

En búsqueda de un artefacto...

**EN BÚSQUEDA DE UN ARTEFACTO QUE DIBUJE LA CICLOIDE:
(Un pretexto para generar argumentación).**

***GÓMEZ JIMÉNEZ ARLEY* Código: 2014182011**

***PULIDO LOPEZ EDWIN HARVEY* Código: 2014182028**

ASESOR: GIL ALBERTO DONADO NÚÑEZ

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
DICIEMBRE 2014
BOGOTÁ D.C**

En búsqueda de un artefacto...

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”

En búsqueda de un artefacto...

Agradecimientos

Al milagro de la vida...

A los que están próximos a nuestra vecindad, en especial a nuestros padres y seres queridos que de alguna u otra forma se relacionaron en una cadena de hechos y contribuyeron en la realización de este trabajo.

A la Universidad Pedagógica Nacional por intervenir directamente en una construcción subjetiva de conocimiento, permitir hacer la respectiva aplicación de la propuesta con estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas adscritos a uno de los cursos del profesor Donado, al que también extendemos nuestro agradecimiento.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado *“En búsqueda de un artefacto que dibuje la cicloide (Un pretexto para generar argumentación)”*.
Presentado por los estudiantes:

Arley Gómez Jiménez - 2014182011
Edwin Harvey Pulido López - 2014182028

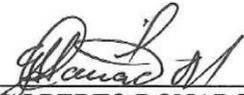
Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **44** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 01 días del mes de diciembre de 2014.

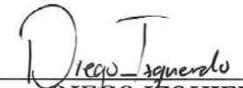
JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a)


ALBERTO DONADO

Jurado:

Profesor(a)


DIEGO IZQUIERDO

En búsqueda de un artefacto...

 <p>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educadora de educadores</i></p>	RESUMEN ANALÍTICO EDUCATIVO R.A.E
--	--

1. Información General	
Tipo de Documento	Trabajo de grado de especialización
Acceso al Documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título de Documento	En búsqueda de un artefacto que dibuje la Cicloide: (Un pretexto para generar argumentación).
Autor(es)	Gómez Jiménez, Arley; Pulido López, Edwin Harvey
Director	Donado Núñez, Gil Alberto
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 2014. 90 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Argumento, Artefacto, Cicloide, Modelo argumentativo de Toulmin, Razonamiento.

2. Descripción
<p>Trabajo de grado que reporta discurso argumentativo en un grupo de estudiantes de grado decimo del Colegio Talentos y otro de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuando diseñan y construyen un artefacto mecánico para dibujar la curva denominada Cicloide. Más</p>

precisamente, nos interesan los posibles argumentos que construyen los estudiantes mientras intentan dar explicación a los procedimientos y estrategias propias que llevan a cabo en la actividad. Como mecanismo de análisis para decantar los posibles argumentos de los estudiantes contamos con los conceptos de argumento y argumentación desde la perspectiva de Toulmin (2007) y Duval (1999). Por otra parte, se realizará una clasificación de los posibles argumentos en los tres tipos de razonamiento propuestos por Peirce (citado en Barrena, 2001): inducción, deducción y abducción. Se espera que este trabajo contribuya en la innovación de estrategias alternativas que a su vez favorezcan a los docentes en su quehacer durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

3. Fuentes

Sobre la argumentación y el razonamiento se referencian:

Álvarez, Ángel, Carranza & Soler (2014), Antón (1999), Atienza (2004), Barrena (2001), Bernal & Romero (2010), Camargo (2010), Duval (1999), MEN (1998), MEN (2006), Rodríguez (2005), Toulmin (2007),

Sobre Artefacto se referencian:

Cortez, Núñez & Morales (2013), Escobedo (s.f), Falconi (2005), Hoyos (2006), Rivas & Delgadillo (2013).

Sobre la Cicloide se referencian:

Hernández (2007), Martin (2004), Stewart (2007).

4. Contenidos

Este trabajo se divide en 4 capítulos. En el primer capítulo se plantea el problema, para luego desarrollar el marco teórico, un capítulo para la metodología y uno final donde se realiza un análisis de datos y resultados.

En el capítulo dos se desarrolla el marco de referencia. Se abordan trabajos en la línea de argumentación y prueba como base y fundamento y se toma el modelo argumentativo de Toulmin para un análisis del discurso.

El capítulo tres presenta la propuesta metodológica para el desarrollo del trabajo. Aquí se describe el tipo de trabajo, la población, fases de la propuesta, instrumentos utilizados para la recolección de datos y la tarea propuesta.

En el capítulo cuatro se presenta un análisis de datos y resultados, donde se hace uso del modelo propuesto para decantar argumentos de los estudiantes para terminar con unas conclusiones.

5. Metodología

Se ha escogido la actividad de construcción de un artefacto mecánico que dibuje la curva Cicloide, como pretexto para generar discurso argumentativo en un aula de clase. Para tal efecto, se pretende mediante una metodología de tipo cualitativo-descriptivo realizar un estudio de caso de dos grupos de estudiantes que cursan primer semestre de 2014-II de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

En la metodología se tendrán en cuenta tres momentos. Un momento de ambientación, un momento de diseño y un momento de construcción. Para la ambientación se diseña un instrumento de recolección de información que es

En búsqueda de un artefacto...

ajustado mediante una prueba piloto. Para la fase de diseño se entiende que los estudiantes reconocen el problema, por lo que se permite libremente que propongan. Se pasa por último a la fase de construcción del artefacto. Estamos convencidos que a partir de la recreación de estas actividades se puede generar argumentación. Para el análisis de resultado se toma como evidencia los registros escritos y verbales obtenidos en las grabaciones de audio y video durante el desarrollo de las actividades, además se tiene en cuenta la aplicación del instrumento (guía), que junto con sus análisis terminarán por justificar la pertinencia de la propuesta.

Conclusiones

En términos generales y centrándose en el objetivo más amplio del trabajo, así como en los resultados, es posible afirmar que la propuesta de generar discurso argumentativo a partir de una tarea de construcción, efectivamente evidenció procesos argumentativos en estudiantes que cursan primer semestre de Licenciatura en Matemáticas. Una manera de apreciarlo es mediante el análisis de los argumentos seleccionados, extraídos de los fragmentos de transcripción y registro escrito. En ellos se evidencia momentos donde los estudiantes formulan conjeturas que luego son rebatidas, donde relacionan ciertos hechos con otros ya conocidos (en el caso de fórmulas y relaciones) realizando un ejercicio de deducción. También hubo lugar para la abstracción y la imaginación cuando se enfrentan por primera vez al trazado de una curva que admitieron no conocer. El ejercicio de validación se produce incluso, hacia sí mismo, ya que no se sienten convencidos, lo que los lleva a justificar mediante razones más fuertes. Estas razones llevan a la afirmación de que la propuesta favorece procesos argumentativos en los estudiantes, cumpliéndose a cabalidad con los objetivos propuestos en el presente proyecto.

En búsqueda de un artefacto...

Elaborado por:	Gómez Jiménez, Arley; Pulido López, Edwin Harvey.
Revisado por:	Donado Núñez, Gil Alberto.

Fecha de elaboración del Resumen:	27	10	2014
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	14
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	16
1.1 DESCRIPCIÓN.....	16
1.2 OBJETIVOS.....	19
1.2.1 General.....	19
1.2.2 Específicos.....	19
2. MARCO TEÓRICO	20
2.1 ARGUMENTACIÓN	20
2.2 RAZONAMIENTO.....	23
2.2.1 Tipos de razonamientos	24
2.2.1.1 Razonamiento inductivo.....	24
2.2.1.2 Razonamiento abductivo.....	24
2.2.1.3 Razonamiento deductivo.....	25
2.3 MODELO ARGUMENTATIVO DE TOULMIN.....	25
2.3.1 Dato (D).....	28
2.3.2 Conclusión (C).....	28
2.3.3 Garantía (G).....	28
2.3.4 Respaldo (R).....	28
2.3.5 Condiciones de refutación (E).....	29
2.3.6 Cuantificador Modal (M).....	29
2.4 ARTEFACTO.....	29
2.5 CURVA CICLOIDE.....	33
2.5.1 Algo de historia	33
2.5.2 Algunas aplicaciones.....	34
2.5.3 Ecuaciones paramétricas de la Cicloide.....	36

3. METODOLOGÍA.....	38
3.1 TIPO DE TRABAJO	38
3.2 POBLACIÓN	38
3.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	39
3.3.1 Prueba piloto	39
3.4 PROPUESTA.....	41
3.4.1 Fase Ambientación.....	42
3.4.2 Fase de diseño	44
3.4.3 Fase construcción	44
4. ANALISIS DE RESULTADOS.....	46
4.1 FASES.....	47
4.1.1 Fase uno.....	47
4.2.1.1 Argumento 1.....	47
4.2.1.2 Argumento 2.....	49
4.2.1.3 Argumento 3.....	51
4.2.1.4 Argumento 4.....	54
4.2.1.5 Argumento 5.....	56
4.2.1.6 Argumento 6.....	58
4.2.2 Fase dos.....	60
4.2.2.1 Argumento 7.....	60
4.2.2.2 Argumento 8.....	62
4.2.3 Fase tres	64
4.2.3.1 Argumento 9.....	64
4.2.3.2 Argumento 10	67
CONCLUSIONES.....	69
BIBLIOGRAFIA	71
ANEXOS	74
ANEXO 1. GUIA PRUEBA PILOTO	74
ANEXO 2. GUIA AJUSTADA DEL ESTUDIANTE.....	77

ANEXO 3. GUIA DEL DOCENTE.....	80
ANEXO 4.TRANSCRIPCIONES	85
Argumento 1. Video 9291 Tiempo: 1:56 a 3:21	85
Argumento 2. Video (anterior).....	86
Argumento 3. Video 100541 Tiempo: 02:18 a 5:40.....	86
Argumento 4 Grupo 1 Video 9293. Tiempo: 00:42 a 01:07	87
Argumento 5 Grupo 1Video 103916. Tiempo: 02:45 a 3:20	87
Argumento 6 grupo 2: Video 9295 tiempo 1:13	87
Argumento 7. Video 9299 Tiempo: 00:25	87
Argumento 8. Video 3949 tiempo 00:00 a 02:26	88
Argumento 9. Video 1071.Tiempo 0:41 a 1:46.....	89
Argumento 10. Video 1075Tiempo inicial 2:08 a 4:48	89

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Análisis argumentativo de la fase uno por estudiante E4, observación...	48
Tabla 2. Análisis argumentativo dos, de la fase uno por estudiante E4; la representación.	50
Tabla 3. Análisis argumentativo de bosquejo de la Curva Cicloide.	52
Tabla 4. Análisis argumentativo el punto más alto de la curva.....	55
Tabla 5. Análisis argumentativo cinco de la fase uno, por reafirmado la curva Cicloide	56
Tabla 6. Análisis argumentativo seis de la fase uno, longitud de la circunferencia.	59
Tabla 7. Análisis argumentativo siete de la fase dos, explicación de construcción	61
Tabla 8. Análisis argumentativo fase dos, diseñando el artefacto.....	63
Tabla 9. Análisis argumentativo de artefacto terminado.....	66
Tabla 10. Análisis argumentativo de relación entre perímetro y radio de la circunferencia	67

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Modelo simple de Toulmin	26
Figura 2. Ejemplo de Modelo Simple de Toulmin	26
Figura 3. Modelo de Argumentación de Toulmin.....	27
Figura 4. Elipsógrafo de palancas, construcción física.....	31
Figura 5. Modelo para la construcción del reloj de péndulo	35
Figura 6. Curva Cicloide en Geogebra (Diseño propio).....	36
Figura 7. Representación cartesiana de ecuaciones paramétricas	36
Figura 8. Señalando un momento preciso.....	40
Figura 9. Identificación del punto más alto de la Cicloide.....	41
Figura 10. Curva afín (Hipocicloide)	43
Figura 11. Curva afín (Epicicloide)	43
Figura 12. Diseño propuesto por E1	44
Figura 13. Diseño propuesto E4.....	44
Figura 14. Materiales.....	45
Figura 15. Prototipo artefacto por (E4)	45
Figura 16. Prototipo artefacto (E1)	45
Figura 17. Movimiento de la llanta.....	49
Figura 18. Evoca el movimiento físico de la rueda	51
Figura 19. Bosquejo inicial de la curva cicloide.....	51
Figura 20. Primer boceto (elongación)	53
Figura 21. Punto más alto de la Cicloide	53
Figura 22. Usando la moneda	54
Figura 23. Representación de la Cicloide, E1.	54
Figura 24. Pregunta 2a momento más alto de la curva	55
Figura 25. Los tres momentos.....	57
Figura 26. Señalando la altura máxima de la curva	57
Figura 27. Representación pregunta 2b	60
Figura 28. Trazando presunta Epicicloide	61
Figura 29. Esbozo de semicircunferencia	62
Figura 30. Diseño de artefacto	63
Figura 31. Piñón, señalando el lugar donde va incrustada la mina	63
Figura 32. Bosquejo curva con artefacto	65
Figura 33. Curva Cicloide representada en Geo-gebra.....	67
Figura 34. Prototipo final de artefacto	67
Figura 35. Traza obtenida con el artefacto final	67
Figura 36. Distancia de una vuelta completa.....	68

INTRODUCCIÓN

Este trabajo da prioridad al discurso argumentativo como parte principal, enfocando el proyecto en una propuesta de construir un artefacto para producir argumentos por parte de estudiantes de primer semestre en Licenciatura Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá. La aplicación de la propuesta también hizo específico que se identifique una curva especial (Cicloide). Así, reconociendo el propósito fundamental, se espera que a partir de los análisis respectivos se puedan detectar tipos de argumentaciones de los estudiantes, el cual se orienta en dirección a la línea de investigación de la Universidad Pedagógica Nacional “argumentación y prueba”. El proyecto se divide en cuatro capítulos. Inicia con el planteamiento del problema, en el cual se habla de la descripción del mismo y justificación para desarrollar la propuesta, incluye los objetivos del trabajo, general y específicos, los cuales nos guiaron para concluir los resultados finales.

En el capítulo dos, se desarrolla la construcción del marco teórico el cual describe como parte primordial el estudio de la argumentación, el modelo de Toulmin, el razonamiento, artefacto y representación de la curva Cicloide. Los aspectos en mención son el sustento teórico mediante referencias y soportes que permitirán concretar el análisis de la propuesta y lograr los argumentos desde el Modelo de Toulmin (2007).

Un tercer capítulo, se compone del planteamiento metodológico pertinente del proyecto, el cual relaciona el tipo de investigación, los estudiantes, las fases que se presentaron durante el desarrollo de la propuesta y la descripción de la recolección de datos por medio de instrumentos apropiados.

En búsqueda de un artefacto...

En el capítulo cuatro, se reconocen los análisis de datos obtenidos mediante herramientas como videos, guías textuales, contextualizando la información a partir de los argumentos conseguidos clasificándolos desde los tipos de razonamientos identificados en los soporte teóricos. Finalmente, se sitúan la conclusión y la relación acordada con los objetivos y la pregunta que surge en el reconocimiento en el planteamiento del problema.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCIÓN.

El estudio y análisis en la educación matemática en Colombia y la relación desde el punto de vista curricular han generado grandes expectativas y cambios a lo largo del tiempo con el fin de mejorar y contribuir por una calidad educativa. Entrelazar la interdisciplinaridad, interactuar compartiendo experiencias en proporción de fortalecer y restablecer pautas didácticas y pedagógicas no solo en las matemáticas, sino en las demás áreas del conocimiento, es un propósito que sigue la línea sugerida en el documento denominado Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas cuando expresa que "...para comenzar es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento", (MEN, 2006, p.48).

Para llevar a cabo una construcción y validación de conocimiento puede hacerse uso de la competencia argumentativa, que resulta de gran importancia en el currículo de Colombia para el desarrollo de ciudadanos críticos (Izquierdo & Granados, 2012). Se menciona en el documento del MEN (2006) que el pensamiento lógico y matemático se utiliza "para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad" (p. 48).

Lo anterior muestra la exigencia que proyecta la educación hoy día en las matemáticas especificando el uso de la argumentación como parte del proceso de desarrollo del educando, por tanto, "la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo, el contraejemplo" son mecanismos usados para rechazar y validar conjeturas en el camino hacia la demostración (p. 51).

En búsqueda de un artefacto...

Por otro lado, teniendo en cuenta la intervención de Colombia en la prueba PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) que se realiza cada tres años enfatizando tres áreas, matemáticas, lectura y ciencias, Colombia ha participado desde el año 2006, 2009 y por tercera vez 2012, su apertura para ese año se enfatizó en el área de matemáticas; los resultados obtenidos en esta ciencia registra desempeños por debajo de la media de la (OCDE) Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.

El panorama no es del todo desalentador. La competencia matemática por lo cual sobresalen ciertos educandos como los que se ubicaron en el nivel 5 y 6 que corresponde a un 0,3%, esta población pueden “seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas; conceptúan, generalizan y utilizan información [...] reflexionan sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos” (ICFES, 2013, p.8). Al parecer el proceso argumentativo es inherente a las acciones que manifiestan los estudiantes ubicados en los niveles más altos.

Por otro lado, está la preocupación sentida por los profesionales del programa de la especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, plasmada en el curso de énfasis en argumentación y prueba. En el transcurso del mismo se ha identificado, descrito y reflexionado acerca del papel de la argumentación y prueba en el aula de clases. De esta manera, la propuesta de este trabajo va encaminada a favorecer (generar) discurso argumentativo cuando un grupo de estudiantes resuelve una actividad de construcción de un artefacto mecánico que sea capaz de trazar una curva particular (Cicloide).

Teniendo en cuenta lo expuesto, se intenta responder la siguiente pregunta de indagación: *¿A partir de una tarea de construcción de un artefacto mecánico, es posible favorecer argumentación en el aula?* Donde argumentación se toma según Douek (2009, citado en Bernal & Romero, 2010) como “...un conjunto de afirmaciones que un estudiante o un grupo de estudiantes utilizan para justificar o

En búsqueda de un artefacto...

explicar un resultado, o para validar una conjetura que ellos realicen durante el proceso de resolución de la tarea en particular”

En búsqueda de un artefacto...

1.2 OBJETIVOS.

1.2.1 General.

Generar discurso argumentativo entre estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuando realizan una tarea de construcción de un artefacto mecánico.

