A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES: ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES EMERGENTES

Ana Barbosa

LIBEC/CIFPEC, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

anabarbosa@ese.ipvc.pt

Isabel Vale

LIBEC/CIFPEC, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Pedro Palhares

LIBEC/CIFPEC, Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho

palhares@iec.uminho.pt

Resumo. *Este documento descreve um estudo ainda em curso centrado na resolução de problemas que envolvem a exploração de padrões. Pretende-se avaliar a forma como as estratégias visuais podem ser usadas para enriquecer as experiências de generalização dos alunos. O principal objectivo é a análise das estratégias e dificuldades apresentadas por alunos do 6º ano de escolaridade na resolução deste tipo de tarefas e perceber o papel da visualização no seu raciocínio.*

Abstract. *This paper gives a description of an ongoing study focused on pattern exploration tasks. It evaluates the ways in which visual strategies can be used to enrich learners' experience of generalization. The main purpose is to analyze strategies and difficulties presented by grade 6 students when solving these activities and to ascertain the role played by visualization in their reasoning.*

Introdução

Desde os anos oitenta que a resolução de problemas tem vindo a assumir um papel fundamental na matemática escolar. Mas, apesar da crescente valorização desta competência, os resultados apresentados pelos alunos portugueses em diversos estudos de comparação internacionais (SIAEP, 3.º TIMSS, PISA) não são animadores (Amaro, Cardoso e Reis, 1994; Ramalho, 1994; GAVE, 2004). Este insucesso poderá estar relacionado com a sobrevalorização do domínio de procedimentos e algoritmos e uma experiência reduzida com problemas não rotineiros. As tarefas que têm subjacente a exploração de padrões poderão contribuir de forma significativa para o desenvolvimento de capacidades próprias da resolução de problemas, já que implicam a análise de casos particulares, a organização de informação de forma sistemática, o estabelecimento de conjecturas e a generalização de resultados. É também de referir que o trabalho com padrões poderá contribuir para uma aprendizagem mais significativa da Matemática, implicando um maior envolvimento dos alunos e consequentemente uma melhoria das suas capacidades e competências (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006).

Simultaneamente, tem havido nos últimos anos uma tendência de revalorização da Geometria no currículo de Matemática, tendo por foco o desenvolvimento de capacidades relacionadas com a visualização espacial, o raciocínio e a argumentação. A visualização em particular é considerada uma componente importante do pensamento matemático mas nem sempre tem tido um papel de destaque nas experiências proporcionadas aos alunos (Presmeg, 2006). Segundo Vale e Pimentel (2005), no nosso ensino é dada especial importância aos aspectos numéricos e algébricos remetendo alguns alunos, possuidores de maiores capacidades no domínio visual, para situações de insucesso escolar, e impedindo outros, com menores capacidades nesta área, de se desenvolverem de forma equilibrada. Apesar do reconhecimento da relevância da visualização, a investigação acerca do papel das imagens mentais na aprendizagem de conceitos matemáticos e na resolução de problemas é ainda insuficiente.

Problema e questões do estudo

Este estudo tem como principal foco a caracterização do raciocínio apresentado por alunos do 6º ano de escolaridade na resolução de problemas que envolvem a procura de padrões. Como o ensino formal da álgebra apenas se inicia no 3º ciclo, torna-se fundamental estudar a natureza das estratégias de resolução utilizadas por alunos do 2º ciclo em tarefas de *generalização próxima* e *distante*. Com o intuito de reflectir sobre esta problemática foram enunciadas algumas questões orientadoras:

- Que estratégias de resolução apresentam alunos do 6º ano de escolaridade quando resolvem problemas que envolvem a descoberta de padrões?

- Que dificuldades/erros emergem do seu trabalho?

- Qual o papel da visualização como elemento mediador do raciocínio dos alunos?

