UN ESTUDIO DESCRIPTIVO SOBRE LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN QUE EMPLEAN ALGUNOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO, USANDO GEOGEBRA: CASO ÁREA BAJO LA CURVA.

MAGDA PILAR ANGEL RUIZ
IRIS FEO MAYOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2012

UN ESTUDIO DESCRIPTIVO SOBRE LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN QUE EMPLEAN ALGUNOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO, USANDO GEOGEBRA: CASO ÁREA BAJO LA CURVA.

MAGDA PILAR ANGEL RUIZ
2012182002
IRIS FEO MAYOR
2012182017

Trabajo de Grado como requisito parcial para optar al título de Especialista en Educación Matemática.

Asesor
Edwin Carranza
Magíster en Educación y Tecnología

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2012

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

RESUMEN ANALÍTICO - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de especialización como requisito para optar al título de Especialista en Educación Matemática.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Titulo del documento	Un estudio descriptivo sobre las estratégias de solución que emplean algunos estudiantes de grado décimo, usando GeoGebra: caso área bajo la curva.
Autor(es)	Ángel Ruiz, Magda Pilar; Feo Mayor, Iris
Director	Edwin Carranza
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2012. 83 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Área bajo la curva, estrategia.

2. Descripción

Este trabajo de grado va dirigido a docentes de matemáticas interesados en el concepto de área, en especial en los aspectos relacionados con las estrategias de solución que emplean algunos estudiantes al abordar tareas relacionadas con áreas de regiones curvilíneas. Se encuentran aspectos generales en torno a la evolución del concepto de área a través de la historia de las matemáticas y algunas aproximaciones a dicho concepto en el ámbito escolar según planteamientos principalmente de Freudenthal; aproximaciones que fueron tenidas en cuenta en las tres actividades que constituyen el instrumento sobre el cual se identifican, describen e interpretar las estrategias puestas en juego por estudiantes entre 15 y 17 años de edad.

3. Fuentes
Para el desarrollo de este trabajo se consultaron 12 fuentes, que abarcan artículos de revistas, libros, tesis de pregrado y maestría, además fuentes de internet.
Angulo, M (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de integral como el área bajo la curva en grado once de educación media. Tesis de pregrado. Universidad Pedagógica Nacional. Cañadas, S., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, Generalización y Estrategias Inductivas de Estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el Problema de las Baldosas. *2(3), Revista PNA, 45(6),*137-151 Olave, M. (2005). Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo la curva. Tesis maestría. Instituto Politécnico Nacional. Olmo, M., Moreno, M. & Gil, F. (1993*). Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con formulas? Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis. Madrid. Ponce, C. (2009). Área de figuras planas. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas, 45(6)*. Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria.* En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria. 15-38. Madrid: ice - Horsori. Rizo. C., y Campistrous. L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2(2-3), 31-45.

Sierra. M., Modesto S., y Codes M. (2005). Entorno computacional y Educación Matemática: una revisión del estado actual. Grupo de investigación: Didáctica del análisis.

Turégano, P. (1994). Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de área. Ensayos, 9, 237-257.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. Enseñanza de las Ciencias, 116 (2), 233-249.

Turegano, P. (2007). Imágenes del concepto de integral definida. Ensayos, 22, 17-57.

4. Contenidos

En este trabajo presentamos un estudio relacionado con la identificación y descripción de las estrategias que emplean algunos estudiantes de grado décimo del Colegio Colsubsidio Torquigua y del Instituto Pedagógico Nacional, al desarrollar tareas relacionadas con área bajo la curva. Está organizado en cuatro grandes títulos: marco teórico, metodología, descripción y análisis de resultados y, conclusiones.

En el primero describimos los fundamentos teóricos y didácticos base para el desarrollo y sustento de nuestro estudio; está compuesto por cinco secciones, en la primera se encuentra una revisión histórico matemática de la evolución del concepto de área. El siguiente apartado, hace alusión a la importancia de las TICs en la enseñanza de las matemáticas; en tanto la tercera y cuarta sección contemplan las aproximaciones al concepto de área planteadas por Freudenthal, así mismo algunos obstáculos y dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del concepto de área. En la última sección se mencionan la postura frente al constructo de estrategia en las matemáticas, que adoptaremos en nuestro estudio.

Por otro lado, el título dos presenta la metodología y el instrumento de recolección de información empleado en nuestro estudio, además de éste se desprenden cuatro apartados en los que se explicitan y describen las fases de indagación, diseño del instrumento, aplicación, interpretación y descripción de los resultados; base para el desarrollo del presente trabajo. En cuanto a la descripción y análisis de los resultados (tercer título), como su nombre lo indica contiene los análisis y resultados obtenidos en relación a las estrategias puestas en juego por los estudiantes que hacen parte de nuestra muestra, empleando los referentes teóricos y metodológicos obtenidos en los apartados anteriores.

Finalmente en el último título, se recoge, sintetiza y sistematiza de manera general, las conclusiones que se generan a partir de los resultados obtenidos y descritos en la etapa del análisis; estableciendo así las estrategias que privilegia nuestra muestra objeto de estudio al desarrollar tareas que involucran el área bajo la curva.

5. Metodología
Dado que el problema de investigación consiste en identificar y describir las estrategias que

los estudiantes emplean en la solución de algunas tareas centradas en el área bajo la curva, el presente estudio se enmarca en un enfoque metodológico cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo, ya que éste permite realizar interpretaciones e inferencias de las estrategias que se evidencian en la población objeto de este estudio, a través de una clasificación fundamentada en el marco teórico. En consecuencia el estudio se basa en la elaboración de una propuesta de actividades en torno al área bajo la curva, que se desarrolla mediante la aplicación de tres applets a un grupo de estudiantes de decimo grado de dos instituciones, una de ellas del sector distrital y la otra de carácter nacional. Los resultados obtenidos se interpretan mediante la descripción de las respuestas dadas por los estudiantes a través de su trabajo con los tres applets.

Para llevar a cabo lo anterior, la metodología del presente estudio se fundamenta en el desarrollo de las fases: (i) Indagación, (ii) diseño de la propuesta (iii) aplicación de la propuesta, (iv) interpretación y descripción de los resultados.

6. Conclusiones

A través de nuestro estudio podemos considerar que varios de los estudiantes que hacen parte de la muestra, aluden de manera implícita a procesos infinitos como algo muy pequeño pero distinto de cero. Así mismo traen a colación métodos que comparan figuras curvilíneas y rectilíneas, además aproximan el área de una región curva a partir de polígonos conocidos; los cuales se relacionan con los métodos griegos y babilónicos que dieron origen y permitieron la evolución del concepto de área en la historia. Lo anterior sugiere reflexionar ante los procedimientos clásicos empleados en geometría para determinar áreas; conduce a pensar que si es posible en la enseñanza recurrir a procesos infinitos de manera intuitiva, a no limitar a los estudiantes a determinar el área de polígonos regulares, sino promover actividades que conduzcan primero al estudiante a comprender el área como cualidad de un objeto destacando su carácter bidimensional, posteriormente introducir situaciones que les permitan comparar objetos sin necesidad de medirlos, plantear tareas de pavimentación que posibiliten el paso natural de estructura aditiva a multiplicativa, para finalmente incitar al uso comprensivo de la fórmula.

En el transcurso de nuestro estudio identificamos aspectos que nos permitieron establecer algunas de las conjeturas sobre las ideas que tienen los estudiantes en cuanto a la noción de área; hay cuatro tendencias generales las cuales se relacionan con: la medida de una superficie comprendida o limitada por un perímetro; la extensión que ocupa una superficie, el área ligada a una fórmula y por último la confusión que persiste en varios estudiantes entre área y perímetro. Como es de notar las dos primeras se relacionan como ideas que permitieron abordar el concepto a lo largo de la historia; la tercera aunque esperábamos tuviera mayor acogida consideramos que un grupo de nuestros estudiantes objeto de estudio no puede desprenderse de la fórmula para realizar tareas que relacionen el área de manera directa o indirecta; la ultima es una de las más importantes, a nuestro modo de ver, dado que hace referencia a que los estudiantes aún mantienen grandes dificultades en cuanto a diferenciar el área del perímetro, lo cual puede estar estrechamente relacionado con los procesos tan abruptos en cuanto a la enseñanza del área dado que en la mayoría de las aulas suelen iniciar con los procesos de medida sin haber dado la oportunidad al estudiante de explorar y trabajar esta noción como cualidad de un objeto destacando además su carácter bidimensional.

Elaborado por:	Ángel Ruiz, Magda Pilar; Feo Mayor, Iris
Revisado por:	Carranza, Edwin

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Entender el mundo como una realidad matemática ha sido una tarea del ser humano a lo largo de la historia, en ese proceso, los conocimientos matemáticos han aportado elementos trascendentales en el desarrollo de la humanidad, de ahí la importancia de procurar procesos de enseñanza acordes a las necesidades de los tiempos y de los contextos.

La sociedad de la comunicación y de la información en el que nos encontramos en la actualidad está mediado por el uso de las nuevas tecnologías las cuales han permitido romper fronteras y generar nuevos contextos socio-gráficos y culturales en los que se determina un tipo de persona inmerso en las nuevas tendencias tecnológicas más aún los jóvenes de la actualidad. En la enseñanza de las matemáticas se ha ido incorporando el uso de las Tics como herramientas que facilitan el proceso de aprendizaje de su estructura disciplinar. Por eso consideramos de suma importancia como docentes, involucrarnos de manera protagónica en el desarrollo de estrategias innovadoras que generen transformaciones en los procesos formativos de los estudiantes.

En este trabajo planteamos una propuesta en la que con la ayuda de un Software (Geogebra) podamos analizar el tipo de estrategias que emplean estudiantes de grado décimo para resolver problemas que involucren el área bajo la curva. Sabemos por el estudio Bibliográfico que hacemos en el trabajo, que el concepto de área no es nuevo, por el contrario, sus orígenes se encuentran en los mismos orígenes de la matemática en culturas milenarias y que a lo largo de la historia, diferentes matemáticos han ido enriqueciendo el concepto, su proceso y las diferentes aplicaciones que tiene en la realidad.

En la práctica con los estudiantes pudimos ver las dificultades de comprensión sobre el concepto del área bajo la curva, además, las dificultades no son solo de índole conceptual, sino que están relacionadas con la falta de habilidad para relacionar el concepto, con un gráfico y con la realidad misma desligando el concepto de su aplicabilidad.

Al implementar y evaluar la propuesta de enseñanza del área bajo la curva desde el uso de el software se logró en los estudiantes una mayor comprensión de este concepto, al permitirles en la interacción con la herramienta buscar las estrategias de solución, se logró mejorar los niveles de atención, interés y creatividad permitiendo la interconexión entre el desarrollo conceptual y su aplicabilidad en diferentes contextos.

Lograr un aprendizaje significativo en los jóvenes en la enseñanza de la matemática es un reto que implica la correlación en el proceso de los saberes disciplinares con los avances de la tecnología y las necesidades de los nuevos contextos. Para ello se requiere de la creatividad y la innovación por pare de los docentes en la implementación de nuevas prácticas escolares que permita que el estudiante se involucre de manera protagónica en la búsqueda de las soluciones a los problemas que se le plantean.

La propuesta de este trabajo consiste precisamente en poner al estudiante en una situación en la que puede interactuar con la herramienta generada en el software de Geogebra para que él mismo sea quien proponga las estrategias de solución ante el problema de comprender el área bajo la curva lo cual debe permitir primero un mayor grado de motivación en el estudiante y desde luego una mayor comprensión de área bajo la curva no solamente en cuanto lo que significa el concepto matemático sino también en su aplicabilidad.

El trabajo se enmarca dentro de un enfoque metodológico cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo, el cual nos permite realizar interpretaciones e inferencias de las estrategias implementadas por los estudiantes en el desarrollo práctico de la propuesta. Para el desarrollo de la propuesta se propusieron tres applets diseñados para la explorar situaciones relacionadas con el concepto de área bajo la curva, la actividad se desarrolló con estudiantes de grado décimo de dos colegios. Los resultados obtenidos se interpretan mediante la descripción de las respuestas dadas por los estudiantes a través de su trabajo con los tres applets.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué tipo de estrategias generan los estudiantes al resolver problemas de área bajo la curva, apoyados con el software GeoGebra?

OBJETIVOS

General

Describir las estrategias empleadas por algunos estudiantes de grado décimo, al resolver problemas que involucren el área bajo la curva y el uso del software GeoGebra.

Específicos

1. Realizar el estudio bibliográfico que permita consolidar elementos teóricos para el diseño de tres actividades centradas en la noción del área bajo la curva.

2. Diseñar e implementar tres actividades enmarcadas en el área bajo la curva, que incorporen el uso del software GeoGebra.

3. Analizar y describir las estrategias empleadas por los estudiantes en la solución de las tres actividades planteadas.

JUSTIFICACIÓN

Uno de los retos en la enseñanza de las matemáticas es el de lograr en los estudiantes un aprendizaje significativo, es decir, que los procesos conceptuales que se desarrollan en el aula sean aplicables en los diferentes contextos del estudiante. Para ello es necesario que en las prácticas escolares, los docentes sean innovadores en las estrategias que implementan, proponer por ejemplo situaciones virtuales en las que el estudiante sea el que proponga las estrategias de solución a los problemas planteados; por eso, las practicas educativas en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares deben incluir el diseño e implementación de situaciones, actividades y herramientas que permitan la interacción del sujeto con las situaciones generando una mayor comprensión de los conceptos.

En este trabajo nos proponemos precisamente, mediante el uso de Geogebra, poner al estudiante en un contexto en el que se le plantee una situación problema desde el concepto de área bajo la curva, con el fin de analizar las estrategias de solución que proponen y el acercamiento y apropiación que se logra del concepto mediante este tipo de propuesta.

La manera como se ha abordado el concepto de área ha generado dos posibles caminos para aproximarse a la noción de superficie, el primero a través de la cuadratura y el segundo tiene que ver con la cuadricula, aproximaciones que pueden trabajarse de diferentes modos según Freudenthal (Ponce, 2009); sin embargo una de las maneras más usuales en la enseñanza del concepto de área ha sido la representación algebraica a partir de la utilización de una formula y una unidad patrón definida; hecho que ha generado que los estudiantes no tengan la oportunidad de proponer procedimientos y unidades patrón para obtener la medida de una superficie de tal manera que a través de su exploración adquieran el verdadero significado del concepto de área.

Existen algunos vacíos en el proceso de aprensión del concepto, dichos vacíos se centran en que el estudiante no logra darle una aplicación en diferentes contextos así como la dificultad en la lectura de gráficos, la correlación en el manejo del plano y la realidad de los espacios y sus dimensiones.

En la especialización sobre enseñanza del cálculo consideramos de suma importancia detenernos a pensar acerca de cómo enseñar el significado de área bajo la curva y diseñar diferentes estrategias apoyados desde las TICs para una mejor comprensión del concepto. Sabemos que este análisis no es nuevo, se remonta a más de 200 años ac, cuando los griegos intentaban resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron método de exhausión, las ideas de ese método son simples y fue transformándose en lo que hoy se conoce como calculo integral. Sin embargo, nosotros enfocamos el análisis en la respuesta y en las estrategias que propongan los estudiantes de grado décimo al interactuar con las herramientas previamente diseñadas en Geogebra las cuales les han de permitir una mejor comprensión del concepto.

Nuestro interés nos llevó a diseñar, plantear y evaluar una propuesta de enseñanza que integre en los procesos de enseñanza de la matemática, el uso de las Tics, de tal manera que se llegue a generar en los estudiantes mayor comprensión y aplicabilidad del concepto de área bajo la curva, a través de un trabajo que permita la exploración, elaboración de conjeturas y validación por parte de algunos estudiantes de grado décimo.

Cuando abordamos las dificultades de comprensión sobre el concepto del área bajo la curva en los estudiantes de grado décimo, nos dimos cuenta que no son solamente de carácter conceptual, responden a la escasa habilidad para establecer conexiones entre una representación gráfica y el concepto físico asociado, esto quiere decir, que dejamos el concepto en lo etéreo, en lo abstracto lo que dificulta la aplicabilidad en los contextos cotidianos del estudiante. Además, para que el estudiante cuente completamente con la habilidad de leer e interpretar gráficas y relacionarlas con las dimensiones y espacios reales de acuerdo al área que se refiera; debe ser capaz de partir bidireccionalmente entre la representación y la forma de medir un área en cuestión para generar la información requerida, recurriendo a los conceptos matemáticos necesarios a partir del desarrollo del pensamiento geométrico del sujeto.

Por lo anterior y a partir de los planteamientos de Díaz (2001, citada por González, 2006) frente a la "...importancia que tienen los materiales de estudio en procesos de aprendizaje, no solo desde la vertiente cognitiva, sino también desde la visión sociocultural y de los procesos de medición en el aprendizaje..." (p. 15), consideramos pertinente diseñar una propuesta actividades sobre área bajo la curva que propicie a través de la exploración con herramientas tecnológicas una mayor comprensión de este concepto, de tal manera que los estudiantes propongan métodos y estrategias que les permitan calcular el área de una región, de acurdo a los aplicativos propuestos.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. MARCO HISTÓRICO MATEMÁTICO

En este capítulo se presenta el desarrollo histórico matemático del concepto de área bajo la curva. Se pretende por tanto ubicar en un contexto histórico el concepto para poder responder preguntas tales como: ¿Cuándo nace este concepto en la historia de la matemática? ¿Qué estrategias se han generado en los diferentes momentos de la historia para solucionar áreas bajo curva? ¿En qué ha aportado el descubrimiento y desarrollo del concepto a la historia de la matemática?; para ello nos apoyaremos en el texto de Ponce (2009) *Área de figuras planas*, una tesis de Especialización de la UPN de Angulo (2007) titulado *Propuesta de enseñanza del concepto de integral como el área bajo la curva*, además del libro *Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral I De la matemática griega a los antecedentes del cálculo*.

