

ESTUDIO DE LA REPRESENTATIVIDAD DE LA NOCIÓN FUNCIÓN EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS CHILENO: EL CASO DE OCTAVO BÁSICO

Yocelyn Parra Urrea, Luis R. Pino-Fan

Universidad San Sebastián (Chile). Universidad de Los Lagos (Chile).
yocelyn.parra@uss.cl, luis.pino@ulagos.cl

RESUMEN: Esta investigación analiza la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función respecto del significado holístico de referencia. Para lograr nuestro propósito reconstruimos mediante una revisión histórico-epistemológica el significado holístico de referencia y determinamos el significado pretendido por el currículo chileno <programas de estudio, libros de texto>. Para el análisis utilizamos las herramientas teóricas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. Este estudio permitió evaluar la riqueza matemática de los significados pretendidos por el currículo chileno, además de proporcionar información que permitirá gestionar idóneamente los aprendizajes sobre funciones.

Palabras clave: función, enfoque onto-semiótico, currículo chileno

ABSTRACT: This research work analyzes the presence of the meanings related to the notion of function with respect to the reference holistic meaning stated in the Chilean mathematics curriculum. To accomplish such purpose, the authors rethink the reference holistic meaning through a historical and epistemological review and determine the meaning stated by the Chilean curriculum (syllabuses, text books). The theoretical tools they used in this analysis were the Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematics knowledge and mathematics teaching. This study allowed evaluating the mathematics richness of the meanings stated in the Chilean curriculum. It also provided information that will make possible to properly manage the students' learning about functions.

Key words: function, onto-semiotic, chilean curriculum

■ Introducción

La noción de función, como objeto matemático básico y unificador, es considerada uno de los conceptos más importantes de la matemática. Su presencia y estatus dentro del currículo chileno conduce la atención hacia el análisis de sus procesos de enseñanza aprendizaje. Diversos estudios (Duval, 1995; Vinner, 1992; Ramos, 2005; entre otros) han reportado una variedad de dificultades en su aprendizaje, impidiendo que los estudiantes logren apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función. En Chile, el trabajo con funciones es tratado desde un punto de vista estrictamente formal, generando una serie de obstáculos en la aprehensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena, 2001). La comprensión de la noción de función es fundamental, dado que opera sobre otros objetos matemáticos y presenta una utilidad práctica en la resolución de problemas y en la modelación de fenómenos.

La función, ha sido objeto de especial atención en distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitivas relacionadas a las dificultades que poseen los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que involucran el objeto matemático. En este sentido, Artigue (1995) establece que una de las principales dificultades cognitivas presentes en los estudiantes cuando abordan la noción de función son producto de los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal) impiden al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de un registro a otro, siendo la articulación de registros de representación fundamental en la conceptualización de la noción de función y crucial para desarrollar una comprensión profunda de los objetos matemáticos (Amaya, Pino-Fan y Medina, 2016). Otro tipo de cuestiones son las relacionadas con los procesos instruccionales que manifiestan dificultades asociadas a la enseñanza-aprendizaje de la función. Ruiz (1998) en su estudio explicita que los procesos de enseñanza no promueven el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la noción de función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. Además, la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Esta concepción limitada de la función influencia el pensamiento y comprensión de los estudiantes.

En virtud de lo descrito anteriormente, el interés de esta investigación es identificar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia. Esto con el propósito de avanzar en la caracterización de los conocimientos que requieren los profesores de matemática para la enseñanza idónea de la noción de función

■ Marco Teórico y Metodología

El marco teórico que hemos adoptado para llevar a cabo nuestro estudio es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática, desarrollado desde 1994 por Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007). El EOS permite a través de sus herramientas teóricas realizar un análisis detallado de los significados de la noción de función pretendidos en el currículo nacional chileno. Para ello, hemos utilizado la noción de *configuración ontosemiótica* (Figura 1), la cual nos permite analizar y describir los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en prácticas matemáticas cuando se aborda la noción de función (Pino-Fan, Godino y Font, 2015).

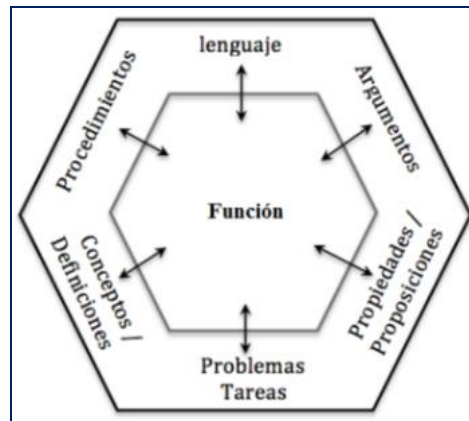


Figura 1. Configuración ontosemiótica de la función.

Cabe destacar que para el análisis de las prácticas matemáticas propuestas en el currículo chileno sobre la función (y los significados de la función que estas conllevan) consideramos tanto los programas de estudio como los libros de texto desde octavo año básico hasta cuarto año medio.