1.2.2 Específicos.

- Construir un artefacto mecánico para dibujar una Cicloide.
- Recolectar evidencias de tipo argumentativo en el proceso de diseño y construcción de la máquina (artefacto) así como de relaciones matemáticas emergentes en el momento de realizar la tarea.
- Describir posibles argumentos que surjan cuando los estudiantes desarrollan la tarea de construcción del artefacto mecánico.
- Hacer uso de herramientas tecnológicas como apoyo para el entendimiento de la tarea propuesta.
- Enriquecer la noción del número π .

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordan los constructos teóricos tenidos en cuenta en este trabajo. La tarea como tal, lleva a los estudiantes desde una exploración de un concepto geométrico (Cicloide) hasta una explicación de un artefacto que la dibuje. De esta manera es posible suponer que la actividad propuesta favorece procesos de argumentación en estudiantes de un aula de matemáticas donde a partir del diseño y construcción de un artefacto mecánico que dibuje una curva particular, se produzcan conjeturas, inferencias, refutaciones y validaciones explicitando diferentes tipos de razonamientos como el inductivo, deductivo y abductivo inmersos en toda actividad matemática. Por tanto, se abordaran las nociones de argumentación, modelo argumentativo de Toulmin (2007) siendo éste el que será utilizado para realizar los análisis de datos y presentación de resultados, razonamiento, artefacto mecánico y curva Cicloide

2.1 ARGUMENTACIÓN

Según el documento “Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas” se menciona que “el desarrollo de las competencias argumentativas [...] implican saber dar y pedir razones, probar y refutar, y ojalá avanzar hacia la demostración formal” (MEN, 2006, p.56). Así, muestra que el ser competente en general requiere de saber argumentar en dirección de proponer e inferir de manera reflexiva razones convincentes, inicialmente en un ambiente de supuestos no tan formales, pero sí, con la exigencia crítica de que se puede llegar a un lenguaje sensato o formal en la demostración, no solo en las matemáticas.

El documento denominado Matemáticas Lineamientos Curriculares se refiere a la discusión y la argumentación desde el acto comunicativo cuando “En la discusión los estudiantes aprenden a comunicar sus puntos de vista y a escuchar las

En búsqueda de un artefacto...

argumentaciones de los otros, validan formas de representación y construyen socialmente el conocimiento” MEN (1998). Visto así, la propuesta promueve la discusión gracias a la interacción entre estudiantes, quienes tendrán que llegar a ciertos acuerdos para comunicar sus elaboraciones y producciones para sí mismos y para otros.

Por otra parte, Duval (1999) manifiesta que “la argumentación ha aparecido como un interés por las formas de razonamiento que escapan a las normas y los esquemas lógicos y que surgen espontáneamente tan pronto como hay un debate con alguien... tanto fuera de las matemáticas como en la enseñanza de la matemática” (p. 2). Esta es una definición dual y de contexto habitual, así, “la argumentación se sitúa en el punto de convergencia de un doble reconocimiento, el reconocimiento del papel importante de la comunicación y de las interacciones sociales en la adquisición de conocimientos” (p. 2).

Según Camargo (2010) autores como Duval (1991,1999), Balacheff (1999) y Pedemonte (2001, 2002, 2005) emplean el término *argumentación* cuando “se hace referencia a dar razones fundadas para apoyar la plausibilidad de una conjetura o progresar en la resolución de un problema, mediante uno o más argumentos coherentemente conectados, aunque no necesariamente de manera deductiva” (p. 39).

De esta manera, para que exista argumentación es necesario la construcción o producción de argumentos. Duval (1999) declara y permite cuestionar argumento como “Todo aquello que se ofrece, o todo lo que es utilizado, para justificar o para refutar una proposición. Aquello puede ser, el enunciado de un hecho, un resultado de la experiencia, a veces simplemente un ejemplo, una definición” (p.3). Lo que muestra es el hecho de justificar una sentencia o juicio en la conglomeración general en un contexto o desde una posición individual sujeto a la refutación de un episodio.

En búsqueda de un artefacto...

Atienza (2004) citando a Toulmin manifiesta que la argumentación “Es la constatación de que uno de nuestros modos de comportamiento lo constituye la práctica de razonar, de dar razones a otros a favor de lo que hacemos, pensamos o decimos” (p.83). Se entiende que en el acto de razonar se hace necesaria la argumentación. No es posible razonar sin argumentación puesto que siempre que razonemos argumentaremos.

Para Álvarez et al., (2014) argumentar es “...el proceso de generar argumentos, tiene un carácter social y cobra sentido cuando hay la necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha.” (p.82).

Argumentar “...se refiere a esgrimir razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objeto de dar cuenta de una plausibilidad de un enunciado” (Duval, 1991; Bartolini, 1997, citado en Camargo, 2010). Tales acepciones conectan la realidad escolar, dejando ver la necesidad de la comunicación y la interacción social en un contexto donde las razones o favor o en contra de la veracidad de un enunciado cada vez son más escasas; simplemente se repite lo que dice el maestro, pero rara vez se refuta.

En palabras de Antón (1999), los argumentos se dan en un lenguaje ordinario así como en un contexto formal, por lo que expresa que: “un argumento es un acto de habla en el que de unos enunciados inferimos otro. A los primeros los denominamos premisas y al último conclusión” (p.4). El mismo autor, frente al discurso de Toulmin, agrega que: “las formas de razonamiento utilizadas por los seres humanos en el discurso ordinario se basan en reglas que son habitualmente, pero no siempre, verdaderas o aceptables” (p.7). De tal manera la relación que se analiza, radica que una argumentación aceptada debe estar marcada por una justificación que valide una conclusión y sea convincente, puede que la justificación sea veras, pero no contundente con lo que se quiere apoyar, también, la argumentación puede darse en un contexto formal u ordinario y se aceptan, siempre y cuando se pruebe su validez.

2.2 RAZONAMIENTO

En el documento denominado Matemáticas: Lineamientos Curriculares, razonar en matemáticas está relacionado con: "...Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos, [...] Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar" (MEN, 1998, p. 54). En este documento se entiende por razonar "...la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión." (p. 54).

Por otra parte, en el documento denominado "Estándares Básicos de Competencias Matemáticas" (MEN, 2006) se menciona que "Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular el razonamiento proporcional apoyado en el uso de graficas". Aquí mismo se admite que tales situaciones se pueden aprovechar para formular conjeturas e hipótesis, validar, cuestionar, ajustar o modificar haciendo uso de razonamiento inductivo y abductivo. Por otro lado, el razonamiento deductivo puede aparecer "...al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como, teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos." (p. 54).

Peirce (1901, citado en Barrena, 2011) versa acerca del razonamiento como: "...un proceso en el que el razonador es consciente de que un juicio, la conclusión, es determinado por otro juicio o juicios, las premisas, de acuerdo a un hábito general de pensamiento, que puede que él no sea capaz de formular con precisión, pero que aprueba como conducente al conocimiento verdadero" (p.1). Al respecto, se concibe el razonamiento como un engranaje que determina la justificación de algo que se considere cierto y sea relevante, y que se puede

En búsqueda de un artefacto...

aprobar como una argumentación, siempre y cuando el razonador sea convincente de sus proposiciones y lo demuestre.

2.2.1 Tipos de razonamientos

Peirce (1901, según Barrena, 2001) reconoce tipos de razonamiento y los nombra así: “El razonamiento es de tres clases elementales; (...). Estas tres clases son inducción, deducción y presunción (para la que el autor propone el nombre de abducción) (p.2).

Álvarez et al (2014) mencionan que: “En la actividad matemática aparecen al menos tres tipos de argumentos diferentes, estos son: abductivo, inductivo y deductivo.” (p.9). De esta manera, para hacer matemáticas es apropiado y conveniente reconocer que un individuo puede generar argumentos no solo al finalizar un proceso sino también en el transcurso de éste.

2.2.1.1 Razonamiento inductivo.

Para Peirce (citado en Barrena, 2001) la inducción “...tiene lugar cuando el razonador ya sostiene una teoría más o menos problemáticamente” (p.2). En Álvarez et al., (2014) se expone que “La inducción se presenta cuando teniendo la regla general o la conjetura planteada, se procede a experimentar para tratar de verificar si dicha regla o conjetura es verdadera.”(p.83).

2.2.1.2 Razonamiento abductivo.

Otro tipo de razonamiento – argumento es la abducción, como se sostiene en Álvarez et., al (2014) “La abducción es un tipo de argumento en el que el sujeto a partir de la observación de unos datos, extrae una conclusión, la cual en caso de ser verdadera, deriva la verdad de los datos iniciales” (p. 83).

En complemento Hamad (2009) admite que “Dentro del razonamiento inferencial, se encuentra el razonamiento abductivo que busca la elaboración de hipótesis a partir de hechos que para el individuo se consideren sorprendentes, activando de

En búsqueda de un artefacto...

tal manera el detonante abductivo como punto inicial en el desarrollo de la inducción y la deducción”(p.50). Para Peirce (1901, citado en Barrena, 2001) la abducción “...es la única clase de razonamiento que proporciona nuevas ideas [...] proporciona al razonador la teoría problemática que la inducción verifica.” (p.2).

2.2.1.3 Razonamiento deductivo.

Finalmente (Peirce, 1901, citado en Barrena, 2001) dice que “La deducción, cuya justificación es que los hechos presentados en las premisas no podrían ser verdaderos bajo ninguna circunstancia imaginable sin implicar la verdad de la conclusión, que es por tanto aceptada con modalidad necesaria”.

En palabras de Álvarez et al., (2014) “La deducción ocurre cuando, de premisas que se suponen verdaderas, se deduce una conclusión que debe ser verdadera” (p.83). En cierto sentido, es una modificación o adaptación a un lenguaje propuesto desde la perspectiva de Peirce, y por su claridad, permite reconocer argumentación en una tarea específica.

Es posible admitir, que estos tipos de razonamientos – argumentos: abductivo, inductivo y deductivo, son los que se persiguen en éste trabajo, inclusive reconociendo que el lenguaje puede ser no tan formal, que las inferencias pueden ser válidas o no; es parte de lo que se pretende llegar con la propuesta a desarrollar.

2.3 MODELO ARGUMENTATIVO DE TOULMIN

Ya que un objetivo a seguir es describir posibles argumentos, se usa como instrumento de análisis el modelo de Toulmin. Se sigue a Antón (1999) cuando manifiesta que “Toulmin, imitando los procedimientos judiciales [...] cuenta, sobre todo, de los tipos de razonamiento inductivo, pero también de los argumentos deductivos” (p.5).

En búsqueda de un artefacto...

Para Toulmin (2003, citado por Álvarez et al., 2014) “un argumento tiene lugar cuando a partir de unos hechos o datos se elabora una afirmación (conclusión)”. Pero el paso de los hechos a la afirmación debe ser genuino y adecuado. Asegura Toulmin (2007) que “...lo que se necesita son enunciados hipotéticos, de carácter general que actúen como puente entre unos y otras, legitimando el tipo de paso que el argumento en particular que hemos enunciado nos obliga a dar.” Dicho de otro modo, a no ser, que se logre relacionar elementos: datos y paso a la conclusión por medio de garantía, habrá un argumento.

Se presenta el esquema simple para un argumento desde la perspectiva del autor (ver figura 1).

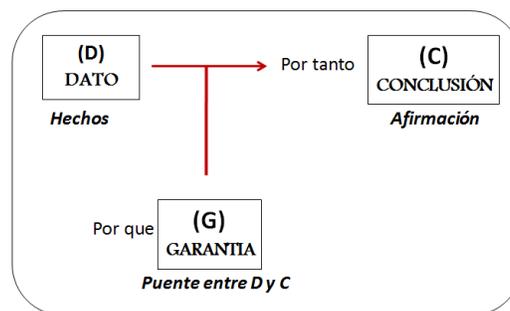


Figura 1. Modelo simple de Toulmin

un ejemplo:

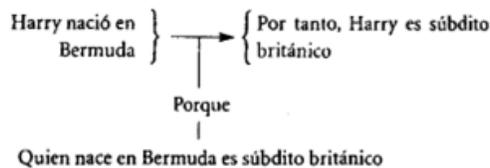


Figura 2. Ejemplo de Modelo Simple de Toulmin

La figura 1, muestra la relación para llegar a validar un argumento. La flecha indica el paso de los datos a la conclusión mediante la garantía que se une por un

En búsqueda de un artefacto...

segmento con ésta. Un ejemplo de análisis de argumento aparece en la (Fig. 2) Toulmin (2007).

El autor expresa que la garantía (G) "...es, en cierto sentido, incidental y explicativa, pues su objetivo consiste simplemente en registrar explícitamente la legitimidad del paso dado" (p.136). En el texto se dice claramente: "...alguien de quien sabemos que ha nacido en Bermudas es presumiblemente súbdito británico, simplemente porque las leyes al respecto nos garantizan que podemos sacar tal conclusión" (p.136). La garantía son las leyes. Según el autor, "el mismo argumento puede expresarse de formas diversas, y algunos de esos esquemas de análisis serán más transparentes que otros; es decir, algunos mostraran de modo más explícito si el argumento es válido o no, dejando ver con mayor claridad cuáles son las razones en que se apoya y su peso en las conclusiones" (2007, p 130). Se presenta el esquema completo del modelo del autor (Fig. 3).

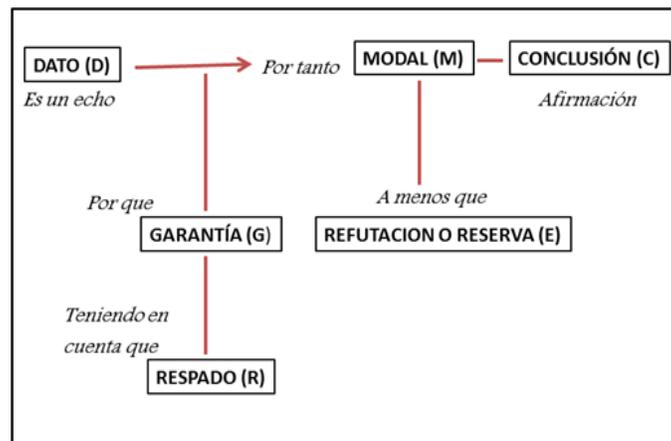


Figura 3. Modelo de Argumentación de Toulmin.

Se aclara, que como sustento teórico para realizar los análisis de resultados, se tendrá en cuenta la teoría de argumentación de Toulmin, puesto que permite una descripción de los argumentos emergentes en la actividad propuesta. Primordialmente se tendrá en cuenta el modelo simple: dato, garantía y conclusión.

En búsqueda de un artefacto...

A continuación, se puntualiza cada una de las acepciones que el autor usa en el modelo:

2.3.1 Dato (D).

Son hechos principales o primarios que se tienen, los cuales fundamentan la conclusión. Toulmin (2007) expresa que los datos son “elementos justificatorios” que sirven como base de la afirmación o conclusión a la cual queremos llegar. El dato corresponde a un hecho explícito y de carácter básico, fundamental que funciona como entidad primordial para soportar la conclusión.

2.3.2 Conclusión (C).

La conclusión es una afirmación, aseveración a la cual se quiere llegar, produciendo un valor razonable y plausible a partir del dato entregado.

2.3.3 Garantía (G).

Manifiesta el paso entre el dato y la conclusión. Es un enunciado hipotético implícito de carácter inferencial. Llamada también *garante*, son “proposiciones de un tipo bastante diferente: reglas, principios, enunciados, que nos permiten realizar inferencias en lugar de agregar información adicional” (Toulmin, 2007, p.134). El *garante* es algo no explícito, marcado por inferencias y difieren de los datos que representan hechos explícitos.

2.3.4 Respaldo (R).

Toulmin (2007), señala que es posible que una garantía no tenga autoridad suficiente para persuadir o convencer a otro, en tal caso aparece un elemento adicional que el autor denomina *respaldo* de la garantía, que “puede expresarse en forma de enunciados categóricos sobre hechos” (p. 143). En palabras de Atienza (2004) “el respaldo solo se hace explícito si se pone en cuestión la garantía” (p.86). No obstante, el respaldo responde a un hecho decisivo que acuerda con la garantía, su uso de ser necesario.

En búsqueda de un artefacto...

2.3.5 Condiciones de refutación (E).

Las condiciones de refutación son para Toulmin (2007) “las condiciones excepcionales que pueden hacer descartar o rechazar la conclusión justificada” (p. 137); hacen alusión a las objeciones, cuando no hay suficiente autoridad en la garantía o cuando aparecen circunstancias que hacen débil la garantía y hace que se deje a un lado.

2.3.6 Cuantificador Modal (M).

“...los calificativos o matizadores indican la fuerza conferida por la garantía en el paso adoptado...” (p.137). Muestra la intención de otorgar a la garantía la continuidad e importancia de justificar para culminar con un argumento.

2.4 ARTEFACTO.

Intencionalmente se escoge la construcción de un artefacto mecánico que dibuje la curva cicloide y se espera que durante su proceso se generen argumentos que validen su actividad.

Por tal motivo, en este apartado es preciso mencionar definiciones cuando se trata la introducción de un artefacto en el campo de la actividad matemática. Para el MEN (1998), “una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo” (p. 52).

Otro aporte se encuentra en Rivas (2013) quien cita a Rabardel (1995), precisa un enfoque de artefacto a seguir:

“pueden ser de distinto tipo; materiales y simbólicos. En los *materiales*, los de tipo *tecnológico* permiten realizar procesos que con artefactos *tradicionales*, como lápiz y compás, sería más difícil realizar, o bien no se

En búsqueda de un artefacto...

dejan ver y, por otro lado, los artefactos *simbólicos*, que permiten al geómetra utilizar instrumentos teóricos como teoremas, definiciones o ecuaciones al realizar una tarea específica” (p.1617).

En aportes mencionados, reconociendo también un artefacto desde la parte material, una definición que se utilizara en este trabajo, estará relacionado como un material concreto que parte de una transformación por la creatividad e ingenio del hombre y que a partir de su manipulación represente alternativas de uso con el objetivo de interés (mostrar que si hay producción de argumentos).

Por otro lado, Cortés (2013) define “los artefactos concretos parten de las contracciones físicas (p.116). Tal hecho, en mención del autor muestra que la implementación de ciertos artefactos físicos ha ayudado al desarrollo hacia el análisis matemático. Así mismo, el uso de los artefactos que ha trascendido a través del tiempo, el mismo autor en su investigación específica “Desde la época de los Griegos se han construido artefactos matemáticos para el trazado de las cónicas” (...) “estos aparatos eran a menudo articulados” (p.117). Esto muestra que la acción implementada de los artefactos físicos ha influenciado para generar procesos que quizá han sido de aportes argumentativos y seguirán influyendo en la participación de la actividad matemática. Este mismo autor manifiesta que

“...la introducción en el salón de clases de “contextos históricos de recreación de la experiencia científica”, en particular aquéllos que tienen que ver con la práctica de la geometría y que utilizan modelos mecánicos o articulados de máquinas para dibujar o trazar, como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas” (p.118).