El concepto de área lo ubicamos específicamente en el campo de la geometría, originalmente se toma por la necesidad misma de delimitar un espacio físico concreto, en especial lo hacían lo agricultores de culturas antiguas, para determinar de alguna manera las zonas cultivables y la cantidad de semilla que necesitaban para cubrir un terreno. Podemos entender el área como una superficie comprendida dentro de unos límites o perímetro. Para los agricultores no era suficiente comprender la extensión de tierra que podía ser cultivada sino que también requerían medir dicha extensión por eso se hace necesario el uso de unidades de medida para calcular el área del terreno y determinar, por ejemplo la distancia entre un cultivo a otro. El otro asunto que surge es que geométricamente no todos los terrenos tienen la misma forma, es decir, no todos son cuadrados, en la realidad encontramos terrenos triangulares, circulares, elípticos, etc; por lo que se requieren distintas fórmulas para calcular el área de acuerdo a la figura que se tenga.

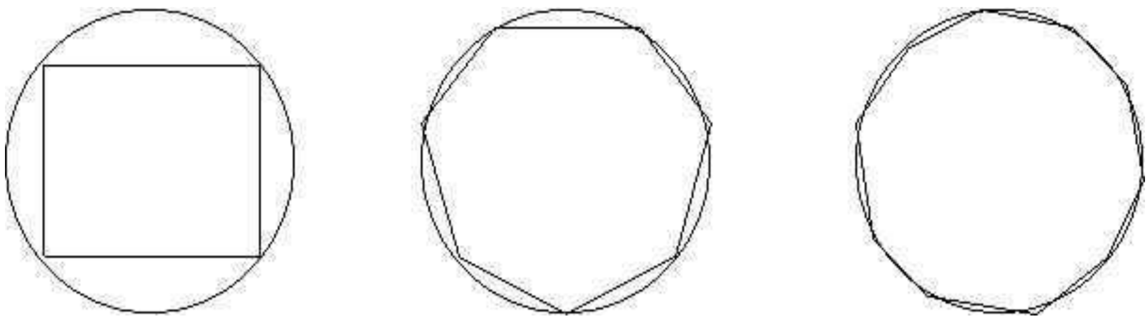
En 1650 Ac, en el papiro de Rhind se encuentra indicios de los orígenes de la teoría de la congruencia mientras que en 1887 Peano- Jordan da las primeras definiciones formales de área retomando las ideas de Eudoxo y su método de exhausión. Los griegos ya habían aplicado métodos exhaustivos para el cálculo de áreas. A pesar de que lo aplicaban para áreas relativamente sencillas, tenían que utilizar mucho ingenio, porque al método le faltaba generalidad, como todo proceso conceptual que nace en la sencillez, buscando respuestas a problemas básicos de la cotidianidad pero que posteriormente se convierten en procesos fundamentales dentro de una disciplina, este método se ha convertido en uno de los más importantes para calcular áreas (Angulo, 2007).

El concepto de área debe ser comprendido en relación directa con diferentes contextos o actividades cotidianas como el mismo su mismo origen no lo demuestra desde la antigüedad. Es así que Ponce (2009) manifiesta que las matemáticas babilónicas y egipcias estaban estrechamente relacionadas con situaciones reales, por ejemplo en Babilonia se encontró un conjunto de situaciones que involucraban el cálculo de áreas. Si bien su origen data del inicio de las matemáticas, su evolución y consolidación como concepto matemático preciso, es más reciente y seguramente seguirá evolucionando de acuerdo a las necesidades de la matemática. Lo que no podemos permitir es que se convierta en un concepto de manejo exclusivo de los matemáticos sino que, desde el estudiante de bachillerato lo pueda aprender e integrar en la comprensión de los múltiples contextos que lo rodean.

Cuando nos acercamos a diferentes textos sobre la forma como se solucionaba problemas sobre área encontramos dos maneras de comprenderlo, una es la que implica calcular la extensión de un área determinada y que ya desde la antigüedad era necesario hacerlo para establecer el territorio específico para una tarea (sembrar, cazar, recorrer en búsqueda de agua, delimitar un territorio de una tribu) en este sentido, área y territorio son homologables en significación. El otro modo de comprender el concepto es a partir de la idea de recubrimiento, lo cual también surge a partir de las necesidades básicas ancestrales, por ejemplo la misma idea del hombre forjarse una vivienda implicaba el recubrimiento de un área, en la actualidad, cuando necesitamos pintar una pared, alfombrar un piso o ponerle baldosas lo que hacemos es recubrir un área con algún tipo de material.

Estas dos maneras de abordar el concepto han sido desarrolladas a lo largo de la historia y perfeccionadas desde los elementos de la matemática logrando cada día mayor aplicabilidad no solamente en las ciencias matemáticas sino también en la física, en las ingenierías y en la tecnología.

Una de las causas que originó el desarrollo del Cálculo fue el trabajo con áreas de regiones planas; este se inicia con los babilónicos y los egipcios tratando de solucionar el problema de almacenamiento de granos en la construcción de habitáculos para su conservación. Por su parte los antiguos griegos, desarrollaron diversos métodos para el cálculo de dichas áreas, sobresaliendo entre éstos el método de exhausión de Arquímedes de Siracusa, quién aproximaba el área que deseaba calcular mediante áreas de regiones conocidas, el cuál es el llamado método de Exhausión.



El método consistía en sucesivas aproximaciones (esencialmente es un paso al límite) en las que el área que se quiere calcular se encierra entre polígonos inscritos y circunscritos de n lados. A medida que aumenta n el área que se quiere calcular se va delimitando cada vez más. Arquímedes perfeccionó y afinó el método consiguiendo calcular áreas de elipses (obtuvo la fórmula para medir el área de esta cónica), sectores parabólicos y sectores de Espiral. En el ejemplo de arriba puedes ver una aproximación para obtener el área de un círculo. Por supuesto faltan los polígonos circunscritos, puesto que el área final está comprendida entre el área del polígono inscrito y la del polígono circunscrito.

Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhausión, fuera directo, además sería mucho mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos. Así el camino que siguieron fue el que se deriva de una concepción intuitiva inmediata de las magnitudes geométricas, se imaginaron un área formada, por ejemplo, por un número infinito de líneas paralelas; lo que generó la idea de descomponer los cuerpos en capas paralelas y la cual ha sido el hilo conductor de procedimientos desarrollados en los siglos posteriores para perfeccionar el cálculo de áreas en otros cuerpos complejos.

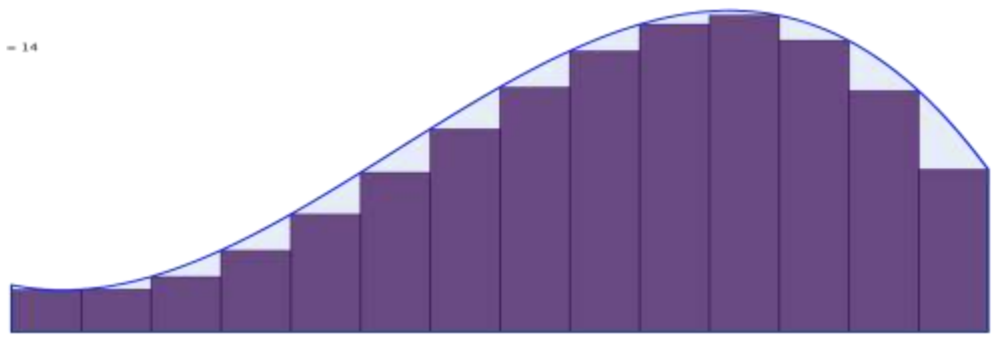
Por otro lado, la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas de Eudoxo le permitiría desde la multiplicación de caras o lados indefinidamente con las figuras rectilíneas aproximarse cada vez más a la curvilínea. Posteriormente, ya en el siglo XX, Lebesgue, precisando las indicaciones de Borel sobre la definición de Peano Jordan presenta su teoría de la medida, la cual ha servido de base para entender la teoría de la integral. Importante en este apartado ver cómo a pesar de los avances y precisiones del concepto, las bases de la antigüedad aún son útiles incluso como lo plantea Cauchy frente a los métodos intuitivos que fueron los que permitieron de alguna manera el origen del concepto.

En el proceso de hallar o medir un área plana, la intuición facilita de alguna manera el proceso porque una superficie plana de lados rectos puede triangularse y se puede calcular su área como suma de las áreas de dichos triángulos; la situación se complica un poco cuando se trata de hallar el área de un circulo o de una curva. Para ello contamos con algunos métodos como el exhaustivo de Eudoxo, con este sistema se consiguió obtener una aproximación para calcular el área de un círculo. Arquímedes, siguiendo este método buscó resolver problemas similares como el cálculo aproximado del número π, de igual manera, este matemático proporcionó demostraciones del área de la esfera, del segmento esférico, área lateral del cono, del cilindro. Importante tener en cuenta aquí como bien lo expone Angulo (2007) que son precisamente los trabajos de Arquímedes los que permitieron retomar el interés en Europa por procesos geométricos de longitud y área.

Otro método es el de agotamiento que consiste en inscribir y circunscribir polígonos en la figura geométrica, aumentar el número de lados de dichos polígonos y hallar el área buscada.

Por otro lado el modo de calcular el área de un polígono como la suma de las áreas de los triángulos, es un método que fue propuesto por primera vez por el sabio griego Antifón hacia el año 430 a. C. En 1634 Roberval, utilizó esencialmente el método de los indivisibles para obtener el área encerrada bajo un arco de cicloide, un problema sobre el que Mersenne había llamado su atención en 1629. Denominó a su método el "método de las infinidades", aunque utilizó como título de su trabajo el de Traité des Indivisibles. En 1658 Pascal consideró algunos problemas sobre la cicloide, calculó el área de cualquier segmento de la curva cortada por una recta paralela a la base, el centroide del segmento y los volúmenes de los sólidos generados por esos segmentos al girar alrededor de sus bases o de una recta vertical. Angulo (2007)

Finalmente matemáticos como Barrow, Riemann, Lebesgue, etc., hicieron grandes aportaciones a la medida de áreas desarrollando así la teoría de la integración. A continuación nos centraremos un poco en las sumas de Riemann. Este tipo de integral se define como la suma finita de áreas de rectángulos, los cuales se encuentran con base a una partición de un intervalo [a,b] donde se quiere calcular la integral, como altura de los rectángulos hay varias opciones, el máximo o mínimo de la función en el sub intervalo o cogiendo el valor de la función en los extremos del mismo.



Partición de un intervalo Dada una selección de puntos x_0, x_1, . . . , x_n-1, x_n de un intervalo [a, b] en donde

$$a < x_1 < . . . < x_{n-1} < x_n = b$$

y en donde los x_i con $0 < 1 < n$ no son necesariamente equidistantes, se denomina partición del intervalo [a, b] al conjunto de sub intervalos del intervalo dado por

La longitud del sub intervalo más grande de la partición Δ se llama norma de la partición y se denota por $\|\Delta\|$. Ahora, si todos los puntos x_i son equidistantes, los sub intervalos que determinan son de la misma longitud, se dice que la partición del intervalo [a, b] es regular y su norma se denota por

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Para una partición regular, su norma está relacionada con el número de subintervalos de

[a, b] de esta manera,

$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \leq n$$

luego, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito si la norma de ésta tiende a cero. Esto es,

$$\|\Delta\| \to 0$$

Sumas de Riemann Para toda función real f definida en un intervalo cerrado [a, b] y una partición P de dicho intervalo, una suma de Riemann es una expresión R_P de la forma

$$R_P = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$$

en donde w_k pertenece a $[x_{k-1}, x_k]$ y k = 1, 2, . . . , n y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

En general, las sumas de Riemann cuando f es positiva permiten ser interpretadas geométricamente en términos de áreas de polígonos.

La longitud de cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se convierte en la base de un rectángulo cuya altura es $f(w_k)$ para algún w_k en el intervalo. Si $f(w_k)$ es positivo el rectángulo se encuentra sobre el eje x y el producto $f(w_k)\Delta x_k$ es el área del rectángulo. Si $f(w_k)$ es negativo, se tiene que el rectángulo se encuentra abajo del eje x y, en este caso, el producto $f(w_k)\Delta x_k$ es el negativo del área del rectángulo. De esta manera, RP es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran sobre el eje x menos la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran bajo de este.

Donde n representa el número de subintervalos de una partición P de [a, b], la suma de Riemann R_p se escribe

$$R_P = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$$

Ahora, si se admite que el número de subintervalos de [a, b] tiende a infinito, entonces la norma de la partición Δ del intervalo tiende a cero, y así

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k} f(w_k)\Delta x_k = I$$

en donde I es un número real. Así, el anterior límite estima que si la norma de la partición P es lo suficientemente cercana a 0, entonces cualquier suma de Riemann para esta partición es cercana a I, lo cual se muestra en la siguiente sección.

Límite de una Suma de Riemann

Dada una función real f definida en un intervalo cerrado [a, b] e I un número real dado, entonces

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k} f(w_k)\Delta x_k = I$$

expresa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si P es una partición de [a, b] con $\|\Delta\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{k} f(w_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

Para cualquier elección de números w_k en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de Δ, y al número I se llama límite de las sumas de Riemann.

Claramente se nota que para todo $\delta > 0$ hay infinitas particiones P con $\|\Delta\| < \delta$, es más, para cada partición P hay infinitas posibilidades de elección para los números w_k en el intervalo $[w_{k-1}, w_k]$. Luego, hay un número infinito de sumas de Riemann diferentes asociadas a cada partición P del intervalo [a, b].

De esta manera, para una función f definida en el intervalo [a, b] las sumas de Riemann se pueden aproximar tanto como se desee tomando las normas $\|\Delta\|$ de todas las particiones Δ de [a, b] suficientemente pequeñas para todas las elecciones de los números w_k en cada sub intervalo $[x_{ki-1}, x_{ki}]$ con i = 1, 2, . . ., n. Basado en lo anterior, se presenta la definición de integral definida:

Si f es una función definida en el intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida de la función f denotada por $\int_a^b f(x)$ dx, se define como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$$

si este límite existe.

Sea P una partición regular del intervalo [a, b] y Δ_x la longitud de cada subintervalos de P, entonces se tiene que cada $\Delta_{ix} = \Delta_x$, y $\|\Delta\| = \Delta_x$. Al sustituir estas igualdades en la ecuación anterior se obtiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x$$

Además,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x\to 0} n = +\infty$$

De lo anterior, se tiene que:

$$\Delta x \to 0 \text{ es equivalente a } \qquad n \to \infty$$

También se tiene que si la integral definida existe, esta es el límite de todas las sumas de Riemann de f en [a, b].

La noción de área resulta una pieza fundamental en la enseñanza del cálculo, dado que está relacionada con la determinación de magnitudes físicas y geométricas, como una forma de obtener valores de ciertas superficies y se fundamenta en una particular utilización del concepto de integral definida. La explicación didáctica asociada a la presentación de la integral, normalmente se realiza a través de la consideración de que para una función positiva definida sobre un intervalo cerrado, la integral proporcionará el valor del "área bajo la curva". La medición de dicha área se obtiene subdividiendo en regiones planas más pequeñas y más claramente calculables. El procedimiento de medición consiste entonces en dividir la región en regiones más pequeñas, cuyas disposiciones geométricas permitan la utilización directa de fórmulas conocidas. El valor aproximado del área se obtiene a partir de la suma de las áreas de los rectángulos construidos. Para calcular el área de un rectángulo se utiliza la fórmula elemental "base por altura", por lo que basta contar con dichos números para conocer el valor del área.

De lo que hemos dicho hasta el momento podemos inferir que el proceso de medida ha acompañado al ser humano desde los mismo orígenes de su evolución de pensamiento y adaptación a los diferentes contextos, lo interesante es llevar al estudiante del siglo XXI a comprender la importancia del concepto y su relación con otros conceptos como el de límite o derivada y en el caso concreto de esta investigación, el problema del área bajo la curva. Partir en este caso de convencer al estudiante de la necesidad de aprender a medir un área determinada y a partir de ahí que se aprenda a ubicar y desplazar geométricamente o a manejar mejor los espacios que lo rodean, que aprenda a delimitar un área, a recubrirla para posteriormente enseñarle por ejemplo el concepto de límite, a hallar la pendiente de una tangente etc. En este sentido Ponce (2009) plantea que "…la medida de una magnitud es un proceso que se inicia con la constitución de la magnitud y se completa con la medida y la estimación de la misma".

Para ello necesitamos llevar a los estudiantes a que entiendan que cuando se trata de calcular áreas lo que estamos haciendo es cuantificar superficies y relacionarlas frente a variedad de magnitudes desde diferentes unidades de medida. El estudiante debe entonces aprender a ver el concepto interactuando en la realidad, se trata entonces de un ejercicio de estructuración del pensamiento del sujeto en la resolución de problemas cotidianos y no la memorización de conceptos y fórmulas desligadas de la realidad práctica.

1.2. INCLUSIÓN DE LAS TICS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

La pregunta de ¿Cómo utilizar las nuevas tecnologías para enseñar matemáticas?, se ha abordado ya en algunos trabajos con resultados interesantes. En este trabajo retomaremos aportes de autores que han escrito sobre este tema de tal manera que nos permita comprender desde perspectivas diferentes nuestra pretensión de abordar la enseñanza de un concepto matemático con la ayuda de lo que nos ofrece hoy las Tics.

Nos interesa de igual manera analizar la efectividad de la propuesta en cuanto la respuesta de los estudiantes frente a las estrategias de solución que propongan de acuerdo a cada una de las herramientas que les presentemos. En los trabajos que servirán de base para nuestro proyecto se encuentran respuestas parciales a la pregunta sobre la pertinencia del uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas dejando aún la pregunta abierta.

El análisis sobre el desarrollo de procesos matemáticos con ayuda de herramientas tecnológicas puede presentar diferentes variables las cuales han generado preguntas sobre si este tipo de ayudas fortalecen los procesos formativos. Hoy contamos con software informáticos que pueden facilitar el proceso de enseñanza y la solución de problemas matemáticos. Necesariamente estas nos exigen una transformación metodológica que implique avanzar en los niveles de conceptualización disciplinar.

