# CÓMO INTERPRETAN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ALUMNOS SOBRE EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN

## How preservice primary teachers interpret students' mathematical thinking about generalization process

Alberto Zapatera[a] y María Luz Callejo[b]

[a]Universidad CEU Cardenal Herrera, [b]Universidad de Alicante

**Resumen**

*Esta investigación tiene como objetivo caracterizar en los estudiantes para maestro (EPM) grados de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de alumnos de primaria, en el ámbito específico del proceso de generalización, identificando el tipo de discurso que emplean. En los resultados hemos descrito dos grupos: los EPM que identifican sólo un nivel de desarrollo del proceso de generalización de los alumnos de primaria y los que identifican tres niveles de desarrollo. La diferencia entre estos grupos radica en los elementos matemáticos que han utilizado cuando han elaborado un discurso específico Estos resultados aportan información para el diseño de intervenciones en la formación de maestros que tengan como uno de sus objetivos el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes.*

**Palabras clave**: *mirar con sentido, proceso de generalización, estudiantes para maestro, tipo de discurso, competencia docente.*

**Abstract**

*The goal of this paper is to characterize grades of development of preservice primary school teachers' (PPT) teaching competence in noticing students' mathematical thinking, in the specific area of the generalization process identifying the type of discourse that PPT use. Results provide two groups: PPT that identify only one level of development of the process of generalization in primary school students and PPT that identify the three levels of development. The difference between groups is in the mathematical elements that PPT use when they elaborate the specific discourse. The findings provide information for designing interventions in teacher training focused on the development of teaching competence in noticing students' mathematical thinking*

**Keywords**: *noticing, generalization process, preservice primary teachers, kind of discourse, mathematics teaching competence.*

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

## MARCO TEÓRICO

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han destacado la importancia de la competencia docente "mirar con sentido" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Fortuny y Rodríguez, 2012; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002). El desarrollo de esta competencia docente es uno de los objetivos de los programas de formación de profesores y un tema de estudio relevante en las investigaciones en didáctica matemática en los últimos años (van Es y Sherin, 2002; Fernández, Valls y Llinares 2011; Sánchez-Matamoros et al. 2012).

Jacobs, Lamb y Philipp (2010) describen esta competencia docente mediante tres destrezas que debe desarrollar el profesor de matemáticas: (1) identificar las estrategias usadas por los estudiantes; (2) interpretar la comprensión de los estudiantes y (3) decidir las acciones a desarrollar en la clase. Van Es (2011) ha identificado dos características importantes de esta competencia cuando los profesores observan registros audiovisuales de clase: (1) en *qué* focalizan sus observaciones (por ejemplo en los alumnos individuales, en grupos de alumnos o en el profesor, en las estrategias de enseñanza, etc.) y (2) *cómo* analizan lo que observan (identificando episodios concretos, haciendo valoraciones o interpretando lo que observan); la manera en la que los profesores analizan los registros de enseñanza incluye el tipo de discurso que emplean (analítico, evaluativo o interpretativo) y la profundidad del mismo (si el profesor proporciona más o menos detalles para explicar su pensamiento y si apoya su discurso en evidencias). Sus investigaciones han mostrado que cuando los profesores focalizan su atención en más aspectos los analizan con más profundidad.

Recientemente el énfasis se sitúa en comprender el desarrollo de esta competencia en estudiantes para profesor en dominios matemáticos específicos (Fernández, Callejo y Márquez, 2012; Fernández, Valls y Llinares 2011; Márquez, Callejo y Fernández, 2011; Sánchez-Matamoros et al. 2012). La investigación reportada aquí forma parte de otra más amplia sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro que intenta aportar información sobre cómo los EPM identifican e interpretan el pensamiento matemático de los alumnos de educación primaria en relación con los procesos de generalización. El proceso de generalización en el contexto de este trabajo lo entendemos vinculado a tareas en las que se da en forma gráfica los primeros términos de una sucesión y se pide: (a) continuar la sucesión; (b) el número de elementos que componen las figuras de términos lejanos; (c) identificar la regla general; (d) identificar la posición de una figura dado el número de elementos.

