes o íntimamente ligadas. Corberán expresa que:

Esta "falsa" relación entre el área y el perímetro, que se ha constatado que está muy arraigada en los alumnos, pone de manifiesto que éstos piensan en el área y en el perímetro como en dos propiedades de la superficie íntimamente ligadas, concepción errónea que les impide ver el área como una propiedad de la superficie independiente del perímetro, que les dificulta e incluso imposibilita realizar transformaciones de superficies bajo determinadas condiciones (1996: 10).

En este mismo sentido, Olmo, Moreno & Gil advierten: «El hecho de que dos figuras tengan la misma área induce a algunos niños a creer que tienen el mismo perímetro» (1993: 44). En aras de aportar elementos que ayuden a dar solución a este inconveniente, Corberán presenta la siguiente idea:

Para evitar esta falsa creencia en los alumnos es necesario trabajar desde el inicio de la enseñanza de este concepto, tareas en las que se someta a las superficies a determinadas transformaciones y en las que se estudie la variación que experimenta el área y el perímetro de ésta. Se ha constatado que para una mayoría de alumnos de primaria el área se reduce a la expresión "longitud x anchura" y a una fórmula para determinar el área del círculo (1996: 10).

Seguidamente expone lo que para ella es la consecuencia inmediata de no tomar el área como la medida que recubre o pavimenta una superficie y sí como el resultado de la aplicación de una fórmula: «Este tipo de enseñanza conduce a los alumnos a desarrollar una pobre concepción numérica del área, asociando ésta a una fórmula de cálculo. Esta extrema pobreza de su instrucción contrasta con su rico contexto en la naturaleza, la cultura y la sociedad» (1996: 10).

De acuerdo con lo anterior, el área no debe reducirse a la aplicación de una fórmula, que la mayoría de las veces no significa nada para el estudiante, porque deriva en una limitada concepción numérica o, en el peor de los casos, se percibe como una ecuación sobre la que no se tiene una clara noción de su carácter bidimensional. Esto último se pone de manifiesto cuando

el estudiante ignora los atributos del concepto y ejecuta operaciones que en nada se relacionan con ello.

Olmo, Moreno & Gil (1993), en el apartado sobre dificultades y errores en el aprendizaje del área, encontraron que cuando a los estudiantes se les cambia de manera específica el rectángulo por el paralelogramo, calculan el perímetro y suministran este dato como el área. En el mismo apartado, los autores aseguran: «Confusión de perímetro-área. Este es un error bastante frecuente. En algunos casos, los niños calculan el área y el perímetro de una figura y le asignan el dato mayor al área y el menor al perímetro» (1993: 43).

Por consiguiente, se hace necesario diseñar actividades contextualizadas que permitan a los estudiantes comprender los conceptos de perímetro y área y la independencia entre ambos.

La contextualización en el aprendizaje

Teniendo presentes que la construcción del conocimiento se da en ambientes sociales y de interacción mutua y que los desempeños de comprensión se manifiestan cuando lo que se aprende se utiliza en diferentes escenarios, se busca en esta investigación contextualizar el aprendizaje de los conceptos de perímetro y área en estudiantes de grado quinto de la institución educativa Santa Rita, en una de las actividades económicas y de carácter social más representativas de la región del suroeste antioqueño: la agricultura del café. En relación con lo anterior, en la investigación de Berrio (2011) se indagó por los elementos que intervienen en la (re)construcción hecha por los estudiantes de los modelos matemáticos contextualizados en el cultivo del café, de tal manera que se logró dar sentido a las matemáticas escolares trabajadas en las aulas de clase utilizando la modelación matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Berrio llegó a esta conclusión: investigar sobre el café en el corregimiento Los Farallones del municipio de Ciudad Bolívar es pertinente «debido a que es una situación de contexto, dado que todos los estudiantes han tenido una relación con algún tipo de dependencia ya sea laboral o de práctica familiar» (2011: 56). Ciertamente, más de la mitad de los estudiantes de grado quinto de la institución educativa Santa Rita o su núcleo familiar tienen relación directa con el cultivo del café. Por lo tanto, la conclusión de Berrio (2011) es completamente válida para la presente investigación.

En coherencia con lo anterior, se quiere centrar la atención en indagar sobre: 1) cómo ciertas actividades relacionadas con el cultivo del café propician situaciones de aprendizaje en el marco de la EpC; 2) qué elementos emergen con el fin de ubicar inicialmente a los estudiantes en un nivel de comprensión determinado; 3) de qué manera estos elementos aportan al avance en los niveles de comprensión en correspondencia con los conceptos objeto de estudio.

En el ámbito del aprendizaje en contexto es necesario tener en cuenta que los agricultores usan términos propios de su quehacer, que les permite una comunicación efectiva en las labores del campo. Por ejemplo, los cultivadores de café en Andes emplean términos como *lote*, *calle*, *punte*, *parcela*, *soca*, entre otros. Los términos *calle* y *punte*, que en un contexto diferente al cultivo de café en Andes pueden significar vías para el tránsito vehicular, para los cafeteros son ejes de cultivo: la línea horizontal es llamada *calle*, y la línea vertical, *punte*. *Parcela* es el terreno sembrado por una cantidad aleatoria de cafetos —que son normalmente separados por una calle o por un puente sin sembrados—. Ahora bien, las matemáticas también tienen términos específicos para expresar sus saberes, pero, para el aprendiz, estos pueden ser descontextualizados o carentes de significado.

Pertinencia del marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión (EpC)

Acevedo, en su trabajo de investigación, presenta la EpC como su marco teórico de referencia. Al respecto, afirma:

Este es un marco que además de dar un aporte teórico sobre la comprensión, brinda a los profesores herramientas para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión, desde el abordaje de un concepto hasta el de un curso completo. Esta es una característica que ni el Modelo de Pirie y Kieren ni el Modelo Educativo de van Hiele posee, puesto que en estos dos abordajes de la comprensión están más interesados en mostrar lo que pasa a nivel cognitivo en el estudiante cuando comprende un concepto que en asuntos curriculares, de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación como lo hace la EpC. Esto se debe a que la EpC surge de la vivencia de los profesores en el aula, entonces la teoría y la práctica están estrechamente ligadas pero claramente diferenciadas, por lo que la teoría ilumina la práctica y la práctica nutre la teoría (2011: 25).

Por otro lado, Rendón argumenta:

La Enseñanza para la Comprensión [...] amplía la visión del currículo, reconociendo múltiples relaciones de este con el entorno para contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos o unidades temáticas. De este modo el profesor enriquece su experiencia docente, presentando los conceptos de acuerdo con las necesidades e intereses de la comunidad en la que participa y no de forma aislada [...] (2009: 51).

De la misma manera y en concordancia con la metodología de la ampliación curricular en el marco teórico de la EpC, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas mencionan que la construcción de los sistemas geométricos depende en gran medida de la contextualización del entorno y del desarrollo cognitivo del estudiante. Esto es:

Los sistemas geométricos se construyen a través de la participación activa [...] Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un estudio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con una capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.) a un espacio conceptual abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas [...] Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas como por la influencia del mundo físico, cultural, social e histórico (MEN, 1998: 56-57).

Por lo tanto, con el presente estudio se busca que los estudiantes puedan tener un avance en su nivel de comprensión de los conceptos geométricos de perímetro y área de acuerdo con la EpC, mediante actividades contextualizadas en la agricultura del café, las cuales deben partir de las necesidades e intereses de los aprendices, de tal manera que logren una transformación del pensamiento concreto al pensamiento abstracto. Así, el marco teórico en cuestión es fundamental: nos permite hacer una construcción de los conceptos, en este caso geométricos, desde el mundo real. Incluso nos da las herramientas suficientes para planificar y diseñar dichas actividades en una unidad curricular con el ánimo de expandir las posibilidades del proceso de enseñanza y aprendizaje e involucrar directamente al estudiante en su progreso.

3. Enseñanza para la Comprensión (EpC)

Perkins & Blythe afirman que la comprensión «es poder realizar una gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a un tema, por ejemplo, explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías y representarlo de una manera nueva» (1994: 5). En una obra posterior, Perkins complementa la anterior definición exponiendo que «comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe» (1999: 69). De acuerdo con lo anterior, se espera, mediante la significación de los términos perímetro y área, que los estudiantes tengan desempeños que demuestren comprensión de los conceptos y se desenvuelvan con propiedad en lo académico y lo contextual. Por lo tanto, la presente investigación se fundamenta en el marco teórico de la EpC.

Este fundamento teórico está estructurado en cuatro elementos, a saber: *tópicos generativos*, *metas de comprensión*, *desempeños de comprensión* y *evaluación diagnóstica continua*. Con el fin de describir las cualidades de la comprensión, este marco conceptual destaca cuatro dimensiones de la comprensión: *contenido*, *métodos*, *praxis* y *formas de comunicación* (Stone, 1999). Además, caracteriza a su vez cuatro niveles de comprensión: *ingenuo*, *novato*, *aprendiz* y *maestría*. A continuación se abordará cada uno de estos aspectos.

Elementos de la comprensión

De acuerdo con Escobedo, Jaramillo & Bermúdez (2004), los elementos son responsabilidad primaria del educador y están descritos así:

1. *Tópicos generativos*. Se entienden como las preguntas globales que pretenden captar la atención y generar retos en los estudiantes. Su nombre se debe a que buscan generar conocimientos en los aprendices.
2. *Metas de comprensión*. Sintetizan los tópicos generadores, cuya característica es ser amplios y abarcar muchos temas en su planteamiento inicial. Las metas de comprensión abarcadoras se denominan “hilos conductores” y describen «las comprensiones más importantes que deberían desarrollar los alumnos durante todo el curso» (Blythe, 2002: 71).

3. *Desempeños de comprensión*. Se busca que el estudiante ponga en actividad lo que comprende para que tanto él como el profesor evidencien el progreso en el aprendizaje. Hay una «progresión común de categorías de desempeños» (Stone, 1999: 111) en tres fases:

- Fase de exploración. Desempeños que se dan al inicio de la unidad y que pretenden dar cuenta de los conocimientos previos de los estudiantes.
- Fase de investigación guiada. Desempeños que pretenden que los estudiantes den significado a las ideas centrales del área de conocimiento.
- Fase de proyecto final de síntesis. Desempeños que dan cuenta del dominio de las metas de comprensión.