Se hace necesario a la hora de proponer la vinculación de las Tics en los procesos de enseñanza de las matemáticas, tener en cuenta las conclusiones a las que han llegado autores en diferentes investigaciones sobre este tema, por ejemplo, como dice Sierra, Modesto y Codes (2005), que sin "una buena planificación, los efectos serán negativos" es decir, que las herramientas por si solas no generan los efectos de aprendizaje y por tanto debemos tener cuidado con asignarles un valor que no les corresponde, igual siguen siendo medios o recursos que nos facilitan el proceso de enseñanza y como tal los resultados dependerán del uso que el maestro les dé en la enseñanza, en otras palabras, las Tics "No son la panacea a los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas" y mucho menos la solución definitiva, no podemos desconocer las ventajas que ofrece pero tampoco podemos obviar los inconvenientes que pueden generar.

Otro tema a tener en cuenta en este asunto, es el de la formación de los docentes en el uso de las nuevas herramientas tecnológicas e informáticas, pareciese que existe un temor a abandonar las estrategias tradicionales de marcador y tablero para explicar los conceptos y problemas matemáticos. Si el docente no se capacita, y no se constituye en el abanderado en cuanto al manejo de las nuevas tecnologías, desde luego que va a generar resistencia a su uso, esa es la pregunta que nos debemos plantear inicialmente"¿Estamos preparados los profesores para los cambios que se avecinan al introducir nuevas tecnologías en el aula?"

Si los docentes no conocemos los software y programas diseñados para facilitar la enseñanza de las matemáticas, la inclusión de las mismas en el proceso se convierte en una dificultad en cuanto que, no solo debe el maestro saber de su disciplina sino que deberá formarse y actualizarse en el uso de las nuevas herramientas que se le ofrecen, la tarea se duplica, aprender y enseñar el cómo y el para qué de los programas y software para el desarrollo de procesos matemáticos. Lo que si es claro para nosotros es que las herramientas existen, que cada día se crearán nuevas y mejores herramientas para tal fin, que no podemos quedarnos anclados en el mundo de la tiza y el tablero y que aún en medio de las preguntas y las polémicas, las nuevas tecnologías sí pueden facilitar y mejorar los procesos de aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo y la implementación de las nuevas tecnologías no solo se da en los procesos de enseñanza, las nuevas tecnologías permean todas y cada una de las dimensiones humanas por lo que consideramos pertinente la reflexión de su inclusión en la enseñanza de las matemáticas, en otras palabras, el mundo de las matemáticas se debe interrelacionar y comprender con el mundo de la tecnología, de todos modos ha sido precisamente los avances en el pensamiento matemático lo que posibilitó a la humanidad el desarrollo de la tecnología "para Chevallard, los objetos matemáticos no existen por sí mismos, sino que emergen de sistemas de prácticas…"

Tall y Gray (1993, citado por Sierra y otros, 2005), plantean que "el ordenador, juega el papel de herramienta en forma de organizador genérico y, según el caso, cibernético. El organizador genérico, ha de ayudar al alumno a conseguir experiencias que le proporcionen una estructura cognitiva sobre la que pueda construir conceptos abstractos."

Apelando a Aristóteles en esta discusión, debemos alcanzar el justo medio, es decir, no asumir posturas extremas frente al uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los procesos de enseñanza de las matemáticas.

Con los avances de la tecnología se transforman necesariamente los ambientes de aprendizaje; actualmente cuando ingresamos a las aulas de clase nos encontramos con transformaciones definitivamente esenciales que en muchas ocasiones generan temor y despojan al docente de ese sentir tradicional de seguridad en el manejo del conocimiento disciplinar.

Por ejemplo cuando nos encontramos con tableros digitales, software de enseñanza avanzada, ordenadores para cada estudiante y además con la sensación que el estudiante sabe más que el docente en el uso de este tipo de herramientas preferimos volver a la seguridad del marcador y el tablero y hacer como si el mundo no hubiera cambiado.

Pero por más que cerremos los ojos, debemos comprender que los contextos de aprendizaje han cambiado y seguirán cambiando gracias a los desarrollos tecnológicos y que por tanto los maestros debemos estar al día en cuanto al manejo de estas herramientas y por qué no, ser los que propongamos las nuevas herramientas para la enseñanza de las matemáticas entendiendo que estas "facilitan la exploración y la experimentación de un concepto antes de definirlo formalmente". Sierra y otros (2005).

Tall, 2000, citado en Sierra y otros (2005), por ejemplo propuso "el principio de construcción selectiva basado en el diseño de software que permita al estudiante centrar su foco de atención en la parte conceptual mientras el ordenador lleva a cabo, de manera oculta, la parte procedimental".

Para todos es claro, la influencia de las nuevas tecnologías en la vida cotidiana de las nuevas generaciones, el mundo de la tecnología es un mundo atractivo para los jóvenes de hoy, difícilmente se conciben sin él, en este sentido, no podemos pretender que la escuela se convierta en un contexto diferente, "irreal" anquilosado, para el joven, las nuevas tecnologías facilitan de igual manera la correlación con su mundo visual, el hecho que ellos puedan manipular un aplicativo en el computador, puedan ver gráficas en movimiento, cambiantes de acuerdo a lo que ellos mismos estén manipulando, que se pueda llevar esos conceptos abstractos a un programa que ejemplifique con realidades virtuales, facilita muchísimo la comprensión y apropiación de conceptos, procesos y procedimientos. Se vincula de alguna manera esos procedimientos que antes eran solamente de carácter mental a ejercicios prácticos más significativos.

El uso de software en la enseñanza de las matemáticas, "proporciona un importante instrumento para que los estudiantes puedan librarse de memorizar formulas o procedimientos de cálculo", por eso es importante formar antes a los estudiantes en el uso adecuado de la herramienta y desarrollar los procesos en un tiempo que les permita madurar y desarrollar la compresión de los conceptos.

La claridad en los procesos matemáticos y en el manejo de las herramientas con las que dispone el estudiante debe permitirles decidir el momento necesario en el que se requiere el uso de las nuevas herramientas tecnológicas para la resolución de problemas matemáticos y cómo vincularlas en el proceso como parte importante pero no como fines en sí mismas.

El proyecto de Investigación apunta a la aplicación de actividades de área bajo la curva utilizando un software, entendiendo que la enseñanza de las matemáticas debe adaptarse al cambio de los tiempos y que una de las funciones principales de la educación es enseñar al estudiante a adaptarse con facilidad en su contexto. Si la sociedad actual es considerada, la sociedad de la información y la comunicación gracias a los avances de la tecnología, entonces los procesos educativos no pueden quedarse rezagados en el uso de nuevas estrategias didácticas. Esas nuevas estrategias didácticas consideramos tampoco se pueden desligar de la realidad tecnológica actual. "el uso de los ordenadores simplifica la realización de ejercicios y las aplicaciones usuales de la materia a los problemas… lo que hace que sea especialmente indicado su uso en el periodo de formación". El uso de las nuevas tecnologías fomenta la creatividad en los estudiantes (Ortega, Galán y otros, 2002).

Mediante el uso de las Tics, se puede ubicar al estudiante en contextos simulados más cercanos a la realidad los cuales les permite un proceso de apropiación conceptual más significativo, lo importante como bien lo resaltan Ortega y otros (2002) es que los procesos no se estructuren en la sola aplicación de programas que le dan con facilidad el resultado al estudiante sin enseñarle el procedimiento sino que, en los procesos de aplicación, el estudiante no solamente llegue a un resultado sino que haga todo un procedimiento que le permita entender y aplicar la herramienta en diferentes problemas, esto lo plantea con claridad Strickland (1999, citado por Ortega y otros, 2002), y si es posible, involucrar a los estudiantes en procesos de programación para lo cual el estudiante requiere un excelente manejo de los conceptos y los procesos de la enseñanza de las matemáticas.

Dubinsky, (1998, citado por Ortega y otros, 2002) dice que “cuando los alumnos programan deben leer, construir y depurar estrategias, modificar programas que ya están desarrollados y, por último, resolver los problemas con dichos programas”. Desde luego es pertinente aclarar que en la investigación que se desarrolla en este trabajo, no se involucra a los estudiantes en procesos de programación, sin embargo es importante mencionar el tema en cuanto que la programación puede establecerse como un punto de llegada en procesos de formación en los que se involucra herramientas tecnológicas. El tipo de ejercicio implementado en la investigación involucra al estudiante con la herramienta y desde su proceso interactivo lo proyecta a que él mismo en ejercicios futuros adquiera la habilidad de modificar la misma herramienta y programarla de acuerdo a futuras necesidades.

Si se logra incluir en los procesos de enseñanza de la matemática procesos de programación, los estudiantes serán los que crean las funciones específicas necesarias para resolver problemas propios de la materia.

Parafraseando las preguntas que se plantean en los trabajos citados, podemos retomarlas a manera de guía en el desarrollo de esta investigación. Lo importante es no perderlas de vista, por lo que las planteamos aquí como horizonte de comprensión que nos permita tratar de alguna manera en nuestra investigación aportar a la respuesta. Cuando nos preguntamos, ¿Es posible mejorar los procesos de enseñanza de las matemáticas con estrategias más didácticas? ¿Qué tipo de resultados se logran con la enseñanza de conceptos propios de las matemáticas con el uso de las Tics? ¿Se puede superar los resultados alcanzados hasta el momento con estrategias tradicionales mediante el uso de las Tics? ¿Cuáles son las limitaciones y riesgos en el uso de las Tics en la enseñanza de la matemática? Estamos proyectando un compromiso con la matemática.

El uso de las Tics debe contribuir en una mejor comprensión de “la realidad de los procesos y fenómenos de la matemática.

1.3. APROXIMACIONES AL CONCEPTO DE ÁREA

Freudenthal (1983 citado por Del Olmo y otros, 1993) considera tres aproximaciones relevantes con las que se puede llegar a formar el concepto de área, las cuales se relacionan a continuación:

1. *Repartir equitativamente*, en esta aproximación se involucran tareas en las que se debe repartir un objeto determinado, por lo que se encuentra relacionada con la noción de fracción. Dichas tareas se puede resolver mediante: aprovechamiento de regularidades, por estimación y por medida.
2. *Comparar y reproducir*, está conformada por dos tipos de situaciones, en el primero se involucran tareas de comparar dos superficies, y el segundo tipo se relaciona con actividades que hacen hincapié en obtener a partir de una superficie dada otra que tenga diferente forma pero mantenga igual área. Dichas tareas pueden ser resueltas a través de inclusión, transformaciones de romper y rehacer (descomposición de una superficie para reorganizarla en otra figura), estimación, medida y por medio de funciones.
3. *Medir*, incluye situaciones en las que la superficie está estrechamente relacionada a un procesos de medida, bien sea para comparar, repartir o valorar. Las tareas de este tipo puede ser abordadas a partir de exhausión con unidades (recubriendo el interior de la superficie de una figura a través de una unidad), acotación entre un valor superior e inferior, transformaciones de romper y rehacer (este método es empleado para la deducción de las fórmulas de área), y por medio de relaciones geométricas generales (midiendo las dimensiones lineales y a partir de tales datos emplear la fórmula adecuada).

Para llegar a tales aproximaciones se debe tener en cuenta que el proceso de medida de una magnitud debe albergar de alguna manera cinco procesos o etapas según planteamientos de Del Olmo y otros (1993), el primero de ellos se relaciona con la *percepción* de la cualidad que se va a medir, se espera que en ella se promuevan actividades que permitan a los estudiantes dar inicio al descubrimiento de la cualidad del área y de atributos medibles; el segundo tiene que ver con la *comparación* de objetos de acuerdo a tal cualidad, en este proceso se elije una unidad de medida para pavimentar y, se incluyen actividades que requieren la transformación sobre un objeto que permita ver a los estudiantes la invarianza o conservación del área de la superficie del tal objeto.

El tercero es el de la *medida*, su finalidad es iniciar y promover en el estudiante el proceso de medir, las tareas de pavimentación cobran gran importancia en esta etapa además se hace mayor énfasis en al trabajo con diferentes unidades de medida no estándar para poder realizar su conteo y así poder asignarle un valor al área de la superficie que se quiere medir prescindiendo del uso de la fórmula, para finalmente orientarlos hacia la adopción de una unidad estándar de medida. En cuanto al cuarto proceso denominado *aritmetización del área* se refiere al tratamiento del área de manera bidimensional dado que hasta el momento los demás procesos la veían de forma unidimensional, por tanto aquí la magnitud se puede expresar como el producto entre dos longitudes, además las actividades se valen de la pavimentación de regiones para que el estudiante pueda ir deduciendo las fórmulas para hallar el área de algunas figuras básicas.

Con relación al quinto proceso *estimación* Del Olmo y otros (1993) menciona que éste significa obtener una medida o medir sin la ayuda de instrumentos, es decir, que se puede vincular con una conjetura; las tareas que se proponen para este proceso posibilitan el ensayo y error, además pueden llegar a posibilitar según Hildreth (1983, citado por Del Olmo y otros 1993): comprensión del área como cualidad y de la noción de unidad, habilidad para comparar objetos el atributo a medir y para realizar iteraciones de la unidad. Por otra parte, este mismo autor en su investigación encuentra tres estrategias correctas que emplea su población objeto de estudio para estimar el área, las cuales se describen a continuación:

- *Adición repetida: usando iteración de la unidad para estimar el área de un polígono. Este método parecen utilizarlo los sujetos que están adquiriendo el concepto de área, pero que no están en el nivel de las operaciones formales para usar la multiplicación al determinar el área.*
- *Longitud por anchura: usando estrategias de longitud para estimar las dimensiones de una región poligonal y aplicando una fórmula para obtener el área. Esta estrategia es difícil si el número de lados es mayor a cuatro. Con frecuencia, las fórmulas se olvidan o se aplican incorrectamente.*
- *Reestructuración: efectuar un arreglo (transformación de romper y rehacer)) en el objeto para obtener otro cuya área se determina más fácilmente.* (p.p.91)

1.4. DIFICULTADES Y ERRORES QUE SE PUEDEN GENERAR AL ABORDAR LA NOCIÓN DE ÁREA

En la actualidad no hay muchas investigaciones centradas específicamente en errores o dificultades que se generan durante los procesos de enseñanza y aprendizaje en torno al concepto de área, sin embargo Del Olmo y otros (1993) explicitan dos de los más frecuentes, basados en sus estudios y consideraciones generales que traen a colación otros autores; tales errores y dificultades se relacionan con la confusión entre área y perímetro, además de los problemas a la hora de medir.

En cuanto a la confusión entre los conceptos de área y perímetro, se encuentran situaciones como: hallar el valor del área y perímetro asignándole el mayor al área, calcular el perímetro y asignarlo al área o viceversa, si la figura tiene igual área para los estudiantes es normal conjeturar que tal figura tiene igual perímetro también; errores que se deben quizás a la falta de diversidad en el tipo de actividades que se les presentan a los estudiantes para conceptualizar tales nociones, dado que en gran medida se hace hincapié en el cálculo del área y perímetro a través de la aplicación de una fórmula a la cual los estudiantes no le dan sentido.

Así mismo, las situaciones que se relacionan con los errores más frecuentes al medir el área de una superficie según Hart (citado por Del Olmo, 1993) tiene que ver con: que las figuras a las cuales se les quiere hallar el área sean diferentes a un rectángulo, contar unidades no enteras, que la figura no se encuentre dentro de una cuadricula, procedimientos erróneos al aplicar la formula, la unidad de medida no sea la estándar; dichos errores en gran medida se relacionan con la falta de tener en cuenta en el proceso de enseñanza escolar que la primera etapa en el desarrollo de la enseñanza de la medida de una magnitud debe considerar actividades o situaciones que se centren en la percepción de la cualidad que se va a medir.

A partir de lo anterior, Del Olmo y otros (1993) mencionan que para intentar atacar estas y otras dificultades y errores en el proceso de enseñanza del área se debe incluir variedad de actividades en las que se privilegie que el estudiante vaya identificando las características del área como cualidad de los objetos intuyendo así mismo la bidimensionalidad, además que promuevan la comparación y transformación entre objetos sin necesidad de medirlos. Importante que los aprendices puedan llegar a vislumbrar la conservación del área a través de tareas que la involucren, con el fin de ir promoviendo un paso natural al proceso de medida, es decir, que vaya adquiriendo el concepto de unidad iniciando con las iteraciones de ésta para asignar la cantidad de veces que cabe en la superficie de la figura de la cual se quiere hallar su área. Además situaciones en las que se involucre el comparar objetos a partir de su área de tal manera se vaya estableciendo un vinculo entre la unidad estándar y la realización de la medición como tal, lo cual permite que el estudiante pueda ver la medida como algo más que el simple uso de fórmulas, así ésta se muestra como el último paso para abreviar la obtención de dicha área pero después de haber pasado por etapas concretas que hagan uso de la pavimentación, comparación, reparticiones equitativas, transformación de figuras.

1.5. NOCIÓN DE ESTRATEGIAS

Consideramos para nuestro trabajo las siguientes ideas sobre estrategias que algunos autores han aportado, así según Bruner (citado por Rizo y Campistrous, 1999) la noción estrategia *hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros*. Por su parte Cañadas, Castro y Castro (2008) manifiesta que los métodos empleados para llegar a resolver una situación o problema se denominan estrategias.

Rico (1997) considera los *procedimientos* como *aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas* (p. 31) en este campo se encuentran tres niveles donde el último corresponde a las estrategias, las cuales se realizan sobre representaciones de conceptos y relaciones implicadas, por tanto estas se emplean dentro de una estructura conceptual. Desde este punto de vista el autor propone que "*cualquier procedimiento o regla de acción que permita obtener una conclusión o responder a una cuestión (resolución de problemas) haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual, se denomina estrategia"* (p.34). Así mismo consideran que las estrategias requieren de un buen manejo de la red conceptual de tal manera que se puedan generar y nuevas relaciones a partir del trabajo con el concepto; finalmente Rico considera que las estrategias más frecuentes en la Educación Matemática escolar se relacionan con: estimar, aproximar, elaborar un modelo, construir una tabla, buscar patrones y regularidades, simplificar tareas difíciles, conjeturar y comprobar.

