

# INFLUENCIA DE GEOGEBRA EN LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y DIDÁCTICAS

## GeoGebra influence in the acquisition of geometric and pedagogical competencies

Natalia Ruiz López y César Sáenz de Castro

Facultad de Formación de Profesorado y Educación

Universidad Autónoma de Madrid

### Resumen

*La investigación que presentamos pretende analizar la influencia sobre la mejora de las competencias geométricas y didácticas de los estudiantes de Magisterio, del software de geometría dinámica GeoGebra. Para ello hemos realizado un diseño cuasi-experimental pretest-postest con grupo de control no equivalente. El instrumento de medida ha consistido en un cuestionario formado por los ítems de contenido didáctico-geométrico liberados del estudio internacional TEDS-M. El análisis estadístico de los resultados nos lleva a afirmar que la utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Educación Primaria, frente al recurso lápiz y papel.*

**Palabras clave:** *GeoGebra, competencias didáctico-geométricas, formación de profesorado, TEDS-M.*

### Abstract

*The present research aims to analyze the influence of the dynamic geometry software GeoGebra on improving geometric and pedagogical competencies in pre-service teachers. We therefore performed a quasi-experimental design pretest-posttest with nonequivalent control group. The measuring instrument consisted of a questionnaire that included geometric and pedagogical content knowledge items from the international study TEDS-M. Statistical analysis of the results leads us to conclude that the use of GeoGebra favors the development of geometric and didactic skills in students of the Degree of Primary Teacher Training, versus pencil-paper resource.*

**Keywords:** *GeoGebra, geometric and pedagogical competencies, teacher training, TEDS-M.*

### INTRODUCCIÓN

Con la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior los estudios de grado de Magisterio en Educación Primaria estructuran sus enseñanzas a partir de la adquisición de competencias del alumnado. En las nuevas titulaciones se tienen que implementar metodologías que ayuden a desarrollar esas competencias, básicas y específicas, y que permitan su evaluación. Entre las competencias que los futuros maestros tienen que adquirir durante su formación inicial se encuentran las competencias geométricas básicas. Esta necesidad, junto con la opinión compartida por los autores de que un cambio metodológico podría beneficiar el aprendizaje de los conceptos didáctico-geométricos, que tantas dificultades plantean a nuestros alumnos, nos ha llevado a realizar esta investigación.

Los métodos tradicionales de enseñanza de la geometría basados en la resolución de problemas de lápiz y papel, en recursos manipulativos o multimedia se han analizado en múltiples investigaciones. Sin embargo aún hace falta más información sobre cómo contribuye el software de geometría dinámica (en adelante, SGD) a la adquisición de competencias geométricas. En los últimos cursos en los que hemos impartido docencia en geometría y su didáctica hemos podido experimentar los cambios que produce el uso de un SGD en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto nos ha convencido de que introducirlos de manera habitual en las clases puede beneficiar la adquisición de competencias geométricas en los alumnos. Los sistemas de geometría dinámica permiten realizar construcciones en las que es necesario conocer las propiedades geométricas y las relaciones entre los distintos elementos de las figuras. Además, el “arrastre” de los objetos por la pantalla permite hacer generalizaciones y comprobar propiedades que con los métodos tradicionales a menudo no pueden realizarse. El uso de los SGD en la enseñanza produce cambios en la actuación docente en el aula y en las características del conocimiento que construye el alumno, como muestran muchos de los estudios realizados hasta la fecha (Carrillo & Llamas, 2005; Laborde & Capponi, 1994; Laborde, 2001; Murillo & Fortuny, 2003).

Sin embargo, no hay muchas investigaciones realizadas sobre la influencia de los SGD en la formación de profesorado de matemáticas y las que hay son fundamentalmente referidas al profesorado de educación secundaria. En cuanto a formación inicial de profesores de primaria, encontramos varias publicaciones en el seno del grupo de investigación *Aprendizaje de la Geometría* de la SEIEM. El profesor Ricardo Barroso expone una investigación realizada desde el paradigma de investigación-acción donde analiza si el uso de Cabri II ayuda a la comprensión de propiedades geométricas en un entorno de resolución de problemas con futuros maestros de Primaria (Barroso, 2003; Barroso, 2004).