En particular una investigación expuesta por(Cortés Zavala, Nuñez Palenius, Morales Ontiveros, 2013), en la aplicación de un instrumento mecánico para dibujar la elipse llamado elipsógrafo, y que tras su propuesta, análisis y la intervención de los estudiantes, se muestra un apartado que concluye aportes

En búsqueda de un artefacto...

que argumentan el proceso matemático realizado allí. El modelo implementado se muestra en la figura 4:

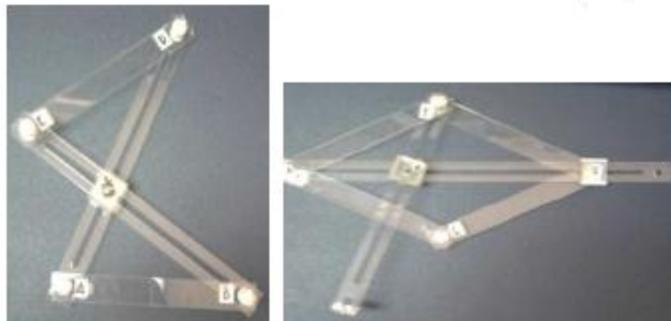


Figura 4. Elipsógrafo de palancas, construcción física.

Los autores expresan, como parte de su investigación “Para cada uno de los instrumentos, los estudiantes hicieron uso de recursos matemáticos como la utilización de representaciones algebraicas, lenguaje geométrico y transformación del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático, como parte fundamental en la construcción del conocimiento” (p.132). Lo cual muestra, que la introducción de un artefacto en el proceso matemático si puede generar actividad en éste campo, de tal forma que se pueden encontrar patrones, representaciones, tanto en su uso, así, como durante su construcción, ya que para lograr plasmar una representación gráfica, dibujo, el uso que se destine, para diseñar un artefacto es necesario de cierta manera contar con conocimientos predeterminados como medir, calcular, trazar y demás actividades, para así poder llevar a cabo una construcción apropiada.

Para Cortes (2013), “...las personas necesitan de experiencias y modelos sobre los que sustentar los conocimientos que adquieren y es mediante la manipulación, que los estudiantes adquieren una percepción más dinámica de las ideas” (p.118). Ideas que se pueden ampliar y desarrollar a partir de razonamiento abductivo, como el tipo de razonamiento que puede generar nuevas ideas. Y por qué no, hacer parte de los demás tipos de argumentación.

En búsqueda de un artefacto...

Por otro lado, Hoyos (2006) comparte en otra investigación, "...en el caso de la manipulación con los pantógrafos, los estudiantes primero [...] han de establecer una comparación con el dibujo que mecánicamente obtienen con ayuda del trazador de la articulación de la máquina en juego". (p.36). El pantógrafo es un instrumento que dibuja homotecias, resultando pertinente para el trabajo con proporcionalidad y el desarrollo de conjeturas. Los resultados manifiestan la efectividad; el autor advierte que:

"...es probable que una base para que se desarrolle discurso matemático en el aula y para que surjan significados matemáticos adecuados al tópico en cuestión se pueda alcanzar a través de la instrumentación de secuencias de actividades que involucren el uso de artefactos culturales que tienen una carga semántica fuerte desde el punto de vista matemático (Noss & Hoyles, 1996; Boero et al., 1997, citado por Hoyos, 2006, p.40).

Falconi (2005), aporta que los artefactos han sido de ayuda en priorizar apuntes y desarrollo en la matemática, por lo que muestra "...que desde épocas históricas antes y después de Descartes en relación a la geometría el uso de los instrumentos eran común para la creación de resultados matemáticos." (p.24), así, la referencia muestra, que para cierto momento era necesario saber del tema en específico, de sus conceptos, y contar con el apoyo de arquitectos, artesanos con cierto conocimiento matemático, lo que facilitaba producir herramientas, que con un hábil manejo aterrizaran y establecía información matemática importante para la solución de un problema. En vista de esto, al momento de entrar a manipular la construcción de un artefacto es necesario acentuar un conocimiento anticipado con el grupo que proyecte en buen fin la propuesta en este trabajo.

Para Escobedo (s.f) "Un artefacto es una cosa que habrá sufrido una transformación de origen humano" (p.4). Otros autores como, Verillon y Rabardel (1995, citado en Hoyos, 2006) reconocen la relevancia que han tenido los artefactos en el desarrollo en el conocimiento en la actividad del sujeto e

En búsqueda de un artefacto...

interacción con el medio ambiente (p.32). En cuestión, los mismos autores destacan la prioridad de investigar acerca de la influencia que genera el trabajar con estos artefactos. En sentido oportuno, y como ya se dijo, el presente proyecto tomará como foco el artefacto y su construcción para resaltar que se puede generar argumentación en un contexto específico.

2.5 CURVA CICLOIDE

2.5.1 Algo de historia

La primera referencia a esta curva está en un trabajo de Charles Bouvelles escrito en 1501 y a él es a quien se considera el verdadero inventor aun cuando la Cicloide ya había sido estudiada por Nicolás de Cusa, en 1450. Cusa trató de encontrar el área de un círculo por integración. Galileo, a quien la curva debe su nombre, trabajó con la cicloide y habría mostrado, en 1599, que su área es casi tres veces la del círculo que la genera y sugirió que el arco de la cicloide debería ser apropiado para construir puentes. Y así se hizo posteriormente. El padre Marín Mersenne (1588 -1648), en 1620, dio la primera definición de la cicloide y estableció sus propiedades obvias tales como que la longitud de la base es igual a la circunferencia del círculo que rueda. Intentó encontrar el área bajo la curva por integración pero falló y propuso el problema a otros matemáticos (Hernández, 2007).

En 1639 Galileo escribió a Evangelista Torricelli (1608 -1647) sobre la cicloide diciéndole que había estudiado sus propiedades durante 40 años y que intentó encontrar el área bajo la curva, comparando esa área con la del círculo que la genera por métodos mecánicos puesto que no pudo encontrar un método matemático para demostrarlo. Construyó arcos de cicloide y círculos de metal y los pesó, encontrando que la razón de los pesos era de aproximadamente 3 a 1 pero

En búsqueda de un artefacto...

decidió que no era 3 exactamente, de hecho, aventuró el comentario de que la razón no sería un número racional, equivocadamente (p. 120).

El estudio de la geometría de la Cicloide y sus propiedades continuó pero su estudio sistemático comenzó con Blaise Pascal (1623 -1662). Según cuenta la historia, él sufría de dolores de muelas y otros achaques la noche que empezó a 'rumiar' sobre la Cicloide pero, a tal punto se distrajo pensando en ella que sus penas desaparecieron. Entendió con esto que La Divinidad estaba de acuerdo y que autorizaba un último desliz matemático antes de dedicarse por completo a la vida mística. Según Hernández (2007), en 1634 Roberval, "...logró calcular el área encerrada por un arco de Cicloide usando su método de indivisibles, hallando que en efecto el área encerrada por un arco de Cicloide era igual al triple del área del círculo que genera la cicloide" (p.119). Más tarde, "Roberval y Torricelli demostraron que la longitud de la cicloide, cuando la circunferencia da un giro completo, es ocho veces el radio" (García, s.f.).

2.5.2 Algunas aplicaciones.

En cuanto a las propiedades avanzadas, ésta curva es solución de dos antiguos problemas de física: *braquistócrona* y *tautócrona*. El primero de ellos consiste en hallar la curva a lo largo de la cual una partícula rodará en el menor tiempo posible bajo la influencia de la gravedad desde un punto *A* hasta un punto *B* situado en una posición más baja. Fue el matemático suizo Jean Bernoulli quien en 1696 formuló por primera vez este problema y quien años más tarde lo resolvió: una partícula tomará el menor tiempo posible al deslizarse desde un punto *A* hasta un punto más bajo *B*, bajo la influencia de la gravedad, si sigue en su trayectoria la forma de un arco invertido de cicloide. Además la partícula gastará el mismo tiempo en llegar al punto más bajo del arco invertido de la cicloide sin importar desde qué altura se suelte. Este es el segundo problema, el de la *tautocronía*, y fue resuelto por el físico alemán Huygens.

En búsqueda de un artefacto...

Huygens resolvió éste problema intentando solucionar otro: determinar la longitud en el mar. En su intento de solución construyó un reloj de péndulo que no se viera afectado por el movimiento del barco en el mar usando la propiedad de la *tautocronía* de la cicloide, como se muestra en la figura 5 (Martín, 2004).

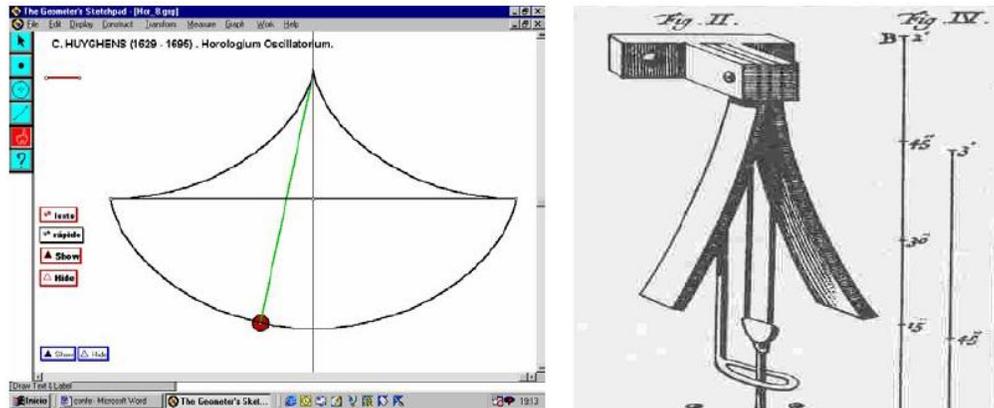


Figura 5. Modelo para la construcción del reloj de péndulo

Para Hernández (2007) “La curva cicloide se define como el lugar geométrico de un punto fijo de una circunferencia que gira sin deslizamiento a lo largo de una recta”. También puede concebirse como “...la curva trazada por un punto de una circunferencia (llamada circunferencia generatriz) cuando ésta gira sobre una línea (llamada recta directriz) sin deslizarse por ella”.

Una gráfica de la curva Cicloide en el programa de geometría dinámica Geo-gebra usando la herramienta *activar rastro* se observa como (fig. 6):

En búsqueda de un artefacto...

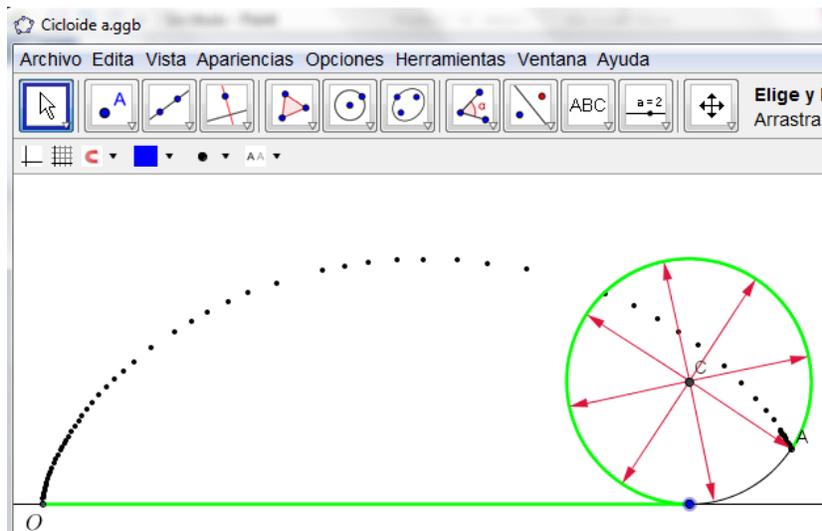


Figura 6. Curva Cicloide en Geogebra (Diseño propio).

2.5.3 Ecuaciones paramétricas de la Cicloide.

Para las ecuaciones paramétricas de la Cicloide se ha tomado información de Stewart (2007), una representación que permite plantear la definición de éstas ecuaciones en la Cicloide, otorgada por el mismo autor se encuentra a continuación.

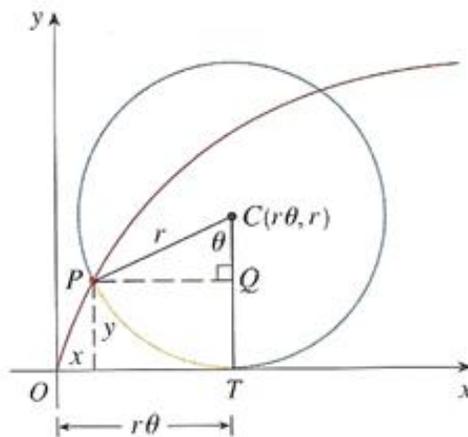


Figura 7. Representación cartesiana de ecuaciones paramétricas

En búsqueda de un artefacto...

Como la rueda no resbala sobre el suelo, lo que sabemos es que la longitud del arco TP sobre la circunferencia es igual a la longitud del segmento rectilíneo OT (fig. 7). Se supone que el círculo ha girado θ radianes, por lo tanto:

$|OT| = \text{arco } PT = r\theta$. Sean las coordenadas de $P = (x, y)$ y $C = (r\theta, r)$. Tenemos:

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r\text{sen}\theta = r(\theta - \text{sen}\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\text{cos}\theta = r(1 - \text{cos}\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la propuesta del proyecto. Se comienza por identificar el tipo de trabajo, luego, la población participante, el diseño del instrumento de recolección de información con su respectivo ajuste a partir de una prueba piloto, la actividad planteada y por último, la descripción del desarrollo en tres fases: ambientación, diseño y construcción del artefacto mecánico que dibuje una Cicloide.

3.1 TIPO DE TRABAJO

La metodología que se sigue es de tipo cualitativo-descriptivo ya que pretende realizar el estudio de caso de un grupo de estudiantes cuando realizan una tarea específica, que pretende favorecer discurso argumentativo entre sus participantes y como pretexto se escogió en común acuerdo por los encargados del proyecto la construcción de un artefacto mecánico que dibuje una curva Cicloide.

3.2 POBLACIÓN

Los estudiantes que participaron en este trabajo lo conforman dos grupos diferenciados. Un primer grupo que hizo parte de la prueba piloto y un segundo grupo que participó en la aplicación de la prueba definitiva. El primer grupo lo conforman 10 niños entre 14 y 16 años de edad del *Colegio Talentos* que cursan grado noveno y décimo del presente año. El segundo grupo lo constituyen seis estudiantes que cursan primer semestre de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá del periodo 2014-II.

Para realizar el trabajo, los estudiantes se organizaron de manera voluntaria. El primer grupo (Colegio Talentos), participó en la prueba piloto con el objetivo de

En búsqueda de un artefacto...

reajustar la guía. En el segundo grupo (sobre el que se aplicó la propuesta final), se conformaron dos equipos de tres personas cada uno, logrando así la interacción argumentativa entre los participantes en cada una de fase. Con relación a la guía, ésta se dividió en dos, una para el docente y otra para el estudiante. La aplicación se hizo en dos momentos: uno inicial como prueba piloto (anexo 1) y una versión final (anexo 2). Se establecen las siguientes generalidades tales como, tiempo estimado de 60 minutos, materiales como computador(es), Internet, guía del estudiante, guía del maestro, video beam (opcional).

3.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Para el diseño de instrumentos de recolección de información se tuvo en cuenta la guía escrita y videos tomados en distintos momentos de la actividad. Para la guía escrita primero se propone un ajuste a partir de prueba piloto (anexo 1) para una guía final (anexo 2). Luego de ajustada la guía se pasa a la aplicación de la actividad que cuenta con tres fases: fase uno, llamada Ambientación; fase dos denominada Diseño y fase tres de Construcción. Por otro lado, se cuenta con una guía para el docente (anexo3).

3.3.1 Prueba piloto

Teniendo en cuenta que el pilotaje sirve para indagar la pertinencia y viabilidad de las preguntas, se muestran los cambios o modificaciones en las mismas, así como un ajuste a las representaciones figúrales.

En el análisis de resultados de la prueba piloto se tuvieron en cuenta los diálogos e interacciones entre los estudiantes, consignados en el video y en la guía escrita. A continuación se describen los ajustes realizados a la prueba.

La pregunta número 1 del problema de la bicicleta (anexo 1): *“Describa el movimiento que haría el punto como si estuviera en un plano”* no fue clara para los

En búsqueda de un artefacto...

estudiantes, menos cuando el espacio fue limitado en la guía. Para lograr mayor comprensión, la pregunta fue corregida como (anexo 2): “¿Qué puede decir del movimiento que hace el punto?”. Así que esta pregunta se convierte en una pregunta abierta, que también puede sugerir discurso argumentativo.

La pregunta número 2 (anexo 1) del problema de la bicicleta: “¿Si el punto dejara un rastro, qué figura resultaría? Describa (dibuje) el rastro del movimiento del punto en el siguiente espacio”, presenta interpretaciones distintas a las esperadas, por ejemplo, pensaron en el movimiento de la rueda indicando la dirección y el momento en que la rueda se devuelve (fig. 8). Puede notarse en esta pregunta que fue decisivo el hecho de mostrar una sola vuelta. Fue reformulada como (anexo 2): “Si el punto dejara un rastro ¿Qué figura resultaría? Realice un dibujo en el espacio.”

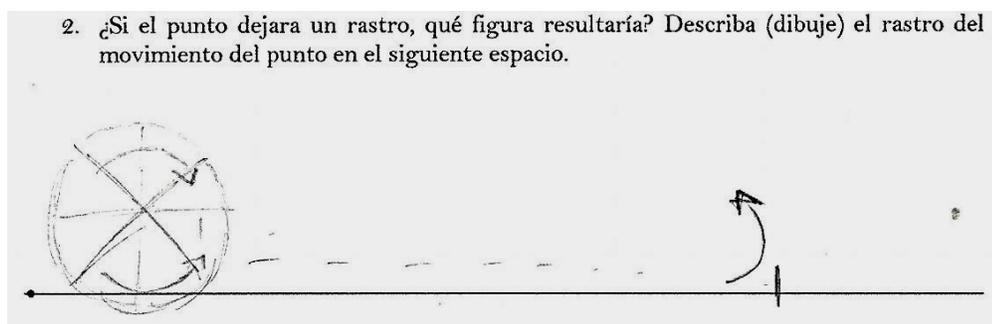


Figura 8. Señalando un momento preciso

El segundo grupo de preguntas (donde interviene el instrumento de mediación) se divide en cinco partes, donde los estudiantes deben realizar conjeturas y representaciones de las mismas. La pregunta a: “¿Cuándo el punto A estará en el lugar más alto?”(Anexo 1) fue reformulada por: “¿Dibuja el momento en que el punto A estará en el lugar más alto?”(Anexo 2). Se observa que la pregunta c y a están estrechamente relacionadas: c sería solución de a por tanto, así que fue modificada la representación, desplazando el punto B un poco a la derecha (anexo 2). Por otro lado, esta pregunta sugiere cierto control de la representación en cuanto a la precisión y rigor con que se traza la curva. Se observa mayor control

En búsqueda de un artefacto...

en la representación de la primera guía, donde se ubica la figura justo cuando A se encuentra en el lugar más alto (fig. 9).