2. METODOLOGÍA DE NUESTRO ESTUDIO

Dado que el problema de investigación consiste en identificar y describir las estrategias que los estudiantes emplean en la solución de algunas tareas centradas en el área bajo la curva, el presente estudio se enmarca en un enfoque metodológico cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo, ya que éste permite realizar interpretaciones e inferencias de las estrategias que se evidencian en la población objeto de este estudio, a través de una clasificación fundamentada en el marco teórico. En consecuencia el estudio se basa en la elaboración de una propuesta de actividades en torno al área bajo la curva, que se desarrolla mediante la aplicación de tres applets a un grupo de estudiantes de decimo grado de dos instituciones, una de ellas del sector distrital y la otra de carácter nacional. Los resultados obtenidos se interpretan mediante la descripción de las respuestas dadas por los estudiantes a través de su trabajo con los tres applets.

Para llevar a cabo lo anterior, la metodología del presente estudio se fundamenta en el desarrollo de las fases: (i) Indagación, (ii) diseño de la propuesta (iii) aplicación de la propuesta, (iv) interpretación y descripción de los resultados.

2.1. FASE DE INDAGACIÓN

En esta fase se realizó la revisión bibliográfica sobre diferentes investigaciones, centrándonos en estudios afines a la noción de área bajo la curva, y dentro de este foco, hemos buscado trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de tal noción, además de estrategias empleadas en la solución de tareas matemáticas.

De las investigaciones o estudios más relevantes que se enfocan en el objetivo de nuestro trabajo, es decir, aquellos que se relacionan con el campo de la didáctica del área bajo la curva y de las estrategias de los estudiantes en la solución de tareas matemáticas, acudimos a: investigaciones realizadas por Pilar Turégano, dado que es una de las autoras más mencionadas y con gran trayectoria en estudios que abordan y se enmarcan en estos tópicos, ya que ha indagado y trabajado en torno a conceptos relacionados con el área y la integral definida, a continuación citamos tres de los trabajos más importantes para nuestro estudio: *Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas* (1994); *Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo* (1998); *Imágenes del concepto de integral definida* (2007); en general estas investigaciones aportan elementos que permiten consolidar el diseño de propuestas de enseñanza y aprendizaje donde se promuevan en los estudiantes un tránsito natural al concepto de integral definida a través de conceptos fundamentales como el de área. La tesis de maestría *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva* de Mónica Olave (2005), propone una secuencia de actividades en torno al área bajo la curva, con las cuales pretende evidenciar las estrategias puestas en juego de los estudiantes que desarrollan las tareas propuestas en dicha propuesta, con el fin de describir y caracterizar las estrategias empleadas por los estudiantes; el último libro que citaremos es el de Del Olmo, Moreno y Gil (1993) titulado *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con formulas?*, trabajo que muestra en sus primeros capítulos una síntesis de los diferentes estudios que clarifican la adquisición de los conceptos de área y volumen en la escuela, describiendo resultados que se han obtenido en diferentes investigaciones que se enmarcan en estos dos conceptos desde contextos psicológicos y cognitivos mostrando posibles errores y dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de tales nociones, así mismo las conclusiones más relevantes a las que se llegaron en tales estudios; finalmente presenta algunas indicaciones para la enseñanza del área y volumen en las aulas regulares de matemáticas. Documentos que se constituyeron en elementos fundamentales para el desarrollo de nuestro trabajo.

2.2. *FASE DE DISEÑO DEL INSTRUMENTO*

Realizada la indagación bibliográfica y formulación del marco teórico se inicia el diseño y construcción de las tres actividades que conforman nuestra propuesta; las cuales se construyeron haciendo uso del software dinámico GeoGebra como aplicativos. Cada una de las actividades se enmarca en la noción de área desde una perspectiva geométrica y bajo alguna de las tres aproximaciones que Del Olmo (1993) plantea para promover en los estudiantes la noción de área, las cuales son: *repartir equitativamente, comparar y reproducir, y medir*. En el titulo descripción y análisis de los resultados se ampliará el desarrollo de esta fase, dado que para obtener el instrumento final tuvimos que realizar una prueba piloto que nos permitió ajustar tal instrumento, de tal manera que posteriormente éste nos permitiera describir e inferir las estrategias que ponen en juego los estudiantes para dar solución a cada una de estas situaciones planteadas en nuestra propuesta.

2.3. *FASE DE APLICACIÓN*

En esta fase se realizó, como su nombre lo indica, la aplicación de las tres actividades diseñadas en el entorno de GeoGebra, a una población constituida por 35 estudiantes del Colegio Distrital Colsubsidio Torquigua y 38 estudiantes del énfasis de matemáticas del Instituto Pedagógico Nacional; sujetos que oscilaban entre los 15 y 16 años de edad, además se encontraban cursando décimo grado.

La aplicación de las tres actividades se realizó de manera diferente en los dos colegios, debido a situaciones relacionadas con los tiempos y actividades institucionales; por tanto a los estudiantes del Colegio Torquigua se les presentaron las tres actividades de manera simultánea para su desarrollo, el cual duro aproximadamente dos horas y media. Por otro lado la aplicación a los estudiantes del Instituto Pedagógico se propuso para trabajar en casa asignando ocho días como plazo para su entrega. Es de mencionar que ninguno de estos dos grupos tuvo una intervención por parte del profesor de matemáticas, en cuanto al trabajo con los tres applets, es decir, que los estudiantes se enfrentaron a las tres tareas con los conocimientos que contaban hasta ese momento y sin ayuda de su profesor.

2.4. FASE DE INTERPRETACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS

En esta fase se realizaron las descripciones de las estrategias que se vislumbran en las soluciones dadas por los estudiantes a cada una de las tres actividades planteadas; posteriormente se realizó una clasificación de tales estrategias a la luz de los resultados observados en las descripciones, dando paso a las interpretaciones de los mismos. Es de saber que para llevar a cabo esta fase se seleccionó de la población de la cual se hizo mención en el apartado anterior, una muestra al azar de 15 estudiantes, tanto del Instituto Pedagógico Nacional como del Colegio Torquigua, para realizar las descripciones e interpretaciones de las estrategias que emplean en las soluciones de las tareas propuestas.

Las soluciones obtenidas a través del desarrollo de cada una de las tareas propuestas, se estudiaron y clasificaron con el propósito de identificar, inferir y describir las estrategias que se evidencian en la solución de tareas que involucran nociones de área bajo la curva; así el análisis se inició identificando cada una de las estrategias empleadas por los estudiantes, posteriormente se realizó una descripción e interpretación detallada de los datos sistematizados, con el fin de establecer una caracterización de las estrategias puestas en juego que se perciben en cada uno de los estudiantes; lo cual se verá con más detalle en el capítulo que a continuación presentamos.

3. DESCRIPCIÓN Y ÁNALISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo presentamos las descripciones y análisis de las soluciones planteadas por la muestra objeto de nuestro estudio a las tres actividades propuestas, con las que establecemos las estrategias puestas en juego por algunos de los estudiantes de decimo grado a la hora de resolver tareas que involucran la noción de área bajo la curva. Iniciamos presentando la prueba piloto implementada, la justificación de cada actividad a partir de los ajustes realizados de acuerdo a los resultados arrojados por la prueba y por último se presentan las diferentes estrategias que se pueden inferir y la descripción de cada una de ellas.

3.1. PRUEBA PILOTO

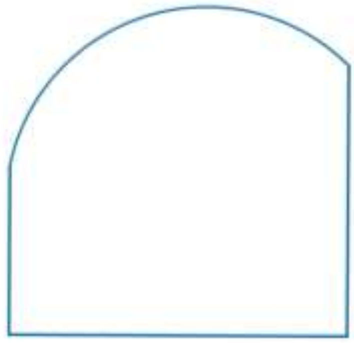
Dando continuidad a las fases tenidas en cuenta para el desarrollo de nuestro trabajo, en este apartado iniciamos con la segunda, es decir, con la etapa de diseño del instrumento, la cual se centro en principio en el diseño de una prueba piloto, la cual se presentó a cuatro profesores en formación de la Universidad Pedagógica Nacional y 20 estudiantes de grado undécimo de una institución distrital, a los que se les solicitó desarrollar las tres actividades propuestas en cada uno de los applets, y a partir de ello, en una hoja en blanco los participantes podían adicionar, si lo creían pertinente, sus sugerencias, consideraciones en cuanto a la claridad de la tarea propuesta y la pertinencia de cada una de las preguntas orientadoras, con el fin de que ellos nos aportarán desde su rol, cuestiones que no habíamos tenido en cuenta o que no fueran comprensibles.

A continuación se presenta la prueba piloto que se aplicó:

3.1.1. Actividad No. 1

En la siguiente figura se requiere encontrar un polígono que pueda recubrir completamente su superficie. Intenta encontrar tal polígono con ayuda de la herramienta *Polígono*.

Para tal fin intenta realizar una tabla donde registres el número de lados del polígono y si cumple o no con el requerimiento de la situación.



Preguntas:

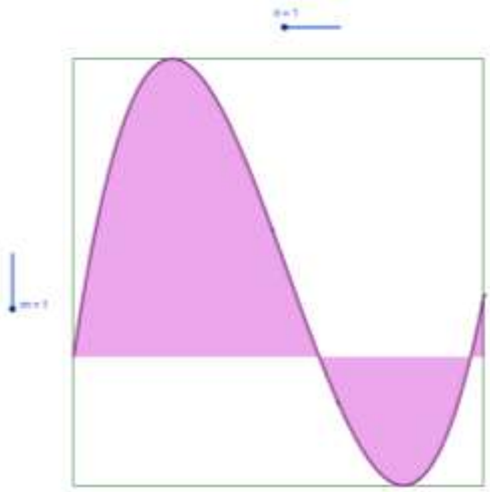
1. ¿Cuántos lados debe tener el polígono que mejor se adapta a la situación?

2. A partir de los datos registrados y de la exploración realizada ¿a qué conjetura llegaste?

3. Intenta describir y argumentar los razonamientos que seguiste para hallar tu conjetura.

3.1.2. Actividad No. 2

Se requiere cubrir la superficie de la figura con baldosas teniendo la menor cantidad de desperdicio de las mismas, es decir, la selección de la baldosa debe hacerse teniendo en cuenta la reutilización de las que deban ser recortadas para cubrir una región más pequeña que ella. Tu trabajo se basa en encontrar dicha baldosa y argumentar tal elección.



Nota: los deslizadores n y m, determinan el tamaño de la baldosa.

Preguntas:

1. ¿Sólo una baldosa cumple con las condiciones para ser seleccionada?

2. Intenta describir y justificar los razonamientos que empleaste para elegir la(s) baldosa(s)

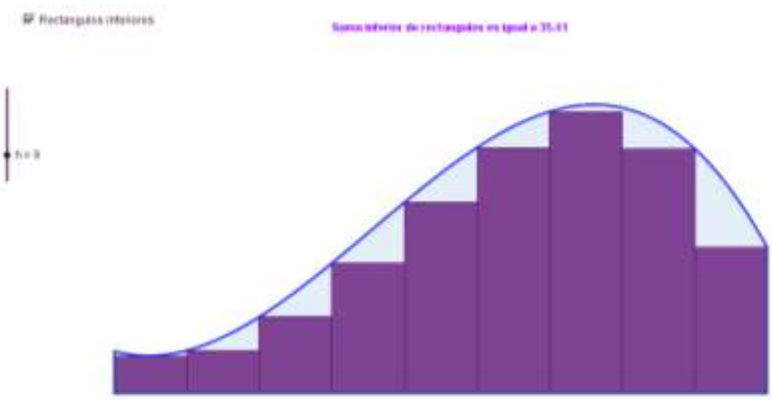
3. ¿Cuántas baldosas se requieren para recubrir toda la superficie de la figura?

4. ¿El tamaño de la baldosa influye en la elección?

3.1.3. Actividad No. 3

Explora seleccionando cada una de las casillas y cambiando el valor del deslizador h.

Analiza lo que sucede con el área de la región de la siguiente figura.



Preguntas:

1. ¿Cuál de las casillas consideras que establece el área total de la superficie de la figura?. Justica tu respuesta

2. ¿El valor hallado corresponde al valor total del área?. Justifica tu respuesta

3. A partir de los tres métodos (trapecios, rectángulos por exceso y rectángulos por defecto) consideras que puedes establecer un método para hallar una mejor aproximación del área?. Describe y argumenta tu respuesta.

Las consideraciones de los participantes en la prueba condujo a que los applets se modificarán en cuanto a algunas instrucciones; personalizar las herramientas, de tal manera que no fueran distractoras aquellas que no se requerían en la manipulación y exploración del applet; y por último la consideración de reducir o reorientar algunas preguntas de tal manera que no fueran tan guiadas.

La primera actividad se ajusto en cuanto a las instrucciones y el no solicitar realizar un registro por escrito de los polígonos con los cuales se había intentado recubrir la figura dada, ya que causó confusión e inutilidad tal solicitud, además dado que no se quiere inducir al estudiante a dar una respuesta especifica ni a utilizar una estrategia guiada se reorientaron las preguntas de tal manera que el estudiantes pueda explorar y dar solución a la tarea de una manera más autónoma. En cuanto al segundo applet, se eliminaron las preguntas, ya que éstas al igual que en la anterior actividad, encasillaban en gran medida a los sujetos a la hora de proponer una solución a dicha tarea. Finalmente en la tercera actividad se elimino el dato numérico de las áreas según el método seleccionado, esto con el fin de que los estudiantes no se centrarán en el área como numero sino que puedan percibir de manera intuitiva la noción geométrica, lo cual es uno de los fines de nuestro estudio; resignificar la noción de área en los estudiantes.

Realizados los ajustes a la prueba piloto, se obtiene la versión final de los applets que se les propusieron a los estudiantes que constituyen nuestra muestra; por tanto a continuación presentamos una breve descripción de cada uno de los applets diseñados y, que constituyen el instrumento que articulan todo nuestro estudio, dado que en cada uno se pretende evidenciar cuáles son las estrategias que los estudiantes emplean para hallar el área de una región curvilínea, a partir de la manipulación del applet que se les presenta (ANEXO 1).

3.2. *JUSTIFICACIÓN ACTIVIDADES*

3.2.1. Actividad No.1.

En esta actividad se pretende que el estudiante con las preguntas: ¿qué es área?, ¿cuál es el área de un rectángulo?, ¿de un triángulo? y ¿de cualquier polígono en general?, poder establecer cuál era la idea con la cual el estudiante partía sobre la noción de área de un polígono. Se esperaba como lo mencionan varios autores que se toman como fundamento de este estudio, que en su gran mayoría los estudiantes asociaran el área a una fórmula, sin dar mayores justificaciones. Lo cual podría ser relevante a la hora de analizar las estrategias que el estudiante emplea en la solución de cada una de las tres actividades; dado que a partir de su noción de área puede relacionar y llevar a cabo sus estrategias de solución.

Al solicitarle al estudiante describir detalladamente cada uno de los razonamientos y estrategias, tenidas en cuenta para establecer cuál es el polígono que puede recubrir completamente su superficie; se espera que los estudiantes puedan manifestar de manera explícita o implícita la existencia de procesos infinitos en esta tarea, dado que al realizar el zoom sobre la parte curva de la figura se vislumbran siempre espacios que quedan sin cubrir por el polígono seleccionado.

3.2.2. Actividad No.2.

Se espera que los estudiantes seleccionen una unidad adecuada no estándar o convencional de medida, además de justificar el por qué de su elección; la que no implica la cuantificación del área de la superficie por parte de los estudiantes. Se intuye que la baldosa con mayor acogida por los estudiantes será la más pequeña, dado que entre más pequeña la unidad se puede acomodar de mejor manera a la curva de la figura de la cual se desea establecer su área.

En la segunda pregunta, ¿Puedes hallar una estimación exacta del área de la región sombreada empleando como unidad patrón la baldosa seleccionada u otra? Justifica tu respuesta; se espera que los estudiantes manifiesten que no es posible, dado que no es posible encontrar una unidad patrón que se ajuste exactamente a tal área, y a su vez traigan a colación la actividad número uno.

3.2.3. Actividad No.3.

Esta actividad tiene por objetivo que los estudiantes a partir de su trabajo con las dos tareas anteriores puedan llegar a establecer posibles métodos para estimar el área de una región curva. Para la pregunta ¿Con alguna de estas tres técnicas se puede determinar el área total de la región? ¿Por qué?; se pretende que se mencione que se podrá obtener una aproximación del área pero no un valor exacto de la misma; de ser así, la pregunta tres ¿cómo obtendrías una mejor estimación del área de la región sombreada?, pretende que el estudiante intente establecer, explicitar y justificar a partir de los métodos presentados o de otros que resulten de su creatividad y estudio con estas actividades, una técnica para obtener estimaciones más aproximadas del área de la figura dada.

Por último las preguntas 4, 5 y 6, están enfocadas hacia los efectos de las tres actividades en los estudiantes, es decir, poder vislumbrar si sus ideas sobre el área cambiaron en algo, además de establecer las ideas que implica para intentar explicitar una definición para el área de una región curvilínea y qué tipo de diferencias manifiesta entre el proceso para hallar áreas de polígonos y de figuras curvilíneas.

3.3. DESCRIPCIÓN Y ANALISIS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS

En esta sección se agrupan en categorías las estrategias identificadas en la solución de las tres actividades propuestas a los estudiantes, las que se categorizan y describen de acuerdo al colegio al cual pertenecen, dado que tales actividades fueron planteadas a 15 estudiantes de grado décimo del Colegio Colsubsido Torquigua y a 15 estudiantes de décimo grado del Instituto Pedagógico Nacional.

Como se mencionó en el marco teórico sobre las posibles aproximaciones a la noción de área, en este trabajo se adoptaron las planteadas por Del Olmo (1993), por tanto en la tabla se relaciona cada una de las actividades y en cuál de las aproximaciones se enmarca.