4. *Evaluación diagnóstica continua*. Da cuenta de las retroalimentaciones permanentes que deben hacerse durante la unidad curricular y que pongan a los estudiantes en primer plano de acción y lo lleven a cuestionarse sobre sus falencias y a valorar sus logros. Es importante mencionar que en este marco teórico los resultados o productos que se han de evaluar son propuestos conjuntamente y desde el comienzo.

Dimensiones de la comprensión

Stone afirma que «las dimensiones de la comprensión ofrecen una forma de hacer la definición de comprensión más específica e identifican cuatro aspectos de la comprensión que se pueden desarrollar en cualquier disciplina» (1999: 1):

1. *Contenido o conocimiento*. Se observa o evalúa qué tanto ha progresado un estudiante del conocimiento intuitivo o vulgar al conocimiento académico.
2. *Método*. Invita a los estudiantes, en primera instancia, a tener un sano escepticismo sobre lo que ya conocen y sobre la información que encuentran; en segunda instancia, a evaluar los métodos que emplean para validar afirmaciones y sustentar argumentaciones.
3. *Praxis o de propósito*. Se evalúa la manera en que es utilizado el conocimiento y la capacidad para aprovechar los saberes en múltiples situaciones.
4. *Formas de comunicación*. Se observa, evalúa y analiza las formas en que la comprensión se

comunica, es decir, cómo se expresa lo que se sabe, y además se presta especial atención al uso de símbolos, que pueden ser visuales, verbales, gestuales u otros, para dar cuenta de lo comprendido.

Niveles de comprensión

Los niveles caracterizan el grado de profundidad de la comprensión y permiten distinguir desempeños débiles de otros más avanzados (Stone, 1999). La autora propone los siguientes niveles, considerando que los desempeños observables en el aprendizaje también evidencian la comprensión:

1. *Ingenuo*. Se cataloga así los desempeños en que el estudiante no logra relacionar los aprendizajes de la escuela con su vida diaria ni muestra dominio de lo que ha aprendido.
2. *Novato*. El aprendizaje es mecánico, repetitivo y con escasas conexiones entre los conceptos.
3. *Aprendiz*. Se empieza a mostrar un uso flexible de los conceptos o ideas aprendidas dentro de una disciplina. También hay un comienzo en el establecimiento de relaciones entre el conocimiento escolar y la vida diaria.
4. *Maestría*. Los desempeños son ricos en creatividad, integración, criticidad y flexibilidad. La comunicación es amplia en expresiones y ejemplos. De hecho, la forma en que el estudiante se comunica es un indicador para detectar el avance en la comprensión.

¿Por qué utilizar este marco teórico en la investigación?

Vincular las actividades agrícolas como el cultivo del café a la comprensión de los conceptos de perímetro y área es un punto de partida para intentar demostrar que los contextos de la realidad de los estudiantes pueden ser aprovechados para la comprensión de diversos conceptos matemáticos. Se espera que la práctica perteneciente a sus labores agrícolas, como la utilización de medidas de longitud (cuerdas y palos), de capacidad (tapas, copas y jeringas) y la terminología para los espacios destinados a la siembra (lote, parcela, barreras, puente, calle), sirvan como elementos de enlace con las actividades de aula —que hacen parte de la unidad curricular—, orientadas a la comprensión matemática tanto en lo manual como en lo conceptual.

4. Marco metodológico

Paradigma

Este trabajo de investigación tiene como finalidad comprender si hay una transición y significación de los conceptos usados en el proceso del cultivo del café hacia los conceptos de perímetro y área. Por tratarse de la investigación de un fenómeno social en el que no se pretende explicar ni hallar leyes de cumplimiento periódico o regular, sino interpretar un proceso de aprendizaje, se abordará un paradigma de corte cualitativo. De hecho, en esta investigación se asume que la realidad, como dice Sandoval, «necesariamente requiere, para su existencia, de un sujeto cognoscente, el cual está influido por una cultura y unas relaciones sociales particulares, que hacen que la realidad epistémica dependa para su definición, comprensión y análisis, del conocimiento de las formas de percibir, pensar, sentir y actuar propias de esos sujetos cognoscentes» (2002: 28).

Por lo tanto, el resultado de esta investigación depende de lo que el investigador aprenda sobre el cultivo del café, de las interacciones entre investigado e investigador y de lo que se logre establecer acerca de la transición que hacen los participantes del lenguaje común y propio de la agricultura del café al lenguaje geométrico.

Además, también se acepta como un hecho que el conocimiento no es un acto individual sino una construcción colectiva. Con relación a esto, Sandoval afirma: «El conocimiento es una creación compartida a partir de la interacción entre el investigador y el investigado, en la cual los valores median o influyen la generación del conocimiento; lo que hace necesario “meterse en la realidad” objeto de análisis, para poder comprenderla tanto en su lógica interna como en su especificidad» (2002: 29).

Tipo de estudio y participantes

Para llevar a cabo esta investigación con metodología cualitativa, es necesario establecer los actores que, además del investigador, intervendrán directamente en ella. Los actores o sujetos acompañantes serán 4 estudiantes de grado quinto de básica primaria que tengan relación directa con el cultivo del café. Para hacer el estudio y el proceso de comprensión en la transición del contexto de significación agrícola a la comprensión de los términos perímetro y área, se trabajará con el método de estudio de caso.

Para esta investigación, se considerará la concepción de estudio de caso dada por Einserhardt (1989), citado por Martínez: «Como “una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos singulares”, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, combinando distintos métodos para la recogida de evidencia cualitativa y/o cuantitativa con el fin de describir, verificar o generar teoría» (2006: 174).

Recolección de información

El paso de los estudiantes por la unidad curricular permitirá analizar su proceso de comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café, de tal manera que surja una matriz con descriptores de la comprensión. Para lograr lo anterior, la información se recolectará de la siguiente manera:

1. Observaciones de los estudiantes del estudio de caso durante todas las actividades que se propongan.
2. Entrevistas individuales y grupales en el transcurso de la unidad curricular que den cuenta de los avances de los estudiantes en cuanto a la comprensión de los conceptos objeto de estudio.
3. Materiales de los estudiantes que surjan de todo el proceso (portafolio y proyecto final de síntesis).

Generalidades de la unidad curricular

Teniendo en cuenta el marco teórico de la EpC, la unidad curricular se guiará por los siguientes aspectos:

Tópico generativo

Para la construcción de la unidad curricular, con la que se busca la comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto del cultivo del café, se pensó en una pregunta que transversa todo el proceso que se pretende realizar con los estudiantes. La pregunta se consolidó en el tópico generativo: ¿De qué manera el contexto de la agricultura del café contribuye a la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas?

Metas de comprensión

Hilo conductor. La intención del hilo conductor es motivar al estudiante a resolver problemas, impulsarlo a buscar información y a cuestionarse sobre la importancia de lo que está aprendiendo. Por lo tanto, para esta investigación el hilo conductor, que será la meta

de comprensión a largo plazo, es: *Los estudiantes comprenderán los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas a partir del sembrado, cercado y observación de las formas del terreno.*

Para lograr esta gran meta de comprensión, se proponen las siguientes metas de comprensión a corto plazo:

- Comprender el concepto de perímetro en el contexto de la agricultura del café.
- Comprender el concepto de área en el contexto de la agricultura del café.
- Determinar que el perímetro y el área son propiedades independientes de la forma, teniendo en cuenta el contexto del sembrado del café.

Desempeños y sus fases

Fase de exploración. En esta fase se pretende dar respuesta a la pregunta: *¿Qué ideas iniciales tienen los estudiantes acerca de los conceptos de perímetro y área?*

Actividades propuestas:

1. Acercamiento entre el investigador y el estudiante mediante unas preguntas concretas que permitan a éste manifestar desde su experiencia todas las ideas en torno al cultivo del café. Algunas de estas preguntas son:
 - ¿Cuál terreno de los que conoces donde se cultiva café crees que es más grande? ¿Por qué?
 - ¿Cuál terreno de los que conoces donde se cultiva café crees que tiene más plantas? ¿Por qué?
 - ¿Cuál terreno de los que conoces donde se cultiva café crees que tiene la mayor cantidad de cercado? ¿Por qué?
 - ¿Crees que el terreno más grande tiene mayor cantidad de cercado? ¿Por qué?
2. Salir a su entorno e indagar en distintos actores de la comunidad lo que se entiende por perímetro y por área.
3. Hacer un video que muestre el proceso del sembrado del café e indagar acerca de los conceptos matemáticos involucrados.

Fase de investigación guiada. En esta fase se pretende dar respuesta a la pregunta: *¿Cómo podría determinar un estudiante si existe o no relación entre el perímetro y el área de una figura geométrica?*

Actividades propuestas:

1. Salida de campo con los estudiantes, en la que se realizarán las siguientes acciones:
 - a. Identificar un terreno de siembra de café. Hacer un conversatorio con los niños para permitirles la comprensión de los conceptos de perímetro y área.
 - b. En este terreno, proponer la construcción de formas rectangulares de igual área —con una cuerda—, según las indicaciones del investigador. Responder la pregunta: *¿Es igual la cantidad de cuerda utilizada en las diferentes formas rectangulares propuestas?*
 - c. Teniendo en cuenta las longitudes que deben tener los puentes y las calles y la distancia a la que deben estar las plantas de los cercados, se propondrá a los estudiantes determinar el número de cafetos que pueden ser sembrados en un terreno particular con área específica. Los estudiantes señalarán con piedras u otros objetos el lugar exacto donde deben ir éstos. También deben considerar la cantidad de cercado necesario para limitar dicho terreno.
 - d. Posteriormente, se les propondrá la misma actividad en terrenos con otras áreas. Al finalizar, se deben responder las preguntas: *¿A mayor área, mayor cantidad de cafetos? ¿A mayor cantidad de cercado, mayor cantidad de cafetos sembrados? ¿A mayor área, mayor cantidad de cercado?*
 - e. En otro momento de la salida de campo, se propondrá a los estudiantes tomar fotografías de diferentes lotes de sembrado que tengan una forma geométrica conocida para ellos. Estas fotografías serán utilizadas en una actividad posterior en el aula de clase.
2. El investigador elegirá algunas fotografías, las imprimirá y entregará una a cada estudiante. Con estas se pretende:
 - a. Delimitar con un esfero la forma del terreno e identificar la figura geométrica plana relacionada con dicha forma.
 - b. Recortar el terreno sembrado en la fotografía y delimitado con el esfero. Posteriormente pegarla en una cartulina, dividirla en formas geométricas menores conocidas (triángulos o rectángulos) y recortarla.

