CONCEPTUALIZACIÓN Y USO DE REPRESENTACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE LÍMITE EN DOCENTES DE BACHILLERATO

Conceptualization and use of representations on the limit concept in high school teachers

Evelyn Ward[a], Santiago Inzunsa[a], Salvador Hernández[b] y Fidencio López[a]

[a]Universidad Autónoma de Sinaloa, [b]Centro de Ciencias de Sinaloa

Resumen

El presente trabajo expone resultados de una investigación que tiene por objetivo analizar las concepciones que poseen los docentes de bachillerato en relación al concepto límite. Para describir las características de las conceptualizaciones de los docentes se consideraron las creencias epistemológicas, los sistemas de representación semióticas y las funciones cognitivas. Entre los resultados encontramos que los docentes identifican distintas representaciones del concepto límite, realizan transformaciones internas en el sistema representacional identificado, se les dificultan las conversiones entre diferentes sistemas, y su conceptualización está ligada principalmente al cálculo numérico.

Palabras clave: c*onceptualización, representaciones semióticas, funciones cognitivas.*

Abstract

This paper presents results of a research that aims to analyze the conceptions held by high school teachers in relation to the limit concept. To describe the features of the conceptualizations of teachers were considered epistemological beliefs, systems of representation and cognitive functions. The results included that teachers identify different representations of the limit concept, make internal changes in the representational system identified, they are difficult conversions between different systems, and that its conceptualization is linked mainly to numerical calculation.

Keywords: *conceptualization, semiotics representations, cognitive functions.*

Ward, E., Inzunsa, S., Hernández, S. y López, F. (2013). Conceptualización y uso de representaciones sobre el concepto de límite en docentes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 523-534). Bilbao: SEIEM.

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

El concepto de límite es fundamental para el estudio del cálculo, en particular para el desarrollo y comprensión de conceptos que forman parte de su estructura vertebral, como es el caso de la derivada y la integral. Courant y Robins (2002) mencionan que la importancia del concepto límite en las matemáticas y las ciencias radica en que muchos conceptos y números importantes se definen como límites de funciones o sucesiones, por lo que el concepto de límite es central para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Sin embargo, diversas investigaciones realizadas en educación matemática han mostrado evidencia que el concepto de límite es un concepto complejo tanto para estudiantes como para docentes.

Las investigaciones acerca del concepto de límite que se reportan en la literatura se enfocan desde distintas perspectivas y consideran diversos aspectos que subyacen al concepto. Por ejemplo, Claros, Sánchez y Coriat (2009) realizaron una revisión amplía de investigaciones sobre el concepto de límite, entre las cuales se estudian las concepciones de los alumnos y se caracterizan, analizan y contrastan distintas definiciones sobre el límite (por ejemplo, Blázquez y Ortega, 2000; Contreras, García y Sánchez, 2005). Por su parte, en investigaciones que se ocupan de la conceptualización del límite, algunas proponen una nueva definición y utilizan distintas representaciones semióticas del límite. En este contexto, los trabajos de Blázquez, Gatica, Ortega y Benegas (2006) contrastan la definición métrica de límite dada por Weierstrass, con la nueva definición de límite funcional como aproximación óptima de Blázquez y Ortega (2002), y aún cuando en sus resultados estos autores reportan mejoras en los procesos de enseñanza aprendizaje relacionadas con la compresión de los estudiantes, en estas amplias investigaciones no se estudian específicamente las concepciones de los docentes.

Se ha observado que en la enseñanza de límites existe una fuerte tendencia a enfatizar la parte operativa. En este sentido, es característico que las actividades de enseñanza de los docentes estén encaminadas a establecer la definición intuitiva del límite a manera de enunciado y a partir de ella, se enfocan en resolver repetidamente ejercicios de límites, dejando con frecuencia relegada la comprensión. De esta manera, para los estudiantes, los límites son un procedimiento más, no le dan significado, y aún cuando ven distintas representaciones del concepto, no logran modificar la idea intuitiva. En este sentido, Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012) formulan la conjetura de que los ejemplos gráficos empleados en la enseñanza son los que pueden estar pronunciando la percepción intuitiva de los estudiantes.

Las fuentes de dificultad que impiden una adecuada comprensión del concepto de límite reportadas en la literatura (por ejemplo, Tall y Vinner, 1981; Sierpinska, 1985; Oehrtmann, 2009) son de diversa índole; entre ellas sobresalen el infinito, los tipos de definiciones en los libros de texto, la propuesta curricular, los ejemplos utilizados, los significados personales e institucionales y las representaciones matemáticas utilizadas en su definición.