Después de revisar la literatura sobre este tema, creemos que hace falta seguir investigando los aspectos relacionados con la adquisición de competencias didáctico-geométricas y el uso de SGD en estudiantes de magisterio, en concreto vamos ahora a centrarnos en GeoGebra, que es el software que hemos elegido.

## **PLANTEAMIENTO DE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN**

Como ya hemos dicho, en esta investigación el problema que se pretende abordar es cómo interviene el software de geometría dinámica GeoGebra en el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en la formación inicial del profesorado de Primaria (Ruiz-López, 2012a). Para ello hemos planteado los siguientes objetivos:

- Identificar las competencias geométricas que deben desarrollarse durante la formación inicial del profesorado de Educación Primaria.
- Analizar cuáles de estas competencias pueden mejorar con el uso de GeoGebra.
- Estudiar si mejoran las competencias geométricas y didácticas con la utilización de GeoGebra respecto al recurso “lápiz y papel” a través del diseño de una investigación pertinente.
- Examinar la influencia del uso de GeoGebra en las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza de los estudiantes de Magisterio.
- Analizar qué tipología de alumnos obtiene mejores resultados con GeoGebra en relación a su nivel de competencia digital.

En este artículo nos vamos a centrar en la descripción de cómo se ha abordado el tercer objetivo planteado, la metodología utilizada, el análisis de los datos obtenidos y las conclusiones a las que hemos llegado.

## MARCO TEÓRICO

Como marco teórico se ha utilizado el estudio TEDS-M<sup>xxxvii</sup> (*Teacher Education Study in Mathematics*) que supone la primera comparativa internacional sobre adquisición de competencias matemáticas y análisis de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza entre futuros profesores. El marco teórico de TEDS-M define que el conocimiento matemático necesario en la formación del profesorado se compone de dos dominios: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento del contenido pedagógico-didáctico<sup>xxxviii</sup>. A su vez, este último conocimiento se subdivide en al menos tres componentes: conocimiento curricular (conocimiento sobre medios y recursos para la enseñanza de las matemáticas, incluidos libros de texto y tecnología), conocimiento sobre la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y conocimiento sobre las representaciones de conceptos y procedimientos matemáticos para la enseñanza y aprendizaje. Estas tres componentes corresponden aproximadamente con las categorías enunciadas por Shulman (2005) y por Fan & Cheong (2002).

La participación española en el proyecto TEDS-M<sup>xxxix</sup> persigue analizar y caracterizar, sobre una sólida base empírica, cómo es la formación matemática inicial del profesorado de primaria en España, compararla con la de otros países y establecer propuestas de trabajo y posibles líneas de acción que contribuyan a mejorarla (Gutiérrez et al., 2012).

### Conocimiento de Contenidos Matemáticos

El marco de referencia seguido en TEDS-M para medir el Conocimiento de Contenidos Matemáticos (MCK) de los futuros profesores de primaria ha sido el mismo que se siguió en el estudio TIMSS 2007, con objeto de poder establecer relaciones útiles entre los resultados obtenidos con los estudiantes de primaria y la formación que reciben los profesores de esta etapa. Se acordó que la investigación debía centrarse en los contenidos que los profesores tenían que enseñar.

Los dominios que componen el conocimiento de contenidos matemáticos que se desarrollan en los cuestionarios son: Números, Geometría, Álgebra y Datos. Además se adoptaron los tres componentes principales del estudio TIMSS 2007 para el dominio cognitivo (Tabla 1). Para los profesores de primaria se priorizaron los ítems del subdominio Conocimiento, seguidos de Aplicación y Razonamiento. El grado de dificultad de cada ítem se categorizó en tres niveles: principiante (contenidos de la etapa educativa en la que el futuro profesor enseñará), intermedio (contenidos de uno o dos cursos superiores a la etapa educativa en la que el profesor enseñará) y avanzado (contenidos de tres o más cursos superiores a la etapa educativa en la que el profesor enseñará). La mayoría de los ítems correspondieron al nivel intermedio.