Las investigaciones sobre cómo los alumnos de primaria resuelven este tipo de tareas han puesto de relieve que en el desarrollo del proceso de generalización juegan un papel relevante los siguientes elementos:

*Coordinación entre la estructura espacial y la numérica*: Para extender una secuencia de figuras, el estudiante debe reconocer una regularidad relacionada con la coordinación de la estructura espacial y de la estructura numérica. La estructura espacial emerge de la distribución de elementos de cada figura y la estructura numérica del número de elementos de cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010).

*Relación funcional*: Para identificar un término lejano (o no especificado) es preciso establecer la relación entre la posición de una figura y la cantidad de elementos que la forman.

*Proceso inverso*: Para identificar la posición de una figura conocido el número de elementos que la forman es preciso establecer una relación funcional inversa de la anterior. Aunque muchos estudiantes son capaces de establecer la relación entre la posición de una figura y el número de elementos que la componen, les resulta difícil invertir esta relación (Warren, 2005).

En el caso en que la relación funcional sea una función afín, $f(n)=an+b,\ b\neq 0$, hay que considerar el *término independiente* o invariante que aparece como una constante en la expresión de la función.

Estos elementos permiten determinar diferentes niveles de desarrollo del proceso de generalización desde las investigaciones previas (Figura 1).

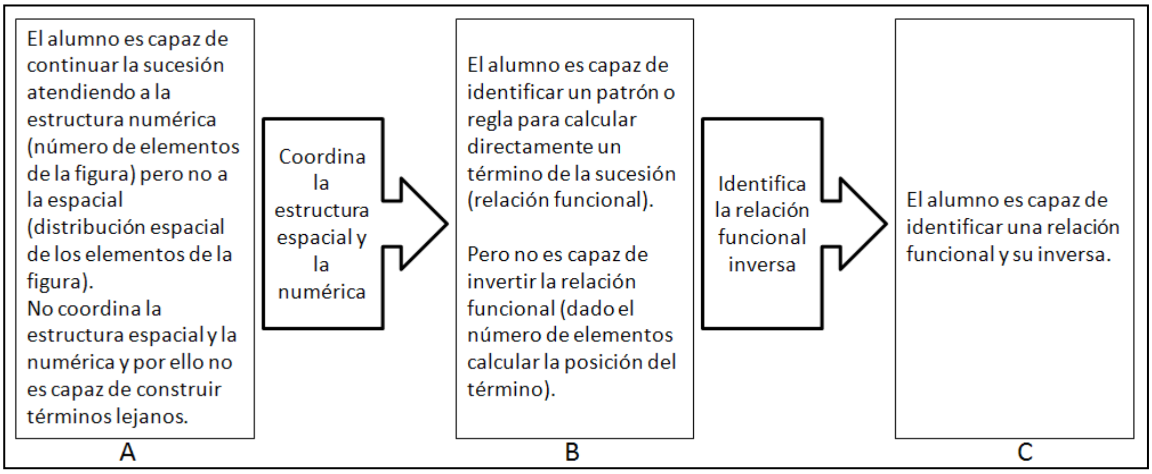



Figura 1. Niveles de desarrollo del proceso de generalización

Con estas referencias previas, en este estudio nos centramos en caracterizar grados de desarrollo en estudiantes para maestro de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en los procesos de generalización. Las preguntas de investigación son:

¿Qué niveles de desarrollo del proceso de generalización de los alumnos de primaria identifican los EPM?

¿Qué tipo de discurso utilizan los EPM para identificar estos niveles de desarrollo?

