

MODELACIÓN Y USO DE CONOCIMIENTO TRIGONOMÉTRICO EN INGENIERÍA. UN PRIMER ACERCAMIENTO A SU ESTUDIO

Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)

diana.torres@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: Se presenta el primer acercamiento al estudio de un proyecto doctoral relacionado con el uso del conocimiento trigonométrico en la Ingeniería y la modelación. Primero identificamos contenidos de Trigonometría en programas de Ingeniería en una universidad mexicana, eligiendo a Ingeniería en Mecatrónica por su fuerte presencia en estos contenidos (en Matemáticas y en su área de especialidad) y con ello un contexto donde se da un escenario ideal para estudiar sus prácticas de modelación, la Robótica. Por ello, y como un momento fundamental de nuestra investigación, presentamos un análisis y discusión de los planteamientos teóricos sobre la modelación que más se acercan al estudio que proponemos, es decir, a la modelación en Ingeniería. Nuestro objetivo no es sólo presentar antecedentes de investigación, sino discutirlos para una posible elección de un planteamiento que se integre a nuestro marco teórico.

Palabras clave: matemáticas para ingeniería, modelación, pensamiento geométrico, conocimiento trigonométrico

ABSTRACT: This paper explores a first approach to the study of a PhD project related to the use of trigonometry knowledge in engineering and modeling. First, we identify trigonometry contents in engineering syllabuses in a Mexican university. We adopted mechatronics engineering because of its strong presence in such contents (in mathematics and its branch), which constitutes a perfect setting to study its modeling practices, Robotics. As a main point of our research work, we show an analysis and discussion on the theoretical assumptions on modeling which are closed to the proposed study; i.e. to engineering modeling. We attempt not only to put forward research antecedents, but also to discuss them for the possible choice of a suggestion that could be incorporated to the theoretical framework.

Key words: mathematics for engineering, modeling, geometric thinking, trigonometric knowledge

■ Introducción

En la Ingeniería, el diseño curricular generalmente presenta las asignaturas de Matemáticas y posteriormente aquellas propias de su área de especialidad, con el fin de aplicar los contenidos de las primeras en las segundas. Sin embargo, la experiencia nos ha mostrado que los estudiantes tienen dificultades para transitar de la Matemática a la Ingeniería. En este contexto, donde se asume a la Matemática al servicio de la Ingeniería, se percibe necesario un rediseño del discurso Matemático Escolar (dME) para que éste verdaderamente satisfaga la demanda de la propia Ingeniería: *poner el conocimiento matemático en uso*. Este tránsito, proponemos, puede replantearse como escenario para resignificar la Matemática.

En particular, la matemática que nos interesa es la Trigonometría, a lo cual llamamos conocimiento trigonométrico, haciendo alusión a un conocimiento específico de la matemática. Al mirar los planes y programas de estudio de las Ingenierías, es posible observar al conocimiento trigonométrico en las distintas asignaturas de Matemática, pero en las áreas de especialidad, en la Ingeniería aplicada, ¿qué población de ingenieros es representativa para estudiar el uso de dicho conocimiento, en sus procesos de enseñanza y de aprendizaje?, ¿cuáles son los contextos donde se pone en uso?

Nuestra intención en este artículo, es presentar el primer acercamiento al estudio de un proyecto doctoral relacionado con el uso del conocimiento trigonométrico en la Ingeniería y la modelación. Por ello, se identifica que el conocimiento trigonométrico se encuentra presente en algunas áreas de especialidad de la Ingeniería, y dada la naturaleza de estos programas donde es necesario poner el conocimiento matemático en uso, recurrimos a estudiar algunas posturas de modelación que se han considerado pertinentes para nuestra investigación por su cercanía con el escenario.

■ El escenario de investigación

Se ha realizado una revisión de algunos programas educativos de Ingeniería (Civil, Electrónica, Electromecánica, Industrial y de Sistemas, Mecatrónica, y Software) del Instituto Tecnológico de Sonora (universidad pública descentralizada, de enseñanza tecnológica, con personalidad jurídica y patrimonio propios, ubicada en el estado de Sonora, México). Con ella identificamos que Ingeniería en Mecatrónica tiene una fuerte presencia en contenidos de Trigonometría en las asignaturas de Matemáticas y las de Ingeniería aplicada (ver Tabla 1).