La investigación sobre la conceptualización del límite, se ha enfocado mayormente sobre los estudiantes, por lo que planteamos investigar la conceptualización que los docentes de bachillerato poseen en relación a los límites, en lo cual es importante el uso de representaciones semióticas, ya que en matemáticas las operaciones sobre los objetos dependen directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Por ejemplo, cuando resolvemos un límite observamos una dependencia de los procedimientos de solución y su escritura, ya sea en tabla numérica, gráfica, formula algebraica o lenguaje natural.

MARCO TEÓRICO

La teoría de sistemas de representación semiótica (Duval, 1998, 1999a) plantea que los objetos matemáticos no son objetos que pueden ser directamente percibidos u observados, su acceso está restringido al uso de sistemas de representación que permiten su designación. Esto requiere que la actividad sobre los objetos matemáticos se realice sólo por medio de representaciones semióticas y advierte que la construcción de un concepto en matemáticas requiere vincular coherentemente por lo menos dos sistemas de representación.

Una representación semiótica es una construcción (registro) que utiliza signos para representar un objeto matemático y la constituyen tres elementos: el objeto de la representación, el contenido de la representación y la forma de la representación. En la formación de los conceptos, el sujeto usa la representación semiótica del concepto, sin tomar conciencia de que esta representación no contiene todos los rasgos esenciales que caracterizan el concepto. Duval señala que para que una representación semiótica sea un registro de representación debe cumplir con las siguientes funciones cognitivas: primero, la representación es identificable a través de una frase, un dibujo, una gráfica, una tabla, una formula; segundo, la representación permite tratamiento, que es una transformación interna en el mismo sistema de representación; y tercero, la representación admite la conversión, que es una transformación externa a otro sistema de representación. Para construir el concepto matemático se parte de un sistema de representación, se identifica ese sistema, se tiene capacidad de transformarlo internamente para luego convertirlo a otro sistema de representación, en la medida que se articulan los diferentes sistemas se construye el concepto.

Representaciones semióticas y registros del concepto límite

Los objetos matemáticos generalmente son multi-representacionales. Las representaciones pueden ser mentales o externas y son producidas intencionalmente por el uso de un sistema semiótico: oraciones, gráficas, diagramas, dibujos (Duval, 1999b). Su distinción se refiere a su modo de producción, así pues, como se tienen varios registros de representación y sistemas para visualizarlos, en el caso del concepto límite consideraremos las que se muestran a continuación.

Representación numérica de registro aritmético (ver Tabla 1):

Tabla 1. Aproximaciones numéricas para el $\text{lím}_{x\to 0}(x-2)$

$\boldsymbol{x}$	-0.1	-0.11	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$\boldsymbol{x-2}$	-2.1	-2.01	-2.001	?	-1.999	-1.99	-1.9

Representación geométrica de registro geométrico (ver Figura 1):

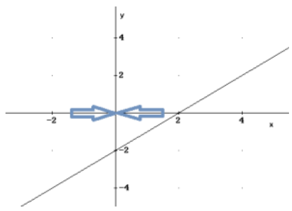


Figura 1. Gráfica del $\text{lím}_{x\to 0}(x-2)$

Representación simbólica o analítica de registro algebraico: $\text{lím}_{x\to 0}(x-2)$

Representación en texto descriptivo de registro lenguaje natural: el límite de equis menos dos cuando equis tiende a cero.

METODOLOGÍA

El estudio se llevó a cabo en verano de 2012 mientras los docentes tomaban un curso de cálculo con tecnologías. La muestra estuvo conformada por diez docentes de matemáticas. El instrumento de recopilación de los datos fue un cuestionario, el cual fue aplicado el primer día del curso antes del uso de las calculadoras y de iniciar la discusión de los temas de cálculo. El tiempo promedio para resolverlo fue de hora y media aproximadamente.

En la figura 2 describimos la pregunta, los propósitos y el sistema de representación para cada uno de los ítems del cuestionario, mismo que tuvo por objetivo caracterizar la conceptualización de los docentes en relación al concepto límite. Para definir la caracterización nos apoyamos en las ideas de Pons, Valls, y Llinares (2011) sobre los elementos matemáticos considerados en el concepto límite. Por otra parte las aportaciones de Páez (2004) y Cantoral y Farfán (2004) nos permitieron identificar los registros de representación y las funciones cognitivas puestas en juego por los docentes. A continuación se detalla cada una de las preguntas del cuestionario.