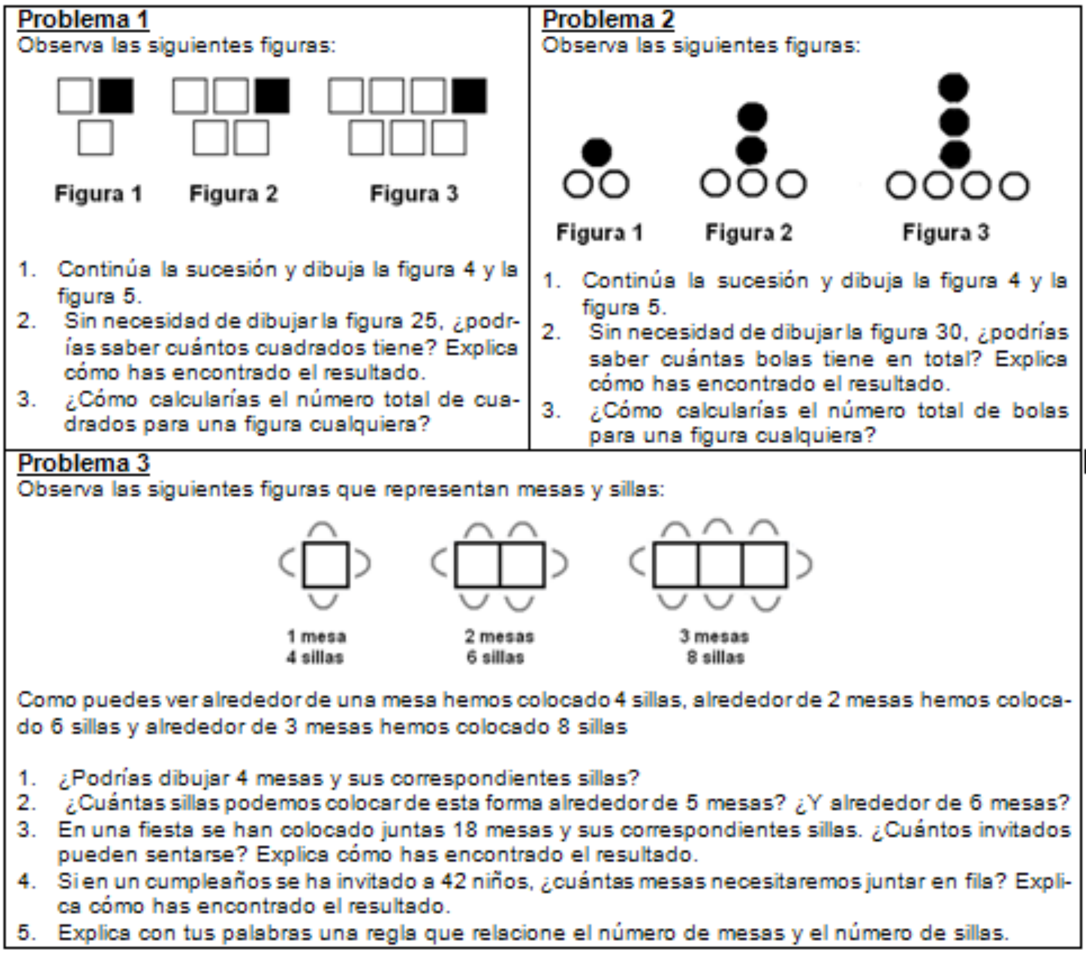
## MÉTODO

### Participantes

Los participantes fueron 40 EPM que estaban en el segundo semestre de su programa de formación cursando una materia centrada en el desarrollo del sentido numérico. Estos EPM habían resuelto problemas de generalización y habían identificado los elementos matemáticos, pero no tenían información sobre el proceso de generalización en alumnos de primaria.

### Instrumento

A partir de las investigaciones previas sobre el proceso de generalización en alumnos de primaria (Radford, 2011; Carraher, Martínez y Schliemann, 2007; Zapatera y Callejo, 2011) diseñamos un cuestionario formado por las respuestas de tres alumnos a tres problemas en los que se presenta una sucesión de figuras que siguen un patrón de crecimiento aditivo (Figura 2). Los EPM debían responder individualmente por escrito y disponían de 50 minutos.



**Problema 1**

Observa las siguientes figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 25, ¿podrías saber cuántos cuadrados tiene? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de cuadrados para una figura cualquiera?

**Problema 2**

Observa las siguientes figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 30, ¿podrías saber cuántas bolas tiene en total? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de bolas para una figura cualquiera?

