HERMENÊUTICA: ANÁLISE DE UM LIVRO DIDÁTICO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Karly Barbosa Alvarenga, Aline da Paixão
Universidade Federal de Goiás. Universidade Federal de Sergipe (Brasil)
karlyba@yahoo.com.br, niny.ufs@gmail.com

RESUMO: Este trabalho tem por objetivo apresentar uma análise de um livro de Cálculo Diferencial e Integral à luz dos conteúdos de Inequações, Números Reais e Lógica Matemática. Utiliza-se da ciência da interpretação, Hermenêutica, para desvelar os sentidos, em especial, o movimento proposto por Thompson (1995), o formal. A pesquisa é do tipo bibliográfica e teve como propulsão outras já realizadas com livros didáticos da educação básica. As dificuldades de ensino e de aprendizagem do Cálculo são conhecidas e, assim, optou-se por investigar como o livro didático Flemming e Gonçalves (2006) aborda tais conteúdos. Os resultados apontam para uma abordagem superficial, sem exploração matemática adequada dos temas.

Palavras chave: hermenêutica, livros didáticos, inequações, ensino superior

ABSTRACT: This work is aimed at showing an analysis of a book of Differential and Integral Calculus with respect to the contents of inequations, real numbers, and mathematical logic. It uses the science of interpretation and the hermeneutics to unveil the senses, specially the formal movement proposed by Thompson (1995). This is a bibliographic research and had other issues already published in didactic books for basic education as a reference source. The shortcomings in the teaching and learning process of calculus are well known; therefore we decided to investigate how the didactic book by Flemming y Gonzalvez (2006) addresses such contents. The outcomes point out a general view, without a proper mathematics analysis of the topics.

Key words: hermeneutics, didactic books, inequations, higher education

Introdução

Baseamo-nos no que defende a Hermenêutica da Profundidade, referencial metodológico que indica uma possibilidade de interpretação de formas simbólicas, para analisar um livro didático de Cálculo Diferencial e Integral, Flemming e Gonçalves (2006), à luz dos conteúdos de inequações, lógica matemática e números reais. Entendemos que eles estão inter-relacionados e queremos observar, segundo categorias elencadas *à priori*, como estão postos nesta obra.

A Hermenêutica, isto é, a ciência da interpretação, como prática sistemática de desvelamento de sentidos, tem origem na exegese bíblica, no desenvolvimento de um enquadre teórico e de um método que dirige essa prática, realizada em séculos de leituras e discussões dos textos sagrados. Silva e Otero-Garcia (2011) apoderam-se de Oliveira (2008) para indicar a Hermenêutica da Profundidade como um procedimento que auxilia na análise de livros didáticos. Esses autores os concebem como formas simbólicas e sugerem atentarmos, na interpretação desse tipo de material, para os três movimentos propostos por Thompson (1995): o sócio-histórico, o formal e a interpretação/reinterpretação); ou seja, defendem que, para realizar um estudo abrangente do livro didático, deve-se focar a sua problemática sobre diferentes ópticas, dentre elas: a interna, a política, a econômica, a psicopedagógica etc.

Quando nos referimos à apreciação de um livro didático, durante a análise formal, podemos considerar, além da sequência e do modo com que os conteúdos são apresentados, a metodologia utilizada pelo autor, o nível de ensino para o qual o livro foi produzido e, sempre que possível, os elementos adicionais, ou seja, os paratextos que compõem a obra. Aqui nos fixamos na análise formal, que para Silva y Garnica (2011) constitui-se pela análise dos elementos internos das formas simbólicas, o que comporta uma descrição das obras. É o momento da análise no qual são investigados os aspectos “internos” da obra que comporá nossa pesquisa. Ela é realizada a partir da elaboração de descrições do material analisado, e procurará considerar, além da sequência e o modo com que os conteúdos são apresentados, a metodologia utilizada pelo autor, o nível de ensino para o qual o livro foi produzido e, sempre que possível, elementos adicionais, como prefácios, notas de tradução, capa, ilustrações etc. Dados biográficos de autores, editores, prefaciadores etc. podem, também, nos auxiliar na compreensão de aspectos internos (e externos) das obras.