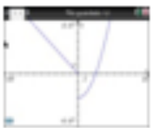
PREGUNTA	PROPÓSITO Y SISTEMA DE REPRESENTACIÓN
1. ¿Qué entiendes por aproximación?	Indagar significado matemático de aproximación y su relación con el límite Sistema de representación: lenguaje natural. Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011).
2. ¿Qué es un proceso infinito y qué es una situación límite?	Conocer las ideas de los docentes respecto a los procesos infinitos y la situación límite; además de indagar si establece alguna relación con el concepto límite. Sistema de representación: lenguaje natural. Cantoral y Farfán, (2004).
3. Considere la función continua f sobre el intervalo (a,b). Tomemos un punto x_0 en el interior del intervalo. Para cada una de las siguientes afirmaciones construya un bosquejo de la gráfica de una función que cumpla con: a) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ b) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ c) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	Indagar si el docente comprende simbólica y geométricamente el límite y lo aplica en la continuidad de una función. Sistema de representación: simbólico. Cantoral y Farfán, (2004).
4. Explica el significado de que el número L sea el límite de f(x) cuando x tiende a un número fijo a.	Investigar lo qué el docente entiende por límite y el tipo de planteamiento que proporciona. Sistema de representación: lenguaje natural. Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011).
5. Bosqueja la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$  a. Determina el límite de f(x) cuando $x \to -3^+$ b. Determina el límite de f(x) cuando $x \to -3^-$ c. Determina el límite de f(x) cuando $x \to -3$	Identificar el tratamiento que se le da al límite en registro algebraico y el proceso de conversión de la representación simbólica a la geométrica. Sistema de representación: simbólico. Páez, M. (2004).
6. Sea la función f(x) definida por la gráfica:  a. Determina el límite de f(x) para $x \to 0^+$ b. Determina el límite de f(x) para $x \to 0^-$ c. Determina el límite de f(x) para $x \to 0$	Explorar el proceso de conversión de representación geométrica a simbólica. Sistema de representación: geométrico. Páez, M. (2004)

Figura 2. Propósito, sistema de representación y fuente de cada pregunta del cuestionario

Realizamos un análisis cualitativo de las representaciones según la propuesta de Duval (1999b), considerando dos niveles: primero analizamos el contenido de una representación en un registro dado, y segundo, el funcionamiento del registro escogido para representar el límite.

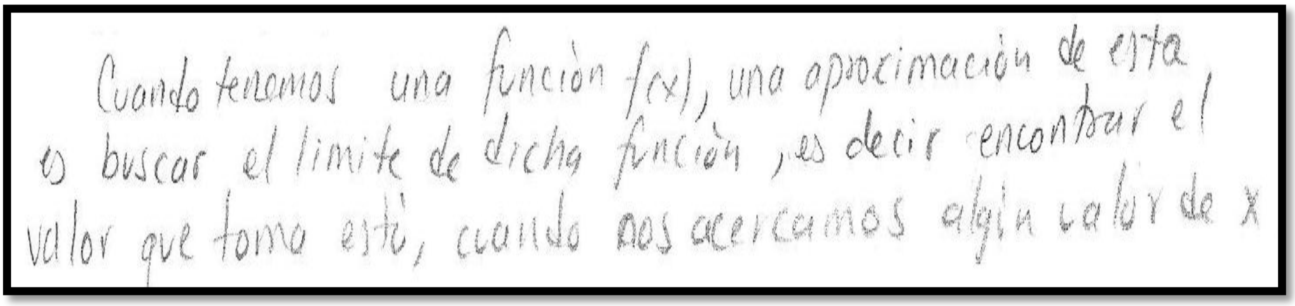
RESULTADOS Y DISCUSION

En lo sucesivo haremos referencia al docente utilizando la letra D y un número, por ejemplo: el docente 1, como D1.

Pregunta 1

1. *¿Qué entiendes por aproximación?*

Las respuestas de los docentes a esta pregunta fueron difusas, sólo D7 relaciona el concepto límite con aproximación. Todos los docentes se refieren a la aproximación como “acercarse” pero no queda claro qué tanto es el acercamiento, proporcionan una definición muy subjetiva de aproximación, relacionada con la idea de los infinitamente pequeños y ligada al cálculo numérico; todo esto apunta a una noción infinitesimal del límite. Esto coincide con los resultados de Pons, Valls y Llinares (2012) respecto a que la idea de aproximación a un número en el dominio se apoya en el cálculo de valores de la función dada en modo algebraico.