- c. Con estas formas menores, diseñar otras figuras y dibujarlas en hojas de bloc.
 - d. Responder las siguientes preguntas:
 - ¿Todas las formas diseñadas tienen la misma área? ¿Por qué?
 - ¿Todas las formas diseñadas tienen el mismo perímetro? ¿Por qué?
3. A cada estudiante se le entrega un pedazo de cartón paja de diferentes dimensiones, cierta cantidad de cuerda y cierta cantidad de chinches. Debe hacer una maqueta a escala donde se muestre la forma en que cercaría —con la cuerda— el terreno —simulado por el cartón paja— y lo sembraría con cafetos —simulados por los chinches—. En un trabajo colaborativo, los estudiantes deben extraer conclusiones sobre las posibles relaciones entre el área del terreno, la cantidad de cercado y la cantidad de cafetos.
4. Los estudiantes consultarán con sus familiares la relación entre la cantidad de terreno sembrado y la cantidad de abono utilizado. Con estos datos, el investigador realizará una tabla con los estudiantes y determinará la validez de la afirmación “a mayor número de terreno, mayor cantidad de abono”.

Fase de proyecto final de síntesis. En esta fase se pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo podría un estudiante demostrar su comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia entre sus medidas?

Actividades propuestas:

1. Elaborar un proyecto en que los estudiantes puedan elegir un terreno y realizar un estudio completo para la siembra del café. Es decir:
 - Investigar cómo debe ser el terreno para poder ser sembrado.
 - Determinar cuántas matas de café se necesitan, cuánto abono es necesario para cubrir todo el lote, cuánta cerca se necesitaría para encerrarlo.
2. Socializar el proyecto en el grupo de estudio.
3. Hacer la salida de campo con los estudiantes, en la que se propondrán las siguientes acciones:
 - Dado un trozo de cuerda, determinar el terreno de siembra —en forma de cuadrilátero— que

tiene mayor área. Hacer una tabla con las diferentes medidas tomadas.

- Dada un área particular de siembra, determinar las dimensiones del terreno que usaría la menor cantidad de cuerda.

Evaluación continua y final

Para la evaluación, se considerarán los siguientes aspectos:

- El portafolio. Será un mecanismo para llevar organizadamente los registros de todas las actividades realizadas por los estudiantes: entrevistas, consultas resueltas, tablas, maquetas y proyectos.
- El proyecto final de síntesis.
- La exposición del proyecto final de síntesis al grupo de estudio.
- La socialización del portafolio ante el grupo y ante la comunidad educativa de la localidad.

Conclusiones

Como se expuso al comienzo del artículo, el concepto de área, ligado para su definición y observación al de perímetro, es ampliamente utilizado dentro del campo disciplinar de las matemáticas y en otras áreas, como las ciencias naturales, las ciencias sociales, la agricultura, la arquitectura. Además, ha sido de gran interés desde la historia de la misma sociedad, dado que los interrogantes e investigaciones sobre este llevaron a grandes matemáticos a plantearse el cuestionamiento de la cuadratura del círculo y de otras curvas, lo que en palabras de Larson & Hostetler se denomina el *problema de las áreas* (1990: 113), que también se conoce como el problema de integración; este marcado interés condujo a lo que hoy se conoce como cálculo integral. Considerando la importancia que tiene el concepto de área, el presente trabajo se orientó a la comprensión del mismo, pero se buscó además darle significación y dotarlo de sentido para reducir o evitar lo que Corberán (1996) y Chamorro *et al.* (2008) llaman dificultades en la comprensión, dadas por el tratamiento abstracto, aritmético y repetitivo con que comúnmente su estudio se lleva a cabo en las escuelas. Es útil para la educación matemática y en especial para los estudiantes vivenciar y palpar los conceptos de área y perímetro en situaciones contextuales, debido a que estas, no siendo ajenas, ayudan a establecer relaciones beneficiosas para la comprensión.

Uno de los recursos didácticos empleados en las escuelas para la enseñanza del concepto de área es el Geoplano, que siendo un excelente recurso no deja de ser descontextualizado; en lugar de este, la almaciguera y, por ende, sus eras y unidades de almacigo, que son lugares y elementos cotidianos para los estudiantes, dotan de un alto significado práctico y vivencial los contenidos y conceptos de aprendizaje. A través del uso manual de ellos y de las transformaciones elaboradas con fotografías, se llegó incluso a situaciones de homotecia, semejanza, rotación y traslación.

La unidad curricular completa, es decir, la guía curricular de actividades con su respectiva rúbrica, es una valiosa contribución a la Investigación en Educación Matemática en dos aspectos: primero, posibilita que los estudiantes progresen de las dimensiones de la comprensión a los niveles altos de la misma, permitiéndoles además involucrarse en el proceso de evaluación, dado que facilita que estén al tanto de sus puntos débiles para lograr superarlos; segundo, al investigador o docente le da la posibilidad de identificar el nivel de comprensión que los estudiantes tienen en cada una de las dimensiones establecidas en el marco teórico de la EpC.

Referencias bibliográficas

- ACEVEDO VÉLEZ, DIANA PATRICIA (2011). *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado*. Trabajo inédito de investigación para optar al título de magister en Educación. Medellín: Universidad de Antioquia.
- BERRIO ARBOLEDA, MARIO DE JESÚS (2011). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café*. Tesis de maestría para optar al título de magister en Enseñanza de las Ciencias. Medellín: Universidad Nacional.
- BLYTHE, TINA (2002). *La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires: Paidós.
- CHAMORRO, MARIA DEL CARMEN ET AL. (2008). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. España: Pearson Prentice Hall.
- CORBERÁN, ROSA MARÍA (1996). «El Área. Recursos didácticos para su enseñanza en primaria». En: MOURBUT DE MONTPELLIER, OLIMPIA FIGUERAS. *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas*, pp. 1-87. México, D. F.: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV).
- ESCOBEDO, HERNÁN, JARAMILLO, ROSARIO Y BERMÚDEZ, ÁNGELA. (2004). «Enseñanza para la comprensión». En: *Educere*, Vol. 8, N.º 27, pp. 529-534. Venezuela: Universidad de los Andes.
- GÓMEZ-GRANELL, CARMEN (1989). «La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado». En: *Comunicación, Lenguaje y Educación*, N.º 3-4, pp. 5-15. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje (FIA).
- LARSON, ROLAND Y HOSTETLER, ROBERT (1990). *Cálculo y Geometría Analítica*. México, D. F.: McGraw-Hill.
- MARTÍNEZ CARAZO, PIEDAD CRISTINA (2006). «El método de estudio de casos. Estrategia metodológica de la investigación científica». En: *Pensamiento y gestión*, N.º 20, pp. 165-193. Barranquilla: Ediciones Uninorte.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN) (1998). *Líneas Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- OLMO ROMERO, MARIA ÁNGELES DEL, MORENO CARRETERO, MARIA FRANCISCA Y GIL CUADRA, FRANCISCO (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- PERKINS, DAVID & BLYTHE, TINA (1994). «Putting Understanding Up Front». En: *Educational Leadership*, Vol. 51, N.º 5, pp. 4-7. Virginia: ASCD.
- PERKINS, DAVID (1999). «¿Qué es la comprensión?». En: STONE WISKE, MARTHA (Comp.). *La enseñanza para la comprensión*, pp. 69-92. Buenos Aires: Paidós.
- RENDÓN MESA, PAULA ANDREA (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la comprensión*. Trabajo inédito de investigación para optar al título de magister en Educación. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación.
- SANDEVAL CASILINAS, CARLOS ARTURO (2002). *Investigación cualitativa*. Bogotá: ARFO Editores e Impresos Ltda.
- STONE WISKE, MARTHA (1999). *La enseñanza para la comprensión*. Buenos Aires: Paidós.

Anexo F: Invitación a publicar en la Revista Latinoamericana de Etnomatemática

Barranquilla, Colombia, 14 de octubre Del 2013.

Estimados estudiantes y profesores.

PONENTES EN EL ECME 14

E. S. C.

Asunto: Invitación a publicar en el Número Especial de la RLE tomando como referencia algunas ponencias en el ECME 14.

Cordial saludo.

Para el 30 de diciembre del 2013, se tiene previsto sacar un número especial de la **Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas**, RLE⁹. Tal como he concertado con algunos de ustedes, la idea es que puedan organizar su ponencia en el Ecme 14 a manera de artículo.

Tenga en cuenta lo siguiente para poder publicar en este Número Especial de la RLE.

Fecha máxima de radicación del artículo:14 de noviembre del 2013.

Criterio de exclusión:Si usted asistió a Barranquilla y no presentó su ponencia, automáticamente queda excluido de esta preselección.

Observaciones:Agregar los avances o modificaciones que hasta el momento se hayan dado en su investigación, lo que incluso puede implicar cambios en el título. Esto con el propósito que Usted como autor no tenga algún inconveniente con la Revista Científica de la Universidad Distrital de Bogotá.

Descargue en el siguiente link las condiciones para la presentación del artículo a la RLE:

<http://revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/about/submissions#authorGuidelines>

No cumplir con rigor las normas para autores por parte de la RLE, podría ser motivo de rechazo de el artículo.

⁹ Las indexaciones de la RLE son: LATINDEX; PUBLINDEX; REDALYC; Zentralblatt MATH; Informe Académico; Fuente Académica Premier (EBSCO); Education Source (EBSCO); INDEX COPERNICUS; MathEduc Database; DIALNET; DOAJ; ZDB; Iresie; Clase; Scirus; OEI; Documat; Genamics; AMS; e-revistas; Ulrich's; Rebiun; Universia; Google Scholar; Actualidad Iberoamericana; New Jour; Livre!; Academic Journals Database; MIAR; DRJI; Universal Impact Factor.