**Problema 3**

Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas:

1 mesa 4 sillas; 2 mesas 6 sillas; 3 mesas 8 sillas

Como puedes ver alrededor de una mesa hemos colocado 4 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 6 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 8 sillas

1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
3. En una fiesta se han colocado juntas 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Figura 2. Problemas resueltos por los alumnos de Primaria

En los problemas 1 y 2 la regla general es $2n+1$ siendo $n$ el número de la figura. En el primer problema el término independiente corresponde al único cuadrado negro de cada figura y en el segundo a la diferencia entre el número de círculos blancos y negros. La regla general del tercer problema es $2n+2$.

Las respuestas de los tres alumnos a los tres problemas se seleccionaron atendiendo a distintos niveles de desarrollo del proceso de generalización (Figura 1) (Radford, 2011; Warren, 2005):

Las respuestas del *alumno A* a los tres problemas ponen de manifiesto un desarrollo del proceso de generalización que le permite continuar la sucesión para términos próximos (generalización cercana) respetando el patrón de crecimiento cuantitativo pero no reconociendo la estructura espacial de las figuras, por lo que no es capaz de construir los términos lejanos al no coordinar la estructura espacial y la numérica de las figuras e ignorar el término independiente (Figura 3).

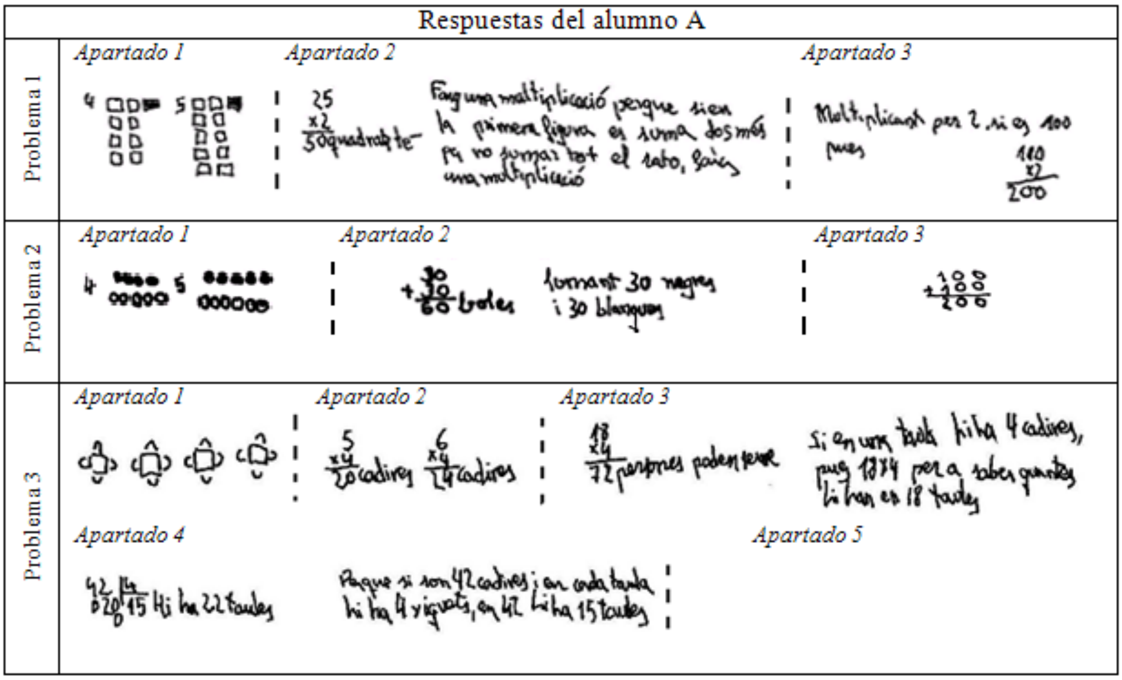



Figura 3. Respuestas[xliv] del alumno A a los tres problemas

Las respuestas del *alumno B* a los tres problemas pone de manifiesto un desarrollo del proceso de generalización que le permite coordinar el esquema espacial y numérico, reconoce la relación funcional en casos particulares y expresa la regla general como una relación funcional (generalización lejana). Sin embargo, no es capaz de invertir la relación funcional en casos particulares (sin proceso inverso; Figura 4).