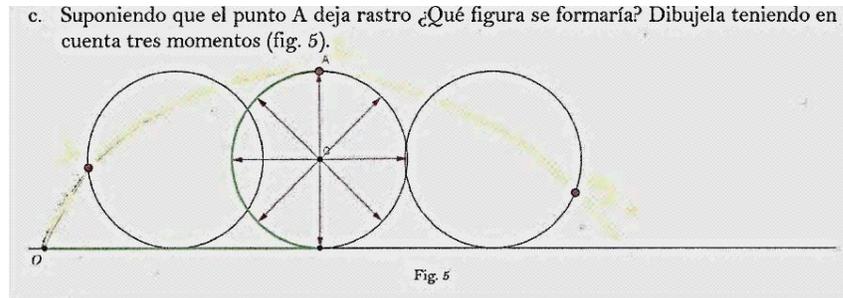


Figura 9. Identificación del punto más alto de la Cicloide

En relación a la pregunta *d*, se omite la frase: “...*luego de dar una vuelta completa...*” La pregunta *e* tiene un carácter general y concreto, aunque se pensó reformular no se hizo finalmente. El último apartado sin numeral donde se pregunta por el nombre de la curva se omite. En la prueba de ambientación se pretende que los grupos interactúen entre ellos sin la mediación del docente que guiaba la prueba. Para que identificaran a partir de unas pregunta secuenciales la curva cicloide.

La actividad se verá enriquecida con un video (2) donde se define la curva y se tratan algunas propiedades de la misma, con ejemplos de otras curvas y una pequeña aplicación de la Cicloide como ejemplo histórico de uso de las matemáticas en la construcción de instrumentos y artefactos.

3.4 PROPUESTA.

En primera medida se hará referencia a la actividad específica que motivó la realización de este trabajo. La actividad de construir un artefacto mecánico que dibuje una curva particular tiene sus orígenes en la curiosidad de dibujar el número pi (π). Tal curiosidad llevó a la pregunta: *¿Mediante la actividad de construcción de un artefacto mecánico se genera argumentación en el aula? Por*

En búsqueda de un artefacto...

otro lado, desde Menecmo a Leonardo y Descartes (Cortez et al. 2013) ya se hacía uso de artefactos mecánicos para el trazado de curvas, como las cónicas. Parte de nuestra intención es reconstruir vestigios de dicha historia, por tanto acudimos y damos forma a la idea (tarea) de que la construcción de un artefacto que dibuje la curva Cicloide favorecerá la argumentación en un aula de clase de matemáticas.

Como se había mencionado, la actividad se desarrolla en tres fases: ambientación, diseño y construcción. La primera fase de ambientación se constituye fundamentalmente por la aplicación de la guía escrita, que permitiría al estudiante contextualizarse en la situación. En el diseño se propone un prototipo y en la construcción se plasman finalmente las ideas expuestas a lo largo del proceso sin olvidar que la propuesta apunta a generar argumentos por parte de los estudiantes desde la actividad planteada.

3.4.1 Fase Ambientación

La fase de ambientación toma dos desenlaces para su ejecución; por un lado, las dos primeras preguntas, se responden sin información adicional a la observada en el movimiento de la rueda, es decir, cuando uno de los docentes hace girar una rueda en el suelo y pide a los estudiantes observar un punto fijo de ésta.

Por otro lado, de la tercera pregunta en adelante se responde contando con el apoyo de un software de geometría (Geo-gebra) y videos extraídos de la Internet como recursos computacionales de representación. Para simular el movimiento de la rueda, se presenta un ejemplo en Geo-gebra (fig. 5), diseñado por los docentes proponentes. El software es conocido por los estudiantes, por lo tanto, no presentó inconvenientes o dudas acerca del funcionamiento del mismo. Luego se presenta un video¹ que se refiere a algunas propiedades de la curva Cicloide y aplicaciones en el deporte (skate). Entre las propiedades se menciona la *braquistócronia* y *tautócronia*, ésta última demostrada por el físico holandés

¹ Recuperado en <http://www.youtube.com/watch?v=m8Qli77-K9o>

En búsqueda de un artefacto...

Huygens “no importa donde se coloque una partícula P en una cicloide invertida, tarda el mismo tiempo en deslizarse hasta el fondo” (Stewart, 2007, p.79). Para finalizar la ambientación y a manera de ejemplificación, se presentan algunas curvas afines a la Cicloide, tales como la Hipocicloide (fig. 10)², Epicicloide (fig. 11)³, entre otras.

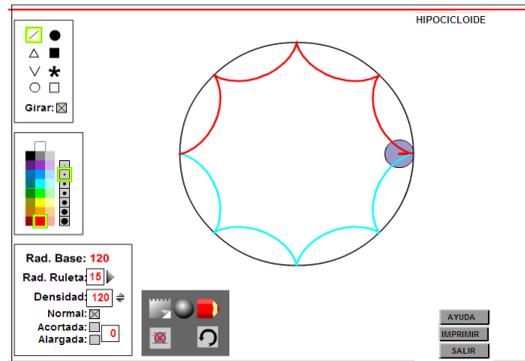


Figura 10. Curva afín (Hipocicloide)

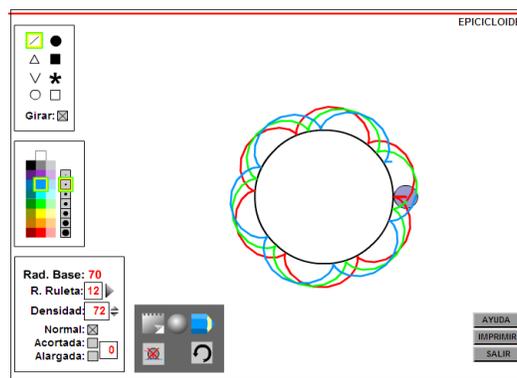


Figura 11. Curva afín (Epicicloide)

En relación a lo expuesto, el uso de la tecnología favorece la propuesta como una herramienta que entra en juego como apoyo para la conceptualización, al respecto Gómez (s.f) menciona que “se hace evidente que la evolución de las concepciones del sujeto puede depender de la presencia de la tecnología, como agente didáctico que influye en el funcionamiento del sistema” (p.3). Por otra

² Recuperado en <http://www.educacionplastica.net/hipocicloide.html>

³ Recuperado en <http://www.educacionplastica.net/epicicloide.html>

En búsqueda de un artefacto...

parte, Gómez (s.f.) rescata que “...la geometría es un campo en el que se han realizado desarrollos importantes. Los programas del estilo de Cabri–Geometre le permiten al sujeto ver y manipular los objetos matemáticos y sus relaciones dentro de esquemas inimaginables con el lápiz y el papel” (p.7).

3.4.2 Fase de diseño

La fase de diseño se lleva a cabo en otro momento, luego de identificar y reconocer la curva Cicloide. Los estudiantes presentan sus diseños a manera explicativa en gráficas, de las cuales algunas de ellas se exponen en los argumentos. Fueron dos los diseños expuestos. Por ejemplo, el grupo 1 expone un diseño (fig. 12) compuesto de un piñón y una especie de “corredora”, mientras el grupo 2 intenta un diseño menos complejo (fig. 13).

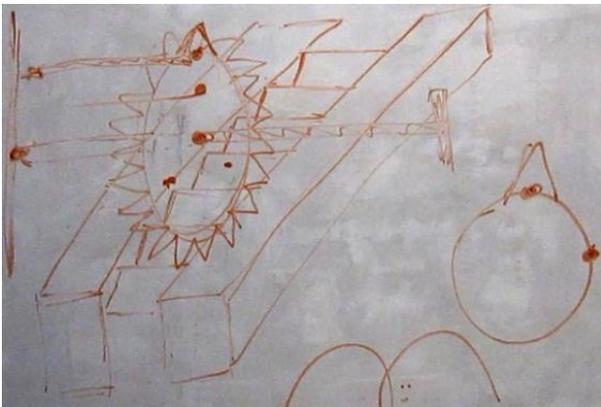


Figura 12. Diseño propuesto por E1. Figura 13. Diseño propuesto E4

3.4.3 Fase construcción

En la etapa de construcción se presenta un artefacto por cada grupo. Se usó materiales como, cartón, madera, ruedas plásticas, lija, entre otros (fig. 14). Al final se lograron construir dos prototipos. El grupo 2 presenta un artefacto construido a partir de un carrete, en cual se acomoda una mina en uno de los extremos (fig. 15). El grupo 1 finaliza con un artefacto que incluye soportes, lija, rueda dentada, tabla de apoyo, entre otros (fig. 16).

En búsqueda de un artefacto...



Figura 14. Materiales



Figura 15. Prototipo artefacto por (E4)



Figura 16. Prototipo artefacto (E1)

4. ANALISIS DE RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos por los dos grupos participantes. Se presentara el análisis de algunos argumentos evidenciados en el registro escrito y en las grabaciones de audio y video. Para efectos del análisis de resultados, los seis participantes serán nombrados de la forma: E1, E2, E3, E4, E5 y E6. Otros participantes son los docentes guía Pr1, Pr2 y el profesor (D) tutor de los estudiantes. Esto se hace para tener en cuenta un orden y/o claridad de participación en el momento de justificar verbalmente mediante escritos y socialización de grupo.

Se comienza por revisar los escritos de la guía y se contrasta con las grabaciones de audio y video que enriquecen lo registrado en la hoja de trabajo. Se usan fragmentos de transcripción para realizar el análisis de argumentos. Las evidencias provienen de los fragmentos de transcripción, fotografías e imágenes del registro escrito.

En este análisis se toman algunas consideraciones de la estructura de argumento propuesta por Toulmin (2007), principalmente modelo simple (Fig.1) planteada en el marco teórico. Según el autor un argumento se puede generar mínimo con tres elementos: dato, garantía y conclusión. Sin embargo, es posible que aparezcan argumentos con mayor número de elementos como excepción o refutación y garantías con respaldos y modalizadores; también se tendrá en cuenta los tipos de razonamiento manifestados en el marco teórico, teniendo en cuenta de antemano que a pesar de que no hay una teoría que guie fácilmente y defina apropiadamente la correspondencia de argumento deductivo, abductivo, inductivo, se hará una aproximación y se indicara en los argumentos que ofrecen los estudiantes. Los argumentos se organizan en tablas que muestran el dato, la conclusión, garantía extraída de un fragmento de transcripción (tomada como descripción), una clasificación del argumento y una pregunta, hecho o explicación.

En búsqueda de un artefacto...

4.1 FASES

Como ya se mencionó, el desarrollo de la propuesta está dividido en tres fases: uno, dos y tres. Se hace una descripción de lo sucedido en cada fase, para luego proceder al análisis de los argumentos y planteamientos teniendo como herramienta el Modelo Argumentativo de Toulmin.

Durante la fase dos se planean el diseño del artefacto que dibujará la curva Cicloide. En la fase tres, se presenta el artefacto con la propiedad de dibujar la curva mencionada. Se describirán los argumentos más relevantes de cada fase teniendo en cuenta la variación del componente dato (D) y las interacciones de los estudiantes.

De las transcripciones se toman los momentos más relevantes de las interacciones entre los estudiantes, donde se identificaron posibles argumentos. Cada argumento se describe señalando la fase en la cual se obtuvo.

4.1.1 Fase uno.

Como medios de comunicación y representación aparecieron gráficas, bocetos propios y discurso verbal (escrito y oral) durante el desarrollo de la fase, la cual pretendía identificar la curva Cicloide. En este tránsito, se evidenciaron un grupo importante de argumentos que se describen a continuación.

4.2.1.1 Argumento 1

En la pregunta 1 del problema de la bicicleta, E4 evidencia un primer intento de explicación del movimiento realizado por el punto. Mientras los estudiantes discutían entre sí, uno de ellos (E4) intenta convencer a los demás. Se observa una posible hipótesis para la figura que describe el punto cuando se mueve la llanta: “...*Semicircular, porque presenta el arco, como un arco de circunferencia que se va repitiendo.*” El estudiante percibe la gráfica del presunto rastro dejado por el punto, como una semicircunferencia; se toma como primera hipótesis. Esta hipótesis toma fuerza más adelante (argumento 7) con el estudiante E1.

En búsqueda de un artefacto...

Se podría clasificar el argumento como abductivo ya que se trata de una explicación, de una inferencia inicial. El estudiante intuye que la figura es una semicircunferencia, debido quizá a la estrecha relación visual con la circunferencia, puesto que el punto parecería deslizarse por ésta. Sin embargo, puede ser un arco de circunferencia y no precisamente una semicircunferencia, si no se toma la palabra semicircular como la mitad del círculo. Por otra parte, parecen usar indistintamente el significado de círculo y circunferencia. El dato corresponde al hecho de realizar el movimiento físico de la rueda por parte de uno de los docentes (fig. 17). Las conclusiones son hipótesis, presuntas explicaciones al hecho; hacen referencia a una figura geométrica conocida, es decir un arco de semicircunferencia. A continuación se presenta el argumento logrado por E4 en la tabla 1:

Tabla 1. Análisis argumentativo de la fase uno por estudiante E4, la observación

Argumento 1	Pregunta de lo observado: ¿Qué puede decir del movimiento que hace el punto? (La pregunta no esta en la guía del estudiante)
<p>Interacción:</p> <p><i>E4: "...es como circular, uniforme podría ser también, es que no sé, creo que lo de uniforme y cíclico queda redundante... pero pues, diría yo que queda redundante. Cíclico, pues se va repetir... movimiento. Semicircular, porque presenta el arco, un arco de circunferencia que se va repitiendo. He... uniforme, pues siempre va a ser la misma cantidad, o sea, se va a repetir el... el punto siempre va a estar en el mismo lugar, cierta cantidad de movimiento de la llanta."</i></p> <p><i>E5: Si, eso es lo que yo decía ¿pero cómo sería entonces?</i></p> <p><i>E6: Ah, pero uniformemente acelerado sería lo mismo que, no sería uniforme lo mismo que [...] o sea, ahí estás haciendo una redundancia.</i></p> <p><i>E5: Entonces escribamos que en el punto, pero como escribimos...como así que... siempre el punto... ahí. [...]</i></p> <p><i>E6: Es que matemáticamente... para mí sería el punto... a pesar de que lo movamos siempre va estar... este... a igual distancia, o sea, no importa que este acá o acá, siempre va a estar a la misma distancia del centro [...]</i></p>	

Dato	Conclusión(es)	Garantía
Movimiento físico de la rueda mostrando el punto de referencia 	Circular	Movimiento constante (<i>“pues se va repetir...”</i>). Parece hacer referencia a propiedades del movimiento circular en física.
	Cíclico	
	Uniforme	<i>“...el punto siempre va a estar en el mismo lugar, cierta cantidad de movimiento de la llanta...”</i>
	Semicircular	Es la figura resultante del movimiento realizado por el punto: <i>“...un arco de circunferencia que se va repitiendo.”</i>

Figura 17. Movimiento de la llanta

4.2.1.2 Argumento 2

Con relación a la segunda pregunta, los estudiantes del grupo de E4 presentan su primer bosquejo, resultado de las interacciones. Se evidencian ideas como: “el punto de la rueda va cambiando de posición”, aunque los integrantes lo asumen como algo lógico, cabe la certeza de que la afirmación que hacen identifica el posible rastro al cual apunta el grupo en general. Un bosquejo de la gráfica se observa en la figura 19.

El dialogo a continuación es un el seguimiento de la anterior interacción, por tanto, nuevamente se recalca que, a pesar de no acertar con la curva esperada y su reconocimiento, sí se hace afirmaciones escritas ya expresada: *“...Semicircular, porque presenta el arco, como un arco de circunferencia que se va repitiendo.”*

Aunque la conclusión dada en la (figura 19), no corresponde a la gráfica esperada, tomando como el dato una bicicleta antigua, (figura 18), refleja un resultado inconsistente. La incomprensión de los estudiante del hecho de observar y guiado por la bicicleta en mención, se hace sorprendente cuando, sin decir nada se les pregunta ¿cuáles el rastro que deja el punto cuando la llanta rueda sobre el piso al dar una vuelta completa? (lo inesperado al parecer produce sorpresa). De manera

En búsqueda de un artefacto...

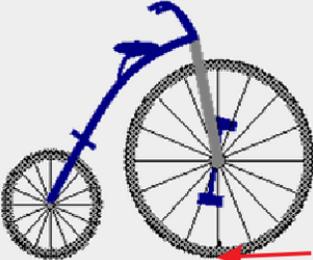
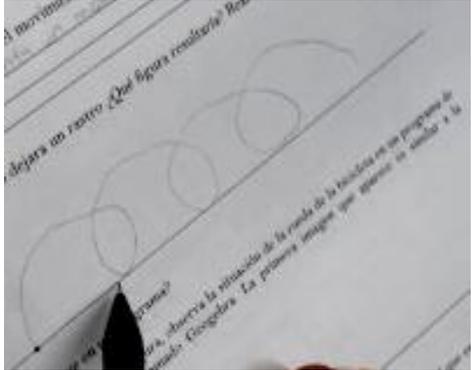
espontánea los estudiante se miran entre si y se da inicio al desarrollo de la tarea propuesta, esto que manifestó sorpresa, es considerado para Peirce (1901, citado por Barrena, 2001) como parte del proceso de abducción, algo que casi no es tan fácil de evidenciarse, (tratado en el marco teórico) pero que hace parte del razonamiento, así, se ha generado ideas nuevas por los estudiantes mediante la comparación y la observación entre la curva que hace la llanta y el arco que dibujan.