Aproximación al concepto de área (Freudenthal, citado por Del Del Olmo, 1993)	**Síntesis de la aproximación**	**Actividad**
Comparar y reproducir	Se asocia a situaciones en las que se requiere comparar superficies o donde se debe reproducir una superficie a partir de otra que tiene diferente forma. Las actividades se pueden solucionar a través de: inclusión, transformaciones de romper y rehacer, estimación, medida y por medio de funciones.	**Actividad No.1** (Por inclusión) **Actividad No.2** (transformaciones de romper y rehacer) **Actividad No.3** (estimación)

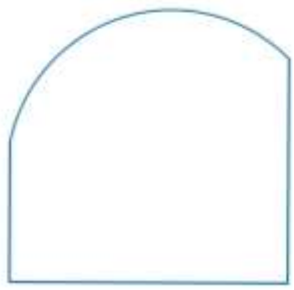
Repartir equitativamente	Se asocia a situaciones en donde se debe repartir un objeto. Esta se relaciona en gran medida con el concepto de fracción. Se pueden resolver mediante: aprovechamiento de regularidades, por estimación y por medida.	**Actividad No.2** (estimación)
Medir	Hace hincapié en tareas que relacionan directamente la superficie con un proceso de medida. Tales tareas se pueden resolver por medio de los procesos de: exhausión con unidades, acotación entre un valor superior e inferior, transformaciones de romper y rehacer, relaciones geométricas generales.	**Actividad No.1/ Actividad No.2** (por exhausión) **Actividad No.2/ Actividad No.3** (Acotación entre un valor superior e inferior)

Tabla 1.

3.3.1. Colegio Colsubsidio Torquigua

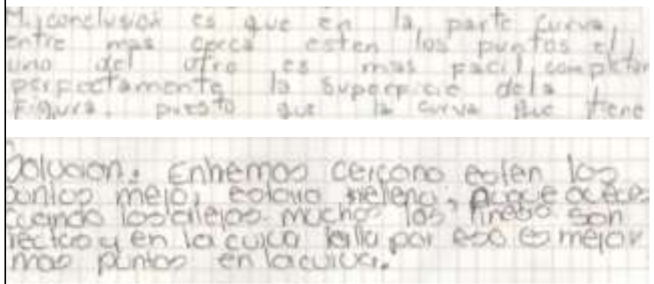
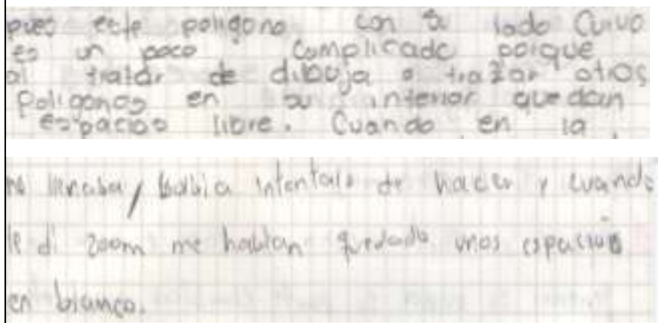
Actividad No. 1

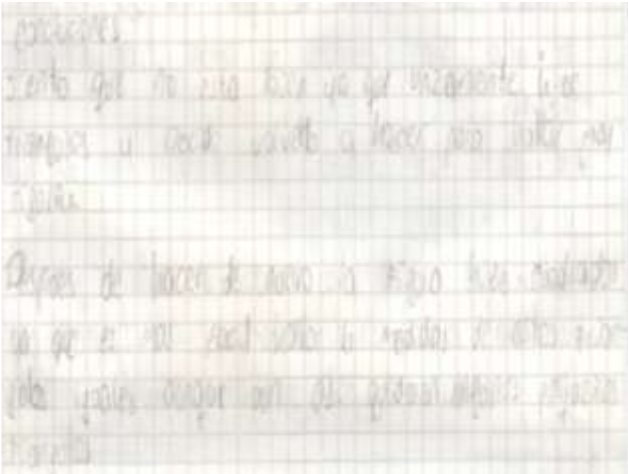
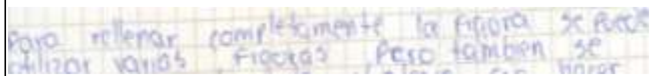
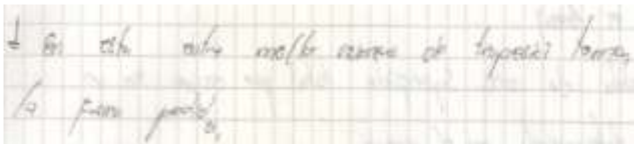
haciendo uso de las herramientas: polígono, borrar, seleccionar, zoom y desplazar; con las que cuenta el siguiente applet, encuentra un polígono que al inscribirlo en la figura pueda recubrir completamente su superficie.



Después de haber explorado con el applet, intenta describir detalladamente cada uno de los razonamientos y estrategias (tanto exitosas como aquellas que no lo fueron) que tuviste en cuenta para desarrollar la tarea propuesta.

Es así, que en la siguiente tabla se agrupan en categorías las estrategias propuestas y llevadas a cabo por los estudiantes al abordar la tarea planteada en esta actividad, acompañadas por sus respectivos porcentajes, además se presentan algunas evidencias y descripciones a la luz de lo encontrado en cada una de dichas categorías.

ESTRATEGIA	EVIDENCIA	DESCRIPCIÓN/ÁNALISIS	%
No manifiesta estrategia o no se puede inferir.			20%
Aumentar el número de lados del polígono en la parte curva de la figura dada, de tal manera que la distancia de éstos sea cada vez menor con el fin de que se aproximen a la curva.	 Mi conclusión es que en la parte curva, entre mas cerca esten los puntos el uno del otro es mas facil completar perfectamente la superficie de la figura, puesto que la curva que tiene Solucion: entre mas cercano esten los puntos mejor, porque cuando los alejo mucho las lineas son recta y en la curva falla por eso es mejor mas puntos en la curva. *Figura 1*  pues este poligono con su lado curvo es un poco complicado porque al tratar de dibuja o trazar otros poligonos en su interior quedan espacios libre. Cuando en la no llenaba / había intentado de hacer y cuando le di zoom me habían quedado unos espacios en blanco. *Figura 2*	En esta categoría a partir de los planteamientos de los estudiantes se puede inferir que ellos están aludiendo al Método de Exhausión de Arquímedes, ya que lo que intentan con su estrategia es aproximar el área que desean obtener mediante polígonos cada vez con mayor número de lados en la parte curva, conjeturando que entre menor sea la longitud de los lados de este polígono mejor se aproximará a la forma de la curva y así al área que requieren hallar. La figura 1 muestra algunas evidencias de ello. Los estudiantes de este grupo de manera explícita no manifiestan si es posible o no encontrar un polígono que recubra toda la superficie de la figura dada, sin embargo un 40% de ellos hace alusión a los espacios libres	33 %

		que quedan tras intentar inscribir el polígono en la figura, ajustándolo a la parte curva, lo cual se evidencia en enunciados como los que se observan en la figura 2.	
Descomponer la figura dada en polígonos conocidos, con el fin de emplear su fórmula para poder obtener la medida de la superficie.	  Para rellenar completamente la figura se puede utilizar varias figuras pero tambien se 	Los estudiantes proporcionan diferentes unidades patrón para recubrir la superficie, además usan para la descomposición de ésta criterios visuales y de tipo práctico, los cuales se basan en descomponer en figuras conocidas (triángulos, rectángulos, cuadrados o trapecios), que se ajusten lo mejor posible a la superficie dada, y de las cuales conozcan la fórmula para hallar su área (ver figura 3). De acuerdo a lo anterior se puede inferir que los estudiantes que involucran esta estrategia para abordar la tarea, emplean la pavimentación con triángulos, rectángulos o cuadrados para poder tener un vínculo directo con la medida de la superficie. Finalmente los estudiantes no manifiestan si es posible o no encontrar un polígono que	47%

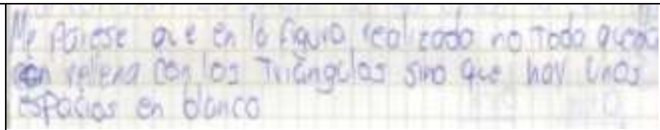
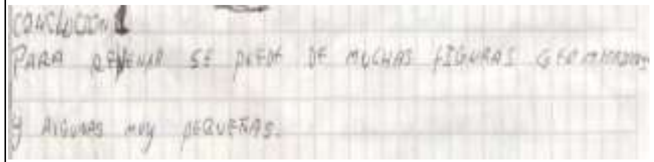
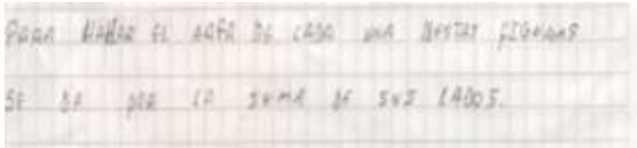
	 Me Parese que en la figura realizado no todo queda en yellena con los Triángulos sino que hay unos espacios en blanco  Conclusión Para rellenar se pide de muchas figuras geométricas y algunas muy pequeñas. *Figura 3*  Para hallar el área de cada una destas figuras se le pide la suma de sus lados. *Figura 4*	recubra toda la superficie de la figura dada. Dos de los estudiantes escriben que para hallar el área de la figura se deben sumar sus lados; los cual evidencia la confusión entre el área y el perímetro (ver figura 4).	

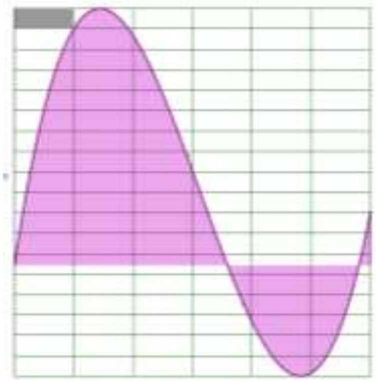
Tabla 2.

En general se puede visualizar que casi la mitad de los estudiantes tiende a recurrir a la descomposición en polígonos tales como el triángulo, cuadrado o rectángulo; quizás esto se debe a que asocian la superficie con la obtención de un valor el cual se puede obtener más fácilmente a partir de una fórmula conocida y empleada por ellos en el ámbito escolar, lo que sugiere que este grupo de estudiantes no puede prescindir de la fórmula para realizar la tarea, a pesar de que no se les ha pedido encontrar como tal el área de la figura dada; hecho que puede estar vinculado de alguna manera a la idea que el estudiante ha ido fortaleciendo en su escolaridad frente a reducir o vincular una superficie simplemente a su medida, es decir, verla desde un aspecto netamente cuantitativo.

En la categoría que obtiene el segundo porcentaje más alto, se puede vislumbra que los estudiantes de alguna manera emplean métodos similares a los que surgieron en diferentes épocas de la historia de las matemáticas en torno al área, en este caso en particular el método de exhausión de Arquímedes se puede ver inmerso en las respuestas dadas por este grupo de estudiantes más aun cuando aluden a que deben aumentar el número de lados del polígono hasta hacer que estos sean cada vez de menor longitud para que puedan "acoplarse de mejor manera a la curva". Lo cual sugiere, entre otras cosas, que en la escuela se podría introducir la noción de área a partir de actividades que inicialmente tomen elementos de la intuición del estudiante y que faciliten su comprensión para que realmente ellos le den significado a tal noción, para finalmente hacer un tránsito natural, por así llamarlo, a la obtención y uso de la fórmula.

Actividad No. 2

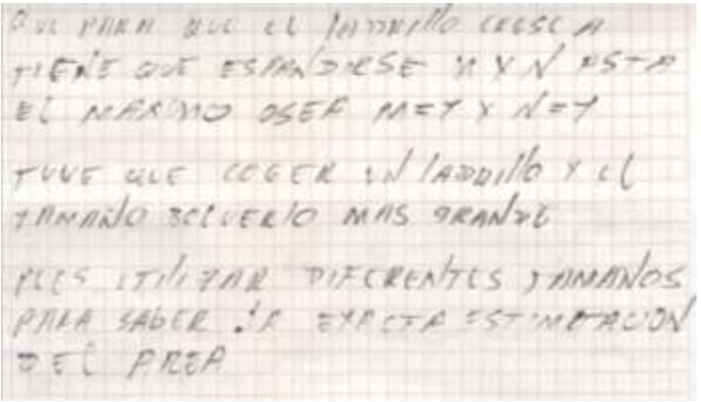
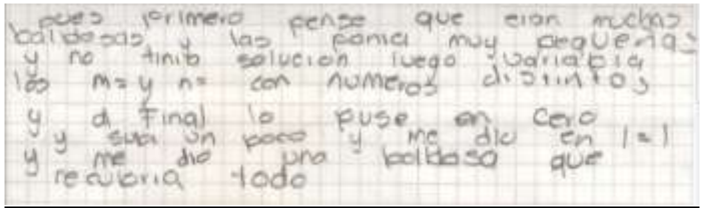
Para esta actividad se requiere embaldosar la región sombreada de color violeta; elije la tableta con la que realizarías este trabajo.

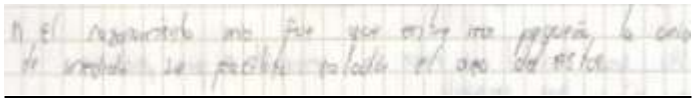
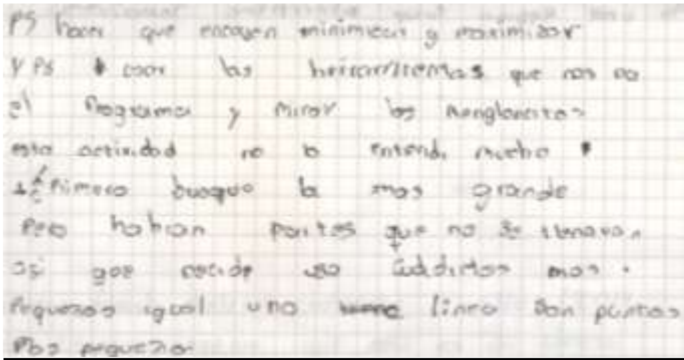
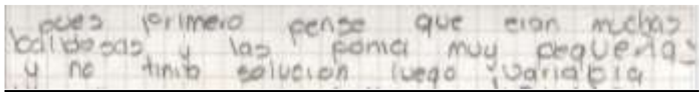


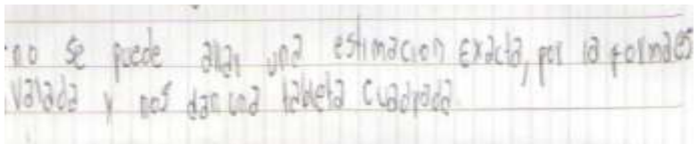
1. Describe el criterio y los razonamientos que tuviste en cuenta para seleccionar la(s) baldosa(s).

2. ¿Puedes hallar una estimación exacta del área de la región sombreada empleando como unidad patrón la baldosa seleccionada u otra? Justifica tu respuesta.

En la tabla 3 se registran las descripciones de las estrategias implementadas por los estudiantes del Colegio Colsubsidio Torquigua, en torno a su trabajo con la actividad No. 2.

ESTRATEGIA	EVIDENCIAS	DESCRIPCIÓN/ÁNALISIS	%
No manifiesta estrategia o no se puede inferir.			20%
Emplea como estrategia la baldosa más grande, ya que cubre toda la región de la figura dada.	 	En la mayoría de los estudiantes de esta categoría no se puede vislumbrar que realicen alguna reflexión frente al hecho de que la baldosa seleccionada cubre más de la superficie de la figura dada. Sin embargo dos estudiantes al caer en cuenta de esta situación cambian su estrategia. Sólo tres de los estudiantes que emplean esta estrategia plantean de manera explícita que para hallar una estimación exacta del área de la región sombreada se deben tomar tamaños diferentes de baldosas.	47%

<table>
<tr>
<td>Recurre a la baldosa más pequeña, argumentando que entre menor sea su tamaño se facilita calcular el área de la región sombreada, porque ésta se puede acomodar o ajustar mejor para recubrir tal región.</td>
<td>




</td>
<td>A partir de nuestro marco teórico consideramos que la estrategia empleada por este grupo de estudiantes se asemeja al método exhausión, dado que ellos están intentando a partir de la repetición de una unidad patrón, la baldosa seleccionada, recubrir la superficie dada lo más aproximado posible.

Algunos planteamientos dados por los estudiantes, sugieren que ellos pueden estar teniendo ideas intuitivas de los procesos infinitos, por ejemplo cuando mencionan que la baldosa debe ser muy pequeña para que logre cubrir la superficie.

En general no se menciona si se puede ó no hallar una estimación exacta de tal área con la baldosa seleccionada; sin embargo un estudiante plantea que no es posible con esta baldosa cubrir totalmente la región sombreada, lo cual se debe a la</td>
<td>33%</td>
</tr>
</table>

		diferencia entre las formas de la figura dada y la de la tableta, ya que una es ovalada y la otra no lo es, por tal razón no se puede hallar una estimación exacta de dicha área, lo que sugiere que este estudiante considera que si la unidad de medida es ovalada si se podría hallar esta área de manera exacta.	

Tabla 3.

Según lo indicado en la tabla 2, la estrategia más común por parte de los estudiantes en el desarrollo de la segunda tarea se relaciona con la selección de la baldosa más grande, consideramos que esta preferencia se pudo haber dado debido a la practicidad y relación con la realidad que los estudiantes pueden haber visto; sin embargo en un porcentaje muy mínimo se evidencia la reflexión frente al hecho que la baldosa cubre más de la superficie violeta, lo que se confirma a la hora de no dar respuesta al interrogante si es posible con la tableta seleccionada encontrar una estimación exacta del área de la región.

En cuanto al grupo de estudiantes que selecciona la tableta más pequeña, se puede inferir en ellos que intuitivamente están aludiendo a los procesos infinitos. Por último es de mencionar que la categoría que obtuvo mayor acogida por los estudiante no entraba dentro de las posibles repuesta que teníamos en mente que ellos darían, dado que considerábamos que tendría mayor impacto la opción de la baldosa más pequeña, debido con esta cuadricula se podía ajustar mejor las partes curvas de la figura dada.

Finalmente consideramos que en este grupo de estudiantes no se puede vislumbrar a partir de sus estrategias uno de los procesos (transformaciones de romper y rehacer) en el cual enmarcamos esta actividad (ver tabla 1), dado que en ningún momento se aludió, por ejemplo, a romper la baldosa y reorganizar ese trozo para cubrir un espacio vacío donde se ajuste en la superficie violeta, con el fin de obtener un recubrimiento más aproximado de tal superficie.