En el EOS el significado de un objeto matemático se define como el “sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene” (Pino-Fan, 2014, p. 45). Entenderemos por sistema de práctica a “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). El significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales* y *significados personales* respectivamente. “La interpretación semiótica de las prácticas

lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales)” (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011, p. 4). De acuerdo con Godino y Batanero (1994):

los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013, p.147).

Para el estudio de la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia de la función, utilizamos la noción de idoneidad epistémica que proporciona el EOS. Esta noción se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto de un significado de referencia.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y descomposición operativa, han sido introducidos en el EOS (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva–explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula (Pino-Fan, Castro, Godino, Font, 2013, p.126-127).

Esta investigación trata de un estudio cualitativo puesto que estamos interesados en caracterizar las *configuraciones ontosemióticas* asociadas a las prácticas matemáticas propuestas tanto en los programas de estudio como en los libros de texto. Para lograr los objetivos de esta investigación nos hemos propuesto las siguientes tres fases: 1) *Determinación del significado holístico de referencia de la noción de función*. A partir del estudio histórico-epistemológico se han identificado seis significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia. Estos son: La función como correspondencia, como relación entre variables, como expresión gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos. 2) *La determinación del significado pretendido por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. Para ello, adoptamos la metodología propuesta por Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), la cual establece cuatro criterios para la caracterización de los significados curriculares: Representatividad de los campos de problemas propuestos; Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas; Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos y *Representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia*. Este último criterio se corresponde con la última fase de nuestro estudio.

■ Análisis de las propuestas curriculares chilenas

A continuación presentamos el análisis del currículo de matemáticas chileno para determinar los significados pretendidos sobre la función. Para ello analizamos los programas de estudio y libros de texto desde octavo año básico hasta cuarto año medio. No obstante por motivos de espacio, sólo presentaremos el análisis detallado de la propuesta curricular de octavo básico.

Análisis del programa de estudio para octavo básico

El Programa de Estudios (PE) para octavo básico propuesto por el Ministerio de Educación de Chile presenta en su cuarta unidad de álgebra, la noción de función. El propósito de esta unidad es:

[...] los alumnos comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. Por una parte, la idea es desarrollar el concepto de función asociado a algunas metáforas que facilitan su comprensión y vincularlo a conceptos matemáticos ya trabajados en años anteriores. Por otra parte, en el trabajo propuesto los estudiantes deben reconocer conceptos claves, como dominio y recorrido, lo que introduce algunos elementos de lenguaje conjuntista (Mineduc, 2011a, p. 73).

Con base en lo anterior, podría decirse que el PE para octavo básico pretende introducir la noción de función como *relación entre variables* para posteriormente definir la noción de función desde un punto de vista conjuntista. Esta reflexión cobra fuerza cuando el Mineduc (2011a) señala:

Interesa que los alumnos analicen las funciones desde la relación entre dos variables y, en particular, distingan entre variables dependientes e independientes. Se abandona la clásica progresión que se iniciaba con una rigurosa definición de producto cartesiano, para luego definir el concepto de relación y terminar presentando las funciones como un caso particular de las relaciones. Es importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el dominio y recorrido de una función. Aunque el currículo no propone como tema el uso del lenguaje conjuntista, si el docente lo estima conveniente puede utilizar aquellos términos y conceptos relacionados con teoría de conjuntos que sean necesarios y faciliten el aprendizaje. (p. 76)

Con respecto a los *conceptos/definiciones* se mencionan algunos como relaciones, variables (independientes y dependientes), dominio, recorrido, entre otros. En cuanto a los *elementos lingüísticos*, aunque se señala que se estudiarán diferentes representaciones de la función, no se explicita el tipo concreto de representaciones. Sin embargo, en los ejemplos de actividades sólo se ilustra el uso de representaciones verbal y simbólica. Es importante mencionar que en el (PE) no se encuentra evidencia explícita de los otros elementos de la configuración ontosemiótica (tipos de problemas, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos).

Análisis del texto escolar de octavo año básico

El primer elemento de la configuración ontosemiótica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos tres tipos de problemas: 1) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 2) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 3) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos ‘adquiridos’. Los *elementos lingüísticos* identificados son de tipo verbal, tabular, simbólico y, en menor medida, el gráfico. Los *conceptos/definiciones* que se introducen en el texto escolar son: función, valor de entrada y salida, dominio, recorrido, variable (dependiente, independiente), tabla y par ordenado. La noción de función es introducida por primera vez mediante la siguiente definición: “Una función es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente x un solo valor de la variable y . Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por un valor de entrada” (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, *et al.*, 2014, p. 206).