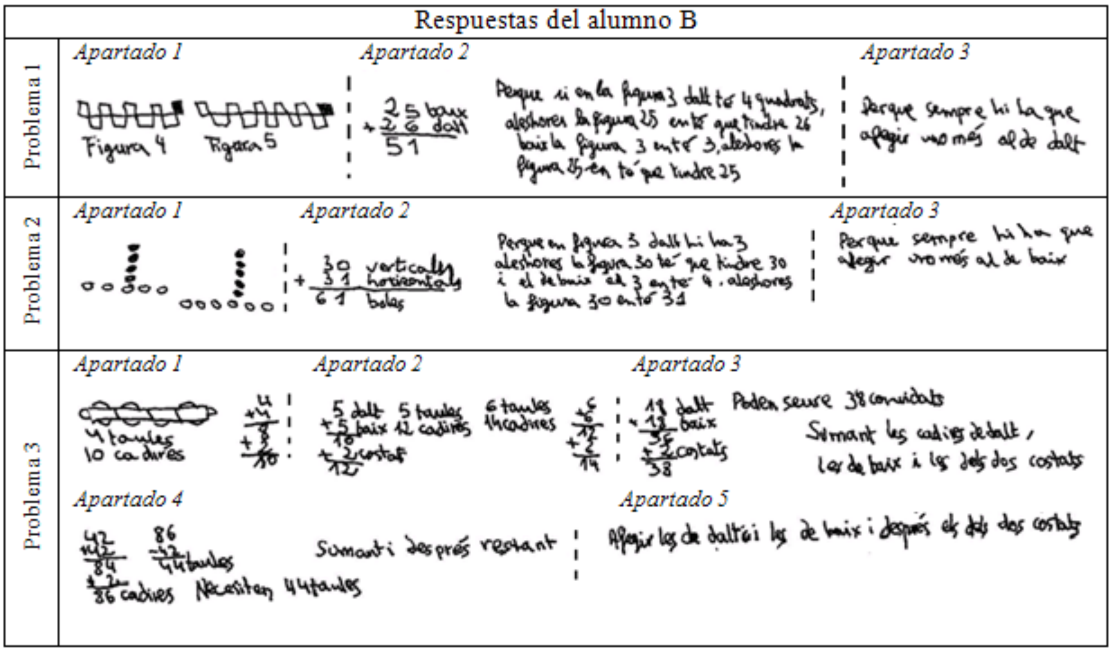



Figura 4. Respuestas del alumno B a los tres problemas

Las respuestas del *alumno C* añade al caso anterior el ser capaz de invertir la relación funcional en casos particulares (con proceso inverso; Figura 5).