Tabla 1. Contenidos de Trigonometría en Programas de Ingeniería

Ingeniería	Contenido y aplicaciones de Trigonometría	Herramienta trigonométrica
Civil	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales).	Razón trigonométrica

	En asignaturas de análisis estructural.	
Electrónica, y Electromecánica	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales). Asignaturas de análisis de señales y sistemas eléctricos.	Razón, función y serie trigonométrica
Industrial y de Sistemas	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales). En asignaturas de diseño CAD/CAM.	Razón trigonométrica
Mecatrónica	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales). Asignaturas de análisis de señales y sistemas eléctricos. Asignaturas de análisis y diseño de estructuras en reposo CAD/CAM, en cinemática y con métodos numéricos para robots.	Razón, función y serie trigonométrica. Métodos numéricos con Trigonometría
Software	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I y II)	Razón trigonométrica

Fuente: Elaboración propia, 2016; Nota: CAD/CAM es Diseño Asistido por Computadora/Manufactura Asistida por Computadora por sus siglas en inglés.

En Ingeniería en Mecatrónica, se incluye la enseñanza de la razón trigonométrica en asignaturas de Matemáticas que se espera sea aplicada en asignaturas que requieren el análisis y diseño de estructuras estáticas (en reposo) en CAD/CAM; así como la función trigonométrica para ser aplicada en estructuras en cinemática (en movimiento); además, de manera significativa, utiliza Trigonometría para la rotación (ángulos) y traslación (desplazamiento) de robots (manipuladores) utilizando métodos numéricos, ya que en el análisis y diseño de éstos, se tiene la necesidad de utilizar una computadora que controle el movimiento del robot, y el lenguaje de ambos es distinto.

Véase por ejemplo el modelo de la figura 1. En ella se muestra un ejemplo clásico de Robótica que presenta un libro de bibliografía básica (recomendada por el programa de estudios analizado), *Diseño de maquinaria* de Norton (2013). Con esta ilustración podemos ver que, efectivamente, son necesarias las herramientas trigonométricas en la elaboración del modelo, para la construcción y funcionamiento de la estructura representada. Sin embargo, más que verlo como un contexto de aplicación de lo ya aprendido (de manera descontextualizada) en las asignaturas de Matemáticas, proponemos, es posible trabajarlo como un escenario en el que emerjan las herramientas trigonométricas, a partir de *poner en funcionamiento aquello que les es propio*; lo que en la Socioepistemología suele reconocerse como “la naturaleza social de la Trigonometría”. Este planteamiento se basa en el reconocimiento de *lo trigonométrico*, reportado en las investigaciones de Montiel (2011), Montiel y Jácome (2014), Torres-

Corrales (2014) y Scholz (2014); y que en un análisis inicial de este ejemplo reconocemos en la construcción de figuras geométricas (composiciones circulares y triangulares), para trabajar con distancias y rotaciones (ángulos y movilidad), y en elementos que se integran al modelo de lo representado, como por ejemplo los apoyos de articulación  que unen piezas en los robots y permiten el movimiento relativo de los vínculos adyacentes.

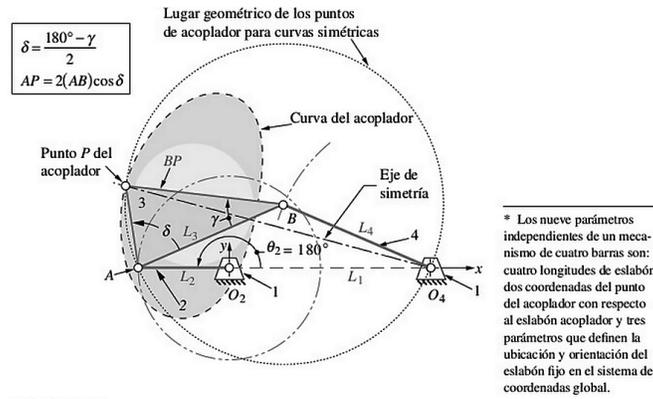


FIGURA 3-20
Eslabonamiento de cuatro barras con curva del acoplador simétrica

Figura 1. Herramientas trigonométricas en el modelo de un acoplador. Norton, 2013, p. 90