### Conocimiento del Contenido Pedagógico-didáctico

El marco teórico en el que se basa la medida del Conocimiento del Contenido Pedagógico-Didáctico (MPCK) se desarrolló en el estudio de viabilidad de TEDS (Schmidt et al., 2007) y en investigaciones previas en este campo. Los dominios estudiados de MPCK, tanto para el cuestionario de Primaria como para el de Secundaria son: conocimientos matemáticos curriculares, conocimientos de planificación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y representaciones matemáticas para la enseñanza-aprendizaje. En el estudio final se combinaron los dos primeros subdominios en el subdominio llamado currículo/planificación.

Tabla 1 – Subdominios cognitivos del Conocimiento de Contenidos Matemáticos

<b>CONOCIMIENTO</b>	
Recordar	Recordar definiciones; terminología; propiedades numéricas; propiedades geométricas; notación.
Reconocer	Reconocer objetos matemáticos, formas, números y expresiones; reconocer equivalencias.
Calcular	Resolver procedimientos algorítmicos de suma, sustracción, multiplicación y división con números enteros, fracciones, decimales; estimar cálculos; resolver procedimientos algebraicos.
Interpretar	Interpretar información de gráficos, tablas u otras fuentes; leer escalas simples.
Medir	Usar instrumentos de medida; usar apropiadamente las unidades de medida; estimar medidas.
Clasificar/ordenar	Clasificar/agrupar objetos, formas, números y expresiones según sus propiedades; tomar decisiones correctas sobre los elementos de una clase; ordenar números y objetos según sus atributos.
<b>APLICACIÓN</b>	
Seleccionar	Seleccionar una operación, método o estrategia apropiada y eficiente para resolver problemas donde se conocen los algoritmos o métodos de solución.
Representar	Mostrar datos en diagramas, tablas, cuadros o gráficos: generar representaciones equivalentes para una expresión dada.
Modelizar	Generar un modelo adecuado, como una ecuación o diagrama, para resolver problemas.
Reproducir	Seguir y ejecutar un conjunto de instrucciones matemáticas; dibujar figuras y formas de acuerdo a las especificaciones dadas.
Resolver problemas rutinarios	Resolver rutinas o tipos de problemas familiares (por ej. usar propiedades geométricas para resolver problemas); comparar diferentes representaciones de datos; usar datos de cuadros, tablas, gráficos y mapas para resolver problemas rutinarios.
<b>RAZONAMIENTO</b>	
Analizar	Usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas; usar razonamiento proporcional; descomponer figuras geométricas para simplificar problemas; dibujar el desarrollo de un sólido; visualizar transformaciones de figuras tridimensionales; comparar representaciones diferentes de los mismos datos; realizar inferencias válidas de informaciones dadas.
Generalizar	Generalizar el dominio de validez de un problema o razonamiento matemático.
Justificar	Justificar si una proposición, un resultado o una propiedad es verdadera o falsa.
Resolver problemas no rutinarios	Resolver problemas en contextos reales y aplicar procedimientos matemáticos en contextos no familiares complejos; usar propiedades geométricas para resolver problemas no rutinarios.

## Los cuestionarios

Los cuestionarios<sup>xl</sup> que se han utilizado se componen de ítems clasificados en las dos dimensiones del conocimiento según su contenido que hemos descrito en los epígrafes anteriores, MCK y MPCK. Antes de su aplicación se realizó un profundo estudio estadístico para verificar que los ítems elegidos reunían las condiciones apropiadas de fiabilidad y validez y al final se eligieron los siguientes:

- 24 ítems de MCK (9 de álgebra, 6 de geometría, 7 de números y 2 de tratamiento de la información), distribuidos de la siguiente forma según el subdominio cognitivo: Conocimiento (15), Aplicación (8) y Razonamiento (1).
- 10 ítems de MPCK (2 de álgebra, 2 de geometría, 3 de números y 2 de tratamiento de la información), distribuidos de la siguiente forma según los dos subdominios: planificación/currículo (6) y representaciones (4).

## METODOLOGÍA

El problema de investigación que vamos a analizar aquí emana del tercer objetivo que nos planteamos en este estudio y lo hemos formulado de la siguiente forma:

P1- ¿La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso “lápiz y papel”?