Enquadramento teórico

Os padrões no ensino e aprendizagem da matemática

Vários matemáticos partilham uma visão entusiástica acerca do papel desempenhado pelos padrões na matemática, alguns inclusivamente a designam de ciência dos padrões (Steen, 1990). Muitos partilham a ideia de que a generalização de padrões é uma característica fundamental da matemática. Na opinião de Mason (2005) generalizar deveria ser uma parte natural e espontânea da actividade matemática e defende que sem generealização não existe pensamento matemático. Nesta perspectiva, a ênfase na identificação de regularidades é cada vez mais frequente nas recentes abordagens ao estudo da álgebra, tendo em consideração que a procura de padrões constitui um passo fundamental para o estabelecimento de generalizações (Orton e Orton, 1999; Ponte, 2005; Zazkis e Liljedahl, 2002). As orientações curriculares nacionais para o ensino básico sublinham a importância do desenvolvimento de competências como a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos e geométricos, bem como explorar situações problemáticas procurando regularidades, fazendo e testando conjecturas e formulando generalizações (DEB, 2001). Por sua vez, os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) referem que os padrões constituem a base do pensamento algébrico e que a sua exploração envolve os alunos na identificação de relações e no estabelecimento de generalizações, propondo como objectivo para todos os níveis de ensino o conhecimento de padrões, funções e relações.

Natureza do pensamento matemático

Gardner (1993) refere que certas pessoas reconhecem regularidades espacialmente ou visualmente, enquanto outras o fazem analiticamente. Nesta perspectiva tem surgido o interesse em analisar a natureza do pensamento dos alunos, tentando identificar se apresentam tendência para raciocinar visualmente ou analiticamente. Krutetskii (1976) debruçou-se sobre este problema e efectuou um estudo com uma amostra de alunos com bom desempenho em Matemática. Tendo como foco a análise do raciocínio evidenciado por esses alunos na resolução de problemas, identificou três categorias: analítico (não visual), geométrico (visual) e harmónico (capacidade de utilizar em simultâneo representações visuais e não visuais). Embora se reconheça a possibilidade de utilização de abordagens de natureza diversa na resolução de um mesmo problema, a maioria dos alunos baseia os seus raciocínios em relações numéricas, em parte devido ao tipo de trabalho desenvolvido nas aulas de Matemática. Mas apesar da manifesta preferência pela utilização de métodos analíticos, alguns estudos sobre este tema indicam que surgem melhores resultados quando os alunos conjugam o pensamento analítico e o geométrico (Stacey, 1989; Becker e Rivera, 2005).

Apesar de muitos autores reconhecerem a relevância do papel da visualização na resolução de problemas (Presmeg, 2006; Shama & Dreyfus, 1994), outros referem que o pensamento visual por si só não é suficiente para se fazer matemática, constituindo apenas um complemento ao pensamento analítico (Goldenberg, 1996; Tall, 1991). Segundo Presmeg (2006) tanto os professores como o próprio currículo tendem a apresentar abordagens visuais à resolução de problemas apenas numa fase inicial ou então como um complemento à abordagem analítica, atribuindo um papel bastante redutor a este tipo de raciocínio. Torna-se então pertinente reavaliar a função da visualização na matemática escolar.

Processos de pensamento envolvidos na generalização de padrões

Stacey (1989) focou a sua investigação na generalização de padrões lineares pictóricos, com alunos de 9-13 anos, e categorizou as abordagens por eles utilizadas. Verificou que aplicaram as seguintes estratégias: *contagem*, *diferença*, *whole-object* e *linear*. Na *contagem*, os alunos totalizavam o número de elementos de um desenho. A estratégia da *diferença* envolvia a utilização de um múltiplo da diferença entre termos consecutivos. Os alunos que aplicaram a estratégia *whole-object* consideravam múltiplos de um dado termo da sequência para determinar elementos de ordem superior, assumindo implicitamente que o problema representaria uma situação de proporcionalidade directa. A estratégia *linear* envolvia a descoberta de um modelo do tipo $an+b$. Stacey (1989) concluiu que um número significativo de alunos usou erradamente na sua abordagem o método da proporcionalidade directa. Notou ainda algumas inconsistências nas estratégias utilizadas em actividades de *generalização próxima* (para determinar o termo da sequência pedido é possível utilizar um desenho ou o método recursivo) e nas de *generalização distante* (os métodos descritos anteriormente não se adequam à resolução deste tipo de questões sendo necessário descobrir uma expressão geral).