Cuando se trabaja con robots, se hace necesario modelar su funcionamiento. Los estudiantes de Ingeniería en Mecatrónica modelan para analizar y diseñar robots (y sus componentes), con el fin de evitar los costos de probar un diseño físico terminado. Es decir, dan solución a una situación problema o brindan una intervención de mejora, sin la necesidad de intervenir en la realidad, sino primero crean un modelo, lo prueban y se aseguran de no incurrir en desperdicios, costos y peligro para el sistema o el usuario. La modelación que se ha descrito está en términos de Ingeniería, que si bien puede guardar una relación cercana a la modelación que se trabaja en la investigación en Matemática Educativa, la llamaremos *trabajo de laboratorio*, tradicional en la formación del ingeniero y escenario natural de nuestra investigación para estudiar los usos del conocimiento matemático.

■ Planteamiento inicial de investigación

Planteamos este estudio desde la Teoría socioepistemológica, en particular el estudio del conocimiento trigonométrico puesto en uso en el proceso formativo de Ingenieros en Mecatrónica. En particular, nos situamos en la asignatura de Robótica, porque constituye una integración de conocimientos de Matemática, Física y otras asignaturas propias de la Mecatrónica que, desde nuestra perspectiva, constituye un escenario ideal para estudiar sus prácticas de modelación.

La perspectiva social de la Teoría socioepistemológica, se orienta al conocimiento matemático mismo y no sólo a su socialización, y establece en la base de sus objetos de estudio al conocimiento

matemático en uso. Para estudiar los usos del conocimiento matemático ante situaciones que provienen de prácticas situadas y compartidas por una comunidad, problematiza el saber, en sus cuatro dimensiones: social (el valor de uso), epistemológica (la forma en que conocemos), didáctica (los modos de transmisión vía la herencia cultural), y cognitiva (las funciones adaptativas) (Cantoral, 2013).

Se vislumbra la necesidad de llevar a cabo, inicialmente, un análisis documental, sobre la Mecatrónica, la Robótica y el currículo que se propone, para situar y contextualizar el quehacer del ingeniero y su proceso formativo. Con esta base, se propone un análisis de tipo etnográfico, para el estudio del proceso formativo en sí, en dos momentos: el aula teórica y el trabajo de laboratorio; de forma que se reconozcan argumentaciones (qué significa, cuándo emerge y para qué se utiliza) y usos (prácticas) de la Trigonometría puesta en juego.

Con el objetivo de situar nuestra investigación en la disciplina, se realizó una revisión bibliográfica sobre diversas perspectivas de modelación para estudiar fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de la Matemática; algunas de las cuales, por su cercanía a la modelación matemática, son muy utilizadas para estudiar la matemática al servicio de la Ingeniería. Por ello, y como un momento fundamental de nuestra investigación, presentamos un análisis y discusión de los planteamientos teóricos sobre la modelación que más se acercan al estudio que proponemos, es decir, a la modelación en Ingeniería. Nuestro objetivo no es sólo presentar antecedentes de investigación, sino discutirlos para una posible elección de un planteamiento que se integre a nuestro marco teórico.

■ Indagación bibliográfica

A continuación, presentamos dos posturas teóricas referentes a la modelación en la educación matemática (ver Tabla 2), una centrada en lo cognitivo (Blum, *et al.*, 2002) y otra relacionada con lo social (Arrieta y Díaz, 2015). Las investigaciones del primer grupo, están situadas principalmente en el continente europeo, con alrededor de 30 años de experiencia, y el segundo grupo está situado en el continente americano, con alrededor de 20 años de experiencia. Hasta el momento han sido analizadas cincuenta referencias sobre modelación matemática, donde la mayoría de éstas están en los grupos de investigación mencionados. Por las limitaciones de extensión del presente documento, exponemos aquellas más representativas para fines de nuestro estudio.