Para contestar esta pregunta hemos propuesto un diseño experimental que integra los enfoques cuantitativo y cualitativo. Desde la metodología cuantitativa se ha realizado un diseño cuasi-experimental pretest-postest con grupo de control no equivalente (muestreo disponible con grupos ya formados). La población ha consistido en los estudiantes de 2º curso del Grado de Magisterio de la Universidad Autónoma de Madrid matriculados en la asignatura “Matemáticas y su Didáctica II” el curso 2010-2011, con un tamaño de 319 alumnos. Para formar la muestra se eligieron dos grupos de tarde y se asignó aleatoriamente a cada uno ser el grupo experimental (51 alumnos) y el grupo control (49 alumnos). Para controlar que no hubiera diferencias iniciales entre los grupos que pudieran influir en los resultados se realizó un pretest de manera que pudiera estudiarse si las medias entre los grupos eran equivalentes. Así podíamos asegurar la validez interna del diseño. Otro aspecto que queríamos controlar era la influencia de la intervención del profesor en ambos grupos, para ello se decidió que fuese la misma persona.

Las variables involucradas en nuestro problema de investigación son las siguientes:

- Variable independiente: Tipo de recurso. Esta variable toma dos valores: GeoGebra y lápiz-papel.
- Variable dependiente: La competencia geométrica y didáctica del alumnado.

Hemos elegido como instrumento de medida de la variable dependiente un cuestionario que podemos considerar fiable y válido, ya que es una prueba estandarizada, formado por los ítems liberados del estudio TEDS-M del dominio de Geometría. Por lo tanto, la prueba que hemos utilizado como pretest y postest consta de 8 ítems relativos a Geometría y Conocimientos Didácticos sobre Geometría.

El tratamiento o intervención educativa ha tenido dos componentes diferenciadas: 1) un proceso formativo común a los grupos experimental y control; 2) un proceso formativo específico para cada uno de los grupos. Es importante precisar que se ha intentado realizar una intervención en el grupo control lo más parecida posible a la realizada en el grupo experimental. Por eso se decidió desde el primer momento que en los dos grupos que iban a participar en la investigación la profesora fuera la

misma. Se pretendió que la única diferencia fuese el uso de GeoGebra en el grupo experimental para resolver los problemas geométricos que el grupo control resolvería con lápiz y papel. El resto de los métodos docentes han sido iguales en ambos grupos.

Para apoyar y dar más significado a los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo, se ha realizado además un estudio de casos que nos ha permitido analizar profundamente el proceso de resolución de problemas de geometría mediante GeoGebra en parejas de estudiantes (Ruiz-López, 2012b).

## ANÁLISIS DE LOS DATOS

Para analizar los datos obtenidos en el estudio cuantitativo se ha realizado un estudio estadístico descriptivo de la variable Mejora Total, que es la diferencia de puntuaciones para cada alumno en la prueba de competencias geométricas y didácticas entre el postest y el pretest. Hemos estudiado las tablas de frecuencias, los estadísticos descriptivos y los diagramas de caja (Figura 1) e histogramas con ajuste normal, para el grupo experimental y el grupo control. También hemos realizado un análisis descriptivo de la normalidad. Además, hemos realizado un estudio descriptivo exhaustivo de cada ítem de la prueba de competencias geométricas y didácticas.

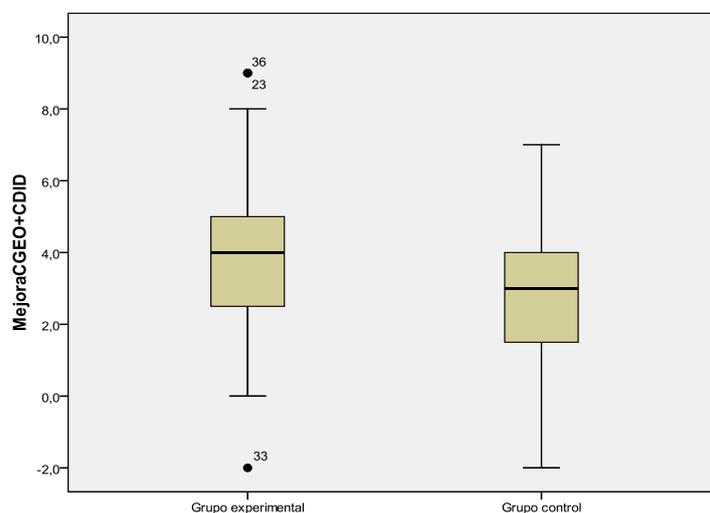


Figura 1. Diagramas de caja para P1

Observando los datos podemos concluir lo siguiente:

Los dos grupos mejoran en el postest, pero la media de mejora del grupo experimental es superior en más de un punto (1,133) a la del grupo control. La mediana y la moda del grupo experimental son superiores en un punto a las del grupo control. En los diagramas de caja de la Figura 1 se observa que los alumnos del grupo experimental han mejorado más que los del grupo control.