Cuando tenemos una función f(x), una aproximación de esta o buscar el limite de dicha función, es decir encontrar el valor que toma està, cuando nos acercamos algún valor de x

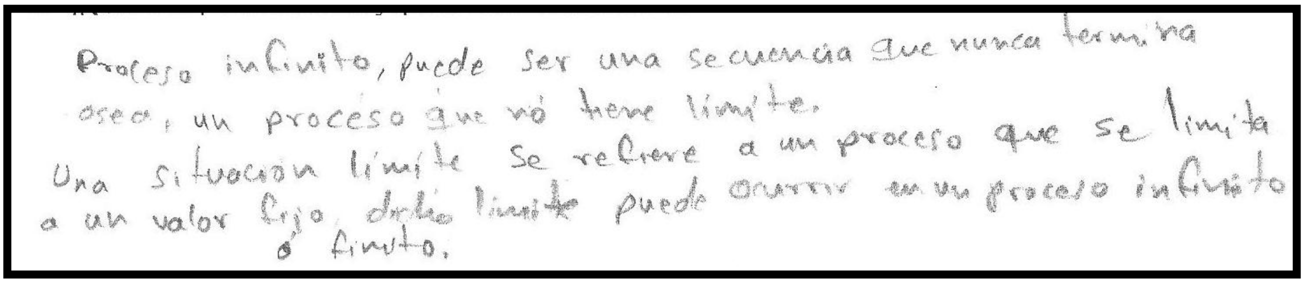
Respuesta de D7

En esta pregunta la totalidad de los docentes utiliza la representación en texto descriptivo para su respuesta. Ningún docente realiza transformación interna pues no ejemplifican o describen en texto la aproximación; de igual manera no convierten a otro sistema de representación, ya que no utilizan gráficas, ni símbolos, ni sucesiones numéricas en sus explicaciones.

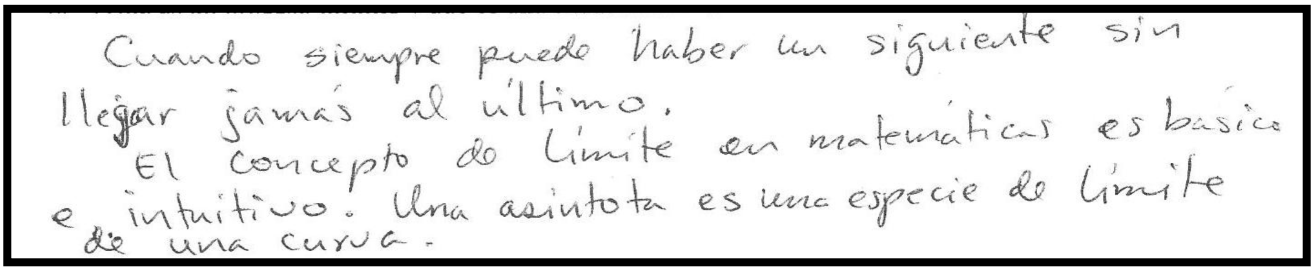
Pregunta 2

2. *¿Qué es un proceso infinito y qué es una situación límite?*

En las respuestas de los docentes a la pregunta 2 se observa confusión en cuanto a proceso infinito y situación límite. Todos los docentes representan su respuesta en texto descriptivo, cinco de los docentes no logran identificar proceso infinito ni situación límite, y un docente no responde a la pregunta. Las respuestas dadas por D6, D8, D9 y D10 indican que identifican un proceso infinito y situaciones límite.


Proceso infinito, puede ser una secuencia que nunca termina
osea, un proceso que nó tiene límite.
Una situación límite se refiere a un proceso que se limita
a un valor fijo, dicho límite puede ocurrir en un proceso infinito
ó finito.

Respuesta de D9


Cuando siempre puede haber un siguiente sin
llegar jamás al último.
El concepto de límite en matemáticas es básico
e intuitivo. Una asintota es una especie de límite
de una curva.

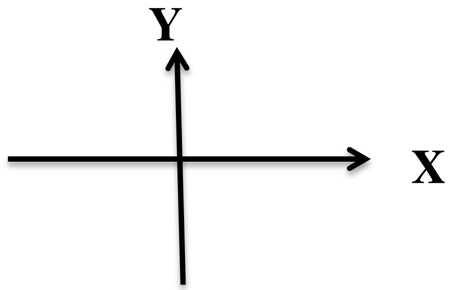
Respuesta de D6

Sin embargo, D9 en la primera parte de su respuesta expresa un proceso infinito pero la segunda parte presenta una inconsistencia, ya que un proceso infinito, no es un proceso que no tiene límite. Únicamente D6 señala lo que es una situación límite (la asíntota de una curva), lo que indica que realiza tratamiento interno. En las respuestas de los docentes también se puede observar que no logran convertir a otro sistema de representación, no utilizan gráficas, sucesiones numéricas ni símbolos. Podemos concluir que siete de los docentes poseen una noción infinitesimal del límite, ligada al cálculo numérico, y D6, D9 y D10 una noción numérica del límite.

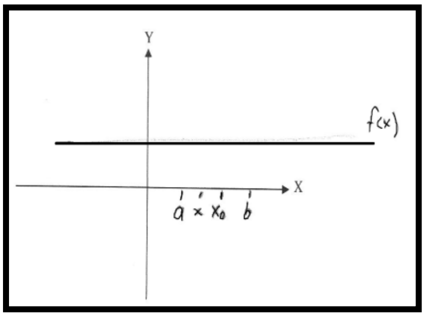
Pregunta 3.