García Cruz e Martinón (1997) desenvolveram um estudo com alunos de 15-16 anos que pretendia analisar a natureza das estratégias por eles usadas e a forma como validavam os seus resultados. Mostraram que o desenho que acompanhava as questões desempenhava um papel duplo no processo de generalização. Por um lado servia de contexto aos alunos que usavam estratégias visuais para estabelecer a generalização e como forma de verificar a validade da utilização de uma dada estratégia numérica.

Orton e Orton (1999) focaram a sua investigação na resolução de tarefas com padrões lineares e quadráticos, com alunos de 10-13 anos. Sublinharam a preferência pela utilização da diferença entre termos consecutivos, como estratégia de generalização para problemas com padrões lineares, e a sua aplicação a padrões quadráticos. Apontaram como principais obstáculos à generalização a incompetência aritmética dos alunos, a utilização do método recursivo e o recurso a métodos inapropriados como a proporcionalidade directa.

Num estudo mais recente, Becker e Rivera (2005) analisaram as estratégias utilizadas por alunos do 9º ano na generalização de padrões lineares. Notaram uma preferência pela utilização de estratégias numéricas e identificaram três tipos de generalização: *numérica*, *figurativa* e *pragmática*. Os alunos que utilizaram a generalização *numérica* aplicaram normalmente a tentativa e erro e não demonstraram ter conhecimento do significado dos coeficientes no padrão linear. Os *generalizadores figurativos* focaram a sua atenção nas relações entre os números da sequência e mostraram-se capazes de analisar as variáveis dentro do contexto de uma relação funcional. Aqueles que recorreram a uma generalização *pragmática* empregaram os dois tipos de estratégias e viram nas sequências de números, simultaneamente, propriedades e relações. Estes investigadores verificaram ainda que os alunos que falharam no processo de generalização tinham tendência para utilizar estratégias numéricas e que os *generalizadores figurativos* tinham também a capacidade de se tornarem *pragmáticos*.

Metodologia

Atendendo às características do problema em estudo e das questões que o orientam adoptou-se uma metodologia mista, predominantemente qualitativa e interpretativa (Creswell, 2003). Embora se tenha procedido à recolha de dados essencialmente descritivos houve também etapas em que se recolheram dados de natureza quantitativa, resultantes da aplicação de pré e pós testes.

Neste estudo participaram três turmas do 6º ano de escolaridade, de três escolas diferentes, tendo sido estudados dois casos em cada escola.

A recolha de dados desenvolveu-se em três fases, ao longo do ano lectivo 2006/2007.

A primeira correspondeu à aplicação de um teste com questões de natureza pré-algébrica e foi construído com a finalidade de avaliar o desempenho dos alunos em tarefas de exploração de padrões e generalização, bem como analisar as estratégias de resolução utilizadas.

Na segunda fase do estudo foram implementadas sete tarefas que envolviam problemas de *generalização próxima* e *distante,* com padrões de tipo linear e não linear.

Cada uma das tarefas poderia conduzir à utilização de diferentes estratégias, permitindo a descoberta de padrões em contextos visuais ou não visuais. Os alunos trabalharam em díades heterogéneas, sendo acompanhados de forma mais regular dois pares de alunos, de cada escola, ao longo das várias sessões e através da realização de entrevistas de tipo clínico. Mas, uma vez inseridos num contexto específico que é a turma, tornou-se também relevante estudar a evolução dos restantes alunos, através da observação das sessões e dos documentos produzidos.

Finalmente, na terceira fase, foi repetido o teste de forma a estabelecer uma comparação destes resultados com os da primeira aplicação.