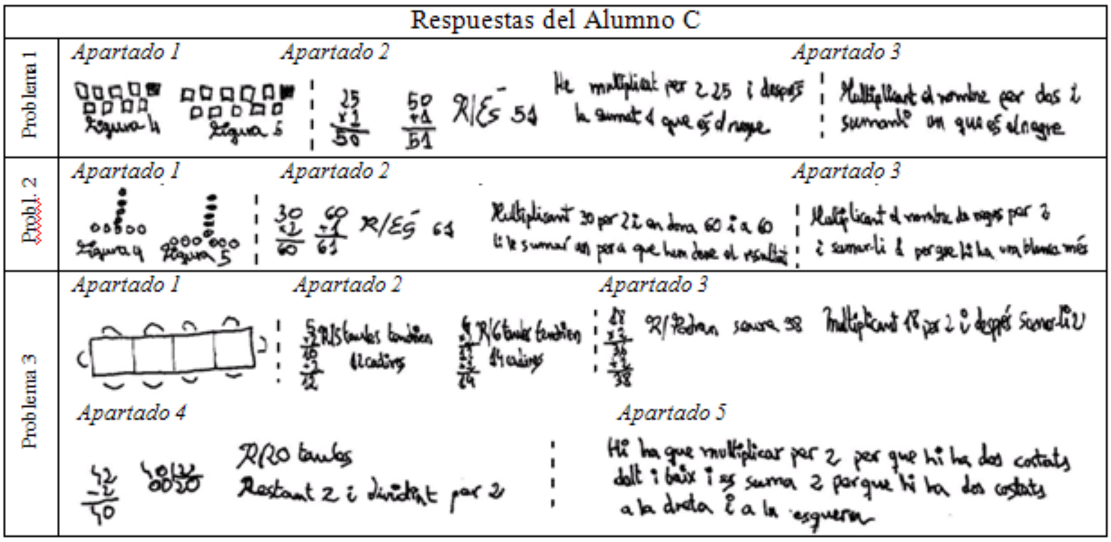



Figura 5. Respuestas del alumno C a los tres problemas

A los EPM se les pidió contestar por escrito a tres preguntas (Jacobs et al., 2010):

1. *Qué aspectos destacarías de las respuestas del estudiante X en relación con cada uno de los problemas, indicando a qué problema te refieres.*
2. *A partir de los aspectos que has destacado, identifica algunas características del proceso de generalización del estudiante X en los tres problemas.*
3. *Ante las características del proceso de generalización que has mencionado en el punto anterior, si fueras un/a maestro/a, ¿qué harías con el estudiante X para mejorar este proceso?*

La segunda pregunta tenía como objetivo determinar en qué medida los EPM eran capaces de abstraer las regularidades observadas en las respuestas de cada alumno a los tres problemas en conjunto, a fin de interpretar las características del desarrollo del proceso de generalización del estudiante de primaria. En este trabajo exponemos los resultados del análisis de esta pregunta

## Análisis

El análisis de las respuestas de los EPM se realizó en tres fases, En la primera fase del análisis clasificamos los EPM en dos grupos, según que diferenciaran o no en las respuestas de los alumnos de primaria distintos niveles de desarrollo del proceso de generalización. En una segunda fase, centrada sólo en aquellos que habían discriminado distintos niveles de desarrollo, se analizaron las respuestas teniendo en cuenta entre qué alumnos establecían diferencias (A, B o C). Por último, en la tercera fase se analizó el tipo de discurso que empleaban.

Con el propósito de generar categorías para analizar el discurso se siguió un proceso inductivo: un grupo de tres investigadores analizó de manera independiente una muestra de respuestas dadas por los EPM discutiéndose las discrepancias iniciales; estas categorías se fueron refinando al analizar nuevas justificaciones. Siguiendo este proceso generamos las siguientes categorías:

*Discurso genérico:* Cuando el EPM expresa juicios de valor acerca de la respuesta del alumno, da impresiones generales o hace comentarios acerca de la comprensión o de la expresión de los alumnos de Primaria. Por ejemplo si dice: “Sabe generalizar”, “No entiende el proceso de generalización” o “Realiza correctamente los ejercicios”.

*Discurso específico*: Cuando el EPM hace referencia explícita o implícita a elementos matemáticos del proceso de generalización mencionados anteriormente como la coordinación entre estructura espacial y numérica, término independiente, relación funcional o proceso inverso. Por ejemplo: “No generaliza correctamente porque no respeta la estructura espacial de las figuras”, “El alumno comete un error porque olvida sumar el cuadrado negro”, “Realiza con éxito la generalización ya

que es capaz de relacionar el número de la figura con el número de elementos" o "No completa la generalización ya que no es capaz de revertir el proceso".
*Discurso mixto*: Cuando el EPM utiliza un discurso específico para identificar las características de alguno de los alumnos y un discurso genérico para los otros.
Los análisis en las diferentes fases fueron realizados de manera independiente por tres investigadores discutiéndose las discrepancias.

## RESULTADOS

En la primera fase del análisis clasificamos los EPM en dos grupos: 2 EPM que no diferencian entre los alumnos de Primaria y 38 que sí establecen diferencias.