O método qualitativo, utilizado por nós, se assenta nos princípios da Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2009). Apresentamos aqui apenas um recorte de uma investigação mais abrangente que teve o intuito de observar como tais conteúdos são apresentados em alguns livros universitários. Estamos interessadas em conhecer como esses conteúdos estão enredados, tendo em vista que é impossível estudar inequações, adequadamente, sem nos colocarmos mediante lógica matemática e números reais. Santos e Alvarenga (2014a, 2014b) realizaram uma investigação cujo escopo foi conhecer como esses tópicos matemáticos são apresentados em alguns livros de educação básica e em documentos curriculares estaduais brasileiros. As autoras observaram que eles não tratam adequadamente tais temas, isto é, não são estudados de forma interligada e, em muitas situações, as inequações são tratadas mecanicamente, como, aliás, indicam também pesquisas estrangeiras (por exemplo, Bazzini & Tsamir, 2001; Fernández & Delgadillo, 2015).

Com o pensamento matemático avançado, que perpassa os livros universitários, resolvemos analisar alguns, acreditando que o nível superior de estudo pudesse colaborar para melhorar o entendimento e a maneira de tratar tais tópicos. As categorias analisadas foram: A Obra; Números Reais; Funções; Limites; Derivadas; Integral; Lógica Matemática e Resolução de Inequações. Elas foram selecionadas por compreendermos que as definições de limite, continuidade, derivadas e integral estão fundamentadas em desigualdades e inequações e na ideia de aproximação. Da mesma forma, os números reais e as representações matemáticas que indicam ideias lógicas como: se e somente se; se... então, para todo, existe, são a base para tais entendimentos. Neste artigo, apresentamos cinco características: A obra, Números Reais; Funções, Lógica Matemática e Resolução de Inequações.

O foco desta investigação envolve algumas noções que devem ser concatenadas e aplicadas coerentemente, tais como: a interpretação do sinal de desigualdade, a ordenação dos números reais, o significado da variável, da incógnita e parâmetros, a compreensão do conjunto-solução, as propriedades algébricas dos reais, a fatoração, a radiciação, as relações de equivalência e implicações, as funções, as análises gráficas, dentre outros. Neste trabalho, consideramos as desigualdades como sendo uma expressão que engloba números e um sinal $<$; $>$; $\leq$ ou $\geq$, porém, uma inequação envolve uma ou mais variáveis, números e um desses sinais. Consideramos que uma inequação é uma desigualdade, mas nem toda desigualdade é uma inequação.

A obra

O livro está dividido em oito capítulos e não difere muito dos encontrados à venda (Números Reais, Funções, Limite e Continuidade, Derivada, Aplicações da Derivada, Introdução à Integração, Métodos de Integração e Aplicações da Integral Definida). Ele possui exercícios resolvidos, denominados exemplos, e propostos, cujas resoluções se assemelham as dos resolvidos. Consideramos o livro como técnico e se assenta no ensino e na aprendizagem tradicional, seguindo a tríade: definição, exemplos e exercícios.

As autoras possuem formação na área de Matemática Aplicada. Diva Marília Flemming é graduada em Matemática, mestre em Matemática Aplicada e doutora em Engenharia de Produção. Mirian Buss Gonçalves se graduou em Licenciatura em Matemática, fez mestrado em Matemática e Computação Científica e doutorou-se em Engenharia de Produção. Ambas têm experiência na área de Educação Matemática, com ênfase na utilização de novas tecnologias no ensino de Cálculo. Pelo perfil interdisciplinar das autoras e por sua afinidade com a Educação Matemática, esperávamos que elas apresentassem uma abordagem metodológica de ensino e de aprendizagem mais sintonizada com esse aspecto, com foco em modelagem, um diálogo com outras ciências e com os diversos fundamentos epistemológicos de Cálculo Diferencial e Integral.

A primeira edição é de 1987 e é intitulada *Cálculo A*. Trata-se de uma obra de referência nos cursos brasileiros de Cálculo Diferencial e Integral. Na última edição (figura1), traz aplicações de funções em diversas áreas, especialmente a de economia, a inclusão do conteúdo de integrais impróprias, e novas abordagens para conteúdos que contemplam o advento do uso de novas tecnologias. Para complementar, foram incluídos exercícios para serem resolvidos com recursos computacionais. Ela foi escrita para ser usada como livro texto de Cálculo tanto nos cursos de matemática, física, química e engenharias, quanto nos das áreas socioeconômicas e biológicas.