3. *Considere la función continua f sobre el intervalo (a,b). Tomemos un punto x_0 en el interior del intervalo. Para cada una de las siguientes afirmaciones construya un bosquejo de la gráfica de una función que cumpla con:*

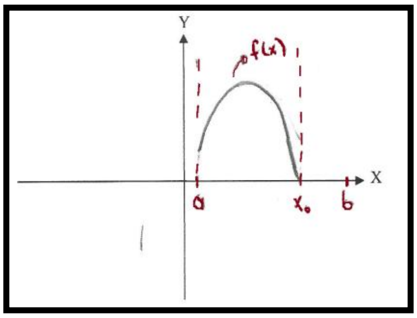
$a)\ \lim_{x \to x_0} \frac{f\ x\ - f\ x_0}{x - x_0} = 0$



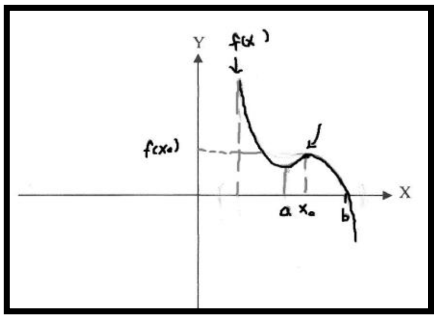
Este inciso no lo contestaron D1, D2 y D3; los otros siete docentes identificaron y transitaron del registro simbólico al geométrico. Los docentes señalan el punto x_0 en el interior del intervalo (a, b) y bosquejaron una función continua.



Bosquejo de D4

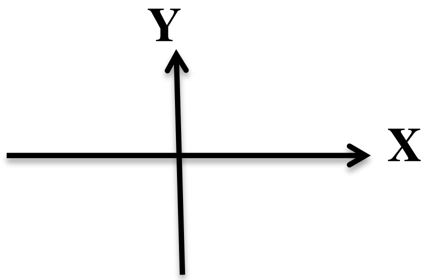


Bosquejo de D5

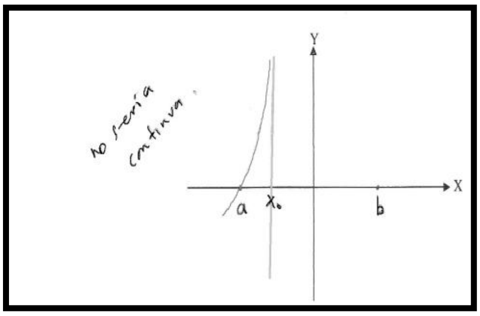


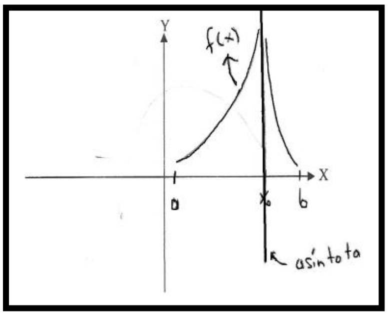
Bosquejo de D7

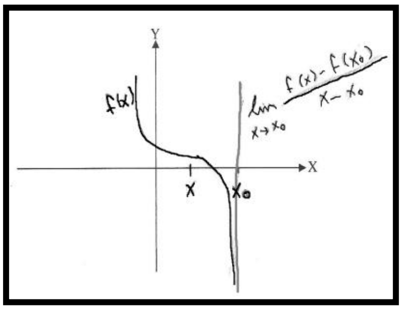
$b)\ \lim_{x \to x_0} \frac{f\ x\ - f\ x_0}{x - x_0} = +\infty$



Este inciso lo contestaron cinco docentes, ellos bosquejaron una gráfica, es importante señalar que no cumple con la condición inicial de ser una función continua, sólo D10 señala que la gráfica no sería continua, lo que indica que él realiza una conversión coherente del registro simbólico al geométrico.



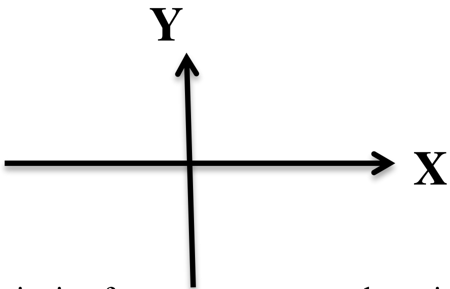




Bosquejo de D10 — Bosquejo de D5 — Bosquejo de D9

Las respuestas de los docentes a este inciso indican que identifican los registros simbólicos y geométricos, sin embargo no logran cumplir con la condición inicial de continuidad, esto muestra que los docentes tienen alguna idea del límite pero desvinculado de otros conceptos de cálculo.