En la segunda fase, entre los EPM que sí establecían diferencias en la manera en la que los alumnos de primaria resolvían los problemas, identificamos dos grupos: *Grupo 1* formado por los EPM que sólo distinguen entre el alumno de primaria que no coordina la estructura espacial y la numérica (alumno A) y los que sí coordinan ambas estructuras (B y C); y el *Grupo 2* formado por los EPM que identifican las diferencias entre los tres alumnos.

En la tercera fase analizamos el tipo de discurso que usaba cada uno de estos dos grupos de EPM para describir las características del proceso de generalización de cada alumno de primaria. En cada uno de ellos hemos identificado tres subgrupos: un subgrupo que utiliza un discurso genérico, otro que usa un discurso específico y un tercero que emplea un discurso mixto. Describimos a continuación las características de estos grupos.

*Grupo 1* (n=17). Los EPM de este grupo distinguen el alumno de primaria que no coordina la estructura espacial y la numérica (alumno A) de los otros dos que sí coordinan estas estructuras (alumnos B y C); pero no fueron capaces de ver las diferencias entre estos dos últimos.

En este grupo 4 EPM utilizan un discurso genérico; 11 EPM un discurso específico apoyado mayoritariamente en un elemento matemático: la coordinación o no entre la estructura espacial y la numérica, lo que les permitió discriminar el alumno A de los demás; y 2 EPM utilizan un discurso mixto. Ninguno de estos subgrupos apoyó su discurso en el elemento matemático "proceso inverso" que les habría permitido discriminar entre los alumnos de primaria B y C.

Por ejemplo el EPM.30 utilizó un discurso específico para caracterizar los tres alumnos de primaria. Hizo referencia a la falta de coordinación entre estructuras ("no respeta la estructura espacial") y al término independiente ("no observa que se añade una más") para identificar al alumno A y diferenciarlo de los otros dos (alumnos B y C). Pero consideró a los alumnos B y C de manera conjunta haciendo referencia a la relación funcional para caracterizarlos ("toma la figura y relaciona las partes"; "la figura corresponde a 2n+1"), pero no identificó el papel que desempeña el proceso inverso para discriminar los alumnos B y C:

"El fallo se encuentra en que no respeta la estructura espacial y no observa que se añade una más al doble de la figura que sería la bola blanca de más" (Alumno A)
"Sabe generalizar para cualquier figura ya que toma la figura y relaciona las partes. Arriba tiene x y abajo tiene x más una añadida de color" (Alumno B)
"Arriba es igual que abajo más uno, entonces la figura corresponde a 2n+1" (Alumno C)
*Grupo 2* (n=21). Los EPM de este grupo fueron capaces de identificar las diferencias entre los tres alumnos de primaria. En relación con el discurso, distinguimos también tres subgrupos: un subgrupo que usa un discurso genérico (6 EPM); otro que usa un discurso específico apoyado mayoritariamente en dos o más elementos matemáticos (8 EPM) y los que utilizan un discurso mixto (7 EPM). Los EPM que emplean un discurso específico hacen referencia a los cuatro elementos matemáticos: término independiente (2 EPM), coordinación entre estructura espacial y numérica (7 EPM), relación funcional (3 EPM) y proceso inverso (8 EPM).

Por ejemplo el EPM 4.30 se refiere al término independiente y a la falta de coordinación del alumno A, a la dificultad a la hora de dividir del alumno B, lo que interpretamos como dificultad de invertir el proceso, y a la relación funcional en el alumno C:

"No sigue un orden espacial y se olvida de sumar" (Alumno A)
“No sabe usar correctamente la división en este tipo de ejercicios” (apartado 4 del ejercicio 3; Alumno B)
“Este tipo de problemas no le supone dificultad alguna porque se maneja muy bien con la estrategia funcional” (Alumno C)

Hemos descrito dos grupos de EPM, los que identifican sólo un nivel de desarrollo del proceso de generalización de los alumnos de primaria y no distinguen entre los otros dos (Grupo 1) y los que identifican tres niveles de desarrollo (Grupo 2). Por otra parte ambos grupos utilizan tres tipos de discurso para caracterizar estos niveles: específico, genérico y mixto. La diferencia entre los EPM del Grupo 1 y los del Grupo 2 radica en los elementos matemáticos que han utilizado cuando han elaborado un discurso específico. Por tanto, con relación a los resultados de van Es (2011), encontramos sólo una cierta relación entre el *qué* y el *cómo* los EPM interpretan el proceso de generalización de los alumnos de primaria: el discurso específico que usan los EPM que identifican los tres niveles de desarrollo es más rico que el que utilizan los que no los identifican pues usan más elementos matemáticos relativos al proceso de generalización para describir las diferencias.