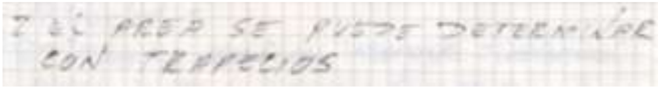
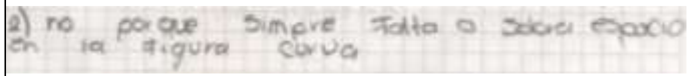
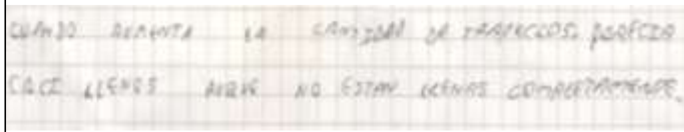
Actividad No. 3

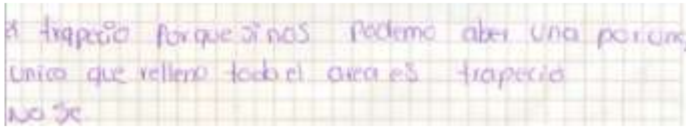
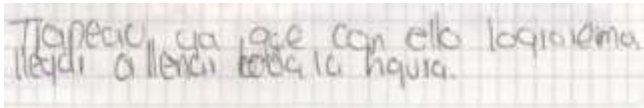
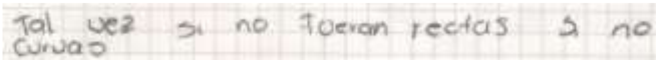
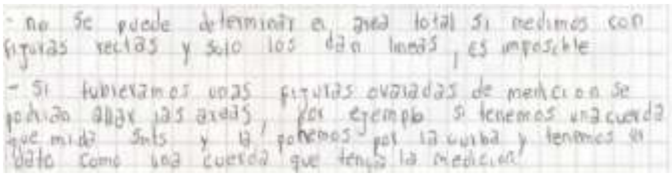
En esta actividad se pide a los estudiantes que a partir de su exploración y observaciones de los tres métodos (trapecios, rectángulos inferiores y rectángulos inferiores) aborden seis preguntas; sin embargo aquí nos solo nos centraremos en las preguntas dos y tres, ya que éstas son las que nos permiten inferir alguna estrategia por parte de los estudiantes; las demás las retomaremos en el apartado de las conclusiones para dar algunas consideraciones a las cuales llegamos a partir de ellas.

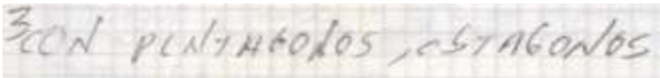
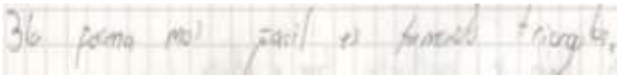
2. ¿Con alguna de estas tres técnicas se puede determinar el área total de la región? ¿Por qué? -ten en cuenta las conclusiones de las actividades anteriores para verificarlas-

3. Si tu respuesta anterior fue negativa ¿cómo obtendrías una mejor estimación del área de la región sombreada?. De ser posible intenta establecer, describir y justificar un método para hallar una mejor aproximación del área de la región sombreada.

En la siguiente tabla se presenta la clasificación de las estrategias empleadas a partir de los resultados obtenidos en el desarrollo de esta tarea.

	ESTRATEGIA	EVIDENCIAS	DESCRIPCIÓN/ÁNALISIS	%
Pregunta No.2	Método de los trapecios Al aumentar el número de trapecios, éstos se van ajustando cada vez más a la forma de la curva de la figura.		En esta categoría los estudiantes no explicitan si el área hallada es exacta o sólo una aproximación.	50%
		 	Mencionan que el área hallada es una aproximación, dado que cada vez que aumenta la cantidad de trapecios aunque pareciera a simple vista que la superficie está cubierta completamente, no es así, ya que al realizar zoom siempre quedan espacios sin cubrir debido a la diferencias entre la forma de la figura y la de la unidad patrón; lo cual sugiere que este grupo de estudiantes consideran que la unidad patrón debe ser curva si la figura es curva y viceversa.	25%

		  	Asumen que el método de los trapecios determina el área total de la región sombreada; lo que indica que los estudiantes quizás no han relacionado los resultados obtenidos en las dos actividades anteriores o que simplemente no le dan mayor relevancia a los espacios que quedan sin cubrir, debido a que a la vista son minúsculos.	25%
Pregunta No.3	Empleo de una unidad patrón no usual “ovalada”	 	En esta categoría se plantea que se podría tener una mejor aproximación si se pudiera establecer una unidad patrón que tenga forma ovalada o curva. Esto indica a nuestro parecer que los estudiantes sugieren la necesidad de buscar y encontrar una unidad de medida quizás estándar para	33%

			hallar el área de una superficie curva. A nuestro modo de ver consideramos que este grupo de estudiantes ya está viendo una necesidad por hacer uso de una unidad patrón adecuada, lo cual es relevante en el proceso de comprensión y adquisición del concepto de área, particularmente en comprender la noción de unidad.	
	Descomposición en polígonos	 	Menciona que un posible método para una mejor estimación del área de la figura puede ser con triángulos, pentágonos u octágonos; algunos de los estudiantes hacen la claridad de que tales polígonos deben ser pequeños además de "muchos", lo	77%

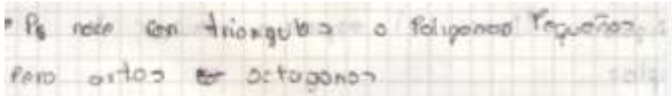
		 	que sugiere que en esta categoría los estudiantes de manera intuitiva están trayendo a colación los procesos infinitos. Por otro lado, se puede considerar que el método planteando en esta categoría se relaciona con el Método de Exhausión, dado que los estudiantes están buscando a partir de la pavimentación con diferentes polígonos cubrir toda la superficie lo más aproximado posible.	

Tabla 4.

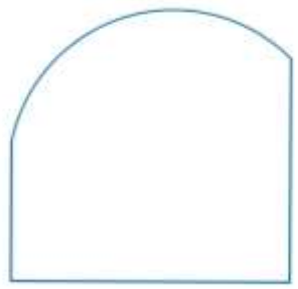
Lo primero que se puede inferir de la tabla anterior, se refiere a que el 100% de los estudiantes en la pregunta dos optaron por el método de los trapecios, lo cual era de esperarse dado que es el método entre los tres presentados que mayor se aproxima al área de la superficie, sin embargo las consideraciones frente a si el área que se puede obtener con esta estrategia es una estimación exacta o aproximada son variadas, dado que un 50% la obvia, un 25% menciona que es exacta y el porcentaje restante explicita que se obtiene tan sólo una aproximación, para esta actividad se esperaba un mayor porcentaje en esta última opción ya que contaban con dos actividades anteriores que les permitían conjeturar tal apreciación.

La pregunta 3, permite inferir que la estrategia implementada con mayor frecuencia por los estudiantes se relaciona con la descomposición en polígonos, en esta los estudiantes nuevamente traen a colación procesos infinitos al considerar que deben hacer uso de polígonos muy pequeños para poder cubrir la superficie, y nuevamente su estrategia comparte similitudes con métodos exhaustivos que han sido abordados a lo largo de la historia.

3.3.2. Instituto Pedagógico Nacional

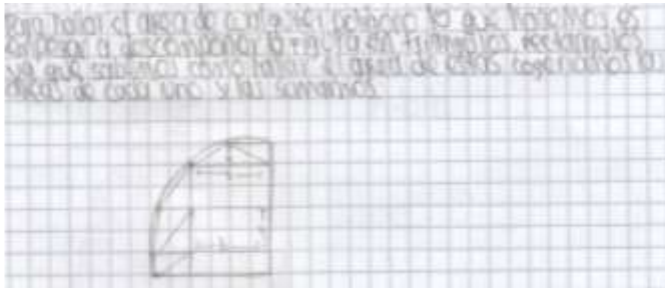
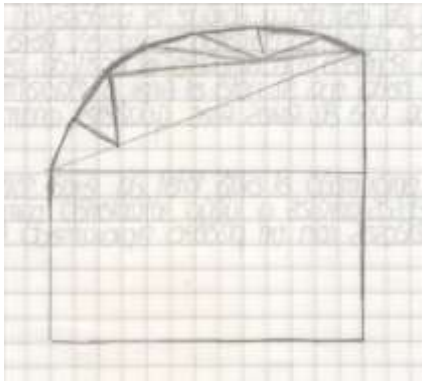
Actividad No. 1

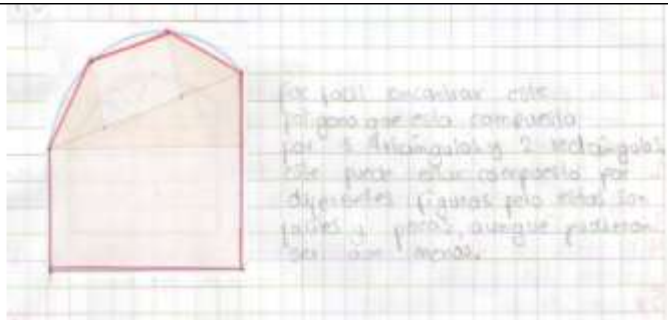
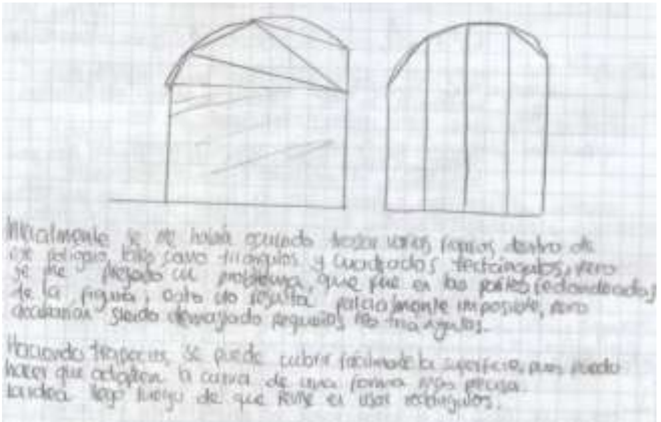
haciendo uso de las herramientas: polígono, borrar, seleccionar, zoom y desplazar; con las que cuenta el siguiente applet, encuentra un polígono que al inscribirlo en la figura pueda recubrir completamente su superficie.

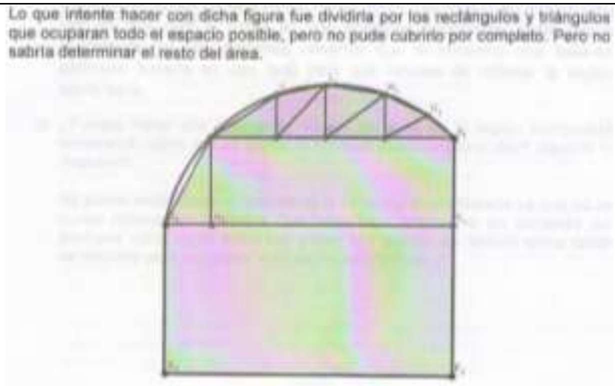
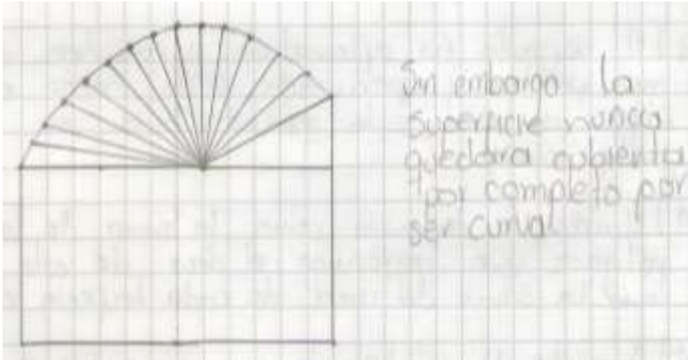


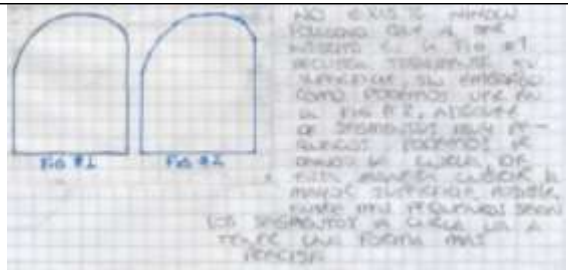
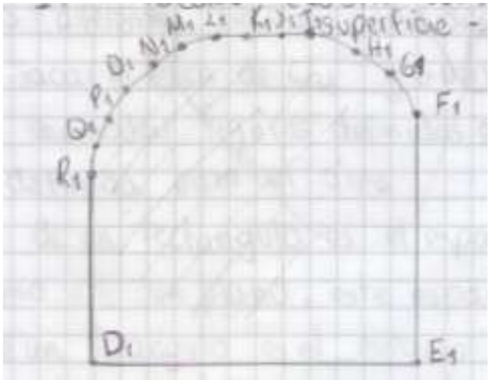
Después de haber explorado con el applet, intenta describir detalladamente cada uno de los razonamientos y estrategias (tanto exitosas como aquellas que no lo fueron) que tuviste en cuenta para desarrollar la tarea propuesta.

En la tabla 4 se presentan las descripciones y categorías en las que se clasificaron las estrategias propuestas y empleadas por los estudiantes del Instituto Pedagógico Nacional frente a esta primera tarea.

ESTRATEGIA	EVIDENCIA	DESCRIPCIÓN/ÁNALISIS	%
Descomponer la figura dada en polígonos conocidos (triángulos, cuadrados o rectángulos), con el fin de hallar cada una de las áreas de éstos a partir del uso de la fórmula, para posteriormente sumarlas y de esta manera obtener el área de la figura dada.	 	Los estudiantes de este grupo no consideran en su estrategia un polígono inscrito en la figura dada; lo que ellos proponen es dividir la superficie de la figura en triángulos, cuadrados o rectángulos; ya que con estos tres polígonos se puede recubrir de mejor manera la región y permiten la disposición directa de fórmulas conocidas; en este sentido el valor del área de la superficie será la suma de las áreas de todos los polígonos empleados en tal descomposición. Sólo uno de los estudiantes de esta categoría manifiesta que se puede cubrir completamente la superficie de la figura con la estrategia adoptada, los demás no hacen alusión ni explicita ni implícitamente, en relación a este hecho. Otro de los estudiantes que comparte esta estrategia y finalmente la cambia, plantea que ésta no es muy viable, ya que tendría que hacer	43%

	 	triángulos demasiados pequeños en la parte curva de la figura, lo cual nos sugiere la idea intuitiva de procesos infinitos en el estudiante.	
		En esta subcategoria los estudiantes descomponen la superficie de la figura de igual manera como se describió anteriormente, sin embargo aquí plantean de manera explícita la imposibilidad de cubrir por completo la	38%

	 	superficie sin importar el o los polígonos que se emplean para dicha tarea, argumentando que por ser curva la figura su área no estará dada de manera exacta sino que será el valor aproximado de la suma de las áreas de los polígonos empleados. Consideran además que se deben escoger polígonos muy pequeños para lograr una mejor aproximación del área, lo cual alude a que los estudiantes están considerando intuitivamente procesos infinitos.	
Aumentar el número de lados del polígono en la parte curva de la figura dada, de tal manera que la distancia de éstos sea cada		Los estudiantes en esta categoría consideran que la forma más efectiva para recubrir un superficie curva, es haciendo que la longitud de los lados del polígono inscrito en la figura cada vez vaya siendo más pequeña en la parte curva para que	19%

vez menor con el fin de que se vaya aproximando cada vez más a la curva.	  	se pueda recubrir la mayor superficie posible; sin embargo afirman que no existe ningún polígono que al ser inscrito en la figura cubra totalmente su superficie, lo que conduce a pensar en que el grupo de estudiantes está haciendo procesos de comparación de las dos áreas y adopta la idea de que el valor del área de la superficie curva sólo llegará a ser una aproximación. En esta categoría los estudiantes también aluden a procesos infinitos con frases tales como: *segmentos muy pequeños que se pueden ir ajustando a la curva, entre más pequeños sean los segmentos la curva va a tener una forma más precisa*.	

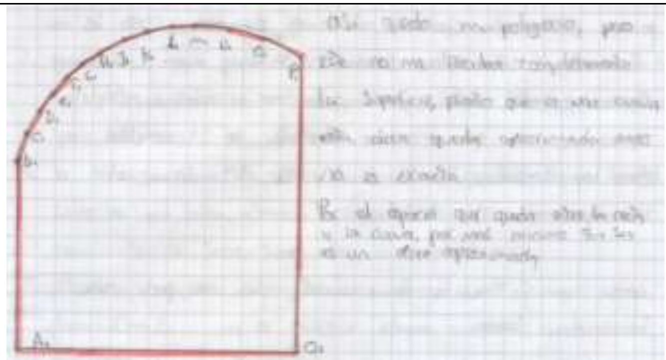
			

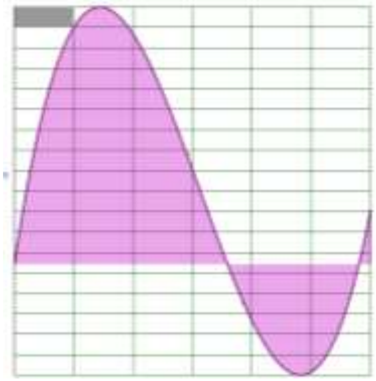
Tabla 5.

De la tabla anterior, se puede concluir que más del 80% de los estudiantes se inclinan por la estrategia de dividir la superficie en polígonos de los cuales conozcan o puedan hacer uso de su fórmula de manera inmediata, con el objetivo principal quizás de calcular la extensión de la superficie dada, sin embargo en la tarea no se solicitaba ni era relevante tal valor; situación que se puede deber de alguna manera a la idea tan arraigada de ligar el área a una fórmula para obtener un valor, dificultad que ha sido generada en la escuela ya que ésta en la mayoría de los casos ha disminuido los procesos de medida a la simple aplicación de una fórmula. Así mismo esta categoría se subdivide entre los que menciona que la superficie se puede cubrir en su totalidad a partir de la estrategia adoptada, y aquellos que consideran que esto no es posible dado a que la superficie es curva y ningún polígono por pequeño que sea se ajustará a ella.