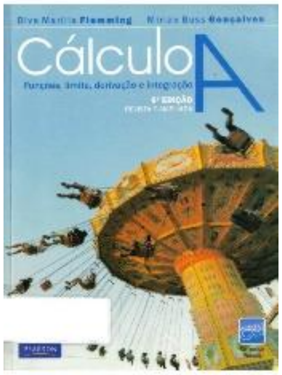

Figura 1. Capa do livro, 6ª edição

Fonte: http://www.bibliotecadaengenharia.com/2015/04/calculo-a-diva-flemming-6-edicao.html

Números Reais

Os números reais formam a base das resoluções e interpretações das inequações, sejam elas simples ou mais complexas. Suas propriedades balizam as resoluções. No capítulo 1, a obra trata deles como: *"*Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta o conjunto dos números reais, que denotamos por: $\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{Q}'$*".* (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 02). Em seguida, fala sobre as operações que são realizadas em tal conjunto:

1. Se $a, b \in R$, existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma e existe um e somente um número real, denotado por ab (ou a x b, ou $a.b$) chamado produto.

2. Comutativa: Se $a, b \in R$ então $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$;

3. Associatividade: Se $a, b\ e\ c \in R$ então $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a.(b.c) = (a.b).c$;
4. Distributividade: Se $a, b\ e\ c \in R$ então $a.(b + c) = ab + ac$;
5. Elemento Neutro: existem 0 e 1 $\in R$ tais que $a + 0 = a\ e\ a.1 = a$;
6. Simétricos: todo $a \in R$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$;
7. Inverso: todo $a \in R$, $a \neq 0$ tem um inverso, denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a.\frac{1}{a} = 1$;

8. Subtração: Se $a, b\ e\ c \in R$, a diferença entre $a\ e\ b$, denotada por $a - b$, é definida por $a - b = a + (-b)$;
9. Divisão: Se $a, b\ e\ c \in R\ b \neq 0$, o quociente de $a\ e\ b$ é definido por $1 = a.\frac{1}{a}$. (Flemming & Gonçalves, 2006, pp. 02 e 03).

Ainda neste capítulo, há um tópico sobre módulo de um número real, do qual apresenta sete propriedades, todas demonstradas.

Propriedades:
(i) $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.
(ii) $|x| > a \leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$, onde $a > 0$.
(iii) Se a, b, $\in R$, então $|a.b| = |a|.|b|$.
(iv) Se a, b, $\in R$ e $\mathrm{b} \neq 0$, então $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
(v) (Desigualdade Triangular) Se a, b, $\in R$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.
(vi) Se a, b, $\in R$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$.
(vii) Se a, b, $\in R$, então $|a| - |b| \leq |a - b|$. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 05).

Foram propostos no texto três exercícios resolvidos, e para suas resoluções, foram usadas propriedades do valor absoluto. Um dos exemplos é o número 3, exposto a seguir.
3. Encontre os números reais que satisfaçam as seguintes desigualdades: (i) $|7\mathrm{x} - 2| < 4$.
Solução: aplicando a propriedade (i) de valor absoluto, temos:

$$-4 < 7x - 2 < 4$$
$$-4 + 2 < 7x - 2 + 2 < 4 + 2$$

[...]

Portanto, $\mathrm{x} \in (-\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$. (Flemming & Goncalves, 2006, p. 12).

Por um lado, as autoras não fazem referência às equivalências entre as inequações, o que supomos ser essencial nesse contexto; por outro, apresentam as propriedades dos números reais de forma direta e, mais à frente, as utilizam em alguns exercícios resolvidos. Em geral, tais propriedades são essenciais para as manipulações algébricas e são aplicadas de forma mecânica, desvinculadas de sua gênese e de sua essencialidade.

Funções

A obra apresenta diversos tipos de funções, com ou sem seus respectivos gráficos, mas não faz uso de ideias de inequações (desigualdades, segundo as autoras). Sob o ponto de vista de interpretação da relação de ordem (por exemplo, $f(x) \leq f(a)$), as inequações são abarcadas no capítulo Aplicações da Derivada. De forma geral, as inequações podem ser retomadas no estudo das funções, desde encontrar o domínio, por meio de restrições, até a análise da variação de seus sinais, recorrendo aos esboços e análises gráficas ou a manipulações algébricas, mas isso não é apresentado nesse livro.

Lógica Matemática

Na página 2, temos algumas propriedades de relação de ordem (desigualdades, segundo as autoras) e a demonstração de uma delas. Aqui apresentamos a da propriedade (ii), em um contexto, por meio de implicações e conectivos lógicos (*Se... então*...):

Propriedade ii). (Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$).