Por tanto, el argumento presente se percibe como un tipo de razonamiento abductivo y lo que se tomo como “sorprendente” en este caso ha reflejado como respuesta “*Semicircular, porque presenta el arco, como un arco de circunferencia que se va repitiendo*” así, tal afirmación representa la garantía, ya que en relación en el contexto para Pierce lo sorpréndete, para Toulmin es la “garantía” al establecer un argumento justificando la conclusión. Luego, en muestra de la anterior descripción, y amoldado al modelo manejado en este trabajo se representa un argumento en la tabla 2:

Tabla 2. Análisis argumentativo dos, de la fase uno por estudiante E4; la representación.

Argumento 2:	Pregunta 1: Si el punto dejara un rastro ¿Qué figura resultaría?
<p>Interacción:</p> <p>E5: Si el punto dejara un rastro ¿Qué figura resultaría? Realice un dibujo en el espacio</p> <p>E6: o sea ¿Qué movimiento presenta?</p> <p>E5: Si el punto dejara un rastro... toca describir cada vez que de la vuelta. Para allá, já, já, já</p> <p>E4: Bueno, entonces es algo así como esto, algo así...</p> <p>E6: Sí, dado que da la vuelta</p> <p>E4: Bueno ahí se repite, bueno más o menos así [figura 19.]</p> <p>E5: Sí, así</p> <p>E4: ...si fuera algo perfecto</p>	

En búsqueda de un artefacto...

<p><i>E6: digamos que aquí es la llanta, esta llanta, entonces a lo que va dando la vuelta el punto se va a trasladar</i></p> <p><i>E4: ...pero, el punto tendría que quedar, o sea, la circunferencia tendría que quedar como por aquí... si me entiendes</i></p>		
Dato	Conclusión(es)	Garantía
 <p>Figura 18. Evoca el movimiento físico de la rueda</p>	<p>Se concluye un bosquejo aproximado a la Curva Cicloide</p>  <p>Figura 19. Bosquejo inicial de la curva cicloide.</p>	<p>Se toma como implícita, un arco de circunferencia que se va repitiendo:</p> <p><i>E4: ...pero, el punto tendría que quedar, o sea, la circunferencia tendría que quedar como por aquí...</i></p>

4.2.1.3 Argumento 3

Los procedimientos seguidos por los estudiantes E1 y E3 para trazar la curva Cicloide son cálculos métricos aproximados e intuitivos. En ningún momento copian la medida del diámetro o radio de la circunferencia (representación de la hoja guía) para realizar algún tipo de transferencia de medida, simplemente con un cálculo visual aproximan el trazado de la curva en cuestión (Fig. 20). Comienzan realizando medidas tentativas visuales, como por ejemplo, se valen de una moneda para representar la altura (Fig. 21). La escogencia de la moneda ya representa generalización, ya que se toma una unidad cualquiera (en este caso el diámetro de la moneda) como referente para representar la altura de la curva Cicloide. Además, el estudiante representa una simulación desplazando la moneda sobre la recta dibujada en la hoja – guía, lo cual le permitió explicar a sus

En búsqueda de un artefacto...

compañeros que al visualizar un punto en el extremo de la moneda (mientras compara lo que se desplaza), se evidencia la longitud de arco de circunferencia. Se toma este hecho como una garantía para realizar el boceto de la curva. Desplazar la moneda por la hoja también resulta un garante, ya que se trata de un hecho comprobado visualmente por E3 "...Si usted le saca un círculo, más o menos este punto tiene que terminar acá...". La conclusión comienza siendo refutada por su carácter irreal "...si pero, entonces no puede ser...", (Fig. 22). Aun así, vuelve a ser refutada: "Eso, así. [...] No aquí no iba esa vuelta... esa vuelta es más cerrada." para terminar con una representación más aproximada del dibujo de la curva (Fig. 23).

Tabla 3. Análisis argumentativo de bosquejo de la Curva Cicloide.

Argumento 3:	Pregunta 2: Sí el punto dejara un rastro ¿Qué figura resultaría?
<p>Interacción:</p> <p>[...]</p> <p>E3: ...más o menos este punto tiene que terminar acá, aproximadamente ¡no!, si usted le saca un círculo...</p> <p>E2: ...y ahí ¿vuelvo y hago otro así? Pero se cierra</p> <p>E1: Si bueno</p> <p>E1: Espere... el punto tiene que...</p> <p>E2: ...el punto tiene que verse diferente en cada uno</p> <p>E3: saquen una moneda...</p> <p>[...]</p> <p>E3: Ya, ya lo entiendo más o menos</p> <p>E1: El punto esta acá</p> <p>E3: ...acá ya tiene que estar arriba...</p> <p>E1: ...es una elongación, pero...</p> <p>E3: Espere, o sea, es como así: cada vez da una vuelta más.</p> <p>E1: ...si pero, entonces no puede ser...sí, sí, sí, pero... yo lo haría así.</p>	

En búsqueda de un artefacto...

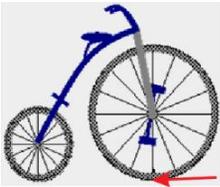
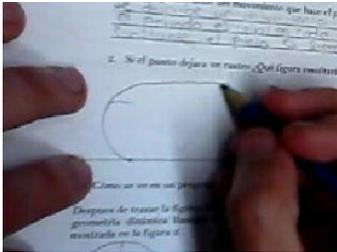
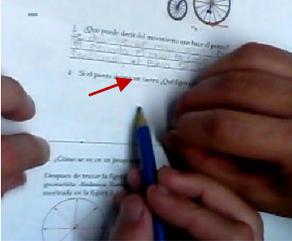
E3: ...Pues, obviamente tiene que ser un círculo más grande

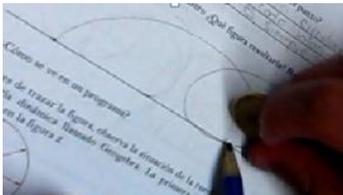
E3: Eso, así. [...] No aquí no iba esa vuelta... esa vuelta es más cerrada.

E1: A sí,... la vuelta es acá más cerrada

E3: No... la idea está bien, solo es que la vuelta es más cerrada

E1: ...es como en punta."

Dato	Conclusión	Garantía	Refutación
 <p>Figura 18. Bicicleta antigua</p>	<p>1.</p>  <p>Figura 20. Primer boceto (elongación)</p>	<p>- Desplazamiento de la moneda sobre el segmento que representa el plano. El estudiante visualiza un punto en el extremo de la moneda mientras compara lo que se desplaza y la longitud de arco de circunferencia.</p> <p>- ...acá ya tiene que estar arriba...Lo toman como el momento más alto. Al parecer es el diámetro de la circunferencia, lo que garantiza la máxima altura. La moneda es utilizada como artefacto, como unidad de medida.</p>  <p>Figura 21. Punto más alto de la Cicloide</p>	<p>...es una elongación, pero...</p>

	<p>2.</p>  <p>Figura 22. Usando la moneda</p>	<p>G1</p>	<p>E1 no se convence con el dibujo de E3, el de la figura 6:</p> <p><i>E1: "...si pero, entonces no puede ser...sí, sí, sí, pero... yo lo haría así."</i></p> <p>[Borra y realiza su diseño; figura 22]</p>
	<p>3.</p>  <p>Figura 23. Representación de la Cicloide, E1.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - G2, puesto que determina la altura máxima (diámetro) - G1, ya que en ésta se menciona que el estudiante desplaza la moneda y nota donde está el punto mientras da vuelta - E1: <i>A sí, ... la vuelta es acá más cerrada</i> E3: <i>No... la idea está bien, solo es que la vuelta es más cerrada</i> E1: <i>...es como en punta."</i> 	<p><i>E3: Eso, así. [...]</i> <i>No aquí no iba esa vuelta... esa vuelta es más cerrada</i></p> <p>Tras notar la inconsistencia del dibujo proponen otro boceto; figura 8</p>

4.2.1.4 Argumento 4.

Luego de observar la situación en ambiente computacional Geo-gebra, se propone resolver las preguntas del segundo numeral. Interviene directamente el docente aclarando la pregunta, la cual es respondida de forma verbal y no mediante un dibujo. Sin embargo, el texto tiene un fuerza equivalente (si no mayor) que la del boceto. El grupo de E1, E2, E3 registra en la hoja de trabajo (Fig. 24) su acuerdo, mientras que en el dialogo se confirma el mismo. La representación en el programa dinámico fue crucial para la respuesta, ya que al ejecutar el software se

En búsqueda de un artefacto...

realizó el movimiento de ir y volver de la rueda dos veces. En apoyo a la argumentación se podría aproximar a un argumento deductivo puesto que los datos reafirman la conclusión y cuentan con ayuda del ambiente computacional Geo-gebra y además una recopilación de cuestionamientos entregados en una guía a los estudiante en propósito de reconocer la curva Cicloide. A continuación el argumento se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 4. Análisis argumentativo el punto más alto de la curva

<p>Argumento 4.</p>	<p>Pregunta 2a: Dibuja el momento en que el punto A estará en el lugar más alto.</p>	
<p>Interacción</p> <p><i>Pr1: ...que esa era la gráfica y ustedes vieron [...] digamos, entonces ¿en qué momento estaría en el lugar más alto? ¿Podría dibujarlo?</i></p> <p><i>E1: Cuando haya... completado media circunferencia... cuando haya, se haya movido media circunferencia... o sea, cuando el punto que esta acá en esta flechita, llegue al suelo...</i></p> <div data-bbox="289 1167 1401 1480" style="text-align: center;"> </div> <p>Figura 24. Pregunta 2a momento más alto de la curva</p> <p>Fig. 24</p>		
<p>Dato(s)</p>	<p>Conclusión(es)</p>	<p>Garantía</p>
<p>- Representación de la guía, figura 3, cuando la “rueda” ha avanzado poco menos de un</p>	<p>- <i>Cuando haya... completado media circunferencia...</i> (Extraído</p>	<p>- Realizan una construcción aproximada para completar un cuarto de circunferencia y duplican esta</p>

En búsqueda de un artefacto...

<p>cuarto de circunferencia (Figura 9).</p> <p>- Manipulación del programa de geometría dinámica por parte de un docente.</p>	<p>de registro verbal).</p> <p>- Cuando ésta haya recorrido medio arco de circunferencia (Extraído registro escrito).</p> <p>- Boceto de la figura 24.</p>	<p>medida para completar “medio arco de circunferencia”. Es entonces una garantía, la construcción lineal de la medida de media circunferencia señalado por \overline{OQ}.</p> <p>- Noción de semicircunferencia implícita.</p>
---	--	--

4.2.1.5 Argumento 5

La interacción comienza cuando E3 realiza un dibujo intentando conectar los puntos de los tres momentos. Cabe resaltar que la visualización en el ambiente computacional fue de ayuda para aproximar y precisar la gráfica. Otro elemento de apoyo fueron los tres momentos de referencia, que hacen referencia al dato (Fig. 25). Como garantía se toma el reconocimiento de que los tres puntos son tres instantes – guía, para el trazado de la curva (Fig. 26) como conclusión, así como, la determinación de la mayor altura de la curva en el punto *A*, es decir, cuando la circunferencia ha recorrido media vuelta. La preocupación por determinar la mayor altura de la curva, los llevo a obtener un mejor boceto que los dibujados anteriormente. Se toma entonces la altura, como una garantía para una óptima representación, dado que en preguntas anteriores en sus bocetos no se preocupaban por la precisión, ni tampoco contaban con los elementos de ayuda como el software y la representación de los tres momentos.

Tabla 5. Análisis argumentativo cinco de la fase uno, por reafirmado la curva Cicloide

<p>Argumento 5.</p>	<p>Pregunta 2c: Suponiendo que el punto A deja rastro ¿Qué figura se formaría? Dibújela teniendo en cuenta tres momentos.</p>
<p>Interacción:</p> <p><i>“E1: ...dibujando teniendo en cuenta los tres puntos, serían los tres</i></p> <p><i>E2: Exacto, porque este momento no va a ser el mismo momento de acá...</i></p>	

En búsqueda de un artefacto...

E3: Son tres momentos... Si ve, solo pasa un poco más alto.

E1: por eso, es que usted está suponiendo que...

E3: Ah no, no tampoco, era un poco más alto, no todo ¿si me entiende?

E1: Sí, sí, sí..."

Dato

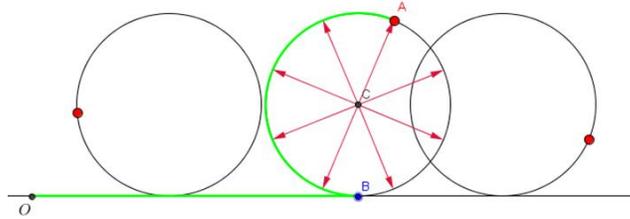


Figura 25. Los tres momentos

Conclusión

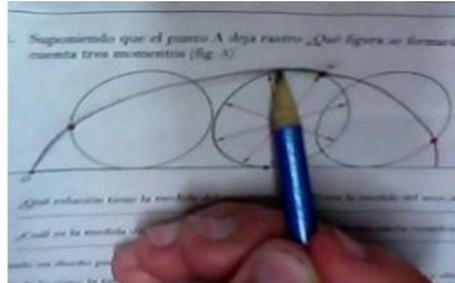


Figura 26. Señalando la altura máxima de la curva

Garantía

Reconocimiento de que en cada momento existe un punto guía para el trazado de la curva, incluyendo el punto inicial O.

Se toma como implícita la medida del diámetro de la circunferencia para determinar la altura máxima y realizar un boceto lo más fiel posible.

E3: Son tres momentos... Si ve, solo pasa un poco más alto.

[...]

E3: Ah no, no tampoco, era un poco más alto, no todo ¿si me entiende?

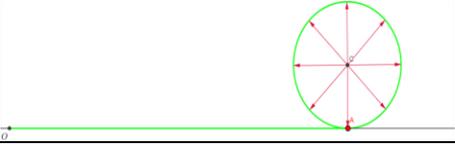
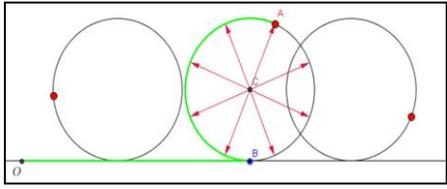
E1: Sí, sí, sí..."

4.2.1.6 Argumento 6

Los ítem b, d y e, de la pregunta 2 se relacionan entre sí, por tanto, hacen parte de un mismo argumento que concluye en la pregunta e. El ítem b se relaciona con en este argumento porque los estudiantes dieron respuesta diferente a la esperada, razonaron solamente sobre la figura relacionando la distancia OB con el arco AB y no razonaron sobre lo que sucedería después. La pregunta d , se fundamenta en la interacción entre el grupo, quienes se apoyaron entre sí, para inferir la igualdad entre medidas (“*congruencia*” en sus propias palabras), entre el segmento OB y la medida del arco AB . Mientras van justificando, van señalando los objetos relacionados (segmento y arco). Es de notar en este momento, que el razonamiento puede ser clasificado como abductivo, ya que suponen que la medida del segmento y el arco son la misma ($OB = AB$) porque han vivenciado una serie de hechos que apuntan a confirmar la hipótesis, en este caso, durante el desarrollo de las mismas preguntas ofrecidas en la guía entregada. Es más, se ha pintado intencionalmente del mismo color el segmento OB y el arco AB en algunas representaciones de las preguntas. Tratamos cada representación como una réplica, como un experimento, como un momento o confirmación de la igualdad entre dos medidas de diferente naturaleza, lo que los lleva a manifestar que las medidas de los segmentos que comparan es la medida de una circunferencia. Este hecho lleva posiblemente a inferir (inductivamente) la respuesta de la pregunta e: $A = 2\pi r$, donde A representa “*el arco de la circunferencia*” (nuevamente, por el proceso que se ha llevado para reconozcan la curva Cicloide y relaciones matemáticas posibles). Puede decirse que los estudiantes se valen de la noción de perímetro de circunferencia y que toman como datos incluso representaciones anteriores (Fig. 26), también esta la (Fig. 27). Se toma como evidencia el registro físico de la hoja de trabajo y algunos diálogos relevantes extraídos de los fragmentos de transcripciones.

Tabla 6. Análisis argumentativo seis de la fase uno, longitud de la circunferencia.

<p>Argumento 6:</p>	<p>Preguntas:</p> <p>2b. ¿Qué ocurrirá luego que la rueda de una vuelta completa? Realiza un esbozo o describa lo que sucedería</p> <p>2d. ¿Qué relación tiene la medida del segmento $m(OB)$ con la medida del arco AB?</p> <p>2e. Suponiendo que la medida del radio $m(AC)$ sea igual a 1 ¿Cuál es la medida del segmento $m(OB)$ cuando la rueda da una vuelta completa?</p>
<p>Interacción:</p> <p>“E5: ...con la medida del arco AB ¿Qué relación hay entre con éste? [Señala los segmentos de color verde]</p> <p>E6: Son la misma medida</p> <p>E5: Si claro</p> <p>E6: Son congruentes... cuando una... cuando la una aumenta la otra tiene que aumentar. Son congruentes, que la medida OB...</p> <p>E4: No nos preguntan nada con congruencia...</p> <p>E6: ...pues dice: ¿Qué relación tiene la medida del segmento? Pues ¿Qué relación? Que al aumentarse...</p> <p>E5: ...con la medida, el segmento... con la medida, o sea, éste segmento $[OB]$ con la medida que ahí de aquí a acá [señalando el arco AB]</p> <p>E6: ...pues tiene que ser congruente, porque si una aumenta la otra va a aumentar.”</p> <hr/> <p>d. ¿Qué relación tiene la medida del segmento $m(OB)$ con la medida del arco AB?</p> <p>$m(OB) = m(\widehat{AB})$</p> <hr/> <p>e. ¿Cuál es la medida de segmento $m(OB)$ cuando la rueda da una vuelta completa?</p> <p>$A = 2\pi r$ siendo A el arco de la circunferencia.</p>	

Dato(s)	Conclusión(es)	Garantía
<p>Representaciones anteriores</p>  <p>Figura 27. Representación pregunta 2b</p>  <p>Figura 26. Los tres momentos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - “Al dar la vuelta el punto se desplaza la medida del arco de la circunferencia” [Extraído de registro escrito] - “Son la misma medida” [Registro de audio] - $m(OB) = m(\widehat{AB})$ [Relación de equivalencia en la medida]. - $A = 2\pi r$ siendo A el arco de la circunferencia (tomado guía escrita). - E3: Creo que ahí si era lo que yo decía: dos, dos pi... 	<ul style="list-style-type: none"> - ... porque si una aumenta la otra va a aumentar.” (proporción directa) - Noción implícita de perímetro de la circunferencia.