En las dos categorías se evidencia que en las estrategias planteadas, los estudiantes están empleando métodos semejantes al de exhausión y al de las infinidades (mencionados en nuestro marco teórico), dado que a partir del recubrimiento con figuras rectilíneas están intentando comparar y a la obtención del área de la figura curvilínea; sin aun conocerlos y sin la precisión del lenguaje matemático, hecho que permite mostrar que los estudiantes pueden construir, adquirir y comprender de mejor manera las nociones de área con actividades que promuevan los métodos intuitivos que dieron lugar al origen y evolución del concepto de área en la historia, ya que las ideas inmersas en éstos no son tan aislados de su contexto real.

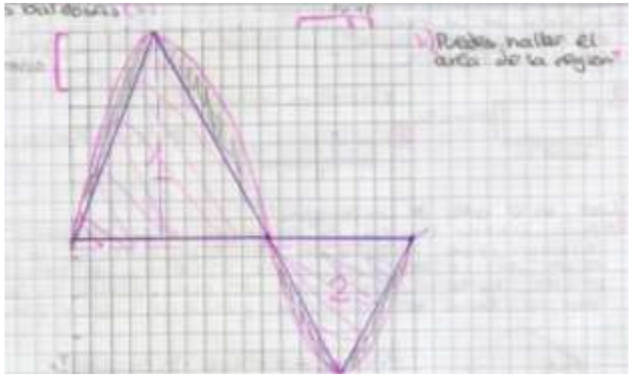
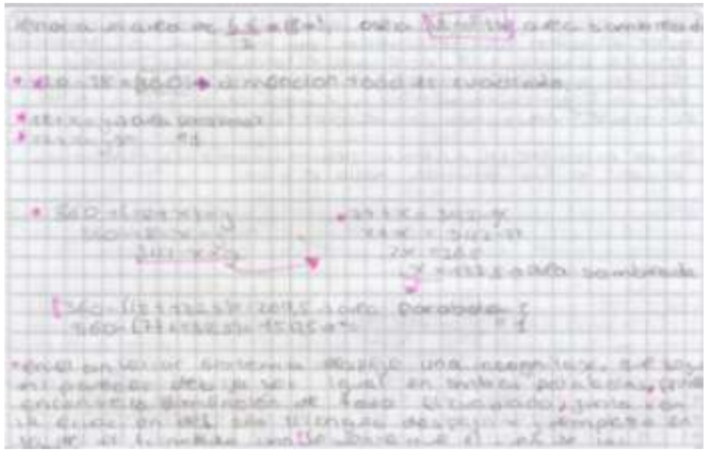
Actividad No. 2

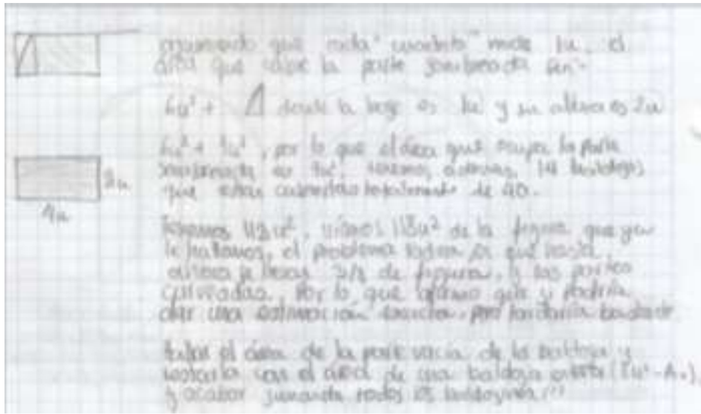
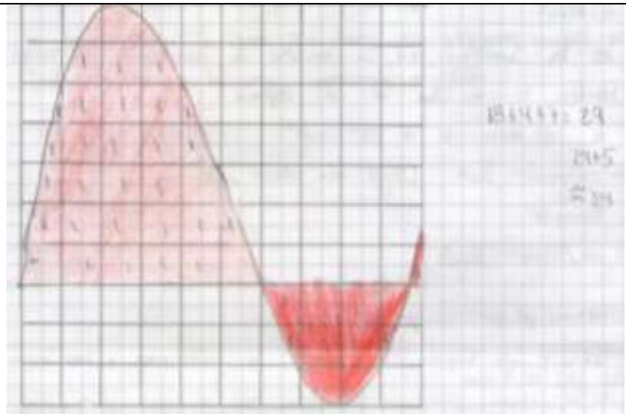
Para esta actividad se requiere embaldosar la región sombreada de color violeta; elije la tableta con la que realizarías este trabajo.

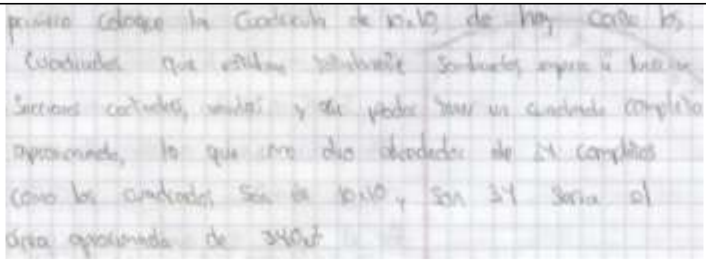
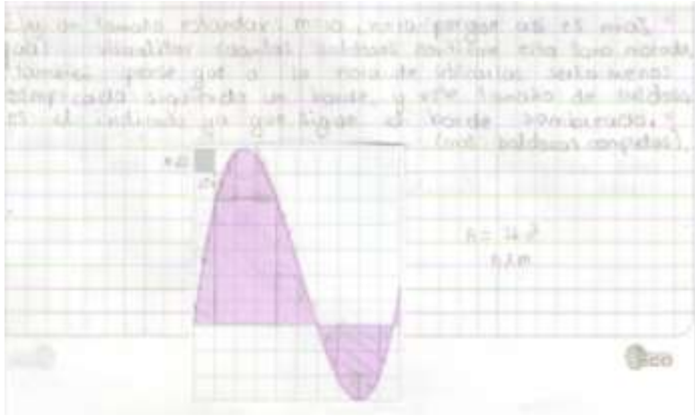


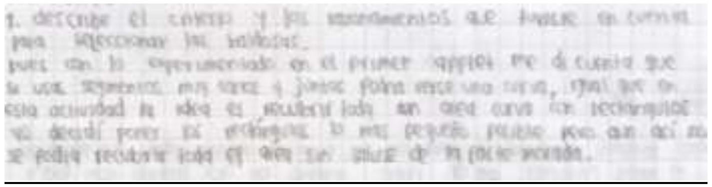
1. Describe el criterio y los razonamientos que tuviste en cuenta para seleccionar la(s) baldosa(s).
2. ¿Puedes hallar una estimación exacta del área de la región sombreada empleando como unidad patrón la baldosa seleccionada u otra? Justifica tu respuesta.

A continuación en la tabla 6, se describen y clasifican las estrategias propuestas por el grupo de estudiantes objeto de este estudio, en torno al abordaje de la actividad No. 2.

ESTRATEGIA	ESTUDIANTE	DESCRIPCIÓN/ÁNALISIS	%
Asigna dimensiones arbitrarias a la baldosa seleccionada, con el fin de poder recurrir a la fórmula del área del rectángulo.	 	En esta categoría los estudiantes consideran viable fijar dimensiones arbitrarias a la baldosa seleccionada para poder hallar el valor de la región violeta haciendo uso de una fórmula conocida (rectángulo o triángulo). Como ejemplo de ellos se puede evidenciar en la figura 1 que el estudiante después de seleccionar una baldosa, inscribe dos triángulos en la figura dada, posteriormente hace uso de las dimisiones asignadas a la baldosa y aplica la fórmula para hallar el área de dichos triángulos, finalmente establece como incógnita el área de la región que queda sin cubrir por los triángulos, con el fin de establecer un sistema de ecuaciones que le permita hallar el valor del área de la región violeta. A partir de estas ideas se puede inferir que los estudiantes están viendo la noción de requieren obtener un valor para el área de la superficie	13%

		violeta, para ello se valen tanto de procedimientos algebraicos como geométricos. Ninguno de los estudiantes que pertenecen a esta categoría hacen mención a la exactitud o aproximación del valor asignado al área de la región violeta, el cual se obtienen a partir de su estrategia. Es de resaltar que en esta categoría algunos estudiantes intentan mostrar de manera más explícita los procedimientos que ponen en juego para la solución de la tarea.	
Obtener el mayor número de baldosas completas haciendo uso de transformaciones de romper y rehacer.		En este grupo la estrategia se basa en seleccionar la baldosa con la cual se pueda obtener mayor número de ellas de manera completa, además la posibilidad de recortarla y acomodar los trozos en espacios de la región violeta que faltan por cubrir; con el objetivo de expresar la medida de tal superficie mediante el número de baldosas empleadas.	67%

	 	Más del 90% de los estudiantes de esta categoría consideran y manifiestan que sólo se puede encontrar una aproximación del área total de la región sombreada ya que quedan espacios pequeños sin cubrir; además esta se puede obtener contando la cantidad de baldosas enteras y luego intentando formar otras a partir de los trozos que se recortan; dado que en su estrategia sugieren recortar algunas baldosas para poder reubicar los trozos en otra parte donde se ajusten a la región curvilínea. Dos de los estudiantes recurren a formar triángulos rectángulos dividiendo la tableta por una de sus diagonales, con el fin de recubrir la superficie intentando ajustar tales triángulos a la región curva, es decir, ubicar los triángulos primero en la región curvilínea y baldosas completas donde la región no es curva. Algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes al llevar a cabo tal estrategia son: *el*	

		área es aproximado 33 u^2, área aproximada de la región solicitada es $340\ u^2$. Lo anterior deja ver que los estudiantes de este grupo tienen en cuenta la unidad de medida al plantear su respuesta la cual ligan a las unidades cuadradas, hecho que del todo no es cierto dado que están empleando es rectángulos en su mayoría, sin embargo se resalta el hecho de considerar la unidad con la que están midiendo, pues hasta el momento este es el primer grupo que hace mención sobre este hecho.	
Recurre a la baldosa más pequeña, argumentando que entre menor sea su tamaño se facilita calcular el área de la región sombreada, ya que se ajusta mejor a la región sombreada.		Los estudiantes manifiestan que entre menor sea el tamaño de la baldosa, esta se ajustará mejor a las partes curvas de la figura, además se tendrán más de ellas completas. Sin embargo no mencionan si con su estrategia se puede determinar el área de forma exacta o aproximada.	20%

	YO ESCOGI LAS BALDOSAS DE 20 x 30 PORQUE ENTRE MAS PEQUEÑAS SEAN LAS BALDOSAS PODEMOS DEFINIR MEJOR LA CURVA Y TAMBIEN TENDREMOS MAS BALDOSAS COMPLETAS PODEMOS HALLAR UNA ESTIMACION EXACTA DEL AREA DE LA REGION SOMBREADA EMPLEANDO LA BALDOSA SELECCIONADA U OTRA? SI PODRIAMOS CALCULAR EL AREA DE LA REGION SOMBREADA, UTILIZANDO LAS PARTES DE LAS BALDOSAS QUE NO PERTENECEN A LA AREA SOMBREADA Y TRANSPONIENDOLAS EN OTRA PORCION DEL AREA SOMBREADA		

Tabla 6.

De la información que nos ofrece la anterior tabla, se puede inferir que las estrategias de los estudiantes se dividen en tres categorías, donde la que obtiene mayor aceptación con un 67% se relaciona con una de las aproximaciones al concepto de área mencionado en la tabla 1, es decir, con transformaciones de romper y rehacer, para obtener el valor del área a través del conteo de unidades completas que recubren la región sombreada; es de mencionar que en esta categoría la mayoría de los estudiantes no recurrieron a una fórmula sino a la reorganización de trozos de baldosas para obtener una completa, lo cual supone una visión del área como recubrimiento, es decir, que se está viendo el aspecto cualitativo del área como extensión que ocupa un superficie; lo cual es satisfactorio porque ya no solo se está vislumbrando la forma convencional o clásica de ver y comprender el concepto de área. Aseveraciones que se pueden confirmar con el porcentaje tan pequeño de los estudiantes que recurren a la asignación arbitraria de dimensiones de la tableta para poder hacer uso de la fórmula, en la obtención de la aproximación del área de la región violeta.

En esta misma perspectiva, los estudiantes que adoptan la categoría de escoger la baldosa más pequeña tampoco toman en cuenta en su estrategia los procedimientos algebraicos, sino que se centran en habilidades de visualización y geométricas con el fin de poder ajustar lo más posible a la parte curva de la figura su unidad seleccionada.

En general se puede afirmar que las estrategias presentes en este grupo de estudiantes inducen a procesos de agotamiento de la unidad escogida, es decir, a métodos exhaustivos de la unidad; así mismos los resultados obtenidos permiten conjeturar que la mayoría de los estudiantes no presentan dificultad para especificar que el área obtenida solo representa una aproximación del área total de la región sombreada. Finalmente en las tres categorías se puede inferir a través de los argumentos y planteamientos la evocación por parte de los estudiantes de descomposiciones infinitesimales.

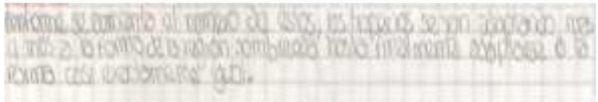
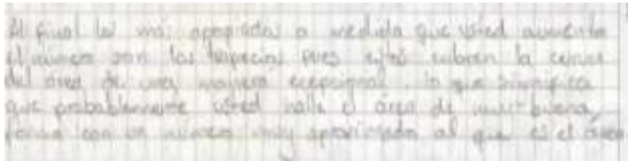
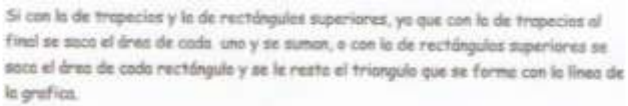
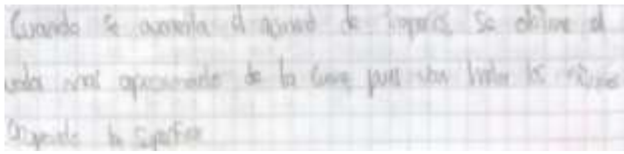
Actividad No. 3

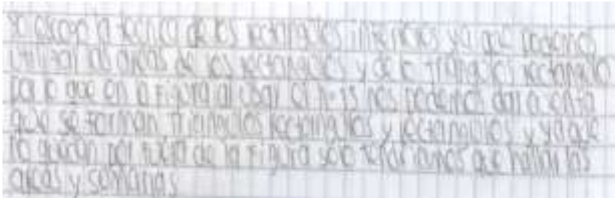
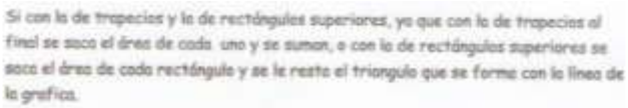
En esta actividad se pide a los estudiantes que a partir de su exploración y observaciones de los tres métodos (trapecios, rectángulos inferiores y rectángulos inferiores) aborden seis preguntas; sin embargo aquí nos Aquí solo nos centraremos en las preguntas dos y tres que son las que nos permiten inferir alguna estrategia por parte de los estudiantes; las demás las retomaremos en el apartado de las conclusiones para dar algunas consideraciones a las cuales llegamos a partir de estas.

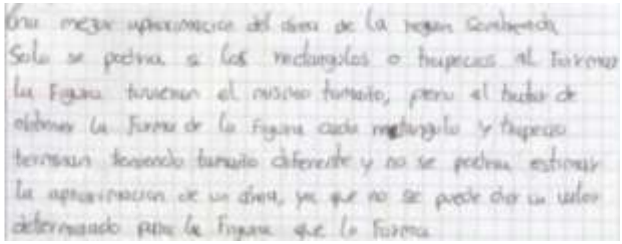
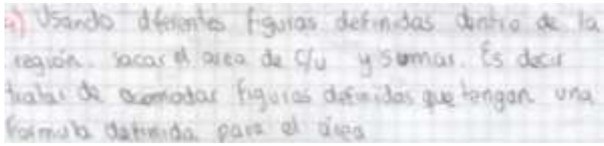
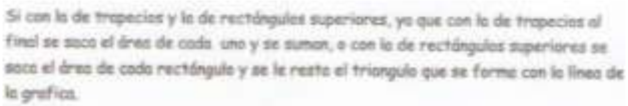
2. ¿Con alguna de estas tres técnicas se puede determinar el área total de la región? ¿Por qué? -ten en cuenta las conclusiones de las actividades anteriores para verificarlas-

3. Si tu respuesta anterior fue negativa ¿cómo obtendrías una mejor estimación del área de la región sombreada?. De ser posible intenta establecer, describir y justificar un método para hallar una mejor aproximación del área de la región sombreada.

La tabla que se presenta a continuación recoge la clasificación y descripción de las estrategias propuestas y empleadas por los estudiantes del IPN al abordar y trabajar en torno a la tarea planteada en la actividad 3.