La lista de ponencias pre seleccionadas que estamos interesados en publicar bajo la modalidad de artículo y que cumplan las condiciones de presentación de la RLE, son los siguientes. Los nombres que aparecen en rojo, por ahora no le hemos conseguido sus correos electrónicos.

CURSOS CORTOS

1. **Ángel Hernán Zúñiga Solarte**, Eruin Alonso Sánchez, Erika Rosana Calambás, Reflexiones desde resultados de trabajos de grado, modalidad de investigación, en programas de la Universidad del Cauca: Algunos ejemplos de proyectos desarrollados y por desarrollar en la básica secundaria desde una perspectiva crítica y sociocultural ercalambas@unicauca.edu.co, eruinalonso@hotmail.com
2. **Oscar Fernández Sánchez, Harold Duque Sánchez**, Algunas consideraciones sobre los numerales mayas
3. Olga Lucia León Corredor, **Faberth Díaz Celis, Marcela Guilombo**, Diseños didácticos con incorporaciones tecnológicas para el aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad olgleon@yahoo.com,
4. **Alfonso Eduardo Chaucañés Jácome, Jairo Escorcia Mercado, Eugenio Therán Palacio, Atilano Medrano Suárez**, Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento matemático a partir de situaciones del entorno métrico

TALLERES

5. John Gómez Triana, Javier Mojica Vargas, Análisis del pensamiento algebraico desde la teoría cultural de la objetivación johngomezt@gmail.com, javiermojicav@hotmail.com,
6. Eruin Alonso Sánchez Ordoñez, ¿Cómo influye el contexto al momento de hacer repartos?

eruinalonso@hotmail.com

CONFERENCIA PARALELA



7. **Jeannette Vargas**, La perspectiva sociocultural en el análisis de la práctica de los docentes universitarios de pre-cálculo: la enseñanza de la función exponencial

EXPERIENCIA DE AULA

8. **José Francisco Puerto Monterroza** “El uso de material reciclable (tapas de gaseosas) para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a estudiantes de 6o de la institución educativa Docentes de Turbaco, a través de actividades de generalización”
9. Edna Lissneidy Uñate Herrera, Sandra Milena Umbacia Sutachan, Experiencia de aula para la construcción de la noción de fracción en sus interpretaciones parte-todo y cociente, haciendo uso de recursos didácticos en un aula inclusiva, en estudiantes con discapacidad visual para grado 5° mileorl@hotmail.com, liss_the_best@hotmail.com,
10. Ramiro Adolfo Jiménez Leal, Fabio Fernando Funeme Rosero, Dumar Barreto Perilla, Propuesta de un material didáctico para la enseñanza aprendizaje de polinomios para población con limitación visual ramir3399@hotmail.com, dubareto1982@hotmail.com, fabiofuneme@yahoo.com,
11. Diego Medina Sánchez, Diego Alejandro Villalba Giraldo, Karen Liliana Farfán Rincón, Procesos de enseñanza-aprendizaje del número relativo en contextos de la vida cotidiana (ascensos-descensos, perdidas-ganancias) teniendo en cuenta las diferentes operaciones básicas y su respectiva representación en la recta numérica.
dms239@hotmail.com, liana0206@hotmail.com, diegosanta-19@hotmail.com,

POSTERES

12. Ana Patricia Vásquez Hernández, Obras didácticas de matemática contextualizadas al Pueblo Indígena Bribri de Costa Rica, a partir de estudios etnomatemáticos
patrimate76@gmail.com,
13. Armando Alex Aroca Araújo, La lógica de construcción en los diseños de la pintura mural de los Hipogeos de Tierradentro, Cauca.
armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co

14. **Hilda Milena Ortiz Cárdenas, Blanca María Peralta Guachetá**, En los trazos y abos muisca, la vida cotidiana de la clase de matemáticas

COMUNICACIONES BREVES

15. Raúl Peña Giraldo, Eliecer Aldana Bermúdez, Análisis del concepto de función en estudiantes sordos de grado décimo rpena@uniquindio.edu.co,
eliecerab@uniquindio.edu.co,
16. **Pilar Alejandra Peña Rincón**, Inclusión de conocimientos matemáticos locales en los de currículos de matemáticas en situaciones de interculturalidad
17. Christian Camilo Fuentes, Etnomatemática y escuela: algunos lineamientos para su integración cristianfuentes558@hotmail.com,
18. Ana Patricia Vásquez Hernández, Recuperación y empoderamiento de saberes ancestrales a través de la etnomatemática. Experiencia de Colombia y retos para Costa Rica patrimate76@gmail.com,
19. **Alfonso Segundo Gómez Mulett**, Aspectos culturales sobre la enseñanza de los fundamentos de la matemática
20. Rafael David Acosta Torres, Jesús Felipe Romero Gutiérrez, Armando Alex Aroca Araújo, ¿Por qué se copian los estudiantes en matemáticas?
rafael_elcaballero@hotmail.com, jesusr58@gmail.com,
armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co
21. Oswaldo Jesús Martínez Padrón, Etnomatemática: una reseña crítica de sus acepciones
jommadail@gmail.com,
22. Carlos Alfonso Castro Tirado, Las matemáticas en silencio karloskastro@hotmail.com,
23. **Jairo Escorcía Mercado, Alfonso Eduardo Chaucañés Jácome, Atilano Medrano Suarez, Eugenio Therán Palacio**, Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento



matemático a partir de situaciones del entorno métrico en estudiantes de educación básica y media del municipio de Sincelejo

escorciamercadojairo@yahoo.es, chaucane@yahoo.com, amedrasu@yahoo.es,
etheran2000@yahoo.com.mx,

24. Aldo Iván Parra, Jorge Orjuela Bernal, Cuestiones críticas sobre educación matemática y educación indígena en Colombia

yomeportobien@yahoo.com, jorgelicmat@gmail.com,

25. Lina Fernanda Vanegas Gutiérrez, Miguel Ángel Niño Angarita, Enseñanza de la geometría en población invidente y de baja visión.

miguelangel@hotmail.com, linita-monis@hotmail.com,

26. Erika Rosana Calambás Córdoba, ¿Por qué no llenar la botella?: un estudio sobre el concepto de capacidad con niños escolarizados ercalambas@unicauca.edu.co

27. **Liceth Andrea Casallas Hernández, Brianna Lorena Díaz Barreto, Ángel David León Sánchez, Julián Daniel Sánchez Rincón**, Implementación de políticas etnoeducativas en la formación de docentes en etnomatemática

28. Mayra Alejandra Jiménez Consuegra, Mónica Cecilia Rodríguez Sarabia, Armando Alex Aroca Araújo, Dos historias de vida, dos formas de educación matemática

mayra-alejanjimenez@hotmail.com, m.rodrisara@hotmail.com,
armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co

29. **Juan David González Molina, Zaida Margoth Santa Ramírez, René Alejandro Londoño Cano**, Comprensión de los conceptos de perímetro y área en contexto de agricultura de café en estudiantes del grado 6º.

j davidgonzalezm@gmail.com, zsanta@ayura.udea.edu.co, rene2@une.net.co,

30. **Linda Inés Droguett Latorre**, Danzas religiosas: ¿alguna relación con la matemática?

31. Carolina Higueta Ramírez, Abelardo Tascón Veléz, Diana Victoria Jaramillo Quiceno, La movilización de objetos culturales en la práctica de construcción de casas de una comunidad indígena Embera Chamí: posibilidades para pensar el (Por)venir de la

Educación [Matemática] Indígena atabelardo1@gmail.com, cahira0605@gmail.com,
diana_jaramillo@hotmail.com,

32. Ana Patricia Vásquez Hernández, Interpretación matemática de la canasta indígena Bribri de Costa Rica patrimate76@gmail.com,

33. Christian Camilo Fuentes, Julián David Martínez Hernández, El enfoque sociocultural en educación matemática desde la perspectiva de estudiantes para profesor: una aproximación inicial desde sus concepciones

cristianfuentes558@hotmail.com, jdmartinezh@unal.edu.co,

34. Yolanda López Herrera, Fredy Enrique Marín Idarraga, Rodrigo Alberto Tombe Quelal, Diálogos con la cultura Guambiana desde la Educación Matemática

ylopez@ucm.edu.co, fmarin@ucm.edu.co, rodrymat@hotmail.com,

Cordialmente,



ARMANDO AROCA ARAÚJO
Editor Número Especial RLE

Anexo G: Consentimiento informado, Messi

Consentimiento de Participación en el proyecto de investigación.

Yo Cristian Johan Restrepo Mesa estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "Comprensión de los conceptos de Perímetro, Superficie y Área, a través de su contextualización en el cultivo del café en el marco de la enseñanza para la comprensión," que es conducida por el profesor Juan David González Molina estudiante de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa Santa Rita. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es Caracterizar un proceso de comprensión de los conceptos Perímetro, Superficie y Área a través de la contextualización en el cultivo del café en estudiantes del grado 5º.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase, en actividades propias de mi labor como colaborador en las áreas del cultivo del café. Algunas veces seré video grabado y entrevistado. Además, las entrevistas podrán ser audio grabadas y transcritas.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será **confidencial**. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será **confidencial**, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico jdavidgonzalezm@gmail.com

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación (horario de las sesiones martes y jueves de 1:00 a 3:00 de la tarde).

JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA

Juan David González Molina
Firma
09/11/2012
Fecha

CRISTIAN JOHAN RESTREPO MESA
Nombre del participante

Cristian Johan Restrepo Mesa
Firma
11/11/2012
Fecha

MARÍA DEL CARME MESA
Nombre del padre de familia

María del Carmen Mesa
Firma
11/11/2012
Fecha



Anexo H: Entrevista Messi

Fecha: 29 de mayo de 2013.

Hora: 15:00.

Lugar: aula 225, Institución Educativa Santa Rita.

Participante: Messi.

Entrevistador: Juan David González Molina.