$c)\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

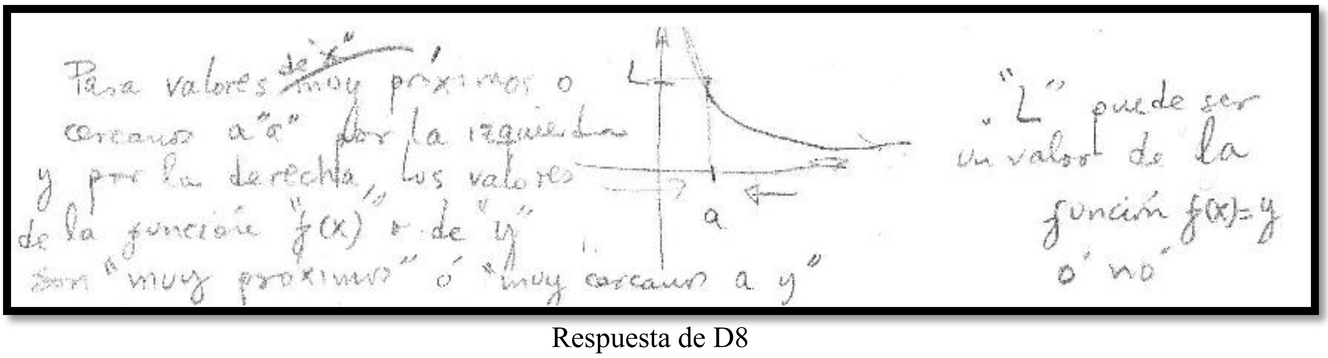


Las respuestas de los docentes a este inciso fueron exactamente las mismas que para el anterior, en ellas observamos que la mitad de los docentes identifican los registros geométricos y simbólicos pero no logran transitar coherentemente entre ellos.

Pregunta 4

4. *Explica el significado de que el número L sea el límite de f(x) cuando x tiende a un número fijo a.*

La pregunta cuatro no la contestaron D1 y D2, mientras que D3, D4, D5, D6 y D7 enuncian en texto descriptivo el significado que se les solicitó, en sus explicaciones utilizan límites laterales y acercarse a un valor, sin quedar claro que significa "acercarse a".



Respuesta de D8

En la respuesta de D8 se observa que enuncia su explicación en dos sistemas de representación: texto descriptivo y una gráfica, lo que indica que el docente identifica estas representaciones, además realiza conversión coherente entre ellas. Su noción del límite es numérica ya que utiliza expresiones como: "muy próximos" o "muy cercanos a" sin quedar completamente claro que tan próximos o cercanos; su conceptualización está ligada al cálculo numérico.

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$
Si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque si $|f(x) - \varepsilon| < \delta$
entonces $|x - \delta| < \varepsilon$. Es decir si L tiende a $f(x)$
Cuando x tiende a a, entonces L es limite de f.

Respuesta de D9

La respuesta de D9 indica que, el docente identifica simbólicamente el límite de una función, y que trató de recordar la definición formal del límite, al enunciar textualmente todos sus elementos: épsilon, delta, la función $f(x)$, el valor a al que tiende x y el valor L al que tiende $f\ x$, sin embargo no expresa correctamente las relaciones entre estos elementos.

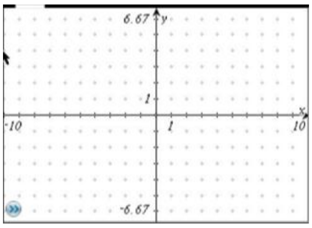
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ que cuando se aprox. por la izq. se llega a L
y cuando se aprox. por la la Der. se llega a L

Respuesta de D10

Se observa en la respuesta de D10, que él recurre a las representaciones: simbólica y texto descriptivo para expresar el concepto de límite. En el texto descriptivo no utiliza la idea de límites laterales adecuadamente; D10 identifica la representación simbólica del límite y al utilizar frases como "se aproxima" y "se llega" su noción de límite es numérica, ligada al cálculo numérico.