Se $a > b \overset{def}{\Longrightarrow} (a - b) > 0$. Usando iii) do Axioma de Ordem, temos $(a - b).c > 0$ ou $(ac - bc) > 0$ e finalmente, pela definição, $ac > bc$. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 5).

No restante da publicação, tanto a lógica matemática aparece em alguns enunciados de questões, exemplos, teoremas e definições, quanto os quantificadores existenciais, universais e os conectivos lógicos ("*e*" e o "*ou*", na maioria das vezes, na forma da língua materna).

O livro não apresenta um item específico para comentários a respeito de conceitos relacionados à lógica, o que nos leva a interpretar que as autoras consideram que os estudantes já estejam familiarizados com essa linguagem. É possível notar implicitamente sua presença, isto é, sem expor a terminologia L*ógica Matemática*, mas não há um tratamento específico, como é feito no capítulo inicial, dedicado aos Números Reais. Apesar de aparecer nessas propriedades e respectivas demonstrações, bem como no enunciado de alguns exercícios, esses conteúdos matemáticos, referentes à relação de implicação ou equivalência, infelizmente não estão presentes ao tratarem das inequações.

Resolução de Inequações

Consideramos que resolver uma inequação significa encontrar a forma mais simples de seu conjunto solução. O que envolve o emprego das propriedades do corpo ordenado dos números reais e a análise de equivalências entre as expressões encontradas, como fruto da aplicação de tais propriedades, isto é, abarca o emprego interligado dos conceitos de números reais e de lógica matemática.

A resolução de inequações aparece com mais frequência nos primeiros capítulos, como mostram os exemplos ii) e iii) que seguem. Notamos que não aparecem os sinais de equivalência em nenhum deles, o que aparenta pouco cuidado em relação às transformações que vão ocorrendo ao longo da resolução. Também não foi percebido a explicitação das propriedades dos números reais, exceto no contexto de módulo.

No segundo tópico, do capítulo de Números Reais, intitulado *"Desigualdades"*, as autoras definem o que é um número real maior ou menor que outro usando o Axioma de Ordem:

No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado de números positivos, tal que: (i) se $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; $\mathbf{a}$ é positivo: $-\mathbf{a}$ é positivo; (ii) a soma de dois números positivos é positiva; (iii) o produto de dois números positivos é positivo. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 03).

Como aplicação do Axioma de Ordem as autoras enumeram várias propriedades que norteiam o estudo das expressões envolvendo os símbolos de maior que (>), ou menor que (<), demonstrando duas delas:

Sejam $\boldsymbol{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \boldsymbol{R}$.

(i) Se $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$, então $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{c}$.

(ii) Se $a > b$ e $\mathrm{c} > 0$, então $ac > b\mathrm{c}$.

(iii) Se $a > b$ e $\mathrm{c} > 0$, então $ac < b\mathrm{c}$.

(iv) Se $a > b$, então $a + c > b + c$ para todo real c.

(v) Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

(vi) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 04)

Com relação a essas propriedades, expomos um dos três exemplos que elas explanam o item (ii). Em sua resolução, não observamos a análise de equivalências, isto é, a lógica matemática, e nem a aplicação das propriedades dos números reais:

(ii) $7 < 5x + 3 \leq 9$

$7 - 3 < 5x + 3 - 3 \leq 9 - 3$

$4 < 5x \leq 6$

$\frac{4}{5} < x \leq \frac{6}{5}$

Portanto, $\left\{x \middle| \frac{4}{5} < x \leq 6/5\right\} = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}]$ é a solução, e graficamente (...).

(Flemming & Gonçalves, 2006, p. 10)

Segue mais um exemplo contendo a resolução de inequações, envolvendo módulo:

iii) $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4, x \neq -2.$

$|3-2x| \leq 4|2+x|$

$9-12x+4x^2 \leq 16(4+4x+x^2)$

$9-12x+4x^2 \leq 64+64x+16x^2$

$-12x^2-76x-55 \leq 0$

[...] (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 13).