Apertura de la entrevista:

Entrevistador:

Messi, fuiste seleccionado para la investigación por reunir los elementos o condiciones que fueron decididos previamente para realizarla, estos elementos son: ser estudiante de la Institución Educativa Santa Rita en el grado 5°, estar en el rango de edades de 11 a 15 años, pertenecer a un grupo familiar que esté directamente relacionado con el cultivo del café y, lo más importante: participar directamente de las tareas de cultivo del café. Esto último porque es uno de los temas primordiales de esta investigación.

Recuerda que estás aquí porque aceptaste voluntariamente responder de forma afirmativa al llamado de ser parte de la investigación y porque tu familia te respaldó y decidió autorizarte para ello. No estás obligado a responder nada, sino sabes una respuesta simplemente me dices que no

la sabes, y ¡listo! o que simplemente no quieres contestarla. Otra cosa importante que debes tener presente es que no estás obligado a quedarte hasta el final del proceso de investigación, que puedes retirarte cuando te sientas mal o estés aburrido.

Messi: bueno señor.

Entrevistador: Comencemos.

Desarrollo de la entrevista.

Preguntas y Respuestas	
Investigador. ¿Qué terrenos o que fincas conoces donde se siembra café?	
Messi. Eeee, por las partes de Tapartó, Betania y aquí en Santa Rita.	
Investigador Bueno, Tapartó es un corregimiento, es bastante grande. Allá la finca de la que me estás hablando, ¿tiene algún nombre o no?	
MESSI. Los Farallones.	
Investigador Los Farallones, bueno. ¿Y esa era una finca en la que tu papá trabajaba o simplemente oíste hablar de ella?	
MESSI. Mi papá trabaja allá.	
Investigador. Listo. En Betania, que es un municipio y también es grande, eee, ¿trabajaban en todo el municipio o en una vereda?	
MESSI. En una vereda.	
Investigador. ¿y la finca se llama?	
MESSI. Las Picas.	
Investigador. Ok, las Picas. Entonces estamos hablando de las fincas: Los Farallones, Tapartó y las Picas, Betania, ¿y ahora en Santa Rita, cómo se llama la finca en la que están acá?	
MESSI. La Soledad.	
Investigador. Bueno, entonces vamos a hablar de esas tres fincas, ¿listo?. Para que no nos metamos en todo el resto del departamento y la nación. ¿De esas 3 fincas, cuál crees que es	

más la grande?
MESSI. Tapartó.
Investigador. ¿La de Farallones?
MESSI. Sí.
Investigador. ¿Por qué es la más grande?
MESSI. Porque el terreno se alarga más, es más montañosa, y le cabe más café y es muy alta.
Investigador. Ah, bueno. Es la más grande y por lo tanto le cabe más café, ¿cierto?
MESSI. Sí.
Investigador. Eh... por montañosa... describime un poquito la finca de las Picas, Betania, ¿por qué crees que no es más grande que la de Tapartó?
MESSI. Porque habían muchas peñas. No tierra así... como la que vemos allá, sino, peñas, lomas y no se podía pegar la raíz de la tierra
Investigador. Ah, ya ¿podía ser grande, pero, no estaba todo el terreno para cultivar?
MESSI. Sí, además no cultivaban mucho porque también era de plátano, ganado...
Investigador. Ha, bueno, pero entonces sí era grande, no toda para café.
MESSI. Sí, eso, no toda pa' café.
Investigador. Listo, comparemos ahora entonces la de Tapartó con la de Santa Rita. ¿La de Santa Rita también es la mayor parte para café o no?
MESSI. Pa' ganao y café.
Investigador. Entonces volvemos, la más grande es la de Tapartó y toda era para café.
MESSI. Sí.
Investigador. Bueno, vamos a pensar en algo, que la de Betania y la de La Soledad no son sino para café. Entonces, ¿siendo las tres fincas sólo para café, a cuál le cabría más café?
MESSI. A la de Betania
Investigador. Entonces, en ese orden de ideas, así como estamos, ¿sería la de Betania la más grande o seguiría siendo la más chiquita y posiblemente con más café?
MESSI. No, es que es las más grande porque tenía muchos potreros, y en los potreros le cabría mucho café, más que a la de Tapartó.
Investigador. Ummm, bueno. De esas 3 fincas, ¿cuál crees que tiene la mayor cantidad de cercado?, ¿vos sabés que es el cercado?

MESSI. ¿El alambrado?
Investigador. Sí, eso.
MESSI. Los portillos.
Investigador. Exactamente, los portillos. O para separar una finca de otra...
MESSI. Para hacer linderos.
Investigador. Listo, entonces, decime, ¿de esas 3 fincas, si las fuéramos a encerrar o fuéramos a dividir los lotes con cercados, cuál tendría más cercado?
MESSI. Tapartó.
Investigador. Tapartó, ¿por qué?
MESSI. Porque el lindero del otro dueño también era de café. Entonces mayormente, la montaña era así (muestra con la mano inclinada la representación de una loma de montaña) y todo con café. Entonces se separaba con unos palos rojos, con unos sembrados.
Investigador. Entonces esa sería la que mayor cercado o mayor lindero tuviera... haber yo cómo te pregunto esto... ¿cuándo van a separar el café por ... ¿cómo se llama eso?? Digamos: en la misma finca van a sembrar varias partecitas de café y las van separar. No sé si me estás entiendo.
MESSI. Sí, Por parcelas, por lotes.
Investigador. Eso, eso. ¿Cuáles son linderos o barreras más utilizados?, ¿ustedes también hablan de barreras?
MESSI. Los caminos y los árboles.
Investigador. ¿Será que en una finca más grande hay más cercado?
MESSI. No.
Investigador. No necesariamente.
MESSI. Ajá.
Investigador. ¿Por qué no?
MESSI. Porque si es toda de café, no necesitamos separar el café y si es toda de ganado tampoco necesitamos. Pero, sí es para los 2 sí, para separar el ganado del café.
Investigador. Vos me hablaste parcela, ¿cierto?, ¿qué es una parcela?, ¿cómo me podrías vos explicar eso? Hacé de cuenta que yo ni siquiera conozco una finca de café. Pues, que vos llegás y me decís, lo que pasa es aquí en esta parcela se siembra café, entonces yo me quedé muerto, porque es la primera vez en mi vida que yo oigo hablar de parcela. ¿Cómo me explicarías vos qué es una parcela?

MESSI. Una parcela es como se divide, cuando uno va a comprar un pedazo de tierra. Uno la divide en metros o en otra cosa, para uno construir algo.
Investigador. O sea que la parcela es una parte de una finca o de un terreno. ¿Podríamos hablar que una parcela es lo mismo que un lote? ¿o no?
MESSI. No, porque la parcela debe ser llana, para construir...
Investigador. Ha, ¿el lote y el tajo no tienen que ser llanos?, o sea, pueden ser llanos o no.
MESSI. Pues, vea, en algunas partes, por ejemplo por el Tolima, que se siembra el café así en llano.
Investigador. Entonces allá los lotes son llanos. Mirá, ahora estaba aquí una compañera tuya y me hablé de palabra tajo, inclusive es una de las palabras que has venido utilizando durante la entrevista ¿qué es un tajo?, ¿podemos decir que un lote y un tajo son lo mismo?
MESSI. No porqueeeeeee. Un patrón le dice a los trabajadores, “me coge este tajo”. O sea que está dividido, como dije yo, por los árboles y por el camino. Y ya un lote, ¿usted me preguntó un lote?, un lote es cuando baja ya abajo, hasta la cañada. Y un lote puede dividirse, por ejemplo si la montaña se mete así y después así (traza, en el aire, con la mano, formas abultadas), forma lotes, entonces el tajo queda partido por el camino.
Investigador. Ah, el lote se divide en tajos. ¡Vea usted!. El tajo es una parte del lote.
MESSI. Sí, porque en el lote puede haber café nuevo o puede haber cafeteras altas.
Investigador. Entonces, la cafetera alta vieja, sería un tajo y la cafetera nueva sería otro tajo, pero, las 2 estarían en el mismo lote.
MESSI. Sí, así es.
Investigador. Y la parcela ya me dijiste que es llana y es donde normalmente se construye. ¿Se construye qué?
MESSI. Casas o marraneras. Cuando nosotros vivíamos en las Picas, hicieron marraneras.
Investigador. Haber, ya lo dijiste pero quiero recordarlo: el lote se divide en tajos, y los tajos se separan por caminos o por barreras con el arbolito rojo... ¿y hay gente que utiliza la mata de plátano para eso o no? Porque es que yo por aquí veo mucho cafetal o cafetera y les veo mucha mata de plátano así como formando bordecitos.
MESSI. Eso ya va por el surco, siembran el surco de plátanos y ahí sí siembran el café.
Investigador. Con Diana utilizamos la palabra cercado, con vos lo estamos llamando surco. Y estamos diferenciando tajo de lote, sabiendo que el tajo es una parte del lote... bueno, en esas divisiones de los lotes ¿vos has visto que formen figuras geométricas?
MESSI. Sí.