Análise dos dados

A análise de dados foi dividida em duas fases. A primeira ocorreu durante a recolha de dados e envolveu uma análise prévia de forma a organizar e interpretar os elementos recolhidos. Concluído o trabalho de campo iniciou-se a segunda fase de análise, ainda em curso, que visa dar resposta às questões em estudo. Neste documento apresentamos alguns resultados, relativos a um dos casos estudados e à turma em que se integra, tendo por base uma das tarefas implementadas.

Os relatórios produzidos pelos alunos, na resolução de cada uma das tarefas, bem como as entrevistas efectuadas, permitiram identificar uma diversidade de estratégias e algumas dificuldades que já tinham surgido na primeira aplicação do teste. Atendendo à variedade de respostas obtidas houve necessidade de adaptar a categorização de Stacey (1989) e criar subcategorias de forma a caracterizar mais pormenorizadamente o raciocínio dos alunos. Esta primeira análise sugeriu que as estratégias se poderiam classificar em quatro grandes grupos: *Contagem*, '*Whole-object*', *Recursiva* e *Linear*. Consideramos pertinente a subdivisão de algumas destas categorias de acordo com a estrutura de raciocínio apresentada.

Análise da tarefa *"Os lembretes da Joana"*

A tarefa "*Os lembretes da Joana*" (Anexo 1) tem um carácter transversal e envolve a generalização de um padrão linear crescente.

A maioria das tarefas propostas neste estudo tem uma forte componente visual. Os problemas que implicam uma *generalização próxima* (alíneas 1.1 e 1.4.1) podem ser facilmente resolvidos através da representação do termo pedido, por meio de um desenho, e contando directamente os seus elementos, usando como estratégia a *contagem* (C) (Stacey, 1989).

A estratégia '*whole-object*' (Stacey, 1989) também surgiu no trabalho de alguns pares. Este tipo de abordagem está associado a situações de proporcionalidade directa o que não é o caso deste problema. Para que esta estratégia fosse correctamente aplicada, os alunos teriam de efectuar um ajuste com base no contexto do problema. Identificamos duas abordagens distintas, no âmbito da aplicação desta estratégia, que conduziram a respostas incorrectas: (W_1) utilização de múltiplos de um termo da sequência; (W_2) utilização de múltiplos de diferentes termos da sequência adicionando-os no final.

Este tipo de tarefas pode promover a utilização de um raciocínio recursivo, especialmente quando se trata de uma *generalização próxima*. Alguns alunos recorreram à diferença entre termos consecutivos para resolver determinadas questões. Analisando o seu trabalho, distinguimos duas situações associadas à aplicação desta estratégia: (R_1) extensão da sequência, usando a diferença entre termos consecutivos, até ao termo pretendido; (R_2) utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos (para que este raciocínio estivesse correcto seria necessário proceder a um ajuste com base no contexto do problema).

A estratégia *linear* (Stacey, 1989) está relacionada com a utilização de expressões do tipo $an+b$ ($b \neq 0$). Nesta tarefa identificamos quatro categorias associadas a este tipo de raciocínio: (L_1) identificação de uma regra explícita que relaciona a ordem de um determinado termo da sequência com o número de elementos que possui (os alunos que utilizaram esta estratégia foram capazes de reconhecer visualmente a estrutura do padrão e estabelecer uma generalização); (L_2) utilização de múltiplos de um determinado termo da sequência, fazendo um ajuste com base no contexto do problema; (L_3) utilização de múltiplos de um determinado termo da sequência, fazendo um ajuste baseado em relações numéricas (como este ajuste está descontextualizado conduz a respostas incorrectas); (L_4) utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, fazendo um ajuste com base no contexto do problema.

Exploração da tarefa: o caso da Carina e da Catarina

Estas alunas começaram por fazer a representação pictórica de um conjunto de seis lembretes mas, em simultâneo, apresentaram o cálculo do número de *pioneses* através de um raciocínio recursivo (R_1). Isto é um indicador de que normalmente estes alunos validam o seu raciocínio por intermédio de cálculos, não reconhecendo essa função ao desenho:

Investigadora: Como é que descobriram que eram necessários dezanove *pioneses*?