	ESTRATEGIA	**EVIDENCIAS**	DESCRIPCIÓN/ÁNALISIS	**%**
Pregunta No.2	Método de los trapecios Al aumentar el número de trapecios, éstos se van ajustando cada vez más a la forma de la curva de la figura.	   Si con la de trapecios y la de rectángulos superiores, ya que con la de trapecios al final se saca el área de cada uno y se suman, o con la de rectángulos superiores se saca el área de cada rectángulo y se le resta el triangulo que se forma con la linea de la grafica. 	El grupo de estudiantes manifiesta que el método de los trapecios es el que más se acopla a la curva a medida que aumenta su número; además algunos mencionan que no es difícil obtener una aproximación del área de la región, dado que saben determinar el área de un trapecio y dicha región está compuesta por tales cuadriláteros, luego se deben sumar las área halladas para encontrar la estimación del área de la superficie pedida. Además la mayoría de ellos consideran que el área hallada es una estimación aproximada de la superficie de la región, ya que sin importar el número de trapecios inscritos la superficie no puede ser	80%

			cubierta completamente por éstos.	
	Método de los rectángulos. Bien sean inferiores o superiores, dado que se halla el área de los rectángulos y se le suman o restan, según corresponda, las áreas de los triángulos formados.	  Si con la de trapecios y la de rectángulos superiores, ya que con la de trapecios al final se saca el área de cada uno y se suman, o con la de rectángulos superiores se saca el área de cada rectángulo y se le resta el triangulo que se forma con la linea de la grafica.	En esta categoría los estudiantes consideran que los rectángulo inferiores o superiores pueden funcionar para obtener el área aproximada de la región, planteando las siguientes consideraciones: - Con rectángulos inferiores dado que se pueden emplear las áreas de los rectángulos y de los triángulos rectángulos que quedan formados en los espacios sin cubrir, luego se hallan tales áreas y se suman. - Al obtener el área de los rectángulos superiores y restarle la de los triángulos que se forman con el excedente de los rectángulos. Los estudiantes manifiestan que con	20%

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>esta técnica no se obtiene el área total de la región dada.</td><td></td></tr>
<tr><td>Pregunta No.3</td><td>Descomposición en polígonos.</td><td>
Una mejor aproximación del área de la región sombreada solo se podría si los rectángulos o trapecios al formar la figura tuvieran el mismo tamaño, pero al hecho de obtener la forma de la figura cada rectángulo y trapecio tendrían teniendo tamaño diferente y no se podría estimar la aproximación de un área, ya que no se puede dar un valor determinado para la figura que la forma

4) Usando diferentes figuras definidas dentro de la región sacar el área de c/u y sumar. Es decir tratar de acomodar figuras definidas que tengan una fórmula definida para el área

Si con la de trapecios y la de rectángulos superiores, ya que con la de trapecios al final se saca el área de cada uno y se suman, o con la de rectángulos superiores se saca el área de cada rectángulo y se le resta el triangulo que se forma con la línea de la grafica.</td><td>Los estudiantes de este grupo plantean que para hallar una mejor estimación del área sombreada se deben emplear para pavimentar polígonos como: cuadrados, trapecios, pentágonos, octágonos o triángulos, ya que éstos se pueden ajustar lo más próximo posible a la curva de la región dada.

No se explicita hacer uso de la fórmula para hallar el valor del área de la superficie dada.</td><td>100 %</td></tr>
</table>

Tabla 7.

A partir de la información presente en la tabla 7, se puede afirmar el 80% de los estudiantes en la pregunta dos prefirieron el método de los trapecios, lo cual no es sorpresa ya que es el método entre los tres presentados que mayor se aproxima al área de la superficie, así mismo el total de este grupo considera que este método proporciona tan sólo una aproximación de la medida de la superficie, lo cual conduce a pensar que los estudiantes lograron relacionar todas las actividades y resultados obtenidos en ellas para establecer tal conjetura. El 20% restante aluden al método de los rectángulos considerando que el área de la superficie se puede hallar a través de la suma de las áreas de los rectángulos y la resta o suma de las áreas de los triángulos que se forman por exceso o defecto. Lo cual se debe quizás a que el área de tales polígonos se puede obtener por una fórmula conocida y fácil de emplear; sin embargo estos estudiantes en ningún momento hicieron explicito en sus planteamientos el empleo de tales fórmulas.

La pregunta 3, permite inferir que la estrategia implementada en un 100% es la descomposición en polígonos, en esta los estudiantes alude a la comparación del área de figuras curvilíneas y rectilíneas a través del agotamiento con uno o varios polígonos, con los que se puede pavimenta la superficie curva; lo cual se relaciona nuevamente con los métodos exhaustivos que dieron lugar al origen y evolución del concepto de área.

4. CONCLUSIONES

El objetivo general de nuestro estudio se centró en describir las estrategias empleadas por algunos estudiantes de grado décimo del Colegio Colsubsidio Torquigua y del Instituto Pedagógico Nacional, al resolver problemas que involucran el área bajo la curva y el uso del software GeoGebra. De acuerdo con el objetivo formulado y con el análisis de los resultados obtenidos, presentamos a continuación las conclusiones más relevantes.

En el transcurso de nuestro estudio identificamos aspectos que nos permitieron establecer algunas de las conjeturas sobre las ideas que tienen los estudiantes en cuanto a la noción de área; hay cuatro tendencias generales las cuales se relacionan con: la medida de una superficie comprendida o limitada por un perímetro; la extensión que ocupa una superficie, el área ligada a una fórmula y por último la confusión que persiste en varios estudiantes entre área y perímetro. Como es de notar las dos primeras se relacionan como ideas que permitieron abordar el concepto a lo largo de la historia; la tercera aunque esperábamos tuviera mayor acogida consideramos que un grupo de nuestros estudiantes objeto de estudio no puede desprenderse de la fórmula para realizar tareas que relacionen el área de manera directa o indirecta; la ultima es una de las más importantes, a nuestro modo de ver, dado que hace referencia a que los estudiantes aún mantienen grandes dificultades en cuanto a diferenciar el área del perímetro, lo cual puede estar estrechamente relacionado con los procesos tan abruptos en cuanto a la enseñanza del área dado que en la mayoría de las aulas suelen iniciar con los procesos de medida sin haber dado la oportunidad al estudiante de explorar y trabajar esta noción como cualidad de un objeto destacando además su carácter bidimensional.

En cuanto a las estrategias que tuvieron mayor incidencia en el desarrollo de las tres tareas asignadas, se obtuvieron los siguientes resultados.

En relación con la primera actividad, las descripciones y análisis destacaron dos estrategias adoptadas por la mayoría de los estudiantes objeto de nuestro estudio, las cuales se relacionan en primer lugar con la descomposición en polígonos conocidos dado que ellos consideran tener herramientas tales como la fórmula para obtener el valor del área de la región; por tanto en esta categoría se incluyen estudiantes que vinculan la superficie a un número con tal, es decir, la ven desde su aspecto netamente cuantitativo el cual está estrechamente relacionado con la fórmula; lo cual quizás se debe a que la mayoría de los planes de estudio privilegian las actividades asociadas al área como medida e introducen de manera simultánea y abrupta el uso de fórmulas con el tratamiento del área como magnitud. En cuanto a la segunda categoría más recurrente en la actividad 1, se relaciona con aumentar el número de lados del polígono inscrito en la figura, en ésta se ubican estudiantes que de alguna manera emplean métodos similares a los de exhausión, al aludir que deben aumentar el número de lados del polígono hasta hacer que estos sean cada vez de menor longitud para que puedan ajustarse a la región curvilínea.

En esta misma perspectiva para la segunda actividad, se destacan tres estrategias a mencionar; la primera se refiere a la selección de la baldosa a partir del criterio de obtener el mayor número de ellas completas, para ello hace uso del proceso de transformaciones de romper y rehacer algunas de las tabletas con el fin de ajustarlas en regiones de la curva sin cubrir, en esta categoría los estudiantes toman la idea de unidad y hacen uso de la iteración de esta para asignar un número a la región dada; lo cual supone una visión del área como recubrimiento, es decir, que se está viendo el aspecto cualitativo del área como extensión que ocupa un superficie. Por otra parte la segunda categoría con mayor aceptación se relaciona con la selección de la baldosa más grande, consideramos que esta preferencia se pudo haber dado debido a la practicidad y relación con el contexto real de los estudiantes, en esta se puso de manifiesto la dificultad de la mayoría de los estudiantes para caer en la cuenta que dicha baldosa cubre más de la región dada, lo cual sugiere que ellos no están considerando la conservación del área. Finalmente la tercera estrategia adoptada para esta actividad por los estudiantes considera la baldosa más pequeña, en esta categoría la mayoría de los estudiantes se centran en habilidades visuales y geométricas con el fin de poder ajustar lo más posible a la parte curva de la figura su unidad seleccionada.

En general en las categorías de la actividad 2, la mayoría de los estudiantes admiten la posibilidad de asignarle un número a una superficie curva, sin embargo algunos de ellos no logran observar que este valor es realmente una aproximación que se puede mejorar. Así mismo un buen porcentaje de este grupo hace alusión a la idea intuitiva de procesos infinitos para calcular el área de figuras curvilíneas; de igual manera estas estrategias inducen a procesos de agotamiento de la unidad escogida, es decir, promueven métodos exhaustivos de manera intuitiva.

Finalmente en la actividad 3, se consideran las dos categorías con mayor porcentaje de aceptación las cuales corresponde a: el método de los trapecios y la descomposición en polígonos; en cuanto a la primera se considera que la preferencia se debe a que este método es el que mejor se ajusta a la figura curvilínea entre mayor cantidad se tenga. En cuanto a la segunda estrategia, es de mencionar que esta ya había sido propuesta por los estudiantes en la actividad 1; los estudiantes que proponen esta estrategia consideran que para hallar una mejor estimación del área sombreada se deben emplear cuadrados, trapecios, pentágonos, octágonos o triángulos; no hacen alusión al uso de la fórmula sino que recurren a la pavimentación de la superficie a través de tales polígonos. Por lo que se puede inferir que en esta los estudiantes alude a la comparación del área de figuras curvilíneas y rectilíneas a través del agotamiento con uno o varios polígonos, con los que se puede recubrir la superficie curva; lo cual se relaciona nuevamente con los métodos exhaustivos que dieron lugar al origen y evolución del concepto de área.

Las tres actividades implementadas para el proyecto fueron pertinentes en cuanto facilitó el acercamiento de los estudiantes al concepto de área bajo la curva, y en el caso de varios estudiantes fue la primera vez en la que se los ponía frente a un proceso matemático desde el uso de herramientas tecnológicas.

A través de nuestro estudio podemos considerar que varios de los estudiantes que hacen parte de la muestra, aluden de manera implícita a procesos infinitos como algo muy pequeño pero distinto de cero. Así mismo traen a colación métodos que comparan figuras curvilíneas y rectilíneas, además aproximan el área de una región curva a partir de polígonos conocidos; los cuales se relacionan con los métodos griegos y babilónicos que dieron origen y permitieron la evolución del concepto de área en la historia. Lo anterior sugiere reflexionar ante los procedimientos clásicos empleados en geometría para determinar áreas; conduce a pensar que si es posible en la enseñanza recurrir a procesos infinitos de manera intuitiva, a no limitar a los estudiantes a determinar el área de polígonos regulares, sino promover actividades que conduzcan primero al estudiante a comprender el área como cualidad de un objeto destacando su carácter bidimensional, posteriormente introducir situaciones que les permitan comparar objetos sin necesidad de medirlos, plantear tareas de pavimentación que posibiliten el paso natural de estructura aditiva a multiplicativa, para finalmente incitar al uso comprensivo de la fórmula.

BIBLIOGRAFÍA

Angulo, M (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de integral como el área bajo la curva en grado once de educación media. Tesis de pregrado. Universidad Pedagógica Nacional.

Cañadas, S., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, Generalización y Estrategias Inductivas de Estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el Problema de las Baldosas. *2(3), Revista PNA, 45(6),*137-151

Olave, M. (2005). Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo la curva. Tesis maestría. Instituto Politécnico Nacional.

Del Olmo, M., Moreno, M. & Gil, F. (1993*). Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con formulas? Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis. Madrid.

Ponce, C. (2009). Área de figuras planas. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas, 45(6)*.

Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria.* En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria. 15-38. Madrid: ice - Horsori.

Rizo. C., y Campistrous. L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2(2-3)*, 31-45.

Sierra. M., Modesto S., y Codes M. (2005). Entorno computacional y Educación Matemática: una revisión del estado actual. Grupo de investigación: Didáctica del análisis.

Turégano, P. (1994). Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de área. Ensayos, 9, 237-257.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. Enseñanza de las Ciencias, 116 (2),233-249.

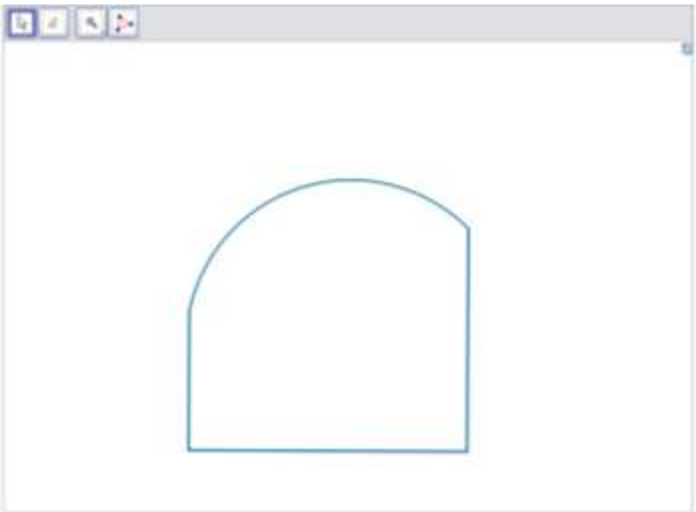
Turegano, p. (2007). Imágenes del concepto de integral definida. Ensayos, 22, 17-57.

Suarez, Miguel Martin (sf) *Historia del análisis matemático. Orígenes del cálculo diferencial e integral I*. De la Matemática Griega a los antecedentes del cálculo. (Universidad de Granada)

5. ANEXO 1. ACTIVIDADE PLANTEADAS

Actividad No. 1 (applet No.1)

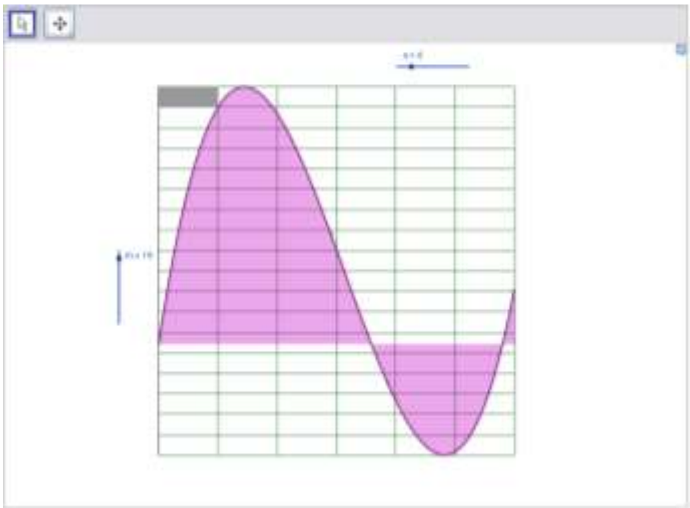
Para iniciar, sin emplear ningún tipo de ayuda intenta dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué es área?, ¿cuál es el área de un rectángulo?, ¿de un triángulo? y ¿de cualquier polígono en general?. Posteriormente, haciendo uso de las herramientas: polígono, borrar, seleccionar, zoom y desplazar; con las que cuenta el siguiente applet, encuentra un polígono que al inscribirlo en la figura pueda recubrir completamente su superficie.



Después de haber explorado con el applet, intenta describir detalladamente cada uno de los razonamientos y estrategias (tanto exitosas como aquellas que no lo fueron) que tuviste en cuenta para desarrollar la tarea propuesta.

Actividad No. 2 (applet No.2)

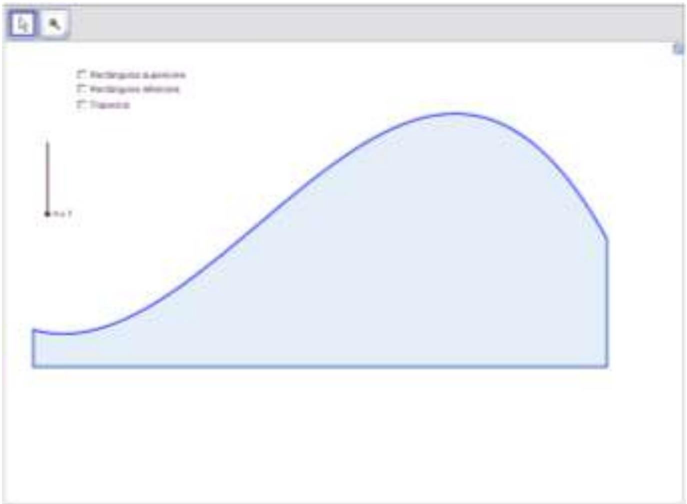
Para esta actividad se requiere embaldosar la región sombreada de color violeta; elije la tableta con la que realizarías este trabajo, para ello cuentas con los deslizadores n y m los que determinan la baldosa que se resalta de color gris; estos deslizadores se pueden manipular seleccionando y moviendo el punto que está sobre cada uno de ellos.



1. Describe el criterio y los razonamientos que tuviste en cuenta para seleccionar la(s) baldosa(s).
2. ¿Puedes hallar una estimación exacta del área de la región sombreada empleando como unidad patrón la baldosa seleccionada u otra? Justifica tu respuesta.

Actividad No. 3 (applet No.3)

Para finalizar su trabajo con la noción de área el profesor propuso esta última actividad, la cual pretende que se construyan posibles métodos para estimar el área de una región curva. Por lo que pide a sus estudiantes manipular y explorar el siguiente applet seleccionando una de las casillas que está en la parte superior izquierda de la pantalla y posteriormente el deslizador h (recuerda que para manipularlo debes seleccionar el punto que se encuentra sobre éste), y a partir de su exploración y observaciones aborden los cuestionamientos que se plantean en la parte inferior.



1. ¿Qué sucede con el área de la región sombreada conforme se aumenta o disminuye el números de trapecios, el de rectángulos superiores e inferiores; respectivamente?

2. ¿Con alguna de estas tres técnicas se puede determinar el área total de la región? ¿Por qué? -ten en cuenta las conclusiones de las actividades anteriores para verificarlas-

3. Si tu respuesta anterior fue negativa ¿cómo obtendrías una mejor estimación del área de la región sombreada?. De ser posible intenta establecer, describir y justificar un método para hallar una mejor aproximación del área de la región sombreada.

4. ¿Cómo definirías el área de una región curvilínea?

5. A partir de tu trabajo con las tres actividades cómo definirías ¿qué es el área de un rectángulo?, ¿de un triángulo? y ¿de cualquier polígono en general?

6. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre el proceso para hallar el área de un polígono y una región curva?