Encontrando as raízes da equação

$$-12x^2-76x-55=0$$

temos a decomposição em fatores lineares para a inequação posta:

$$(x+\frac{5}{6})(x+\frac{11}{2}) \leq 0$$

Assim, podemos analisar as variações de sinais de acordo com as possibilidades de uma multiplicação, de dois fatores, ao final ser não positiva, isto é, neste caso:

$(x+\frac{5}{6}) \leq 0$ e $(x+\frac{11}{2}) \geq 0$ ou e $(x+\frac{5}{6}) \geq 0$ e $(x+\frac{11}{2}) \leq 0.$

Logo, temos como conjunto-solução: $\{x \epsilon R| -\frac{11}{2} \leq x \leq -\frac{5}{6}\}.$

Nesse exemplo observamos, na terceira linha, que ambos os termos foram elevados ao quadrado, o que pode ser feito, pois os dois lados são positivos, isso nos garante a equivalência entre as inequações. Caso não fossem ambos positivos, teríamos que impor restrições as quais devem ser levadas em consideração para encontrar o conjunto-solução. Assim, por causa dessa caracterização e por envolver a necessidade da combinação, na verdade a multiplicação de sinais, nós o selecionamos para ser apresentado.

Reflexões finais

Segundo Alvarenga (2012), uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem desses tópicos proporciona uma oportunidade para observar como os autores compreendem e trabalham com o conceito e as resoluções de inequações. Consequentemente, podemos, por meio dessas observações, propor um enfoque metodológico de ensino que vise maximizar a aprendizagem não somente de inequações, mas também dos conteúdos inter-relacionados.

Vale ressaltar que a obra evoluiu, da primeira edição para a sexta, em termos metodológicos, indicando *softwares* para o ensino e a aprendizagem, enfatizando a interdisciplinaridade do Cálculo com outras áreas de formação, além da matemática, como as diversas engenharias e até mesmo na área biológica. Porém, no capítulo que trata de inequações (desigualdades, segundo as autoras) nada foi alterado desde a primeira edição.

Nesse sentido, o livro é tradicional. Mesmo destacando esse tema, não o abarca com o conjunto total de conceitos e ferramentas matemáticas específicas e necessárias para a total compreensão de inequações. Concluímos que essa publicação, por ser endereçada ao ensino superior e apresentar um item específico para esse conteúdo matemático, trata o tema de forma superficial e não inter-relaciona os conteúdos. Assim, as autoras perdem a oportunidade de fornecer aos leitores maior desenvolvimento procedimental e interdisciplinar dentro da própria matemática.

Referências bibliográficas

Alvarenga, K. B. (2012). O Ensino e Aprendizagem Concatenado de Inequações, o corpo dos reais e lógica matemática: um panorama*. Anais do VI EDUCON*. São Cristóvão: Sergipe.

Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo*. Lisboa, Portugal: Edições 70.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2001) Connections between theory and research findings: the case of inequalities. Em *Anais of CERME 3*. European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italia. Acessado em: 05 de abril de 2010, em: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_bazzini_cerme3.pdf

Fernández, S. L., & Delgadillo, E. M. (2015). Las Inecuaciones: Una Mirada Desde El Espacio De Trabajo Matemático. Em R. Flores, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México.

Flemming, D. M., & Gonçalves, M. B. (2006). *Cálculo A- Funções, Limite, Derivação, Integração.* Vol. 1. 6ª edição. São Paulo: Makron.

Silva, T.T. P., & Otero-Garcia, S. C. (2011). A Hermenêutica de Profundidade e suas Possibilidades Para a Educação Matemática. Em *Anais do V SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, Petrópolis, Rio de Janeiro.

Santos, M. L., & Alvarenga, K. B. (2014a) Minas Gerais e Paraná: Uma Reflexão Curricular Sobre a Abordagem Matemática. Em *III Seminário Nacional de Alfabetização e Letramento.* Itabaiana. CD do III SENAL. Universidade Federal de Sergipe, Aracaju: SE.

Santos, M. L., & Alvarenga, K. B. (2014b). Uma Análise de Livros Didáticos: alguns conteúdos matemáticos. Em *Anais do VIII EDUCON*. Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, SE.

Silva, T. T. P., & Garnica, A. V. M. A. (2011). Hermenêutica da Profundidade: possibilidades metodológicas. Em *Anais EBRAPEM* – Vol. 1, n. 1, UEPB, Campina Grande, PB. Acessado em: 05 de abril de 2015, em:

http://www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/7c830ed9bbcd49dfe212893134e7bee2(1).pdf

Thompson, J. B. (1995). *Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.* Petrópolis: Vozes.

Oliveira, F. D. (2008). *Análise de Textos Didáticos: Três Estudos*. Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro SP.