Investigador. ¿Cómo cuáles?
MESSI. Vea, por ejemplo hay unos caminos en unos lotes que forman como unas zetas (z, z, z), eso forma triángulos, cuadrados.
Investigador. Triángulo y cuadrados, ¡listo!. Te pregunto algo más, ¿Cuando un caficultor, tu papá o vos, se enfrentan a un lote que está virgen, que está desyerbado y van a sembrar café desde 0, tiene qué hacer tajos.... O lo pueden llenar todo derecho?
MESSI, ¿pues, pero ya rosado y tumbado el otro café?
Investigador. Sí, digamos no hay sino yerbitas y tierra abonadita, está la montaña enterita sin más cosas.
MESSI. ¿Pues, pero antes no habían sembrado?
Investigador. Bueno, digamos que sembraron y quitaron o, o, o nunca habían sembrado. Un lote completo que se va a sembrar de café nuevo, es lote ¿tiene que dividirse en tajos?
MESSI. No, porque si ese lote ya lo conocían y habían sembrado ahí, pues queda la marca o si viene alguien nuevo ya la pone como quiera.
Investigador. Ha, bueno, la puede dividir pero también puede no dividirla. Aunque alguna vez hablando con un caficultor, me decía que así no quisieran había que dividirla para dejar los caminos para los trabajadores y así se van formando lo tajos. Bueno, ¿será que un patrón piensa en qué figuras va formar al dividir el lote en tajos. Yo aquí voy a formar 2 cuadrados y aquí 3 triángulos, ¿o eso no se piensa así?.
MESSI. Sí se piensa, porque, por ejemplo si la montaña es así (hace el gesto de una loma) puede formar también rectángulos y el camino puede ser así de derecho (traza un vertical en el aire con el dedo) para llegar fácil a un...
Investigador. ¿A un beneficio?, es que he oído que los caficultores hablan mucho de beneficios y beneficiaderos.
MESSI. Sí, pues, o también cuando se carga el café en mulas y que se manda por el... ducto, el camino se hace en zetas (z, z, z) pa' que puedan andar la mulas.
Investigador. ¿Te has sentido mal?, MESSI. No. Investigador. Ya vamos a acabar.
MESSI ha, bueno.
Investigador. Te voy a hablar de 2 conceptos geométricos y los vamos a comparar con 2 de los conceptos de los cultivos y de los terrenos del café de los que me has venido hablando. Hay 3 conceptos que son muy parecidos en los terrenos de café: parcela, lote y tajo. Por lo que te entendí, parcela y tajo son la misma cosa, sólo que la parcela está en llano y es para construcción, pero, igual, es un pedazo de tierra, y el tajo es una partecita del lote. Entonces vamos a pensar en el tajo, ese pedacito de lote que vos dijiste que sí puede formar figuras geométricas... Ahora, pensemos en tajo y lindero, 2 conceptos del café que vamos a utilizar para

la siguiente parte de la entrevista... Ahora de geometría te voy a mencionar 2 conceptos que se utilizan mucho y que son los que hacen parte de esta investigación: perímetro y área. ¿Los has escuchado alguna vez en la vida?
MESSI. Sí, viarias veces.
Investigador. ¿Te acordás bien, bien de eso, o ahí más o menos?
MESSI. Ahí más o menos.
Investigador. Pensemos en el concepto geométrico de perímetro y comparémoslo con los dos conceptos de los terrenos de siembra de café, que escogimos ahorita, tajo y lindero.
MESSI. Sí, señor, tajo y lindero
Investigador. Listo, ¿el perímetro es más parecido al tajo o es más parecido al lindero?, es decir, ¿perímetro es lo mismo que lindero o es lo mismo que tajo?
MESSI. Que lindero.
Investigador. ¿Entonces el área sería referente a qué?
MESSI. Al tajo.
Investigador. Listo, cuando terminemos la investigación, digamos que la idea es que te des cuenta si eso que estás diciendo ahora es correcto o si llegás de aquí de a 2 meses y dicés: “veee... yo en la entrevista había dicho que lindero y perímetro eran lo mismo y no, son distintas”. O podés llegar a decir: “yo sí estaba en lo cierto en la entrevista, porque yo dije que eran estas 2 cosas juntas y sí, sí lo son”. Bueno, ahora, ¿los tajos siempre tienen la misma medida o sea, todos los tajos son iguales y les caben los mismos palos de café?
MESSI. No, porque el señor puede decir: “yo aquí voy a sembrar 5000 palos y aquí 7000”. Porque es que el tamaño del lote se puede ver pequeño, pero, ser muy largo. Otro puede ser muy ancho, pero, no muy largo.
Investigador. Pero, entonces, tiene que saber si la cantidad de palos si caben, que tal que valla y compre 5000 almácigos y apenas le quepan 3000 a ese lote. ¿Cómo hace un caficultor para saber cuántos palos le caben a un lote?
MESSI. Pues, si va a sembrar por primera vez en un lote o tajo, lo tiene que medir con la vara que mide 130 cm y entonces ya cuenta cuántos palos le caben.
Investigador. Ha, muy duro, tener que ir poniendo la vara una y otra vez.
MESSI. Sí, pone palitos, los clava.
Investigador. ¿Esa vara que vos mencionas es para qué?, ¿solamente para saber lo de los palos de café?
MESSI. Y para medir los surcos y para que el sembrado no se tuerza y los cogedores de café no se pierdan de surco y cada uno puede coger los surcos que le toquen en un tajo.

Investigador. Antes de la entrevista me habías dicho que la vara tiene diferente tamaño, o que hay dos varas, ¿esto por qué?
MESSI. Porque en el mismo surco se utiliza un medida, pero, para cambiar de surco es otra medida.
Investigador. ¿Cuáles son las medidas de las varas?
MESSI. 130 y 150 centímetros
Investigador. ¿la vara de 150, para qué se utiliza?
MESSI. Para cuando se va a cambiar de surco, o sea, de pa' bajo.
Investigador. Ya. La vara corta es para la calle y la larga para el puente.
MESSI. Sí.
Investigador. Volviendo a tajos, surcos, te pregunto: ¿en el tajo más grande, cabe la mayor cantidad de café?... haber, ¿el tajo más grande es que tiene linderos más largos y al que más café le cabe?
MESSI. El tajo más grande sobre el lote...sí, es el que tiene linderos más largos.
Investigador. Entonces, el tajo más grande es el que tiene linderos más largos y es al que más café le caben... bueno Messi, te agradezco mucho que hayás venido.
MESSI. Con mucho gusto.
Investigador. La idea de esta investigación es averiguar si eso que vos y tus compañeros de grupo saben sobre café, nos facilita el aprendizaje de la geometría. Para que combinemos ambas cosas y aprendamos geometría de una forma muy familiar. ¿Cómo te sentiste en la entrevista?
MESSI. Muy bien...porque lo que me preguntó, yo pensé que era más difícil.
Investigador. Messi, otro día nos reuniremos con los otros compañeros para hacer otra práctica en terreno y hacer otro entrevista. Que estés muy bien.
MESSI. Gracias, lo mismo.

Duración de la entrevista: 29 minutos.

Anexo I: Consentimiento informado, Isis

Consentimiento de Participación en el proyecto de investigación.

Yo Karen Dayana Zuleta Mazo estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "Comprensión de los conceptos de Perímetro, Superficie y Área, a través de su contextualización en el cultivo del café en el marco de la enseñanza para la comprensión." que es conducida por el profesor Juan David González Molina estudiante de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa Santa Rita. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es Caracterizar un proceso de comprensión de los conceptos Perímetro, Superficie y Área a través de la contextualización en el cultivo del café en estudiantes del grado 5°.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase, en actividades propias de mi labor como colaborador en las tareas del cultivo del café. Algunas veces seré video grabado y entrevistado. Además, las entrevistas podrán ser audio grabadas y transcritas.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

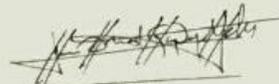
Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico jdavidgonzalezm@gmail.com

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación (horario de las sesiones martes y jueves de 1:00 a 3:00 de la tarde).

JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA


Firma

01-11-2012
Fecha

KAREN DAYANA ZULETA MAZO
Nombre del participante

Karen Dayana Z.M.
Firma

1/11/2012
Fecha

MARINA MAZO

marinamazo
Firma

1/11/2012
Fecha



Anexo J: Entrevista Isis

29 de mayo de 2013.

Hora: 15:30

Lugar: aula 225, Institución Educativa Santa Rita.

Participante: Isis.

Entrevistador: Juan David González Molina.

Apertura de la entrevista:

Entrevistador:

Isis, fuiste seleccionada para la investigación por reunir los elementos o condiciones que fueron decididos previamente para realizarla, estos elementos son: ser estudiante de la Institución Educativa Santa Rita en el grado 5°, estar en el rango de edades de 11 a 15 años, pertenecer a un grupo familiar que esté directamente relacionado con el cultivo del café y, lo más importante: participar directamente de las tareas de cultivo del café. Esto último porque es uno de los temas primordiales de esta investigación.

Recuerda que estás aquí porque aceptaste voluntariamente responder de forma afirmativa al llamado de ser parte de la investigación y porque tu familia te respaldó y decidió autorizarte para ello. No estás obligada a responder nada, sino sabes una respuesta simplemente me dices que no



la sabes, y ¡listo! o que simplemente no quieres contestarla. Otra cosa importante que debes tener presente es que no estás obligado a quedarte hasta el final del proceso de investigación, que puedes retirarte cuando te sientas mal o estés aburrido.

Entrevistador. Isis, ¿cómo estás, asustada?

Isis: más o menos.

Entrevistador. ¿Por qué?

Isis. Porque a mí nunca me había grabado ni me habían hecho una entrevista.

Entrevistador. Bueno, tranquila, esta es una conversación que vamos a grabar, conversamos de una forma parecida a cuando profesor te llama a preguntarte algo sobre una consulta o tarea para que le sustentas. ¿Ya te habían grabado antes?

Isis. Bueno, señor, voy a estar tranquila. Me grabaron una vez en video en clase de inglés y en la casa cuando hacemos de cantantes.

Desarrollo de la entrevista.

Preguntas y Respuestas.
Entrevistador. Ok, comencemos. Contame, qué fincas donde se cultiva café has vivido o has visitado?
Isis. Viví en una finca que se llama La Torre.
Entrevistador. ¿Dónde queda?
Isis. Queda en Bolívar.
Entrevistador. ¿Cuál otra conocés?