En los problemas propuestos, el elemento matemático ‘proceso inverso’ juega un papel importante, pues es el que permite discriminar entre los dos alumnos de primaria que sí coordinan la estructura espacial y la numérica (alumnos B y C), ya que sólo el alumno C sabía realizar el proceso inverso. Por otra parte todos los EPM que han aportado evidencias de los elementos matemáticos que juegan un papel relevante en el proceso de generalización, se han referido al elemento ‘coordinación entre la estructura espacial y la numérica’. Esto puede deberse a que este elemento se pone de manifiesto en la respuesta al primer apartado de cada uno de los problemas “continúa la sucesión y dibuja las figura 4 y 5” (problemas 1 y 2) o “¿podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?” (problema 3) y se refleja claramente en el dibujo que han realizado los alumnos de primaria.

## CONCLUSION

Un resultado de este estudio es que los EPM tienen dificultad para interpretar el pensamiento matemático de los alumnos sobre el desarrollo del proceso de generalización (sólo 21 de 40 fueron capaces de reconocer las diferencias en los tres alumnos). Esta dificultad fue debida a que no reconocieron como relevante en el proceso de generalización la realización del proceso inverso a partir de la identificación de la relación funcional. El hecho de que algunos EPM no fuesen capaces de distinguir entre el alumno de primaria que coordinaba las estructuras numérica y espacial y utilizaba una relación funcional para describir la regla general (Alumno B) y el alumno que además de esto sabía invertir la relación funcional (Alumno C) indica que les ha resultado difícil describir las características del proceso de generalización de los alumnos de primaria usando los elementos matemáticos relevantes en la resolución de las tareas propuestas. Esto revela la necesidad de que los EPM tomen consciencia explícita de los elementos matemáticos que intervienen en la resolución de estos problemas con los que ya estaban familiarizados.

Estos resultados aportan información para el diseño de materiales para la formación de maestros que tengan en cuenta las características del aprendizaje de los EPM. En este sentido el instrumento diseñado en esta investigación puede ser un punto de partida para la elaboración de materiales docentes en los programas de formación de maestros que tengan como objetivo el desarrollo de las destrezas de identificar los elementos matemáticos relevantes en la resolución de este tipo de tareas e interpretar las producciones de los estudiantes. De esta manera coincidimos con van Es (2011) en que “los maestros necesitan aprender a mirar con sentido, es decir, necesitan identificar los aspectos que influencian el aprendizaje de los estudiantes y necesitan razonar sobre estos aspectos”, y una manera de trabajar estos aspectos podría ser la realización de tareas como las que planteamos en el cuestionario de esta investigación considerado como material docente.

**Reconocimientos.** Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España, y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante (España).

## Referencias

Carraher, D.W., Martinez, M.V., y Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*. *Mathematics Education*, *40*, 3-22

Fernández, C., Callejo, M.L., y Márquez, M. (2012). Valoración de las respuestas a problemas de división medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Jaén: SEIEM.

Fernández, C., Valls, J., y Llinares S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Fortuny, J.M., y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM*. *Avances de Investigación en Educación matemática, 1,* 23-37.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Márquez, M., Callejo, M.L. y Fernández, C. (2011). Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 417-428). Ciudad Real: SEIEM.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice*. *The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 17-24. Ankara, Turkey: PME.

Rivera, F.D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En M.F. Pinto y T.F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 81-88. Belo Horizonte, Brazil: PME

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Van Es, E., y Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10,* 571-596.

Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs y R.A. Philipp, *Mathematics Teacher Noticing*. Nueva York: Routledge.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 305-312. Melbourne: PME.

Zapatera, A. y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

[xliv] Las respuestas están en catalán.