4.2.2 Fase dos.

Durante la fase dos realizo el diseño del artefacto que dibujaría la curva Cicloide. Las ideas de diseño se presentan en el tablero donde se explica su aspecto funcional. Durante las interacciones los estudiantes intentan convencer a los demás sobre las ventajas y desventajas de sus prototipos. Finalmente se concluye que los diseños propuestos poco se parecieron a los prototipos presentados.

4.2.2.1 Argumento 7

El argumento siete se toma como una reafirmación de la primera conjetura de E4, acerca de la figura que resultaría si el punto dejara un rastro: semicircular. Este argumento comienza a construirse a partir de la explicación que intenta ofrecer el estudiante E1 a la pregunta 2 del problema de la bicicleta. Sin embargo, lo que se nota en el video es que el estudiante entiende una pregunta distinta: el dibujo del rastro de una Cicloide dentro de una circunferencia (ver figura 28).

En búsqueda de un artefacto...



Figura 28. Trazando presunta Epicicloide

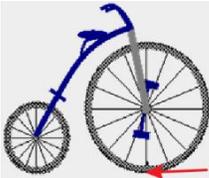
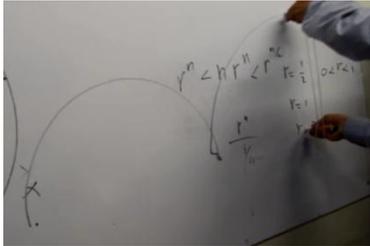
Este hecho llevo a que el estudiante se diera cuenta por sí mismo de la tarea requerida, que consiste en construir un artefacto y no en dibujar la curva. Lo que ocurre es que realiza un esbozo (Fig. 29), es decir, presenta la conclusión y el profesor (D) la refuta: “Ah, pero es que esa no es ¿cierto? porque esto es un pedazo de circunferencia, y esa no era un pedazo de circunferencia...” lo que lleva al estudiante a replantear su hipótesis. La conclusión aparece implícita, deducida de lo que dice y hace: dibuja con ayuda de una cuerda y un marcador, lo que parece una semicircunferencia (Fig. 29). La garantía se toma como implícita, siendo ésta, la noción de semicircunferencia. Se podría clasificar como abductivo, ya que es una manifestación de una creación de hipótesis, aunque esta resulte falsa, pues la conclusión no concuerda con lo esperado. Podría decirse que se trata de un argumento débil que no describe o representa la curva Cicloide y que además fue rebatido con un argumento de autoridad; la autoridad del maestro. Se presenta en una tabla el argumento logrado por el estudiante.

Tabla 7. Análisis argumentativo siete de la fase dos, explicación de construcción

Argumento 7:	Pregunta: Respondiendo a la pregunta 2 del problema de la bicicleta: Si el punto dejara un rastro ¿Qué figura resultaría?
<p>Interacción:</p> <p><i>E1: Entonces digamos, tengo acá el punto... entonces yo puedo trazar una circunferencia así... [...]</i></p> <p><i>D: Ah pero, es que no estamos hablando... Estamos hablando solo de la Cicloide...</i></p> <p><i>E2: Cicloide...</i></p> <p><i>D: Si, pero es la Cicloide, es parecido... es la Cicloide...</i></p> <p><i>E3: ...la que va por fuera</i></p> <p><i>D: La que va sobre el plano</i></p> <p><i>Pro1: La de la cicla...</i></p>	

En búsqueda de un artefacto...

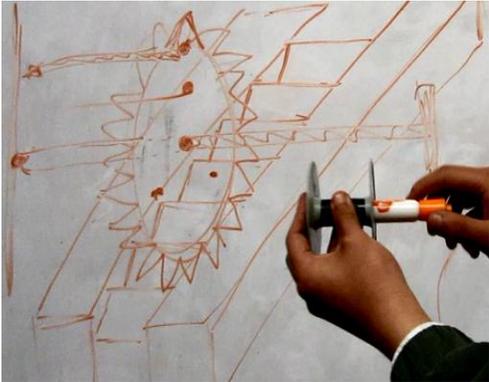
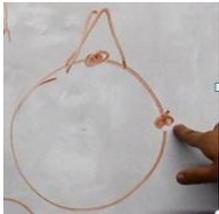
D: La de la cicla... y ahora [...]
E1: ahí... [esbozo figura 28]
D: Ah, pero es que esa no es ¿cierto? porque esto es un pedazo de circunferencia, y esa no era un pedazo de circunferencia...
E5: ...era toda la distancia
E6: No da el arco...
D: Si, ustedes la dibujaron, si ve que no, no es un pedazo de circunferencia...

Dato	Conclusión	Garantía	Refutación
<p>Figura 18. Evoca el movimiento físico de la rueda</p> 	<p>Semicircular:</p>  <p>Figura 29. Esbozo de semicircunferencia</p>	<p>Noción de semicircunferencia, siendo la curva inmediata que se asemeja al hecho observado. Es una curva conocida; además se está trabajando con la circunferencia</p>	<p><i>D: Ah, pero es que esa no es, cierto, porque esto es un pedazo de circunferencia, y esa no era un pedazo de circunferencia...</i></p>

4.2.2.2 Argumento 8

El estudiante E1, da una explicación de la propuesta del diseño donde muestra las diferentes partes del prototipo. Sugiere construir una rueda con engranajes (piñón) que casen con una base plana (*corredera*) donde el objetivo es evitar que la rueda se deslice y se incline durante su rodamiento. Propone que el lápiz o mina que traza la curva, debe ir en el borde incrustado en un diente del piñón (Fig. 31), lo que muestra que la traza debe estar en el máximo extremo de la circunferencia. El diseño que se muestra en la (Fig. 30), es la conclusión, es el producto al cual se quiere llegar. Es posible empatar este argumento con un razonamiento deductivo ya que al reconocer la curva Cicloide y la manera como se podría trazar, el grupo hace uso de su creatividad para plasmar ciertas ideas, como por ejemplo, estabilidad: que se logra con un piñón de engranajes y una corredera, firmeza: los materiales y el mecanismo propuesto.

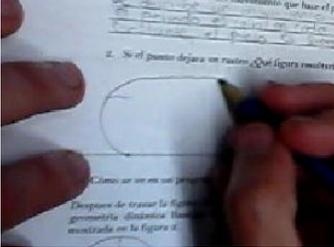
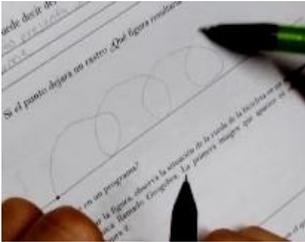
Tabla 8. Análisis argumentativo fase dos, diseñando el artefacto

Argumento 8:	Diseño de artefacto	
<p>Interacción:</p> <p><i>“E1: Si, pues, lo que yo pienso hacer es, como una, no sé, creo que le llaman corredera</i></p> <p><i>Pro1: Si.</i></p> <p><i>E1: Si, entonces con el piñón, entonces lo que le va hacer al piñón es...Bueno, en el centro de éste [señalando lo que parece el centro del piñón] va un palito donde se pueden mover, ósea, éste palo me va a permitir que esto se mueva... entonces esta palanquita es como si fuera el marcador, entonces esto me va permitir mover el piñón, pero entonces, lo que me permite el piñón es que no se deslice la rueda, pues si la tengo lisa como la tengo en éste [señalando el carrete],puede que cuando yo de la vuelta se me resbale, se me deslice, entonces perdería, no me saldría esto, sino que, se correría, entonces es lo que permite el engranaje. Acá, a esto le añadí como [...] para un soporte, éste es el papel.</i></p> <p><i>Pro1: ¿Dónde lo va dibujar?</i></p> <p><i>E1: Si, entonces este soporte lo que me permite es, que la... que el piñón no se me voltee, sí, sino que se quede, que no se voltee... y en el... en el extremo iría el lápiz, que sería, que tendría la misma distancia, que del centro al, al... [Se supone al papel, según señala el estudiante]”</i></p>		
<p>Dato</p> <p>Noción de la curva Cicloide, concebida en la fase previa de ambientación.</p>	<p>Conclusión</p> <p>Diseño que posiblemente dibuje la curva cicloide</p>  <p>Figura 30. Diseño de artefacto</p>	<p>Garantía</p> <ul style="list-style-type: none"> - Rueda con engranaje (piñón) - Base dentada (<i>corredera</i>) sobre la que descansa el piñón. - Eje del piñón que permite el movimiento de la rueda - Lápiz incrustado en el borde de la rueda  <p>Figura 31. Piñón, señalando el lugar donde va incrustada la mina</p>

En búsqueda de un artefacto...

4.2.3 Fase tres

El objetivo es crear un artefacto que dibuje la curva mencionada. Aunque el objetivo se cumplió, se puede decir que faltó precisión y ajustes en el producto final. Sin embargo, con los prototipos propuestos, se generó la posibilidad de un ambiente propicio para la argumentación. Si comparamos los primeros bosquejos de la curva realizados en la guía con los producidos con el artefacto se observa una diferencia. En las siguientes figuras se relacionan los bocetos:

Grupo	Bosquejo guía	Bosquejo con artefacto
1		
2		

La curva dibujada describía parte de una Cicloide un tanto imprecisa. Para el caso del grupo 1, el hecho que la mina del lápiz no estuviera lo más cercano al borde de la rueda dentada, produjo una curva en el final de una cicloide y el principio de otra. El segundo grupo presentó un prototipo que no tenía un buen agarre, lo que dificultaba su manipulación.

4.2.3.1 Argumento 9

El artefacto que presentan los estudiantes E1 y E2 traza una Cicloide incompleta, lo que provoca en el trazado una curva en el origen de una Cicloide y terminación

En búsqueda de un artefacto...

de otra (Fig. 32). En la figura se puede observar la irregularidad del boceto o traza de la curva. Esto se debe a que la manipulación del artefacto era imprecisa. Por una parte, se necesitaba que la fricción fuera lo mayor posible, para garantizar igualdad entre medidas. La lija no resulto ser totalmente efectiva, era necesario (en ocasiones) tomar el prototipo con las dos manos para realizar la traza. Por otra parte, al no tener la mina en el extremo, se produjo una Cicloide alargada. De esto se infiere que la imprecisión del dibujo, obedece a la falta de la exactitud del prototipo. En relación al diseño del prototipo, se puede decir que tienen similitudes con el producto final, pero no corresponde precisamente a lo propuesto, en parte por las pequeñas dimensiones del artefacto. Sin embargo, es posible admitir que el artefacto sí traza una aproximación de Cicloide, que simula el movimiento de una rueda de bicicleta y que para construirlo era necesario desplegar competencias matemáticas, tanto en pensamiento numérico, como en pensamiento métrico.

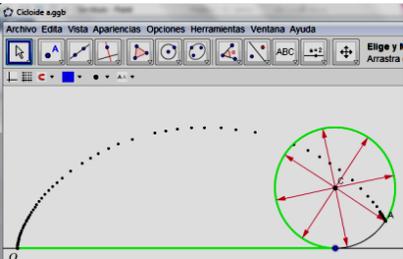
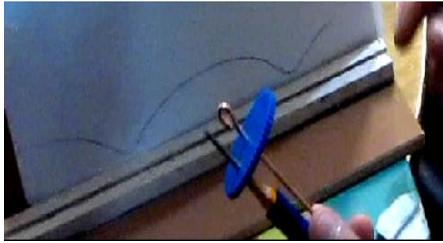


Figura 32. Bosquejo curva con artefacto

Tabla 9. Análisis argumentativo de artefacto terminado

Argumento 9:	Prototipo final
<p>Interacción:</p> <p>“[...]”</p> <p><i>Pro1: Explícanos el modelo del diseño.</i></p> <p><i>E1: Entonces, no salió el diseño de la cicloide que esta estábamos buscando por que no encontré la rueda que necesitaba.</i></p> <p><i>Pro1: y ¿Qué rueda necesitaba?</i></p> <p><i>E1: Una grande</i></p> <p><i>Pro1: ¿Una qué?</i></p> <p><i>E1: Por una más grande...porque... pues tenía como otro diseño que era... ponerle, ponerle...Tenía otro diseño que era con una rueda grande unir una rueda pequeña, para hacer la cicloide de esa rueda pequeña... y que la rueda grande se me trasladara así,... entonces,... pues, pues eso si me salía como la cicloide, cambio acá por no estar pegado, por no estar al borde de la circunferencia...</i></p> <p><i>Pro1: al borde</i></p> <p><i>E3: ...entonces no me sale la circunfe... la cicloide que estaba buscando</i></p> <p><i>Pro1: Entonces tu qué crees ¿Qué es esa curva?</i></p> <p><i>E3: Pues es una cicloide pero no la que estábamos buscando.</i></p> <p><i>Pro1. Bueno, Dices que por no estar pegado al borde no da la cicloide que estábamos buscando</i></p> <p><i>E3. uummm”.</i></p>	

En búsqueda de un artefacto...

Dato	Conclusión	Garantía
<p>- Curva Cicloide; visualizada en las fases anteriores (Ambiente computacional y trazado a mano alzada).</p>  <p>Figura 33. Curva Cicloide representada en Geo-gebra</p>	<p>- Prototipo artefacto final</p>  <p>Figura 34. Prototipo final de artefacto</p>	<p>- Dibujo obtenido; su traza no corresponde a una fiel curva cicloide es similar (fig. 35).</p> <p>- En el esquema, se evidencia que la mina del lápiz que hace la marca no se encuentra en el borde máximo de la rueda empleada, lo que dificulta su trazado.</p>  <p>Figura 35. Trazo obtenida con el artefacto final</p>

4.2.3.2 Argumento 10

Llegados a esta altura del proceso se puede admitir que los estudiantes identifican la curva Cicloide y algunas relaciones con la circunferencia que la genera. En especial, lo que se aborda en el siguiente argumento, es la relación entre el perímetro de la circunferencia y el radio: dos pi veces el radio, hecho que muy posiblemente no desconocían, pero que amplía el significado del número π . Con mayor precisión concluyen “*dos pi por erre*”, que es el procedimiento que consideran, asumiendo una medidas exactas o aproximadas de la terminación y construcción del artefacto. La interacción entre estudiante y maestro lleva a inferir ésta conclusión.

Tabla 10. Análisis argumentativo de relación entre perímetro y radio de la circunferencia

Argumento 10:	
Interacción:	

En búsqueda de un artefacto...

E2: ...de pronto comparar que comportamiento de, de una cicloide con una semicircunferencia, con una circunferencia, no, es mirar que distinciones tiene, como a partir de una puedo derivar hacer otra (...)

Pro1: Ah, o sea, que ustedes estarían diciendo que la circunferencia y la Cicloide están estrechamente ligadas...

E1: Sí, sí...

[...]

Pro1: ... porque ya sé cuánto vale esto...

E3: si, más o menos es como tres veces el diámetro...

E2: sería el mismo diámetro de la circunferencia, pero, pues entonces aquí es una...

Pro1: ...porque, póngale cuidado, ustedes en la primera sesión hablaron que era de aquí hasta acá, supongamos que el radio fuera uno, ... cierto, supongamos que eso fuera uno, o no, pongamos el diámetro uno, más fácil, el diámetro, no el radio sino el diámetro. Si el diámetro fuera uno ¿Qué medida habría de aquí hasta acá?

E3: yo diría que pues, por lo que hemos podido apreciar, o sea, de la construcción y eso, sería el triple del diámetro.

[...]

E2: pi por erre.

Pro1: ¿pi por erre? Recordemos que estamos hablando de diámetro y no de radio

E2: Uhm, dos pi por erre

Dato	Conclusión	Garantía
<p>Distancia que hay entre punto inicial y punto final, los cuales se indican con color resaltado (azul).</p>  <p>Figura 36. Distancia de una vuelta completa</p>	<p><i>Dos pi por erre</i></p>	<p>Relación que existe entre la circunferencia y la curva cicloide que ésta genera</p> <p>Toman como hecho que el artefacto es preciso en la medida (recta señalada en azul) y asumen que la distancia corresponde al perímetro de la circunferencia o rueda que se utilizo en el artefacto</p>

CONCLUSIONES

Se presentan las conclusiones del presente trabajo en relación a los objetivos del mismo y a la respuesta de la pregunta planteada.

- El primer objetivo específico se refiere a la construcción de un artefacto mecánico para dibujar una curva Cicloide. Es posible decir que el objetivo se cumplió dado que los grupos concretaron cada uno un artefacto mecánico, sin embargo, se evidenció falta de rigor en la construcción del prototipo. El diseño de los prototipos dificultaba la manipulación de los mismos. Por otro lado, se introdujo un contexto histórico usando un artefacto mecánico como medio de generación de ideas, siguiendo la línea de Cortés (2013). La curva fue dibujada al inicio y final del trabajo. Se evidencia un avance en su trazado gracias a la implementación del artefacto mecánico como se observa en las figuras 32, 33,34 y 35.

- En relación al segundo objetivo donde se pretende recolectar evidencias de tipo argumentativo, se tienen los diez argumentos analizados que describen interacciones entre los estudiantes en las diferentes fases de la actividad. Tales interacciones fueron capturadas a través de los instrumentos de recolección de información (Guía escrita y videos).

- Para el tercer objetivo se tomaron algunos argumentos. Se seleccionaron lo más notables o los que ofrecían más elementos de análisis. Tales argumentos involucran relaciones geométricas cuyas representaciones ingenuas y aproximadas fueron suficientes para razonar y conjeturar; contienen hipótesis que posteriormente fueron reformuladas y reajustadas, mientras que otras fueron descartadas. La interacción constante entre integrantes de grupo los llevo a formular un conjunto de afirmaciones para explicar resultados y justificar hechos, por ejemplo, cuando trazaron la curva o cuando explicaban el diseño y el artefacto finalmente construido.

En búsqueda de un artefacto...

- El apoyo de herramientas tecnológicas fue clave para el desarrollo de la propuesta. En primera medida, aparecen las herramientas de lápiz y papel en los primeros bocetos, en segunda instancia, la visualización en ambientes computacionales permitió mayor claridad frente a la comprensión de la tarea propuesta, por lo tanto, y aunque los estudiantes no manipularon el software directamente, si manipularon objetos matemáticos a partir de la visualización que ofrece la herramienta computacional misma.

- Por último se habla de un enriquecimiento de la noción del número pi (π), ya que la con ayuda del instrumental tecnológico, los estudiantes confirmaron hechos socialmente aceptados, como el caso de la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, pero no como cociente, sino como una relación de equivalencia. Además el trazado de la curva Cicloide de cierta manera propone un dibujo para el número pi haciendo uso de geometría del movimiento, es decir, con un aparato mecánico, hecho que resulto sorprendente para los estudiantes que manifestaron no conocer la curva en mención.