Tabla 2. Perspectivas de modelación matemática

Modelación matemática	Perspectiva cognitiva	Perspectiva social
¿Qué es?	Significa llevar un problema del mundo real a un modelo matemático y no solo implica tomar un ejemplo y presentarlo como un modelo, sino que representa un esquema donde intervienen dominios (nociones de aplicación y de modelos matemáticos, el aula de clases, el sistema donde se lleva a cabo) y actores (Blum, <i>et al.</i> , 2002).	Se constituye como una práctica que establece puentes entre la escuela y el entorno, es la articulación de dos entes, uno llamado el modelo y el otro lo modelado; donde un ente se convierte en el modelo cuando el actor lo usa para intervenir en el otro, por lo que deviene en herramienta, los entes matemáticos al modelar, son herramientas (Arrieta y Díaz, 2015).
¿Por qué es importante?	Se refleja en una mejor comprensión del mundo y en contribuir al desarrollo de competencias y actitudes adecuadas hacia la Matemática. Sin embargo, enseñarla y aprenderla representa un reto: la brecha entre teoría y práctica, y las dificultades para profesores y estudiantes (Blum y Borromeo, 2009).	Su naturaleza radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad que se desea intervenir, es decir, la necesidad de la experimentación en sentido amplio (Arrieta y Díaz, 2015).

Fuente: Elaboración propia, 2016.

De forma sintetizada se han presentado las posturas cognitiva y social de la modelación matemática, podemos ver como en ambas se habla de *articular la realidad y la escuela*, la forma de concebir que hay *actores* (persona que modela) y la *intencionalidad* de contribuir al desarrollo de competencias matemáticas. Otro aspecto importante de mencionar, es que las investigaciones de ambas perspectivas, argumentan que en la modelación matemática se restringe la realidad a aquellas condiciones que son útiles de modelar, por ello es algo que apoya en la articulación de la realidad y la escuela, y no es estrictamente una representación completa de la realidad. Por ejemplo, podemos encontrar en Arrieta y Díaz (2015) “No es posible reproducir las intencionalidades de comunidades en el aula, las entidades con las que interactúan los profesionistas en sus prácticas son diferentes con aquellas de la escuela, lo que sí “transportamos” al aula es el acto de modelar” (p. 36).

Además, la postura cognitiva contempla el desarrollo de actitudes adecuadas a la Matemática, porque sus investigaciones se dan principalmente en el nivel básico (primaria y secundaria) y medio superior, y se tiene la intención que los estudiantes den sentido a la Matemática, esto lo podemos ver en Blum y

Borromeo (2009), donde se presentan cuatro casos de modelación matemática con situaciones problema “artificiales” (en el sentido de no ser una necesidad habitual de los actores que modelan). La postura social ha generado investigación en situaciones profesionales, como comunidades de ingenieros donde los contextos son por sí mismos situaciones de la vida profesional y no requieren de ser ajustados de manera forzada (aunque si se restringe a ciertas variables, es decir, no se consideran todos los aspectos que pueden influir en una situación profesional real), esto lo podemos ver en los estudios de Arrieta (2003) con ingenieros en Bioquímica.

Otro aspecto relevante de las posturas cognitiva y social son sus esquemas para describir la modelación. En lo cognitivo (ver figura 2) observamos un ciclo de modelación como un algoritmo que nos dice los pasos a seguir para modelar, en éste nos es importante la flexibilidad para repetir el ciclo las veces necesarias y también contempla una etapa de validación, actividad fundamental en la Ingeniería, que es probar un modelo. En lo social, observamos un esquema descriptivo que identifica y relaciona lo modelado, cómo uno de ellos se convierte en un ente cuando pasa de ser el modelo a aquello que se modela, dando como resultado una herramienta de decisión para el actor.