Una vez que el análisis descriptivo nos ha permitido comprobar un mejor comportamiento del grupo experimental frente al grupo control respecto al problema P1, tenemos que ver ahora hasta qué punto esa mejora es significativa desde el punto de vista estadístico. Para ello hemos realizado el análisis inferencial: hemos utilizado un ANCOVA para analizar la variable Total, que es la suma de las puntuaciones obtenidas en los ítem de competencias geométricas (CGEO) y los ítem de competencias didácticas (CDID),  $Total = CGEO + CDID$ , considerando como covariable la medida del pretest. Además, se realizó el Modelo Lineal General (MLG) de Medidas Repetidas con la variable Total para comprobar los resultados obtenidos en el ANCOVA. Los gráficos de perfil nos han permitido comparar los grupos experimental y control y analizar si hay interacciones.

Tabla 2 – ANCOVA para la variable TOTAL

ANCOVA para la variable TOTAL					
Variable dependiente: Puntuación total postest					
Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	141,523 <sup>a</sup>	2	70,761	25,097	,000
Intersección	511,986	1	511,986	181,585	,000
TOTAL1	138,679	1	138,679	49,185	,000
Grupo	12,721	1	12,721	4,512	,037
Error	245,299	87	2,820		
Total	6653,500	90			
Total corregida	386,822	89			

a. R cuadrado = ,366 (R cuadrado corregida = ,351)

Analizando la variable Total, obtenemos que hay diferencias significativas entre el pretest (Total 1) y el postest (Total 2) en ambos grupos ( $\text{sig} = 0,000$ , en la Tabla 2). Además, hay diferencias significativas según el grupo, experimental o control ( $\text{sig} = 0,037 < 0,05$ ). Estos datos se corroboran en el MLG de medidas repetidas ( $\text{sig} = 0,009 < 0,05$ ). Ambos grupos han obtenido un avance en los resultados de la prueba de conocimientos geométricos y didácticos, pero el grupo experimental partía de una media más baja en el pretest y ha obtenido una media más alta en el postest que el grupo control. Podemos ver claramente la interacción entre los grupos en la Figura 2.

## CONCLUSIONES

Después del análisis estadístico de los datos obtenidos en la prueba de conocimientos didáctico-geométricos realizada a los estudiantes participantes en el estudio, podemos responder afirmativamente a nuestra pregunta de investigación P1: *La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, frente al recurso lápiz-papel.*

La metodología empleada en esta investigación con los estudiantes integrantes de los grupos experimental y control, ha resultado eficaz para desarrollar sus competencias didáctico-geométricas. El grupo experimental, que ha seguido el mismo proceso formativo que el grupo control añadiendo el entorno GeoGebra para la resolución de problemas geométricos, ha obtenido resultados estadísticamente significativos en la mejora de competencias didáctico-geométricas, a pesar de haber utilizado como instrumento de medida una prueba de lápiz y papel. Los ítems en que el grupo experimental ha obtenido mejores resultados (respecto al grupo control) son los de aplicación, dentro del dominio TEDS-M de contenidos geométricos, y de planificación del currículo, dentro de los didácticos.

También es interesante analizar la opinión de los alumnos del grupo experimental, recogida en una encuesta al final del Taller de GeoGebra. Mayoritariamente (entre el 85% y el 92%) expresan que este Taller les ha ayudado a comprender mejor los conocimientos geométricos y a explorar, experimentar, hacer conjeturas y comprobarlas. Prefieren este recurso a la hora de resolver problemas nuevos que el método tradicional de papel y lápiz (59%). Además, opinan que es un buen recurso para la enseñanza de la geometría en Primaria (81%).