Carina: Fazendo um desenho!

Investigadora: E que cálculos são estes aqui ao lado da figura?

Catarina: São os *pioneses* que precisávamos para os 6 cartazes.

Investigadora: Então e como explicam esse cálculo…3+3+3+3+3+3+1?

Catarina: Estes seis 3… E depois mais um que ficava descoberto.

Carina: No último!

Investigadora: E com o desenho não conseguiam chegar à mesma conclusão?

Catarina e Carina: Sim!

Carina: Mas pensamos que se podia saber melhor assim!

Esta abordagem repetiu-se na resolução da questão 1.4.1, na qual as alunas recorreram novamente às estratégias *contagem* e *recursiva* (R_1).

Na exploração da questão 1.2, sentiram que o desenho não seria uma estratégia útil, já que lhes tomaria muito tempo. Optaram pela utilização de uma estratégia *linear* (L_1), tendo por base a distribuição dos *pioneses* pelos lembretes. Concluíram que existiam 3 *pioneses* em cada lembrete exceptuando o último que tinha mais um, conseguindo desta forma estabelecer facilmente uma *generalização distante*:

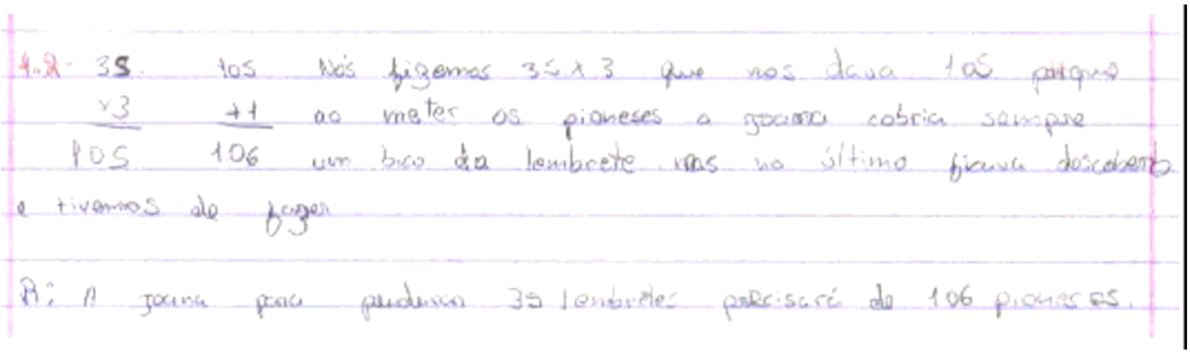

1.2 35 105 Nós fizemos 35 x 3 que nos dava 105 porque
x3 +1 ao meter os pioneses a gomma cobria sempre
105 106 um bico da lembrete mas no último ficava descoberto
e tivemos de fazer
R: A turma para produzir 35 lembretes precisará de 106 pioneses.

Figura 1 – Resolução da questão 1.2 de Carina e Catarina

A situação proposta na alínea 1.4.2 é idêntica a esta. Trata-se de uma questão de *generalização distante* onde apenas se altera a disposição dos *pioneses* que se encontram distribuídos por lembretes triangulares. À semelhança do que tinha sucedido com as questões apresentadas anteriormente, as alunas mostraram coerência nos métodos de resolução utilizados em questões da mesma natureza, aplicando novamente, neste caso, uma estratégia *linear* (L_1).

Na resolução das questões 1.3 e 1.4.3 este grupo usou uma estratégia *linear* baseada na utilização da diferença entre termos consecutivos (L_4). No caso dos lembretes rectangulares (1.3) consideraram que os 600 *pioneses* seriam distribuídos em grupos de 3 (diferença entre dois termos consecutivos da sequência), sendo que 1 seria gasto no último lembrete. Para os lembretes triangulares o raciocínio foi semelhante tendo apenas procedido à adaptação da diferença entre termos consecutivos. Tal como já tinha sucedido em alíneas analisadas previamente, o reconhecimento da distribuição dos *pioneses* pelos lembretes foi crucial na resolução destes problemas.