Pregunta 5

5. *Bosqueja la gráfica de la función* $f\ x = \frac{x^2-9}{x+3}$
a) *Determina el límite de f(x) cuando* $x \to -3^+$
b) *Determina el límite de f(x) cuando* $x \to -3^-$
c) *Determina el límite de f(x) cuando* $x \to -3$

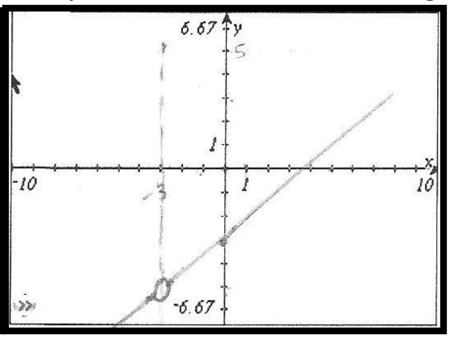


En esta pregunta se observó que para bosquejar la gráfica seis docentes primero resuelven analíticamente, analizan la función tomando en cuenta los valores del dominio para los que está definida la función, identifican la función simplificada y realizan correctamente la gráfica.

$\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3$

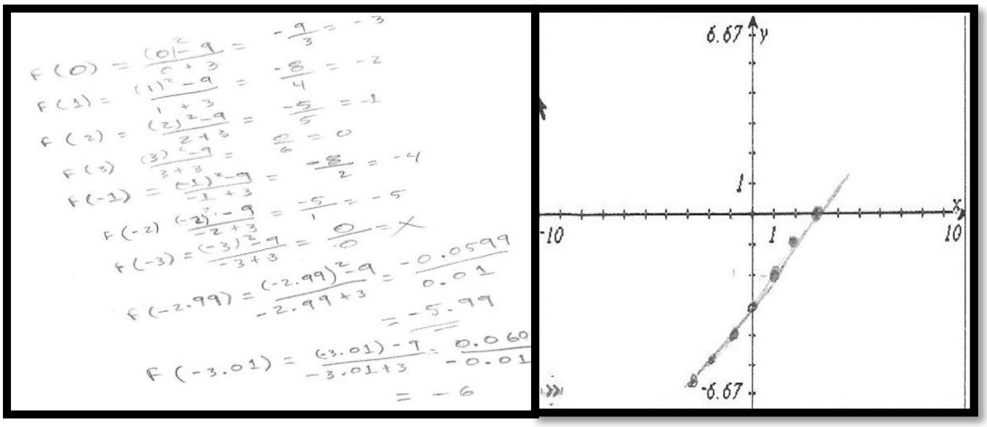
$y = x-3$

$n = -3$
$m = x$
linea recta con una discontinuidad en $x = -3$



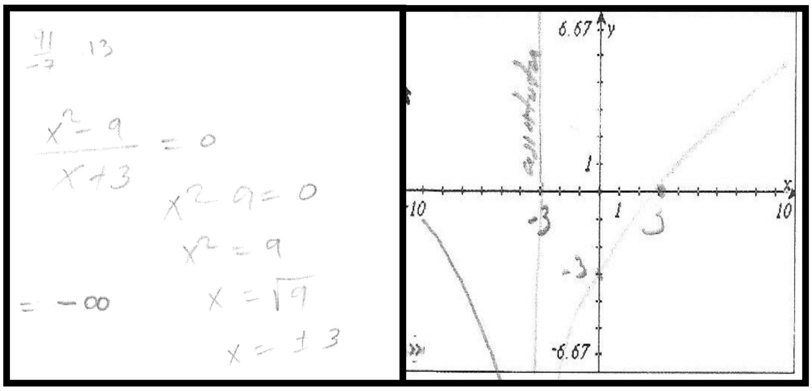
Bosquejo de D7

El tipo de solución que se observa en la respuesta de D7 indica que el docente realiza las tres funciones cognitivas: identifica en representación simbólica, le da tratamiento en el mismo sistema, y convierte coherentemente a representación geométrica. Esto no se observó en las soluciones proporcionadas por dos docentes, quienes realizaron todas las operaciones algorítmicas convirtiendo a representación numérica y no logran convertir coherentemente a representación geométrica pues elaboran la gráfica sin discontinuidad, como se muestra a continuación:



Bosquejo de D3

En el bosquejo realizado por D3, se observa una aprehensión local por punto. Por su parte D10 le dio tratamiento en la representación simbólica, cometió errores en dicho tratamiento y esto provocó que esbozara incorrectamente la gráfica de la función, ya que realizó una asíntota como se muestra enseguida:

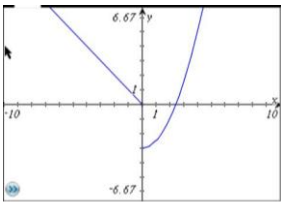


Bosquejo de D10

En la pregunta 5, cinco docentes resolvieron correctamente los límites. Esto es, convirtieron coherentemente del registro analítico al geométrico; los otros cinco docentes no lograron esta conversión ya que resolvieron incorrectamente los límites, pues concluyeron que no existían o que eran infinitos.