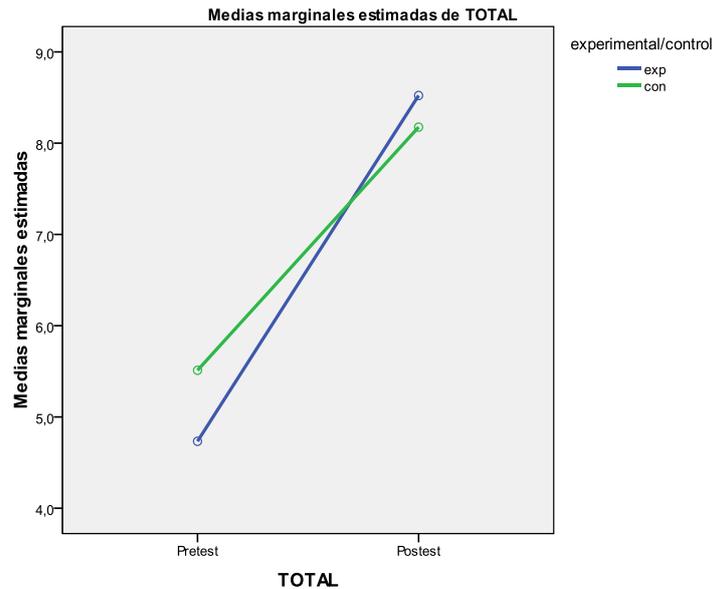


Figura 2. Gráficos de perfil de la variable Total

## Referencias

- Barroso, R. (2003). Elección de cuatro problemas geométricos para una investigación sobre la comprensión de propiedades geométricas. Una justificación. *Investigación En Educación Matemática: Actas del VII Simposio De La SEIEM*, Granada. 139-152.
- Barroso, R. (2004). Estado actual de la investigación sobre el "estudio sobre la influencia del software de geometría dinámica en la visualización y descubrimiento de propiedades geométricas". *Actas Del VIII Simposio De La SEIEM*, La Coruña. (8) 1-9.
- Carrillo, A., & Llamas, I. (2005). *Cabri géomètre II plus una aventura en el mundo de la geometría*. Madrid: Ra-Ma.
- Fan, L., & Cheong, N. P. C. (2002). Investigating the sources of singaporean mathematics teachers' pedagogical knowledge. *Mathematics Education for a Knowledge-Based Era*, Singapore. 2, 224-231.
- Gutiérrez, A., Gómez, P., Rico, L. (2012). Conocimiento en Didáctica de la Matemática de estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática: Actas del XVI Simposio De La SEIEM*, Jaén. 341-351.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317.
- Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique del Mathématiques*, 14(12), 165-210.
- Murillo, J., & Fortuny, J. M. (2003). Interactividad en la red con actividades CABRI. *Contextos Educativos*, 6-7, 295-315.
- Ruiz-López, N. (2012a). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. Retrieved from <http://tdx.cesca.cat/handle/10803/109694>
- Ruiz-López, N. (2012b). Resolución de problemas geométricos con GeoGebra en la formación de profesores de educación primaria: Un estudio de casos. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, 1, 37-50. Retrieved from <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8607/6577>

Schmidt, W., Tatro, M. T., Bankov, K., Blomeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., Schwille, J. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries*. (MT21 report). East Lansing, MI: Michigan State University. Retrieved from <http://hub.mspnet.org/index.cfm/14977>

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. [Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform] *Profesorado. Revista De Currículum y Formación Del Profesorado*, 9(2), 1-30. Retrieved from <http://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>

---

<sup>xxxvii</sup> La presentación pública oficial del TEDS-M se encuentra en <http://teds.educ.msu.edu>. La página de TEDS-M España es <http://www.ugr.es/~tedsm/>

<sup>xxxviii</sup> En inglés, Mathematics Content Knowledge (MCK) y Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK).

<sup>xxxix</sup> El profesor Luis Rico Romero es el Coordinador Nacional de Investigación y responsable de la dirección científica del estudio en España.

<sup>xl</sup> Los ítems liberados del estudio TEDS-M se encuentran disponibles en la dirección: [http://www.ugr.es/~tedsm/resources/Informes/Result\\_Viejo/PrimariaItemsLiberados.pdf](http://www.ugr.es/~tedsm/resources/Informes/Result_Viejo/PrimariaItemsLiberados.pdf)