BIBLIOGRAFIA

- Álvarez, Angel, Carranza, Soler, I. (Marzo, 2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números*, 75-90.
- Antón, A. (1999). Análisis del discurso mediante el modelo de Toulmin. *Jornades de Foment de la investigació*.
- Atienza, M. (2004). *Las razones del derecho. La teoría de la argumentación*. Lima: Palestras Editores.
- Benito, J. (2006). Sistema Multimedia destinado al Aprendizaje Interdisciplinar de Curvas Cicloides y Fractales. *Matematicalia: Revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, 2(2), 8.
- Bernal & Romero. (2010). Instrumentos de mediación en la actividad demostrativa. *Memorias del 12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 822-831). Armenia: Gaia.
- Camargo Uribe, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas*. Valencia: Universitat de València .
- Cortés Zavala, Nuñez Palenius, Morales Ontiveros, J. C. (Septiembre de 2013). Dinamización Matemática: Actividades de aprendizaje usando elipsógrafos para apoyar el proceso de demostración en geometría analítica. *UNION*(35), 115-134.
- Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *La lettre de la Preuve: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*.
- Escobedo, A. (s.f.). Desarrollo del pensamiento covarional en un ambiente gráfico dinámico. Hacia una génesis instrumental. *Clame*, 1671-1680.
Recuperado en: <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/%28ADelCastillo-GMontiel2009b%29-ALME22-.pdf>
- Espejo, R. (2008). Peirce, la Abducción y la Investigación Científica. *Revista Observaciones Filosóficas*.
Recuperado en:

En búsqueda de un artefacto...

<http://www.observacionesfilosoficas.net/peircelaabduccion.html>

Falconi, Magaña, M. (2005). *instrumentos y Matemáticas*. Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

García Lopez, A. (s.f.). Cónicas y otros Lugares Geométricos. *Universidad Politécnica de Madrid*.

Gómez, P. (s.f.). *Tecnología y Educación Matemática* recuperado en:
<http://core.kmi.open.ac.uk/download/pdf/12341005.pdf>.

Recuperado en:

<http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html>

Hamad, P. (2009). la Abducción como punto de partida en el desarrollo del pensamiento científico en estudiantes de Química en la fase experimental. *Horiz. Pedagógico*, 11(1), 49-54.

Hernández Abreu, D. (2007). La Cicloide: Un recorrido historico por sus propiedades. *Union*, 115-134.

Hoyos , V. (2006). Funciones Complementarias de los Artefactos en el Aprendizaje de las Transformaciones Geométricas en la Escuela Secundaria. *Enseñanza de la Ciencias*, 24(1), 31-42.

Icfes. (2013). *Colombia en Pisa 2012*. Resumen ejecutivo de los resultados de Colombia en PISA 2012.

Recuperado de <http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales/pisa>

Izquierdo & Granados, D. (2012). Caracterización de los argumentos que emergen en el desarrollo de una tarea de generalización realizada por estudiantes de grado noveno. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Martín , C. M. (2004). Las matemáticas que se esconden detrás de los instrumentos. *stcm04*, 6-8.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: MEN.

En búsqueda de un artefacto...

Ministerio de Educacion Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Peirce, C. (1901). *Razonamiento*. (Barrena. Sara, Trad. 2001, ultima actualización 2011)

Rivas, C. H., & Delgadillo, E. M. (2013). Los artefactos y la visualizacion en el ETG del profesor. *Alme*, 26, 1615-1624.

Stewart, J. (2007). *Cálculo, Conceptos y Contextos* (3 ed.). Mexico: Thomson Editores

Toulmin, S. E. (2007). *Los Usos de la Argumentación, Traducccion de Maria Morras y Victoria Pineda*. Barcelona: Ediciones Península.

En búsqueda de un artefacto...

ANEXOS

En éste apartado se muestran los instrumentos utilizados que permitió desarrollar el proyecto propuesto, entre los cuales se cuenta la guía textual del estudiante y de las transcripciones elegidas que más aportaban a procesos de argumentación.

ANEXO 1. GUIA PRUEBA PILOTO

La cual representa el proceso que guía al estudiante para que pueda corresponder a la tarea planteada del proyecto. La cual se muestra a continuación.

A continuación presentaremos una situación que se divide en varias partes. Se ira resolviendo siguiendo la guía del profesor.

1. Problema de la bicicleta

Escuche con atención el dialogo entre maestro y estudiantes y responda:

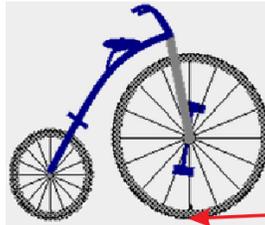


Fig. 1

1. Describa el movimiento que haría el punto como si estuviera en un plano.
2. ¿Si el punto dejara un rastro, qué figura resultaría? Describa (dibuje) el rastro del movimiento del punto en el siguiente espacio.

En búsqueda de un artefacto...

2. Después de trazar la figura, observa la situación de la rueda de la bicicleta en un programa de geometría dinámica llamado Geogebra. La primera imagen que aparece es similar a la mostrada en la figura 2.



Fig. 2

El punto A corresponde al punto en la rueda pero también, donde está situado el origen o punto de partida (O) ubicado en el suelo.

En la figura 3 se observa el movimiento realizado en el programa. Luego responde:

- a. ¿Cuándo el punto A estará en el lugar más alto?



Fig. 3

- b. ¿Qué ocurrirá luego que la rueda de una vuelta completa (fig. 4)? Realiza un esbozo o describe lo que sucedería.

En búsqueda de un artefacto...

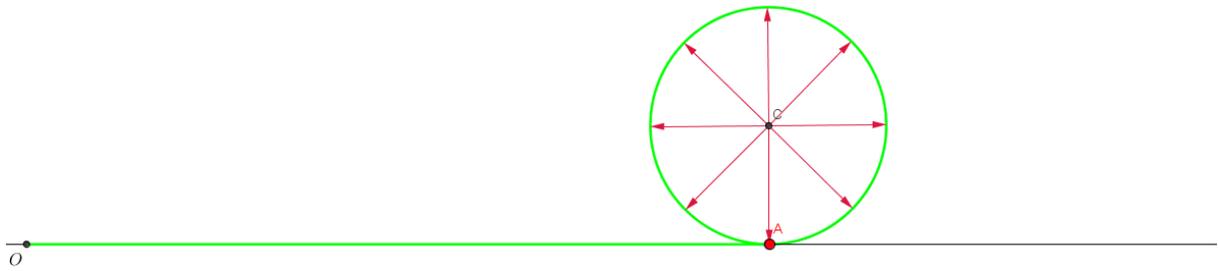


Fig. 4

- c. Suponiendo que el punto A deja rastro ¿Qué figura se formaría? Dibújela teniendo en cuenta tres momentos (fig. 5).

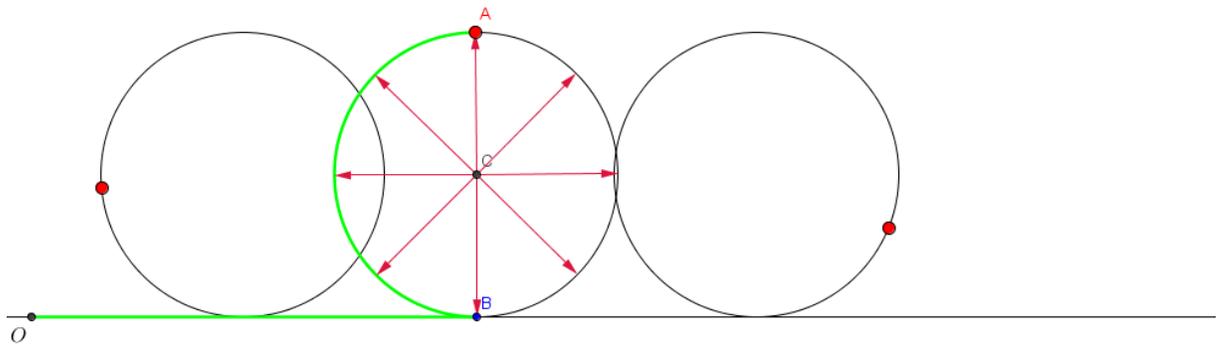


Fig. 5

- d. ¿Qué relación tiene la medida del segmento $m(OB)$ con la medida del arco AB luego de dar una media vuelta completa?

- e. ¿Cuál es la medida del segmento $m(OB)$ cuando la rueda da una vuelta completa?

Esta figura o forma geométrica se denomina: _____

4. Ideando un diseño para construir una maquina mecánica.

A partir de lo visto, la tarea consiste en construir una maquina mecánica, que simule y dibuje (deje algún rastro) el movimiento del punto fijo en la situación de la bicicleta. Deberán tomar decisiones en torno a los materiales que van a usar, al tiempo que duraran, teniendo en cuenta que es posible que se tenga que perfeccionar o ajustar el modelo.

En búsqueda de un artefacto...

Ten en cuenta:

- De una lista de uno a tres materiales que posibiliten el uso y sean de fácil manejo y acceso en el aula.
- Escribe lo que necesitas y que no puedes conseguir:
- ¿Qué herramientas necesitan?

ANEXO 2. GUIA AJUSTADA DEL ESTUDIANTE.

La cual representa la guía entregada al estudiante para que pueda desarrollar la tarea planteada inicialmente. La cual se muestra a continuación.

Un punto que se mueve

A continuación presentaremos la situación, la cual se divide en varias partes. Se ira resolviendo siguiendo la guía del profesor.

1. Problema de la bicicleta

Escuche con atención el dialogo entre maestro y estudiantes y responda:

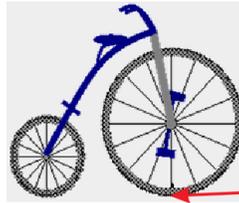


Fig. 1

2. ¿Qué puede decir del movimiento que hace el punto?

3. Si el punto dejara un rastro ¿Qué figura resultaría? Realice un dibujo en el espacio.

2. ¿Cómo se ve en un programa?

En búsqueda de un artefacto...

Después de trazar la figura, observa la situación de la rueda de la bicicleta en un programa de geometría dinámica llamado Geogebra. La primera imagen que aparece es similar a la mostrada en la figura 2.



Fig. 2

El punto A corresponde al punto en la rueda, que coincide con el que está situado el origen o punto de partida (O) ubicado en el suelo.

En la figura 3 se observa la gráfica luego de realizado un primer movimiento en el programa.

Analiza y traza

- f. ¿Dibuja el momento en que el punto A estará en el lugar más alto?



Fig. 3

En búsqueda de un artefacto...

- g. ¿Qué ocurrirá luego que la rueda de una vuelta completa (fig. 4)? Realiza un esbozo o describe con sus propias palabras lo que sucedería.

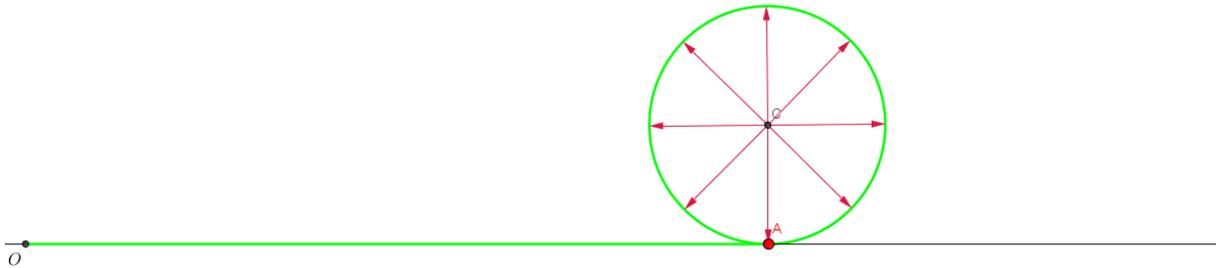


Fig. 4

- h. Suponiendo que el punto A deja rastro ¿Qué figura se formaría? Dibújela teniendo en cuenta tres momentos (fig. 5).

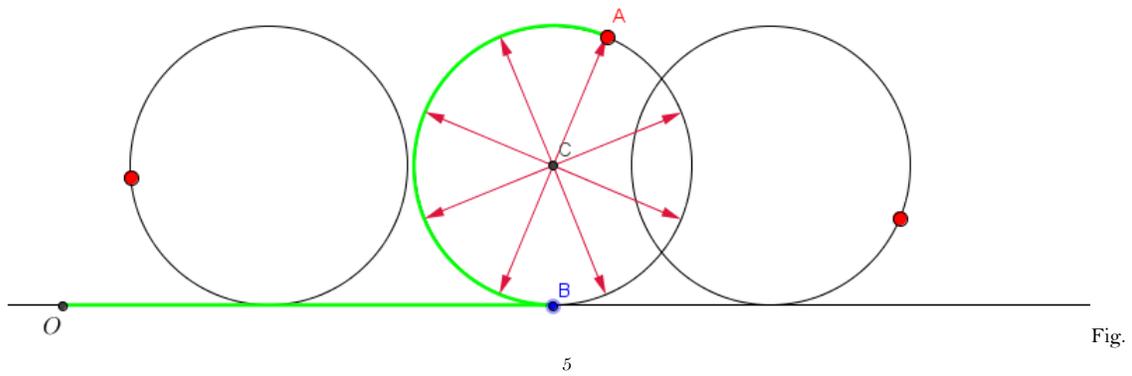


Fig.

- i. ¿Qué relación tiene la medida del segmento $m(OB)$ con la medida del arco AB ?

- j. Suponiendo que la medida del radio $m(AC)$ sea igual a 1 ¿Cuál es la medida del segmento $m(OB)$ cuando la rueda da una vuelta completa?

En búsqueda de un artefacto...

4. Ideando un diseño para construir una maquina mecánica.

A partir de lo visto, la tarea consiste en construir una maquina mecánica, que simule y dibuje (deje algún rastro) el movimiento del punto fijo en la situación de la bicicleta. Deberán tomar decisiones en torno a los materiales que van a usar, al tiempo que duraran, teniendo en cuenta que es posible que se tenga que perfeccionar o ajustar el modelo.

Ten en cuenta:

- Realiza una lista de materiales que posibiliten el uso y sean de fácil manejo y acceso en el aula.
- Escribe lo que necesitas y que no puedes conseguir:
- ¿Qué herramientas necesitan?

ANEXO 3. GUIA DEL DOCENTE

Guía del profesor actividad de ambientación

Generalidades

Tiempo estimado: 40 minutos

Número de estudiantes: 6

Materiales: Computador, Internet, hoja para el estudiante, Video Beam.

Presentaremos la situación de la rueda dela bicicleta en cuatro momentos. Ambientación física, simulación en el programa de geometría dinámica Geogebra, ejemplos de otras curvas y relación histórica.

En búsqueda de un artefacto...

Ambientación física problema de la bicicleta

En el salón o en cualquier lugar del colegio se llevara una rueda de bicicleta y será el maestro o un estudiante quien haga girar la rueda en el piso. Se realizará mediante la siguiente indicación: encualquier lugar del borde de la rueda de la bicicleta haga una marca, por ejemplo, con cinta o con un color. Ubique ésta marca encima de otra situada en el piso (fig.1), la cual tomaremos como punto de partida. Por ejemplo, situé la marca justo debajo de la válvula.

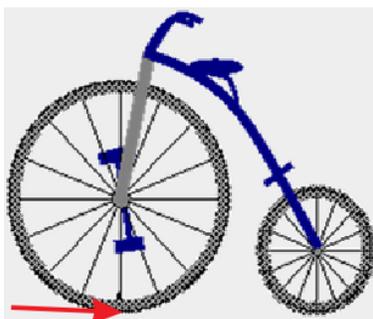


Fig. 1

Se sitúan los espectadores (estáticos) para que observen la situación; se pregunta:

3. Describa el movimiento que haría el punto en el espacio
4. ¿Si el punto dejara un rastro qué figura resultaría? Describa (dibuje) el movimiento en una hoja haciendo un tanteo

Simulación en Geogebra

Veremos la situación de la rueda de la bicicleta en un programa de geometría dinámica llamado Geogebra. La primera ilustración se toma partiendo del origen (fig. 2)⁴:

⁴Archivo Cicloide a.

En búsqueda de un artefacto...

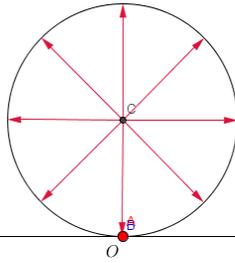


Fig. 2

El maestro o un estudiante ubica el punto A que corresponde al punto en la rueda encima de una marca que tomaremos como origen o punto de partida (0) ubicado en el suelo.

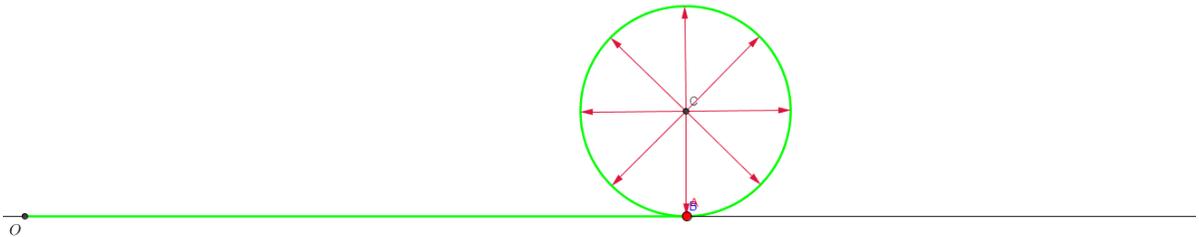
El maestro realiza el movimiento en el programa (fig. 3)⁵ correspondiente a un desplazamiento. Luego, pide a sus estudiantes responder:

- k. ¿Cuándo el punto A estará en el lugar más alto?



Fig. 3

- l. ¿Qué ocurrirá luego que la rueda de una vuelta completa (fig. 4)⁶? Realiza un esbozo o describe lo que sucedería.



⁵Se usa el archivo Cicloide a

⁶Se usa el archivo Cicloide b

En búsqueda de un artefacto...

Fig. 4

- m. Suponiendo que el punto A deja rastro ¿Qué figura se formaría? Dibújela teniendo en cuenta tres momentos (fig. 5)⁷.