Depois de analisarmos o trabalho desenvolvido por estas alunas constatamos que não utilizam as mesmas estratégias em questões de *generalização próxima* e *distante*. Há uma mudança de abordagem quando se altera a natureza da generalização. Não obstante, é possível afirmar que essa consistência está presente quando as questões são do mesmo tipo. É de salientar a importância atribuída pelas alunas à apresentação de cálculos que, na sua opinião, constituem o método de validação de uma resposta. Apesar da relevância atribuída ao contexto numérico é indubitável o papel fundamental da visualização em quase todas as suas estratégias: no caso da *contagem*, a acção é executada sobre a figura; na estratégia *linear* apresentam os cálculos com base na observação da estrutura da sequência.

Exploração da tarefa: a turma

A tabela 1 sintetiza o número de respostas identificadas na turma em cada uma das categorias descritas. Em alguns casos não nos foi possível classificá-las, surgindo assim uma última coluna com as respostas não categorizadas (NC).

	C	W_1	W_2	*W*	R_1	R_2	*R*	L_1	L_2	L_3	L_4	*L*	*NC*
1.1	6	2	-	2	1	-	1	-	-	-	-	-	1
1.2	-	-	1	1	1	-	1	6	1	1	-	8	1
1.3	-	1	-	1	-	1	1	6	-	-	2	8	-
1.4.1	8	1	-	1	-	1	1	-	-	-	-	-	-
1.4.2	1	-	-	-	1	1	3	6	1	-	-	7	-
1.4.3	-	-	-	-	-	1	1	6	-	-	2	8	1

Tabela 1 – Estratégias identificadas na resolução da Tarefa.

É possível verificar que nas questões de *generalização próxima* (1.1 e 1.4.1) os alunos recorrem às estratégias de *contagem*, '*whole-object*' e *recursiva*, mas aquela que predomina é a contagem directa do número de *pioneses*, tendo por base a sua representação pictórica. Nas questões de *generalização distante* (1.2, 1.3, 1.4.2 e 1.4.3) há indícios da utilização dos quatro tipos de estratégias embora a *contagem* seja quase inexistente. Neste caso, a maioria opta pela aplicação de um método *linear*. Pudemos verificar que alguns grupos tentaram resolver a questão 1.2 por intermédio de um desenho mas desistiram quase de imediato apercebendo-se da desadequação da estratégia neste caso.

Nesta tarefa havia questões da mesma natureza que apenas diferiam no contexto em que eram apresentadas. Os lembretes passavam de rectangulares a triangulares implicando alterações na distribuição dos *pioneses*. Analisando as respostas dadas a estas questões foi possível verificar que a maioria dos grupos manteve as estratégias de resolução utilizadas.

Convém salientar que a utilização de algumas das estratégias referidas conduziu a respostas erradas. Destaca-se o recurso indevido do método da proporcionalidade directa e a utilização não inteiramente adequada do modelo linear. Da análise do trabalho desenvolvido pelos alunos, é nossa convicção que a não atribuição de significado aos números utilizados, dentro do contexto do problema, poderá ter estado na origem destes erros.

Considerações finais

Neste estudo recorremos a tarefas que envolvem a exploração de padrões para analisar as dificuldades que os alunos apresentam na sua resolução, bem como o tipo de estratégias que emergem do seu trabalho e qual o impacto da utilização de estratégias visuais no processo de generalização.