Isis. La Mancha, esta es una finca que tiene más de mil palos.
Entrevistador. ¡Guau! ¿Dónde queda esa?
Isis. Esa queda por mi casa, en Yarumal.
Entrevistador. ¿Solamente esas 2, La Torre y La Mancha?
Isis. Por el momento sí.
Entrevistador. ¿De esas 2 fincas cuál es la más grande?
Isis. Para mí La Mancha, porque es una finca muy grande y tiene muchos terrenos para cultivar, ya sea el café que uno quiera cultivar.
Entrevistador. ¿Y por qué crees que es más grande que La Torre?, ¿es que en La Torre no se cultiva mucho o qué?
Isis. Sí, pero es que... La Mancha tiene más espacio, más terreno y es la tierra más fértil, en cambio La Torres es un poco más pequeña y no tiene tanto espacio.
Entrevistador. Humm, bueno. Entonces, en esa situación que vos pensás, ¿a cuál de las 2 le cabe más café?
Isis. A..., pues, para mí, La Mancha.
Entrevistador. ¿Vos has visto en esas fincas que pongan cercados?, ¿sabés que es un cercado?
Isis. Sí, son varias mallas, pues sí, alambres, que se pone a todo el rededor del café para que pueda cuidar el terreno.
Entrevistador. Exactamente, ¿con qué más has visto que hagan cercados, fuera de las mallas y los alambres?
Isis. Con madera, mallas, hasta el momento que yo recuerdo, eso.
Entrevistador. ¿Las has visto con arbolitos?
Isis. Con arbolitos, sí, pero de esquina a esquina.
Entrevistador. Ok, entonces, ¿para qué se utilizan los cercados?, vos ya me lo dijiste, pero, recordámelo.
Isis. Un cercado se utiliza, para separar un terreno de otro.
Entrevistador. ¿Esos terrenos reciben algún otro nombre?
Isis. Sí, como por ejemplo, heeeemmm...
Entrevistador. Haber, si de pronto con uno que yo te diga te acordás, ¿has escuchado el nombre de parcela?
Isis. Sí.

Entrevistador. ¿Y a qué asociás la parcela, o sea, cuando te dicen “una parecela” qué cosa recreás en tu mente, qué se te viene a la mente?
Isis. Lo primero que se me viene a la mente a mí es un pedazo grande de tierra, pues, no de los más grandes, pero, de todas maneras se siembre café.
Entrevistador. ¿Y cuándo te hablan de lote?
Isis. Lote, para mí es todo el lugar donde se siembra café, o sea, toda la finca.
Entrevistador. Ah, el lote para vos es toda la finca y la parcela sería una parte de la finca. Oíste, ¿Qué sería un tajo?
Isis. Un tajo, sería hummmm, una parte de la parcela.
Entrevistador. Listo, entonces: el lote, es toda la finca; la parcela una parte pequeñita donde se siembra café y el tajo una parte de la parcela.
Isis. ¡Ajá!, así es.
Entrevistador. De esas 2 fincas, que ya me dijiste que la más grande es La Mancha, que queda aquí en Santa Rita, ¿si las fuéramos a cercar alrededor, cuál tendría más cercado?
Isis. Hummm....
Entrevistador. Imagínate lo siguiente, pensá en el terreno de toda la finca, con casas y sin casas, con animales y hasta con las quebraditas y suponé que toda la finca la van a separar de las otras fincas con que está lindando. ¿Cuál de las 2 fincas creés que se lleva más cercado?
Isis. Pues, La Mancha.
Entrevistador. ¿Por qué?
Isis. Porque la Mancha tiene gran... Una casa muy grande que parece de ricos, pero, La Torre, sólo tiene una casa más pequeña, más sencilla y como ya te había dicho antes no tiene tanto espacio para cultivar café.
Entrevistador. Ah, perfecto, o sea, la finca más grande se lleva más cercado.
Isis. ¡Ajá!
Entrevistador. ¿Vos has sembrado café?
Isis. Pues, cuando estaba muy pequeña.
Entrevistador. Y ¿de qué te acordás, que hacías cuando sembrabas café?
Isis. Primero, coger la bolsa especial en qué siembra el café, sembrar el granito, se le hecha tierra, se le hecha un poquito de agua y ya, se pone en un lugar que no sea ni tan soleado ni tan frío. Ya cuando tenga una medida más o menos se traslada a la parcela donde se va a sembrar, o al tajo.

Entrevistador. ¿Esa medida, tenés idea de más o menos cuánto es?
Isis. Por ahí deee... de... 10 o 15 cm, para mí, pues, para mí.
Entrevistador. Bien, entonces se coge de ese lugar que no debe ser muy caliente ni muy frío y cuando tenga 10 o 15 cm de alto se lleva para la parcela o el lote para donde se va a sembrar.
Isis. Sí, bueno, parcela, lote o tajo, cualquiera de los 3.
Entrevistador. Oíste, ¿vos has visto que las parcelas o los lotes forman figuras geométricas?
Isis. Nooo.
Entrevistador. ¿No?
Isis. Bueno, sí, sólo en algunas cuando se separan parcela de parcela que unas quedan cuadradas, pues, sí, es lo único que yo he visto de figuras geométricas.
Entrevistador. Sí, a eso me refería con la pregunta, pero, ¿No has visto así de lejos, cuándo vas en la escalera o en el carpati, que en las cafeteras hay tajos que forman triángulos?
Isis. Ah, sí.
Entrevistador. ¿Con qué has visto separar esos triángulos o cuadrados en las cafeteras?
Isis. Pues, la mayoría que yo he visto, con cercado.
Entrevistador. ¿Has oído hablar de perímetro?
Isis. Sí.
Entrevistador. ¿Te acordás qué es o qué quiere decir?
Isis. No mucho, mejor dicho, no me acuerdo qué es.
Entrevistador. El perímetro tiene mucho que ver con las figuras geométricas, otra palabra que tiene mucho que ver con ellas es, área. ¿También has oído hablar de ella?, ¿sabés que quiere decir área de una figura geométrica?
Isis. Sí he escuchado la palabra, pero tampoco me recuerdo de qué es.
Entrevistador. Vamos a hacer un juego de palabras o conceptos. De los que hemos hablado sobre terrenos y las 2 últimos que te pregunté. ¿Con qué asocias o asemejas la palabra tajo, con perímetro o con área y con qué asemejas la palabra surco, con perímetro o con área?
Isis. Tajo la semejo con área y parcela con perímetro.
Entrevistador. Ok, al final de la investigación vamos a darnos cuenta si esta

asociación es correcta o no, ¿vale?
Isis. Listo.
Entrevistador. ¿Cómo te parece que ya acabamos la entrevista?, ¿cómo te sentiste?
Isis. Muy bien, al principio estaba un poco asustada y muy nerviosa, pero, no estuvo tan mal.
Entrevistador. ¿Te sentiste cómoda?
Isis. Humm, sí.
Entrevistador. ¿En algún momento te sentiste, qué se yo, incómoda, con ganas de irte y terminarla pronto?
Isis. Nooo, la entrevista estuvo muy entretenida y me gustó mucho.
Entrevistador. Ah, bueno. Isis, te agradezco mucho.
Isis. Ah, no, para mí como te dije antes, fue un placer.
Entrevistador. Entonces, nos veremos luego, ya sea para otra entrevista o para una práctica de campo para mirar ahí área y perímetro.
Isis. Muy bien.
Entrevistador. Te agradezco mucho que hubieras mucho que hubieras venido.
Isis. Ah, por nada, no tenía nada que hacer, pasé el tiempo libre.
Entrevistador. Jaaa jaaa, que esté muy bien.
Isis. Chao.

Duración de la entrevista: 20 minutos.

Anexo K: Consentimiento informado, Minerva

Consentimiento de Participación en el proyecto de investigación.

Yo Diana Isabel Restrepo Acevedo estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "Comprensión de los conceptos de Perímetro, Superficie y Área, a través de su contextualización en el cultivo del café en el marco de la enseñanza para la comprensión." que es conducida por el profesor *Juan David González Molina* estudiante de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la *Institución Educativa Santa Rita*. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es Caracterizar un proceso de comprensión de los conceptos Perímetro, Superficie y Área a través de la contextualización en el cultivo del café en estudiantes del grado 5°.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase, en actividades propias de mi labor como colaborador en las tareas del cultivo del café. Algunas veces seré video grabado y entrevistado. Además, las entrevistas podrán ser audio grabadas y transcritas.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

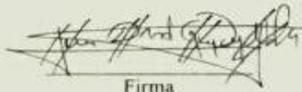
Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico jdavidgonzalezm@gmail.com

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación (horario de las sesiones martes y jueves de 1:00 a 3:00 de la tarde).

JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA



Firma

1/11/2012
Fecha

DIANA ISABEL RESTREPO ACEVEDO
Nombre del participante

Diana Isabel RPO.
Firma

1/11/2012
Fecha

LIGIA ACEVEDO
Nombre del padre de familia

Ligia Acevedo
Firma

1/11/2012
Fecha

Anexo L: Entrevista Minerva

29 de mayo de 2013.

Hora: 14:00

Lugar: aula 225, Institución Educativa Santa Rita.

Participante: Minerva.

Entrevistador: Juan David González Molina.

Apertura de la entrevista

Entrevistador:

Minerva, fuiste seleccionada para la investigación por reunir los elementos o condiciones que fueron decididos previamente para realizarla, estos elementos son: ser estudiante de la Institución Educativa Santa Rita en el grado 5º, estar en el rango de edades de 11 a 15 años, pertenecer a un grupo familiar que esté directamente relacionado con el cultivo del café y, lo más importante: participar directamente de las tareas de cultivo del café. Esto último porque es uno de los temas primordiales de esta investigación.

Recuerda que estás aquí porque aceptaste voluntariamente responder de forma afirmativa al llamado de ser parte de la investigación y porque tu familia te respaldó y decidió autorizarte para

ello. No estás obligada a responder nada, sino sabes una respuesta simplemente me dices que no la sabes, y ¡listo! o que simplemente no quieres contestarla. Otra cosa importante que debes tener presente es que no estás obligado a quedarte hasta el final del proceso de investigación, que puedes retirarte cuando te sientas mal o estés aburrido.

Entrevistador. Minerva, hola, buenas tardes, te agradezco mucho por estar acá, ¿cómo estás?

Minerva. Bien y usted

En. Bien, bien, afortunadamente. Hoy vamos a hablar de 2 cosas, o quiero que hablemos de 2 cosas, de lo que has aprendido sobre los cultivos y los terrenos del café, y de alguna u otra manera, si podemos vincular eso con la geometría. ¿Listo? – Minerva, asintió moviendo su cabeza consecutivamente adelante atrás. Si hay alguna pregunta que no entendás o no podás responder, simplemente me decís que no tenés idea, que por favor te explique o que simplemente no te acordás de nada y ya, no hay problema con eso y si me la querés contestar, pues, mejor – Minerva, nuevamente asintió moviendo su cabeza consecutivamente adelante atrás. No es una evaluación, (la niña sonríe) de aquí no depende que ganés o perdás el año, simplemente vamos a conversar a cerca del café. ¿Listo?