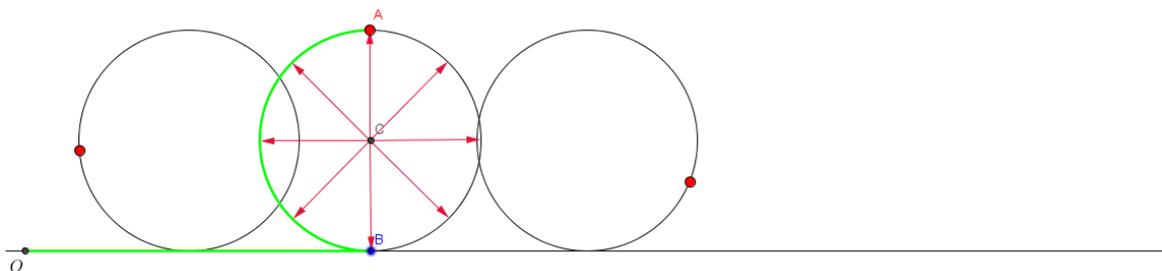


Fig. 5

- n. ¿Qué relación tiene la medida del segmento $m(OB)$ con la medida del arco AB ?
-
- o. ¿Cuál es la medida de segmento $m(OB)$ cuando la rueda da una vuelta completa?
-

Ejemplos de otras curvas

Luego y a no ser que algún estudiante recuerde como se denomina la figura o forma geométrica, diremos su nombre (Cicloide). El docente se remite a algunas páginas web, para mostrar ejemplos de otras curvas:

- a) <http://www.educacionplastica.net/cicloide.html>
- b) <http://www.geogebraTube.org/student/m65775>
- c) <http://www.geogebraTube.org/student/m19546>
- d) <http://www.geogebraTube.org/student/m51710>
- e) <http://www.educacionplastica.net/hipocicloide.html>
- f) <http://www.educacionplastica.net/epicicloide.html>

⁷Se usa el archivo Cicloide c

Relación histórica

La primera referencia a esta curva está en el trabajo de Charles Bouvelles escrito en 1501 y a él es a quien se considera el verdadero inventor aun cuando la cicloide ya había sido estudiada por Nicolás de Cusa, en 1450. Cusa trató de encontrar el área de un círculo por integración. Galileo, a quien la curva debe su nombre, trabajó con la cicloide y habría mostrado, en 1599, que su área es casi tres veces la del círculo que la genera y sugirió que el arco de la cicloide debería ser apropiado para construir puentes. Y así se hizo posteriormente. El padre Marín Mersenne (1588 -1648), en 1620, dio la primera definición de la cicloide y estableció sus propiedades obvias tales como que la longitud de la base es igual a la circunferencia del círculo que rueda. Intentó encontrar el área bajo la curva por integración pero falló y propuso el problema a otros matemáticos.

En 1639 Galileo escribió a Evangelista Torricelli (1608 -1647) sobre la cicloide diciéndole que había estudiado sus propiedades durante 40 años y que intentó encontrar el área bajo la curva comparando esa área con la del círculo que la genera por métodos mecánicos puesto que no pudo encontrar un método matemático para demostrarlo. Construyó arcos de cicloide y círculos de metal y los pesó, encontrando que la razón de los pesos era de aproximadamente 3 a 1 pero decidió que no era 3 exactamente, de hecho, aventuró el comentario de que la razón no sería un número racional, equivocadamente.

El estudio de la geometría de la cicloide y sus propiedades continuó pero su estudio sistemático comenzó con Blaise Pascal (1623 -1662). Según cuenta la historia, él sufría de dolores de muelas y otros achaques la noche que empezó a 'rumiar' sobre la cicloide pero, a tal punto se distrajo pensando en ella que sus penas desaparecieron. Entendió con esto que La Divinidad estaba de acuerdo y que autorizaba un último desliz matemático antes de dedicarse por completo a la vida mística (1).

(1) recuperado en:

http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/ciclo.htm

Algunas aplicaciones

En cuanto a las propiedades avanzadas digamos que esta curva es la solución de dos antiguos problemas de física: el de la *braquistócrona* y el de la *tautócrona*. El primero de ellos consiste en hallar la curva a lo largo de la cual una partícula rodará en el menor tiempo posible bajo la influencia de la gravedad desde un punto A hasta un punto B situado en una posición más baja. Fue el matemático suizo Jean Bernoulli quien en 1696 formuló por primera vez este problema y quien años más tarde lo resolvió: una partícula tomará el menor tiempo posible al deslizarse desde un punto A hasta un punto más bajo B , bajo la influencia de la gravedad, si sigue en su trayectoria la forma de un arco invertido de cicloide. Además la partícula gastará el mismo tiempo en llegar al punto más bajo del arco invertido de la cicloide sin importar desde qué altura se suelte. Este es el segundo problema, el de la *tautócrona*, y fue resuelto por el físico alemán Huygens (Martín, 2004). Resolvió éste problema intentando solucionar otro: determinar la longitud en el mar. En su intento de solución construyó un reloj de péndulo que no se viera afectado por el movimiento del barco en el mar usando el hecho de la tautocronía de la cicloide (ver figura 6).

En búsqueda de un artefacto...

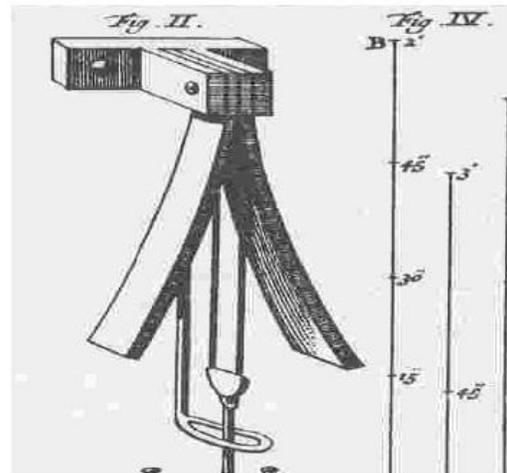
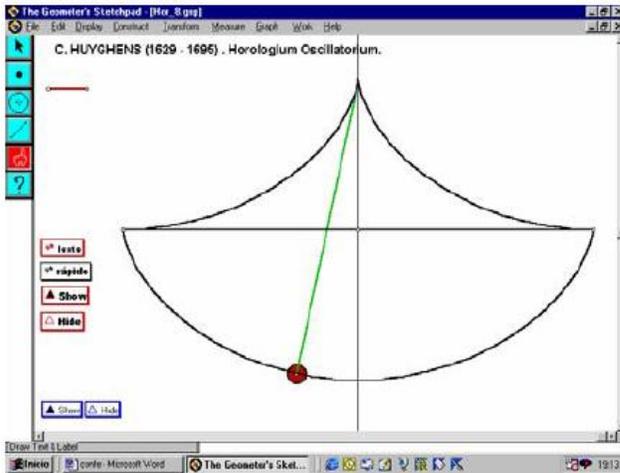


Fig. 6

El maestro presentara un video que ejemplifica propiedades y aspectos relevantes de la cicloide como la tautocronia y su uso en la recreación en el siguiente enlace:

<http://www.youtube.com/watch?v=m8Qli77-K9o>

ANEXO 4. TRANSCRIPCIONES

Los siguientes son fragmentos transcritos de las interacciones ente los estudiantes recolectadas mediante el instrumento escrito (guía de trabajo) y la evidencia audiovisual (videos) en las sesiones que tuvo lugar el desarrollo de la propuesta. Se reporta solamente los fragmentos que se consideraron eran los más pertinentes.

Argumento 1. Video 9291 Tiempo: 1:56 a 3:21

E4: ...es como circular, uniforme podría ser también, es que no sé, creo que lo de uniforme y cíclico queda redundante... pero pues, diría yo que queda redundante. Cíclico, pues se va repetir... movimiento. Semicircular, porque presenta el arco, un arco de circunferencia que se va repitiendo. He... uniforme, pues siempre va a ser la misma cantidad, o sea, se va a repetir el...el punto siempre va a estar en el mismo lugar, cierta cantidad de movimiento de la llanta.

E5: Si, eso es lo que yo decía ¿pero cómo sería entonces?

E6: Ah, pero uniformemente acelerado sería lo mismo que, no sería uniforme lo mismo que [...] o sea, ahí estás haciendo una redundancia.

En búsqueda de un artefacto...

E5: Entonces escribamos que en el punto, pero como escribimos... como así que... siempre el punto... ahí.

[...]

E6: Es que matemáticamente... para mí sería el punto... a pesar de que lo movamos siempre va estar... este... a igual distancia, o sea, no importa que este acá o allá, siempre va a estar a la misma distancia del centro

[...]

E5: Si el punto dejara un rastro ¿Qué figura resultaría? Realice un dibujo en el espacio

E6: o sea ¿Qué movimiento presenta?

E5: Si el punto dejara un rastro... toca describir cada vez que de la vuelta. Para allá, já, já, já

E4: Bueno, entonces es algo así como esto, algo así...

E6: Sí, dado que da la vuelta

E4: Bueno ahí se repite, bueno más o menos así

E5: Sí, así

E4: ...si fuera algo perfecto

E6: digamos que aquí es la llanta, esta llanta, entonces a lo que va dando la vuelta el punto se va a trasladar

E4: ...pero, el punto tendría que quedar, o sea, la circunferencia tendría que quedar como por aquí... si me entiendes

Argumento 2. Video (anterior)

Argumento 3. Video 100541 Tiempo: 02:18 a 5:40

[...]

E3: ...más o menos este punto tiene que terminar acá, aproximadamente ¡no!, si usted le saca un círculo...

E2: ...y ahí ¿vuelvo y hago otro así? Pero se cierra

E1: Si bueno

E1: Espere... el punto tiene que...

E2: ...el punto tiene que verse diferente en cada uno

E3: saquen una moneda...

[...]

E3: Ya, ya lo entiendo más o menos

E1: El punto esta acá

E3: ...acá ya tiene que estar arriba...

E1: ...es una elongación, pero...

E3: Espere, o sea, es como así: cada vez da una vuelta más.

E1: ...si pero, entonces no puede ser...sí, sí, sí, pero... yo lo haría así.

E3: ...Pues, obviamente tiene que ser un círculo más grande

E3: Eso, así. [...] No aquí no iba esa vuelta... esa vuelta es más cerrada

E1: A sí,... la vuelta es acá más cerrada

E3: No... la idea está bien, solo es que la vuelta es más cerrada

En búsqueda de un artefacto...

E1: ...es como en punta.”

E3:...Eso así. De hecho yo también hubiera borrado esa línea...

Aproximadamente

Argumento 4 Grupo 1 Video 9293. Tiempo: 00:42 a 01:07

[...]

Pr: ...que esa era la gráfica y ustedes vieron que se trasteó, digamos, entonces ¿en qué momento estaría en el lugar más alto? Podría dibujarlo

E1: Cuando haya... completado media circunferencia... cuando haya, se haya movido media circunferencia... o sea, cuando el punto que esta acá en esta flechita, llegue al suelo.

Argumento 5 Grupo 1 Video 103916. Tiempo: 02:45 a 3:20

[...]

E1: ...dibujando teniendo en cuenta los tres puntos, serían los tres

E2: Exacto, porque este momento no va a ser el mismo momento de acá...

E3: Son tres momentos, así... Si ve, solo pasa un poco más alto.

E1: por eso es que usted está suponiendo que...

E3: Ah no, no tampoco, era un poco más alto, no todo ¿si me entiende?

E1: Sí, sí, sí...

Argumento 6 grupo 2: Video 9295 tiempo 1:13

E5: ...lo relacionan con geometría.

E4: Todo esto es geometría. Esto es aplicación y entender lo que es el numero pi, es eso, eso ¿de dónde salió ese número? Si usted entiende de donde salió el número pi, esto debería ser una vaina sencillita, sencillísima...

E5: ...con la medida del arco AB ¿Qué relación hay entre con éste? [Señala los segmentos de color verde]

E6: Son la misma medida

E5: Si claro

E6: Son congruentes... cuando una... cuando la una aumenta la otra tiene que aumentar. Son congruentes, que la medida OB...

E4: No nos preguntan nada con congruencia...

E6: ...pues dice: ¿Qué relación tiene la medida del segmento? Pues ¿Qué relación? Que al aumentarse...

E5: ...con la medida, el segmento... con la medida, o sea, éste segmento [OB] con la medida que ahí de aquí a acá [señalando el arco AB]

E6: ...pues tiene que ser congruente, porque si una aumenta la otra va a aumentar.

[...]

E6: ...esa es la medida...

Argumento 7. Video 9299 Tiempo: 00:25

E1: Entonces digamos, tengo acá el punto... entonces yo puedo trazar una circunferencia así...

[...]

En búsqueda de un artefacto...

E1: Entonces digamos, para hacer ese, ese que dicen ahí... comenzar así...

D: Ah pero, es que no estamos hablando... Estamos hablando solo de la Cicloide...

E2: Cicloide...

D: Si. Pero es la Cicloide, es parecido... es la Cicloide...

E3: ...la que va por fuera

D: La que va sobre el plano

Pro1: La de la cicla...

D: La de la cicla... y ahora

E1: y ahí...

D: Ah, pero es que esa no es, ¿cierto? porque esto es un pedazo de circunferencia, y esa no era un pedazo de circunferencia...

E5: ...era toda la distancia

E6: No da el arco...

D: Si, ustedes la dibujaron, si ve que no, no es una pedazo de circunferencia

Argumento 8. Video 3949 tiempo 00:00 a 02:26

E1: ...pues este era el diseño que yo estaba... planeando, pues no sé si se entienda el dibujito.

Pro1: Si, yo veo ahí unos engranajes...

E1: Si, pues, lo que yo pienso hacer es, como una, no sé, creo que le llaman corredera

Pro1: Si.

E1: Si, entonces con el piñón, entonces lo que le va hacer al piñón es... Bueno, en el centro de éste [señalando lo que parece el centro del piñón] va un palito donde se pueden mover, ósea, éste palo me va a permitir que esto se mueva... entonces esta palanquita es como si fuera el marcador, entonces esto me va permitir mover el piñón, pero entonces, lo que me permite el piñón es que no se deslice la rueda, pues si la tengo lisa como la tengo en éste [señalando el carrete], puede que cuando yo de la vuelta se me resbale, se me deslice, entonces perdería, no me saldría esto, sino que, se correría, entonces es lo que permite el engranaje. Acá, a esto le añadí como [...] para un soporte, éste es el papel.

Pro1: ¿Dónde lo va dibujar?

E1: Si, entonces este soporte lo que me permite es, que la... que el piñón no se me voltee, sí, sino que se quede, que no se voltee... y en el... en el extremo iría el lápiz, que sería, que tendría la misma distancia, que del centro al, al... [Se supone al papel, según señala el estudiante]

Pro1: Perfecto.

E1: ...lo que ahí me permite el piñón en el extremo es, que yo pueda colocar el lápiz sí... en el extremo de la circunferencia. Sí, porque lo puedo hacer dentro de un piñón

Pro1: Ah perfecto, en un diente

E1: En un diente. Sí, porque si lo hiciera liso, pues el lápiz... se saldría

Pro1: O no habría donde colocarlo.

En búsqueda de un artefacto...

E1: ...o ni habría donde colocarlo, sí... Entonces eso es básicamente, pues yo correría esto así [rota la mano indicando la palanca] y el piñón giraría [rota la mano indicando el piñón] y me iría dibujando la ésta, no chocaría con esto [refiriéndose a la base sobre la que descansa el piñón] porque va es dentro de la circunferencia, y lo único que entra en el huequito que esta la correera con los dientes.

Pro1: Dientes, perfecto.

Argumento 9. Video 1071.Tiempo 0:41 a 1:46

[...]

Pro1: Explícanos el modelo del diseño.

E1: Entonces, no salió el diseño de la cicloide que esta estábamos buscando por que no encontré la rueda que necesitaba.

Pro1: y ¿Qué rueda necesitaba?

E1: Una grande

Pro1: ¿Una qué?

E1: Por una más grande...porque... pues tenía como otro diseño que era... ponerle, ponerle...Tenía otro diseño que era con una rueda grande unir una rueda pequeña, para hacer la cicloide de esa rueda pequeña... y que la rueda grande se me trasladara así,... entonces,... pues, pues eso si me salía como la cicloide, cambio acá por no estar pegado, por no estar al borde de la circunferencia...

Pro1: al borde

E3: ...entonces no me sale la circunfe... la cicloide que estaba buscando

Pro1: Entonces tu qué crees ¿Qué es esa curva?

E3: Pues es una cicloide pero no la que estábamos buscando.

Pr. Bueno, Dices que por no estar pegado al borde no da la cicloide que estábamos buscando

E3. umm...

Argumento 10. Video 1075Tiempo inicial 2:08 a 4:48

Pro1: ¿Que matemática sienten ustedes que pusieron en juego, para entender y comprender lo que debían hacer?Ósea, las que pusieron en juego, por ejemplo yo podría decir, la suma, la medición.

E1 ¡si medición!yo creería, como exactitud, uno buscaría que quede lo más exacto posible, pues no se prueba exacto porque...

Pro1: como un rigor en la medida, podríamos hablar.

E3: si claro.

E2: analogías, comportamientos

Pro2: como así, ¿Por qué analogías?

E2: de pronto comparar que comportamiento de, de una cicloide con una semicircunferencia, con una circunferencia, no, es mirar que distinciones tiene, como a partir de una puedo derivar hacer otra ...

Pro1: ah, ósea que ustedes estarían diciendo que, ¿Qué la circunferencia y la cicloide están estrechamente ligadas?

E1 Si, si...

En búsqueda de un artefacto...

Pro1: por ejemplo, si yo les dijera, si yo conozco el radio de la circunferencia
¿Puedo determinar la medida o el perímetro de la Cicloide?

E3: ósea, la distancia desde el punto de partida del punto de.

Pro1: porque ya sé cuánto vale esto...

E3: si, más o menos es como tres veces el diámetro...

E2: sería el mismo diámetro de la circunferencia, pero, pues entonces aquí es una...

Pro1: porque póngale cuidado, ustedes en la primera sesión hablaron que era de aquí hasta acá, supongamos que el radio fuera uno,... cierto, supongamos que eso fuera uno; o no, pongamos el diámetro uno, más fácil, el diámetro, no el radio si no el diámetro. ¿Si el diámetro fuera uno, que medida habría de aquí hasta acá?

E3: ...yo diría que pues, por lo que hemos podido apreciar, o sea de la construcción y eso, sería el triple del diámetro.

Pro1: listo, y si...

E2: pi por erre

Pro1: ah...

E2: si, pi por erre.

Pro1: ah, vuelve y nos lo repite,

E2: pi por erre,

Profe1: ¿cómo?

E2: pi por erre.

Profe1: ¿pi por erre? Recordemos que estamos hablando de diámetro y no de radio

E2: uhmm, dos pi por erre.