Podemos tecer algumas considerações relativamente às questões que orientam o estudo: (a) foram identificadas diversas estratégias no trabalho desenvolvido pelos alunos, embora umas mais frequentes do que outras, como a *contagem* (nas questões de *generalização próxima*) e a *linear* (nas questões de *generalização distante*); (b) alguns alunos privilegiaram o contexto numérico usando estratégias desadequadas (aplicação da proporcionalidade directa e utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, sem efectuar qualquer ajuste no final; troca das variáveis envolvidas no problema); (c) provou-se a utilidade da visualização em diferentes situações como a representação pictórica de termos da sequência e consequente *contagem* dos seus elementos, nas questões de generalização próxima, e "ver" a estrutura do padrão de forma a descobrir um modelo linear para resolver questões de generalização distante.

Consideramos fundamental a integração de tarefas na sala de aula que sensibilizem os alunos para o potencial das estratégias visuais e para o estabelecimento de relações entre os contextos numérico e visual para que consigam mais facilmente compreender o significado das variáveis.

Referências

Amaro. G., Cardoso, F., Reis, P. (1994). *Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências, Relatório Internacional, Desempenho de alunos em Matemática e Ciências: 7.º e 8.º anos*. Lisboa: IIE.

Becker, J., Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 121-128). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Creswell, J. (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Approaches*. Newbury Park, CA: Sage

Departamento do Ensino Básico. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

García Cruz, J. A. & Martinón, A. (1997). Actions and Invariant Schemata in Linear Generalizing Problems. In E. Pehkonen (Ed) *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 289-296. University of Helsinki.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice.* New York: Basic Books.

GAVE (2004). *Resultados do estudo internacional PISA 2003*. Lisboa: Ministério da Educação.

Goldenberg, E. P. (1996). "Habits of Mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of Education,* 178(1), 13-34.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Mason, J., Graham, A., Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: Sage (Paul Chapman).

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* USA: NCTM.

Orton, A., Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In Orton, A. *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* London: Cassel.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In: A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205–235). Dordrecht: Sense Publishers.

Ramalho, G. (1994). *As nossas crianças e a Matemática. Caracterização da participação dos alunos portugueses no "Second International Assessment of Educational Progress".* Lisboa: DEPGEF.

Shama, G., Dreyfus, T. (1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming poblems. *Educational Studies in Mathematics,* 26, pp. 45-70.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics* 20(2), pp. 147-164.

Steen, L. (1990). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*. Washington, DC: National Academy Press.

Tall, D. (1991). (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers: The Netherlands.

Vale, I, Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática,* n.º 85, pp.14-20.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-213). Lisboa: SPCE.

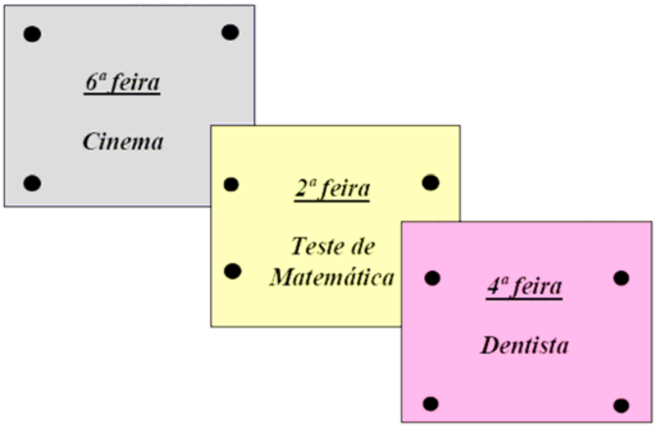
Zazkis, R, & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, 49, 379-402.

Anexo 1

“Os lembretes da Joana”

Em cada alínea desta tarefa deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para não se esquecer dos seus compromissos, a Joana pendura lembretes, no placar do quarto, colocando os *pioneses* como mostra a figura.



Se a Joana continuar a pendurar os cartões desta forma:

1.1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?

1.2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?

1.3. Sabendo que a Joana comprou uma caixa de 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?

1.4. A Joana decidiu utilizar papéis triangulares para registar os seus lembretes. Sabendo que em cada vértice de um triângulo utiliza um *pionés* e que dois triângulos consecutivos têm um *pionés* em comum, estuda as alíneas anteriores para este caso.