Pregunta 6

6. *Sea la función f(x) definida por la gráfica:*



a. *Determina el límite de f(x) para* $x \to 0^+$
b. *Determina el límite de f(x) para* $x \to 0^-$
c. *Determina el límite de f(x) para* $x \to 0$

Esta pregunta no la respondieron D1 y D2, los ocho docentes restantes la resolvieron correctamente, convirtieron de representación gráfica a numérica o simbólica, y concluyeron que el límite en cero no existe, pues los límites laterales no son iguales. Los docentes en sus respuestas utilizaron representación en texto descriptivo, numérica y simbólica.

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -3$ b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe por definición de límite.

(Los límites laterales no son iguales).

Respuesta de D7

La importancia de las preguntas 5 y 6 radica como lo señalan Pons, Valls y Llinares (2012), en la comprensión de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango es un elemento importante en el proceso de construcción del significado de límite de una función en un punto.

CONCLUSIONES

En la conceptualización de los docentes bachillerato encontramos que ocho de los docentes poseen una noción infinitesimal del límite y los otros dos docentes una noción numérica, sin embargo la noción del límite de la totalidad de los docentes está fuertemente anclada en procedimientos algorítmicos que conducen al cálculo numérico, consideran que el límite de una función en un punto es el valor de la función en el punto. Por otra parte identifican los cuatro registros de representación del límite: lenguaje natural, geométrico, aritmético y algebraico, logran transformaciones internas en cada unos de los registros, sin embargo se les dificultan las transformaciones externas entre distintos registros.

Conceptualización Cerrada	Se posee una noción infinitesimal del límite, estrechamente ligada al cálculo numérico. Se identifican las representaciones en: Texto Descriptivo, Numérica, Geométrica y Simbólica; expresa el límite en un registro utilizando algún sistema semiótico. Admite tratamiento en el sistema de representación identificado. Utiliza monoregistro, por lo que no se logra comprensión del concepto, se queda en la intuición.
Conceptualización Transitiva	Se posee una noción numérica del límite, expresiones como "tan cerca como", "tan pequeño como se quiera", "tan próximo a"; carecen de sentido, proporciona una definición muy subjetiva. Se identifican las representaciones en: Texto Descriptivo, Numérica, Geométrica y Simbólica; expresa el límite en un registro utilizando algún sistema semiótico. Admite tratamiento en el sistema de representación identificado. Convierte a otro sistema de representación sin lograr regresar al de origen. Utiliza biregistro, logra cierta comprensión del concepto.
Conceptualización Reversible	Se posee una noción métrico-analítica del límite, utiliza el rigor y formalismo matemático. Se identifican las representaciones en: Texto Descriptivo, Numérica, Geométrica y Simbólica; expresa el límite en un registro utilizando algún sistema semiótico. Admite tratamiento en el sistema de representación identificado. Convierte coherentemente entre sistemas de representación, logra transitar entre todas las representaciones del límite. Utiliza multiregistro, se logra comprensión del concepto.

Figura 3. Categorías generadas con los sistemas de representación semiótica

En la estructura conceptual del límite se consideraron las creencias epistemológicas, las representaciones, los registros de representación, los sistemas semióticos, las funciones cognitivas y el conocimiento procedimental. El análisis de las soluciones de los docentes nos permitió caracterizar la conceptualización del límite de los docentes a través del sistema de categorías que se muestra en la figura 3.

Respecto a las categorías construidas para la conceptualización podemos decir que, la conceptualización de ocho de los docentes se caracteriza como conceptualización cerrada, y los otros dos (D6 y D9) como conceptualización transitiva; es importante señalar que no encontramos conceptualización reversible, conjeturamos que será difícil encontrar docentes que cumplan con esta caracterización.

Referencias

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. *El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Revista UNO*, *30*, 67-82.

Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9*(2), 189-210.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. México: Thompson Editores.

Claros, F., Sánchez, M., y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.197-209). Santander: SEIEM.

Contreras, A., García, M., y Sánchez, C. (2005). Significados institucionales y conflictos semióticos del límite de una función en la educación matemática. *Revista EMA*, *10*(2), 413-439.

Courant, R., y Robbins H. (2002*). ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. *Prefacio y avances recientes*. Ian Stewart. México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (1998*). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. *Investigaciones en matemática educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999a). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cuernavaca, Morelos.

Duval, R. (1999b). *Los Problemas Fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo*. (Traducción: Myriam Vega Restrepo, 2001. Edición e Impresión: Merlín I.D. Cali, Colombia).

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 – 237). Jaén: SEIEM.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphor for limit concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(4), 396-426.

Páez, M. (2004). *Procesos de construcción del concepto límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011). Coordination of Approximations in Secondary School Students' Understanding of Limit Concept. *Proceedings of the 35nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4(3), 393 – 400.

Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435 – 445). Jaén: SEIEM.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathematiques*, *6*(1), 56-68.

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.