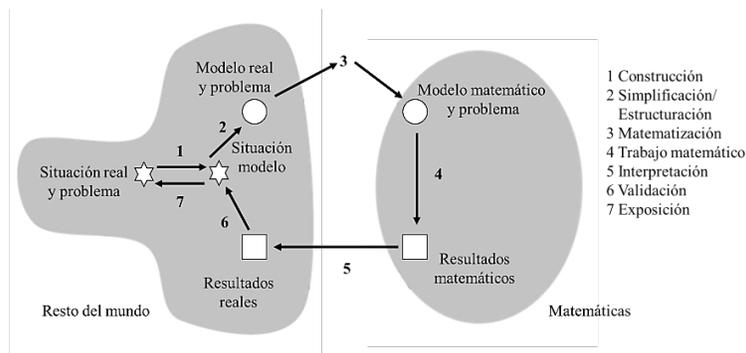


Figura 2. Ciclo de modelación. Adaptado de Blum y Borromeo, 2009, p. 46

Blum y Borromeo (2009) nos indican que el ciclo de modelación inicia con un problema a resolver, el cual tiene que ser primeramente comprendido (a lo que llaman los autores, construcción de una situación de modelación) por el actor. Luego la situación debe ser simplificada, estructurada y detallada para hacer un modelo real de la situación. Posteriormente se debe hacer la matematización en la elaboración de un modelo matemático (conjunto de ecuaciones), seguidamente se efectúa el trabajo matemático (calcular y resolver ecuaciones) para obtener resultados matemáticos que deben interpretarse en el mundo real como resultados reales. Por último, se validan los resultados del ciclo, para comparar los resultados obtenidos del ciclo de modelación con los factores involucrados en el modelo real.

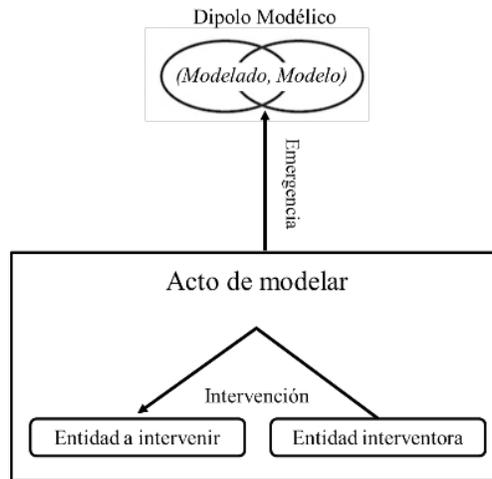


Figura 3. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico. Adaptado de Arrieta y Díaz, 2015, p. 36

Bajo la perspectiva social de modelación, se puede asociar el ejemplo de la figura 1 del esquema de eslabonamiento de cuatro barras, el cual se convierte en modelo cuando el Ingeniero en Mecatrónica (en formación) lo utiliza para intervenir en una toma de decisión del robot, o parte de él, que esté analizando o diseñando, el modelo (esquema) se convierte en el ente modelado (eslabonamiento de cuatro barras). En cambio, no hay acto de modelar si el mismo esquema lo utiliza un estudiante en asignaturas iniciales, como Física por ejemplo, el estudiante aunque tiene conocimientos de apoyos de acoplador (conocidos como apoyos de perno liso, que significa que es una pieza que evita el movimiento vertical y horizontal y se utiliza en vigas), sus conocimientos no le permiten concebir que un eslabonamiento de cuatro barras trae consigo curvas de acoplador, lo que no tiene un significado útil en la Robótica para la toma de decisiones.

■ Reflexiones

Las perspectivas cognitiva y social presentadas nos han permitido identificar aspectos importantes en la modelación en Ingeniería, tales como: dar una forma sistematizada de poder observar un ciclo de modelación (la cognitiva) y dar una explicación sistémica, es decir, todo aquello que interviene en la modelación, y cómo se relacionan sus entes (la social). Desde nuestro marco teórico nos es posible integrar ambas perspectivas de modelación porque contempla las dimensiones cognitiva y social, pero es necesario analizar a detalle los principios filosóficos de ambas perspectivas para ver que sean compatibles entre ellos, y así poder utilizarlas de forma articulada en nuestro estudio del uso del conocimiento trigonométrico y la modelación en la Robótica de los ingenieros en mecatrónica.

■ Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. (2003). *La modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal, México.
- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde La Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 18(1), 19-48.
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1(1), 45-58.
- Blum, W., Alsina, C., Biembengut, M., Bouleau, N., Confrey, J., Galbraith, P., Ikeda, T., Lingefjärd, T., Muller, E., Niss, M., Verschaffel, L., Wang, S., Hodgson, B. y Henn, H. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modeling in Mathematics Education- Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1-2), 149-171.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Diaz de Santos.
- Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática* 28(50), 1193-1216.
- Norton, R. (2013). *Diseño de Maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. Quinta Edición. México: McGraw-Hill.
- Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal México.
- Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Sonora, México.