Minerva, nuevamente asintió moviendo su cabeza consecutivamente adelante atrás.

Desarrollo de la entrevista

Preguntas y Respuestas	
Entrevistador. Además de las fincas dónde tu papá cultiva ¿conocés otros terrenos?	Minerva. ¿Se refiere a los lugares, las veredas?
Entrevistador. Sí, claro.	Minerva. Ah, bueno, San Agustín y La Soledad.
Entrevistador. ¿Cómo se llama la finca en que tu papá está trabajando ahorita?	Minerva. La Quinta.
Entrevistador. Bueno, entonces estamos hablando de la finca de San Agustín, la finca de La Soledad y la finca de la Quinta.	Minerva. Sí, señor, de esas.
Entrevistador. Ok, ¿de esas tres fincas, en cuál crees que se cultiva más café?	Minerva. Mmm... en La Quinta.
Entrevistador. En La Quinta, ¿por qué?	Minerva. Porque allá en San Agustín el terreno es como en subida y en plancho, pero muy pequeño. En La Quinta siempre es largo de faldudo y el plano es siempre larguito.
Entrevistador. Ah, bueno. De las tres fincas dónde tu papá ha trabajado, ¿cuál es la más grande?	Minerva. La de San Agustín.
Entrevistador. ¿Por qué es más grande la de San Agustín?	Minerva. Porque, ¿cómo le dijera yo? No tiene tanto el espacio de café sino que tiene construcciones.
Entrevistador. Aaaaah, ya. ¿Según te entendí, es más grande la de San Agustín pero le cabe menos café, mientras que la de La Quinta es más chiquita y le cabe más café?	Minerva. ¡Ajá!
Entrevistador. ¿De esas tres fincas, cuál crees que se lleve más cercado?, ¿vos sabés qué es el cercado?	Minerva. No, no sé qué quiere decir eso.
Entrevistador. El cercado es el alambrado, lo que queda alrededor de la finca, lo que la bordea, lo que separa una finca de otra, un corral de otro... me he dado cuenta que lo más utilizado es el alambre de púas, aunque también utilizan otros materiales.	Minerva. Así, ya sé, también usan los arbolitos rojos.

Entrevistador. ¡Exactamente!, ahora, ¿de esas tres fincas, cuál crees que tiene la mayor cantidad de cercado?
Minerva. Bueno, La Quinta como no es como tan separada yo no la he visto. En cambio la Soledad, como sí queda más lejos, entonces sí veo las maticas rojas así como alrededor de tajo.
Entrevistador. ¡Ve, qué interesante! ¿Qué es un tajo?
Minerva. El tajo es eh... donde cultivan el café eh... es como un cuadrito, parecido a lo de la geometría.
Entrevistador. Ah... ¡ya!
Minerva. Es como así, y también se puede separar con matas de plátano.
Entrevistador. ¡Listo! Eso es un tajo. Ahora te pregunto, ¿un tajo podrá ser lo mismo que un lote?
Minerva. Yo creo que sí.
Entrevistador. Esas dos cosas, tajo y lote, podrán ser lo mismo que una parcela.
Minerva. Um.... No, no sé.
Entrevistador. No sabes que es una parcela, no hay problema, te cuento que una vez tu papá me habló de la parcela, me dijo, “esta parcelita donde yo siembro café”.
Minerva. Es el huequito en que uno mete el café.
Entrevistador. Yo a tu papá le entendí otra cosa, es un pedazo de tierra dónde él sabe que va a sembrar café. Yo ese día supuse que tajo y parcela eran la misma cosa. Igual me quedé con la duda y por eso te pregunté si parcela y tajo son lo mismo. Sería muy bueno que le preguntaras a tu papá qué es una parcela. Bueno, volvamos a lo de los cercados, me contaste que la de La Soledad era la que más dividida estaba y que lo hacía con palitos rojos, ¿por qué tenían que dividirla tanto?
Minerva. Porque era la herencia de mi papito, entonces tenía que dividirla para todos los hermanos.
Entrevistador. Pensemos en algo, si la finca de la soledad también se fuera a dividir en lotes, ¿cuál de esas dos, La Quinta y La Soledad? Tendría más cercado. Mejor dicho, ¿cuál de las dos es más grande y cuál de las 2 tendría más cercado?
Minerva. La de La Soledad. Es más grande y sí, se lleva más cercado.
Entrevistador. Vamos a suponer que la de La Soledad no sigue dividida, que todos se pusieron de acuerdo, que no hay inconvenientes y que se va a sembrar toda de café. ¿Será que le cabría más café a la de La Soledad que a la de La Quinta?
Minerva. Nooo.
Entrevistador. Ah, bueno, y sin embargo tiene más cercado.
Minerva. ¡Ajá!

Entrevistador, bueno, siguiendo todavía con lo del terreno, vos me dijiste que los lotes son “cuadraitos”, ¿todos los lotes son “cuadraitos”?
Minerva. No, unos son triángulos otros son ahí desfigurados.
Entrevistador. Desfigurados, ¿cómo así? Ayúdame con eso.
Minerva. No tiene la forma bien, para uno saber...
Entrevistador. ¿Te has dado cuenta si un sembrador de café piensa en hacer figuras cuando va separar los tajos? O sea, será que él dice: allí voy a hacer 2 cuadrados, allí 3 triángulos, allí un paralelogramo.
Minerva. Noo, porque eso lo miden.
Entrevistador. Ah, qué bueno saberlo. ¿Cómo lo miden?
Minerva. No, no sé, mi papá es que sabe o le dice el práctico.
Entrevistador. Esa sería una pregunta muy interesante para hacer a tu papá. Para que en otra conversación hablemos de eso. De lo que más me hablaste hoy y que más en común hemos encontrado, que son tajo y cercado, ¿vos pensás que eso tenga alguna relación con la geometría, con algunas palabras propias de la geometría o con aprendizajes de la geometría?
Minerva. Sí, porque el tajo es así como las figuras de la geometría, triángulos, cuadrados. Entonces el cercado es lo que hace ver la figura porque es lo que está alrededor.
Entrevistador. ¡Muy bien! Lo que está alrededor. Te voy a mencionar 2 palabras que son propias de la geometría y me respondés lo que sabés de ellas, sin temores que nadie va regañarte.
Minerva. Ja jaja, bueno señor.
Entrevistador. ¿Con cuál de las palabras: tajo y cercado, vinculás el concepto geométrico que se denomina área?
Minerva. Eh mmm, no la entendí bien.
Entrevistador. Bueno, en geometría hay un concepto, de las figuras geométricas, bueno, casi siempre referente a ellas, que se llama área. ¿Listo? Uno habla del área del triángulo, del cuadrado, del polígono... bueno, en fin, de lo que son figuras, incluso del área de...
Minerva. ¡Del pupitre!
Entrevistador. ¡Eso! Hasta del área del pupitre, de la tapa del computador. Por ejemplo, esto debe tener un área de tanto o, si uno la mide, uno dice, esto tiene un área, exactamente de, tanto.
Minerva: Ah, como la de esa mesita que es un triángulo.
Entrevistador. Ajá, como la de esa mesita que tiene una cara triangular. ¿Ya me entendiste más o menos cuándo se habla de área?
Minerva. Sí, más o menos.

Entrevistador. Entonces volvamos a las palabras tajo y cercado. ¿La palabra área se relaciona más con cuál?, bueno, esto según tu entendimiento y percepción.
Minerva: Yo creo que con el cercado.
Entrevistador. Muy bien. Ahora, vamos a pensar en otra palabra geométrica, en otro concepto, perímetro y volvemos a tajo y cercado. ¿Con cuál de las dos palabras, tajo y cercado, asocias la palabra perímetro?
Minerva: con el tajo.
Entrevistador. Con el tajo. Bueno, aún no sabemos qué tan acertados estamos. Por eso te dije, no importa si estamos en lo correcto o no. Lo que verdaderamente importa es escucharte y que cuando la investigación termine y volvamos a escuchar esto, vos digás, “ve, en la entrevista que me hicieron al principio, yo tenía la razón. O puede que digás, ah, yo estaba equivocada, no fue como lo dije, sino al contrario.
Minerva. Ah, bueno, esperemos entonces, pero creo que me equivoqué.
Entrevistador. No, no interesa mucho, tranquila, yo lo repetí para que nos quede bien claro lo que se dijo y que después de un tiempo no me digás, “vean a este, yo no dije eso...” – jaaaaa. Ve, ¿ya le preguntaste a tu papá cuánto hay que dejar de un palo a otro?
Minerva. Sí, pero no me dijo cuánto. Él ya como que sabe más o menos cuánto es y calcula o pone una vara en el suelo, pero casi siempre lo hace a ojo.
Entrevistador. Voleve a preguntar, pero que te diga exactamente cuánto es. Ya tenemos tres preguntas pa’ tu papá: qué es parcela, cómo se mide el tajo y cuánto se debe dejar de un palo de café a otro. Es muy sorprendente que ya se la haya aprendido tan bien que la sabe estimar sin instrumentos. ¿Cómo te sentiste en la entrevista? Porque ya acabamos, ¿te molesto algo, te aburriste?
Minerva. No, muy bien. Sentí que con lo de perímetro y área estuviera trocado.
Entrevistador. ¿Qué te dio esa sensación?
Minerva. Porque con lo de área tengo la sensación de que es así como aquí (soba el pupitre con ambas manos). Entonces creo que el perímetro es más fácil cercado y área es más fácil el tajo.
Entrevistador. Mmmm. No sé, oh, bueno, sí sé. Pero, no te voy a decir todavía. Sigamos con la investigación y cuando la terminemos salís de dudas. Es muy rico que te vas con esa incertidumbre ¿si será así o no será así? Entonces, cuando terminemos con la investigación, si nos va bien, ya estarás segura de la relación. Muchas gracias.
Minerva. Bueno, chao, con gusto.

Duración de la entrevista: 18 minutos.