Dicha definición se establece sobre la base de la clásica metáfora de la “máquina”, la cual es presentada de manera muy sucinta previa a dicha definición. Posteriormente, se presenta un primer problema (del tipo 1 descrito anteriormente), que permite ejemplificar la definición introducida. Otras definiciones, que llevan implícitas concepciones conjuntistas para la noción de función, son las de dominio y recorrido. Las *propiedades/proposiciones* que identificamos podemos describirlas con el ejemplo de la Figura 2. Dichas proposiciones se establecen en el sentido de describir la regla de correspondencia. Del mismo modo, hacen referencia a *procedimientos* que tienen que ver con las operaciones que los estudiantes deben de realizar para encontrar los valores de y dado x . Otro tipo de proposiciones hacen referencia a explicaciones adicionales a la definición dada, o bien a *justificaciones/argumentos* de los procedimientos realizados; por ejemplo, “La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto \mathbb{R} ”.

EJEMPLO

1

Completar una tabla de funciones

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

A $y = 4x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$4x - 2$	y
-1	$4(-1) - 2$	-6
0	$4(0) - 2$	-2
3	$4(3) - 2$	10

Sustituye x por -1 y luego desarrolla.

Sustituye x por 0 y luego desarrolla.

Sustituye x por 3 y luego desarrolla.

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto \mathbb{R} . Los valores de salida también son números reales, por lo tanto el recorrido de la función es el conjunto \mathbb{R} .

Figura 2. Ejemplo de problema tipo 2 (Bennett, *et al.*, 2014, p. 206).

En cuanto al tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos, encontramos cuatro clases de problemas. El primero, refiere a problemas para los cuales se proporcionan datos verbales de la función, y se espera una respuesta en que la función se represente simbólicamente. La segunda clase refiere a problemas en los que se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta tabular. Para ello, los estudiantes deberán transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a lo tabular. La tercera clase refiere a tareas que proporcionan en su planteamiento datos simbólicos de la función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo simbólico a lo tabular y de lo tabular a la gráfica de la función. La última clase de tareas, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. La siguiente tabla resume las cuatro clases de problemas identificados en el texto escolar de octavo básico

Tabla 1. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 8° básico

		Representaciones para $f(x)$				
		$f(x)$				
Previos	Emergentes	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
	$f(x)$	Verbal			●	S●
Gráfica						
Simbólica			T●		●	
Tabular						
Icónica						

■ **Conclusiones**

A partir del análisis realizado hemos constatado que los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función no son representativos del significado holístico de referencia, esto pues el enfoque actual que se da a este objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de *relación entre variables* y en un significado de función que progresivamente se

acerca a la definición de *función a partir de la teoría conjuntista*. Del mismo modo, hemos verificado que a lo largo del currículo chileno se presentan funciones tanto algebraicas como trascendentales, sin embargo, no se explicita la diferencia entre estos tipos de funciones, impidiendo movilizar la noción de *función como expresión analítica*. Otro aspecto importante es que la definición de *función* es introducida por primera vez en octavo año básico, sobre la base de la clásica metáfora de la “máquina” que produce un ‘único’ valor de salida para cada valor de entrada. De acuerdo con Mesa (2004), los profesores tienden a privilegiar la metáfora de la máquina para ilustrar un proceso de transformación, esto por sobre definiciones esenciales que utilicen términos como el de relación y correspondencia. Es así que hemos constatado que el currículo no promueve el estudio de relaciones funcionales definidas en conjuntos distintos a los numéricos usuales. Es decir, no moviliza la noción de *función como correspondencia arbitraria*. Este hecho provoca que una de las concepciones que los estudiantes posean respecto a la noción de función sea que la correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades (Vinner, 1992), lo cual implica que una correspondencia arbitraria no sea considerada por los estudiantes como una función. Los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos en los textos escolares, mayoritariamente requieren de la activación de representaciones simbólicas, verbales y gráficas. Usualmente se presenta la problemática desde expresiones simbólicas o verbales de la función para posteriormente dar respuestas bajo representaciones simbólicas o gráficas. Orton (1983) ya señalaba que una aproximación inicial “informal” a los conceptos del cálculo, debe involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Esto no se evidencia en la exploración realizada en los libros de texto, pues en la aproximación inicial a la noción de función (octavo básico), predominan fuertemente representaciones de tipo simbólicas y no se evidencian tareas donde la función sea planteada desde su *representación gráfica*.

■ Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación FONDECYT de iniciación N°11150014, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile.

■ Referencias bibliográficas

- Amaya, T., Pino-Fan, L., y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28(3), 111-144.
- Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. Tesis de doctorado no publicada, Departament de Didáctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat de Barcelona. España.

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97 - 140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., y Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 8°*. Chile: Galileo Libros Ltda.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265.
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2), 255-286.
- Mineduc. (2011a). *Programa de Estudio para Octavo Año Básico Unidad de Currículum y Evaluación*. Santiago de Chile. doi :978-956-292-342-2.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250.
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123-150.
- Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA*, 29(51), 60-89.
- Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Barcelona. España.
- Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral publicada, Universidad de Jaén: España.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. En E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.